Старооскольский технологический институт
(филиал) Федерального государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технический университет МИСиС»

КАФЕДРА АиПЭ

Халапян С. Ю.

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
по выполнению домашних заданий
для студентов специальности
220301 – «Автоматизация технологических процессов и производств»
(очная, очно-заочная, заочная формы обучения)

Одобрено редакционно-издательским советом института

Старый Оскол
2009

УДК 681.5
ББК 73

Рецензент: к.т.н., директор ЗАО «Проектэлектромонтаж» Пожарский Ю.М.

Халапян С.Ю. Теория автоматического управления. Методические указания к выполнению домашних заданий. Старый Оскол. СТИ НИТУ МИСиС, 2009. – 52 с.

Методические указания по выполнению домашнего задания для студентов специальности 220301 – «Автоматизация технологических процессов и производств» очной, очно-заочной и заочной форм обучения.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория управления – научная дисциплина, предметом изучения которой являются информационные процессы, протекающие в системах автоматического управления (САУ). Теория управления выявляет общие закономерности функционирования, присущие САУ различной физической природы, и на основе этих закономерностей разрабатывает принципы построения высококачественных систем управления.

Поскольку в теории управления абстрагируются от физических и конструктивных особенностей систем и вместо реальных систем рассматривают их адекватные математические модели, основным методом исследования здесь является математическое моделирование. Методическую основу теории управления образуют теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление, гармонический анализ.

Вместе с теорией функционирования элементов САУ (датчиков, регуляторов, исполнительных механизмов) теория управления образует более широкую отрасль науки – автоматику, один из разделов технической кибернетики. Техническая кибернетика изучает сложные автоматизированные системы управления технологическими процессами и предприятиями, построенные с использованием управляющих вычислительных машин. В настоящее время теория управления играет важную роль в совершенствовании управления производством.

Современное промышленное производство характеризуется ростом масштабов и усложнением технологических процессов, применением интенсивных высокоскоростных режимов, повышением требований к качеству продукции, безопасности персонала. Экономичное, надежное и безопасное функционирование сложных объектов может быть обеспечено с помощью лишь самых совершенных принципов и технических средств управления.

Цель домашних заданий по дисциплине – закрепление теоретического материала и развитие навыков его практического использования.

Достижение поставленной цели связывается с решением *задач:*

- освоение приемов преобразования структурных схем САУ и расчета их передаточных функций;

- освоение методов теории устойчивости систем управления;

- получение *практических навыков* решения соответствующих инженерных задач.

Домашнее задание №1
Преобразование структурных схем

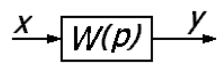
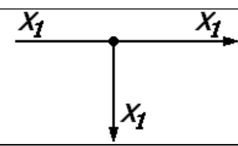
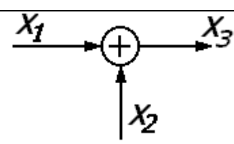
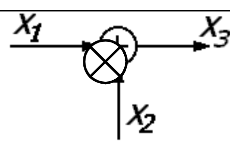
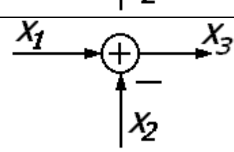
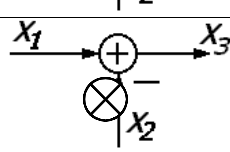
1.1 Теоретическое введение

Структурная схема и её элементы

Систему автоматического управления часто можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определенными типовыми или не типовыми передаточными функциями. Изображение системы регулирования в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы. Структурная схема может быть составлена на основе известных уравнений системы, и, наоборот, уравнения системы могут быть получены из структурной схемы. При этом первая задача может иметь различные варианты решения (различные структурные схемы), тогда как вторая задача имеет всегда единственное решение.

Структурная схема линейной непрерывной САУ может включать в себя следующие элементы:

Таблица 1.1 Элементы структурных схем

№	Наименование элемента	Обозначение	Уравнение движения
1.	Линейный блок/ Линейное звено		$y(p) = W(p) \cdot x(p)$
2.	Узел разветвления		—
3.	Сумматор	 	$x_3 = x_1 + x_2$
3а.	Элемент сравнения	 	$x_3 = x_1 - x_2$

1) **Линейный блок/линейное звено** – элемент структурной схемы САУ, передающий на единственный выход сигнал с единственного входа, преобразованный в соответствии с передаточной функцией звена W(p).

