**Задача 1.** *Найти ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

*Решение:*

Напоминание: для вычисления ранга матрицы можно использовать элементарные преобразования как над строчками, так и над столбцами матрицы в силу того, что ранг матрицы совпадает с рангом транспонированной матрицы (строчный ранг матрицы равен столбцовому).

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами $i$ и $j$ (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером $i$ на ненулевое число $r$ (сокращённо $R_i \to rR_j$),
(c) Замена ряда с номером $i$ на него минус кратное ряда $j$ (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

От элементарных преобразований над строками ранг не меняется. Ввиду того, что ранг матрицы совпадает с рангом транспонированной матрицы (строчный ранг матрицы равен столбцовому), те же самые операции с тем же эффектом можно производить и над столбцами (тогда в обозначении производимой операции буква $R$ заменяется на букву $C$).

Цель заключается в приведении матрицы к трапециевидной форме. В трапециевидной форме ранг матрицы равен числу ненулевых строчек. Поскольку при элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется, то мы легко получаем ранг первоначальной матрицы.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3/2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_5}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

**Ответ:** ранг матрицы равен 3.

Решение выполнено автоматически.

Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.

Web-интерфейс Павла Лапина.