2) **Узел** – элемент структурной схемы САУ, мгновенно передающий сигнал с единственного входа на все свои выходы.

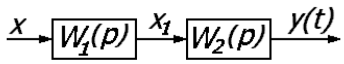
3) **Сумматор** – элемент структурной схемы САУ, мгновенно передающий на единственный выход сумму сигналов на всех своих входах.

3а) **Элемент сравнения** – элемент структурной схемы САУ, мгновенно передающий на единственный выход разность сигналов на своих входах.

Типовые соединения элементов.

Для упрощения (свертывания) сложных алгоритмических схем применяют три главных правила преобразования, с помощью которых определяют эквивалентные передаточные функции типовых соединений звеньев:

Определим передаточную функцию **последовательного** соединения звеньев:



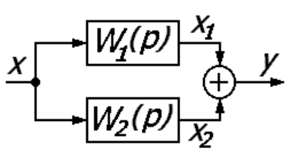
$$W_c(p) = ?$$
$$x_1(p) = W_1(p)\cdot x(p)$$
$$y(p) = W_2(p)\cdot x_1(p) = W_2(p)\cdot W_1(p)\cdot x(p)$$
$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_2(p)\cdot W_1(p)\cdot x(p)}{x(p)} = W_2(p)\cdot W_1(p)$$

❖ Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение.

Следует подчеркнуть, что это справедливо только в том случае, если соединение выхода предыдущего звена с входом последующего не меняет исходных уравнений каждого звена и, следовательно, его передаточной функции. В подобной последовательной цепи звеньев сигнал проходит только в одном направлении, и она называется детектирующей цепью.

Если при соединении двух звеньев наблюдается влияние одного звена на другое, в результате которого меняются исходные уравнения какого-либо звена, то такое соединение двух звеньев должно рассматриваться как новое самостоятельное звено со своей передаточной функцией.

Параллельное соединение:



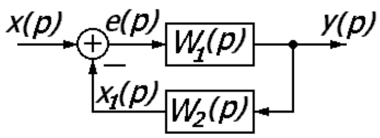
$$W_c(p) = ?$$
$$y(p) = x_1(p) + x_2(p) = W_1(p)\cdot x(p) + W_2(p)\cdot x(p) = $$
$$= (W_1(p) + W_2(p))\cdot x(p)$$
$$W_c(p) = \frac{(W_1(p) + W_2(p))\cdot x(p)}{x(p)} = W_1(p) + W_2(p)$$

❖ Передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение.

Здесь остаются справедливыми замечания, сделанные выше относительно взаимного влияния звеньев.

Встречно-параллельное соединение звеньев включает прямой канал – часть системы, в которой сигнал идет от входа к выходу, и обратную связь, где сигнал идет в противоположном направлении. Обратная связь может быть положительной, если сигнал x_1, снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом x на входе, и отрицательной, если x_1 вычитается.

Для встречно-параллельного соединения с **отрицательной** обратной связью:



$$W_c(p) = ?$$
$$e(p) = x(p) - x_1(p)$$
$$x_1(p) = W_2(p)\cdot y(p)$$
$$y(p) = W_1(p)\cdot e(p) = W_1(p)\cdot\left(x(p) - W_2(p)\cdot y(p)\right)$$
$$y(p) + W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot y(p) = W_1(p)\cdot x(p)$$
$$y(p)\cdot\left(1 + W_1(p)\cdot W_2(p)\right) = W_1(p)\cdot x(p)$$
$$y(p) = \frac{W_1(p)\cdot x(p)}{1 + W_1(p)\cdot W_2(p)}$$
$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_1(p)\cdot x(p)}{x(p)\cdot\left(1 + W_1(p)\cdot W_2(p)\right)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)\cdot W_2(p)}$$

Аналогично для встречно-параллельного соединения звеньев с **положительной** обратной связью:

$$W_c(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)\cdot W_2(p)}$$

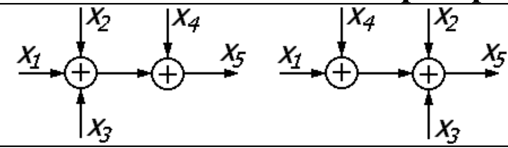
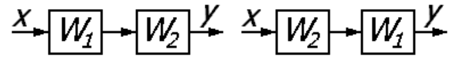
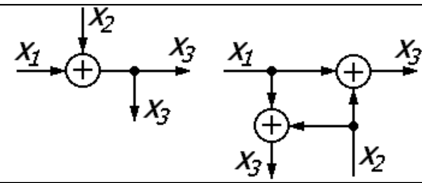
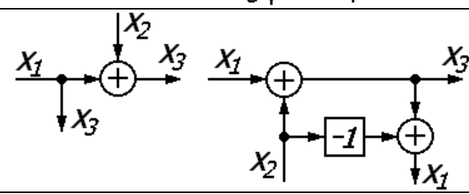
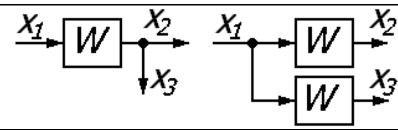
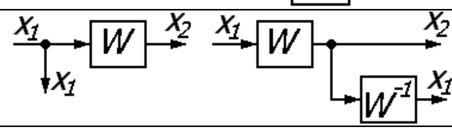
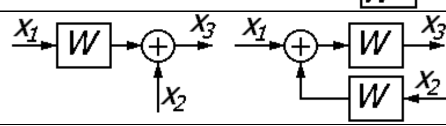
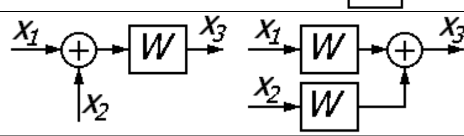
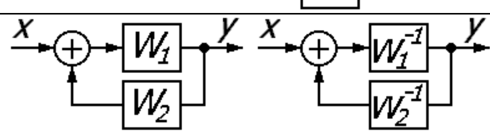
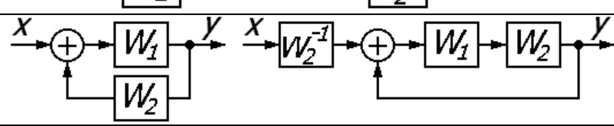
❖ Передаточная функция встречно-параллельного соединения с отрицательной (положительной) обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (минус) произведение передаточных функций прямой цепи и цепи обратной связи.

С помощью этих правил удается преобразовать любую исходную алгоритмическую схему, не содержащую перекрестных связей, к одноконтурной схеме.

Правила эквивалентного преобразования структурных схем.

В случае если перекрестные связи в исходной схеме имеются, перед выделением типовых соединений необходимо избавиться от таких связей с помощью приведенных ниже правил.

Таблица 1.2 Правила эквивалентного преобразования структурных схем

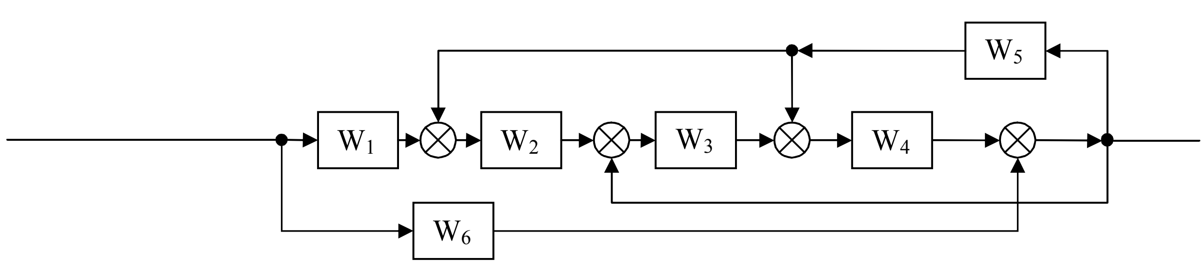
№	Название правила	Схемы до и после преобразования
1	Перенос сумматоров	
2	Перестановка звеньев	
3	Перенос узла с выхода сумматора на вход	
4	Перенос узла с входа сумматора на выход	
5	Перенос узла с выхода звена на вход	
6	Перенос узла со входа звена на выход	
7	Перенос сумматора с выхода звена на вход	
8	Перенос сумматора со входа звена на выход	
9	Замена передаточных функций прямой и обратной цепи	
10	Приведение к единичной обратной связи	

1.2 Содержание домашнего задания

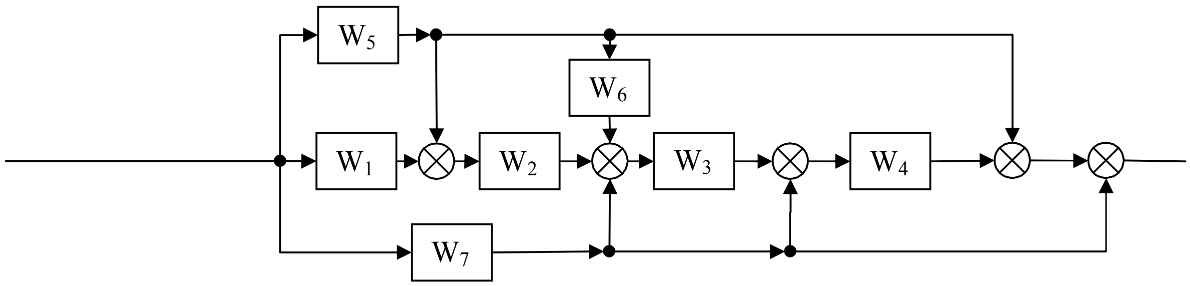
Преобразовать структурную схему, определить передаточную функцию САУ.

Варианты:

1)

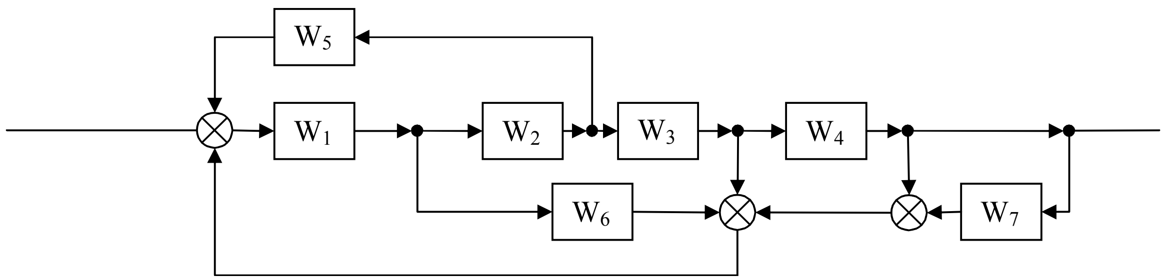


2)



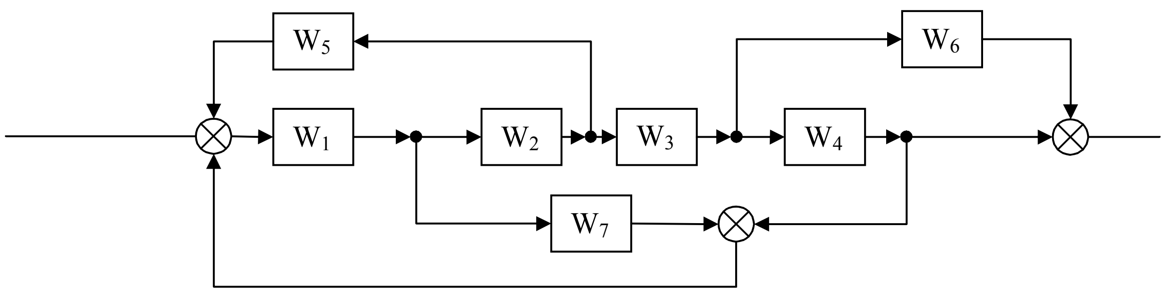
W_5
W_6
W_1
W_2
W_3
W_4
W_7

3)



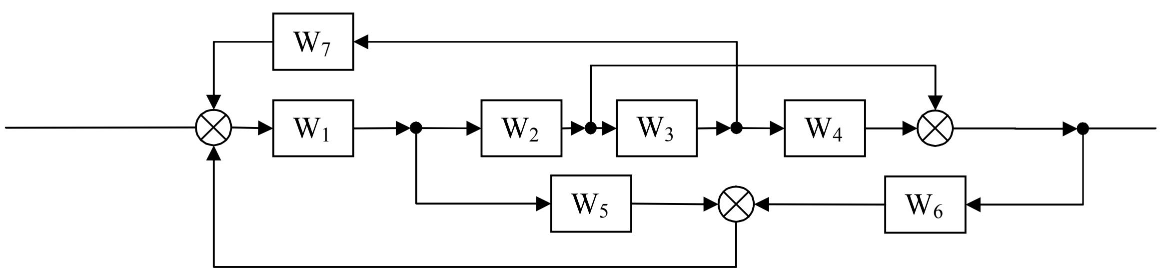
W_5
W_1
W_2
W_3
W_4
W_6
W_7

4)



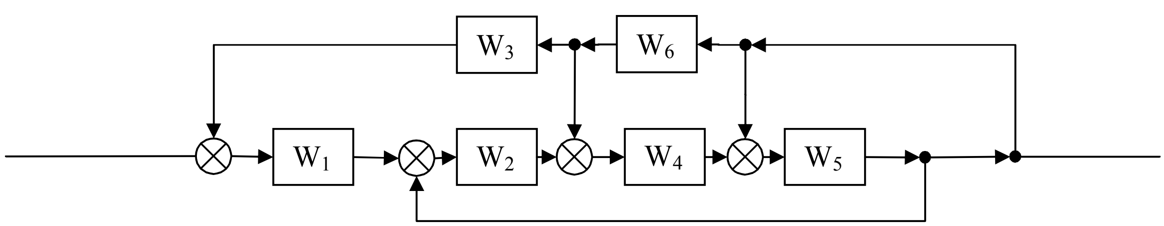
W_5
W_6
W_1
W_2
W_3
W_4
W_7

5)



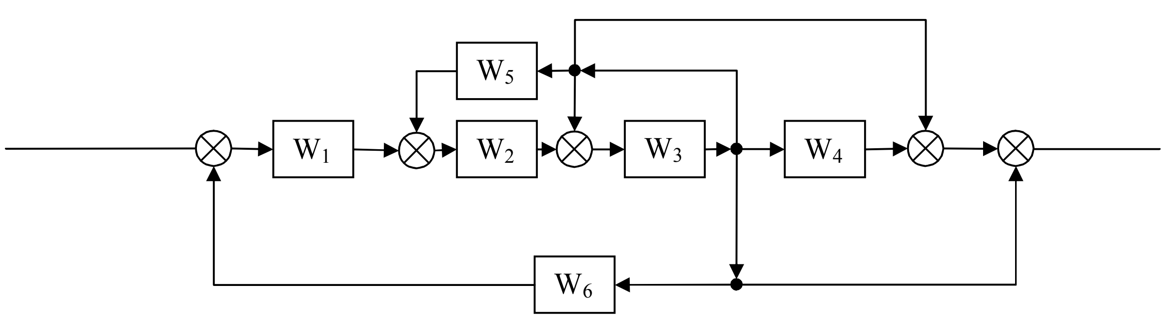
W_7
W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

6)



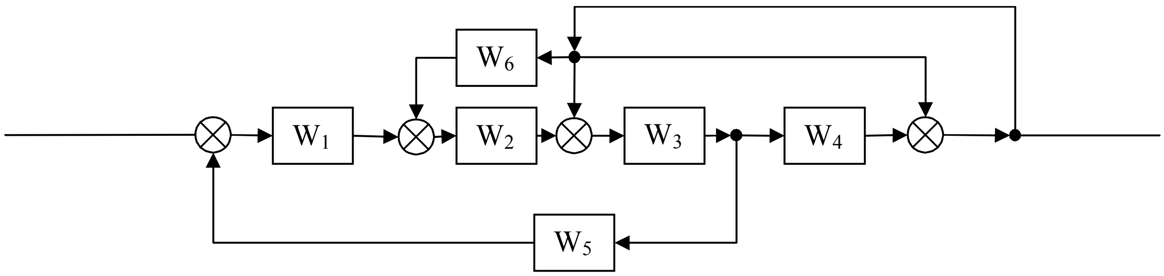
W_3
W_6
W_1
W_2
W_4
W_5

7)

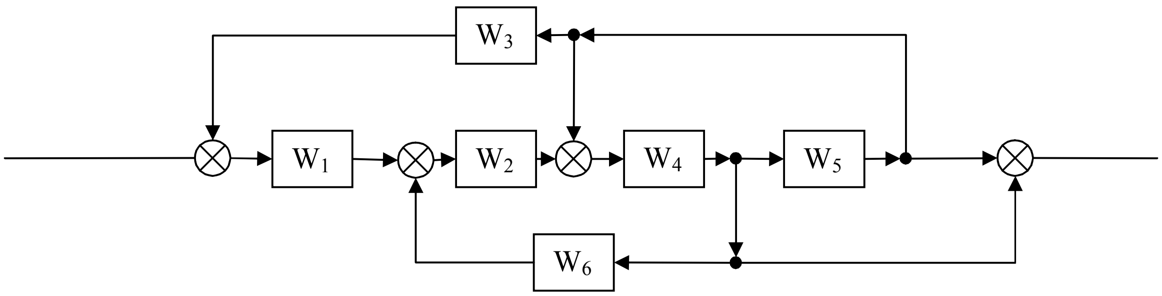


W_5
W_1
W_2
W_3
W_4
W_6

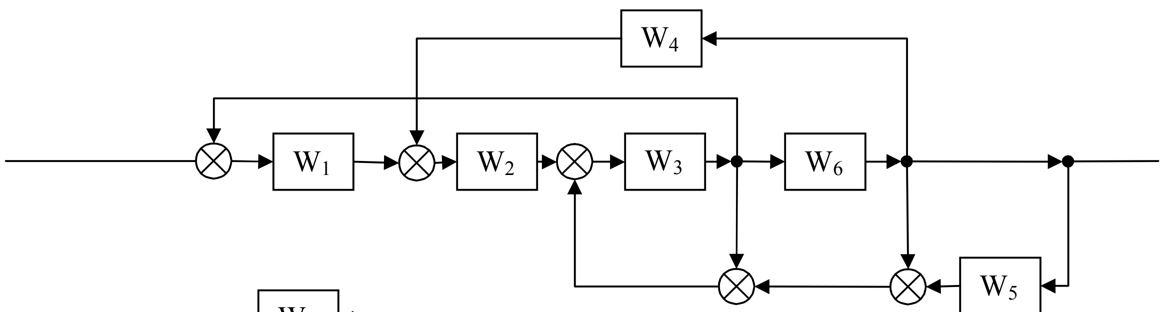
8)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

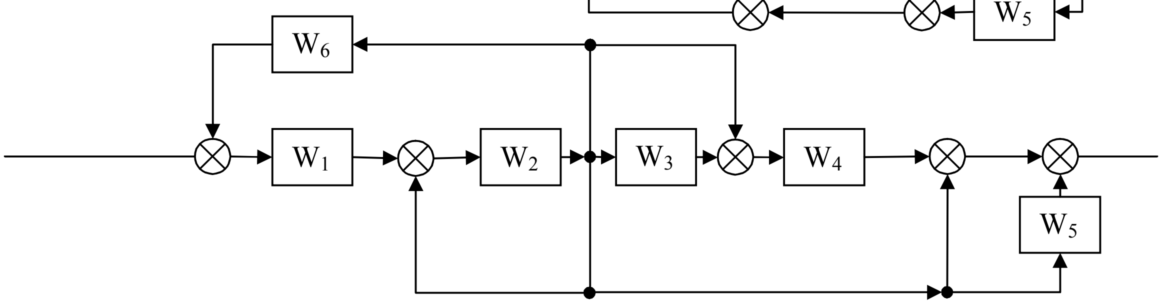
9)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

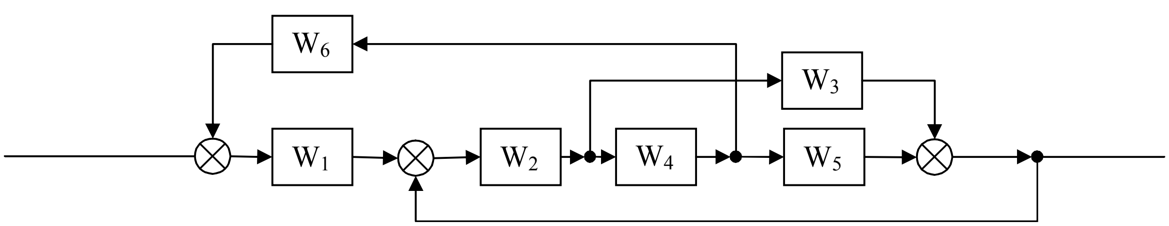
10)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

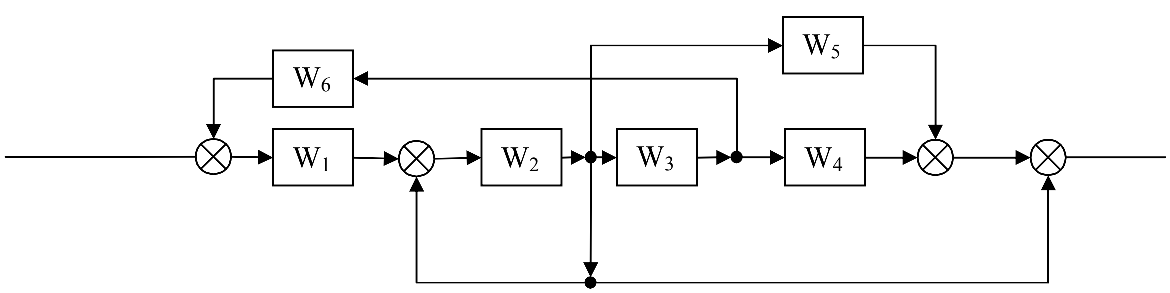
11)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

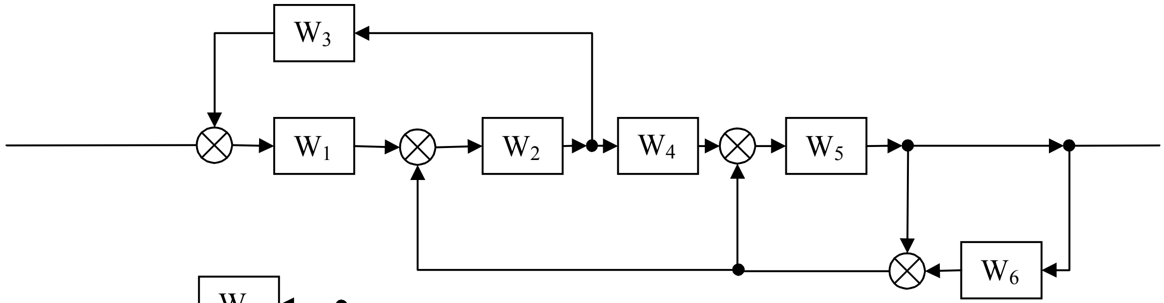
12)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

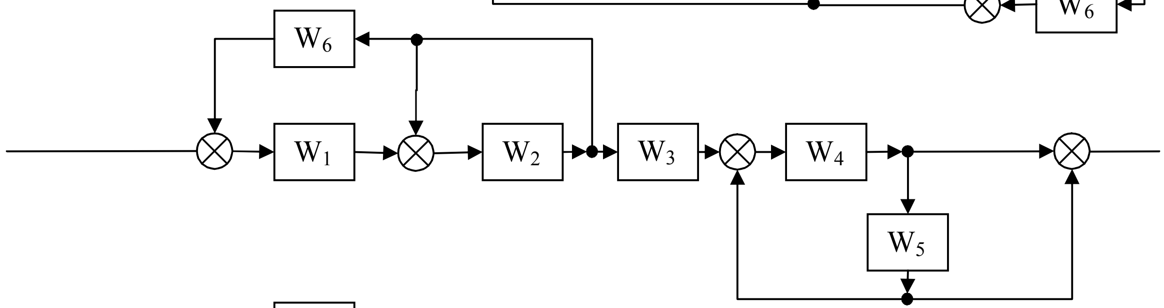
13)


W_1
W_2
W_3
W_4
W_5
W_6

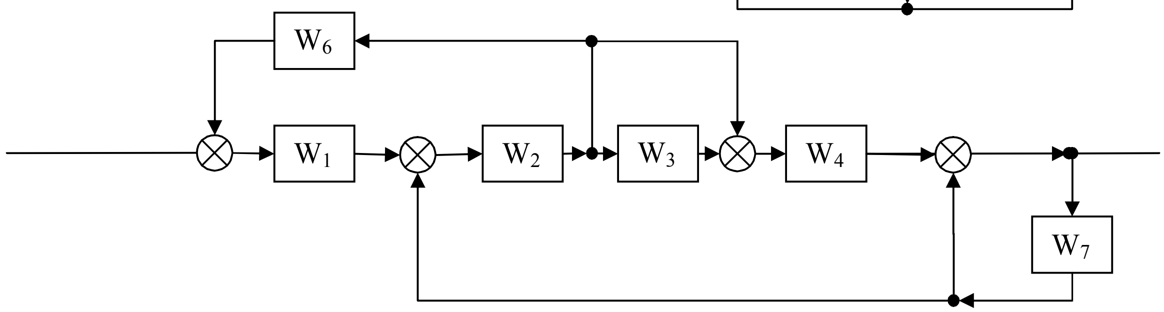
14)



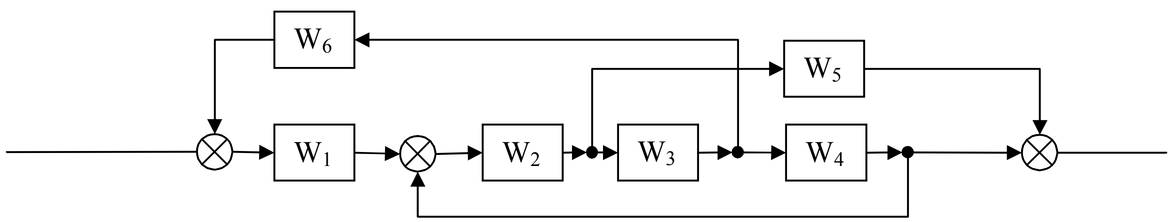
15)



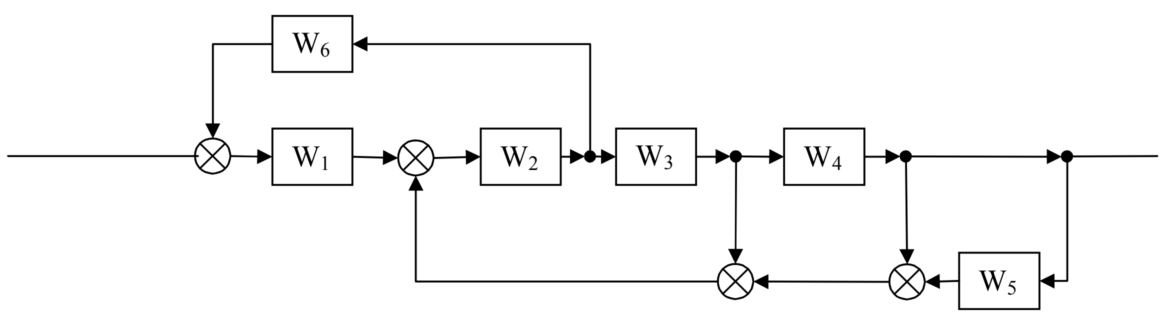
16)



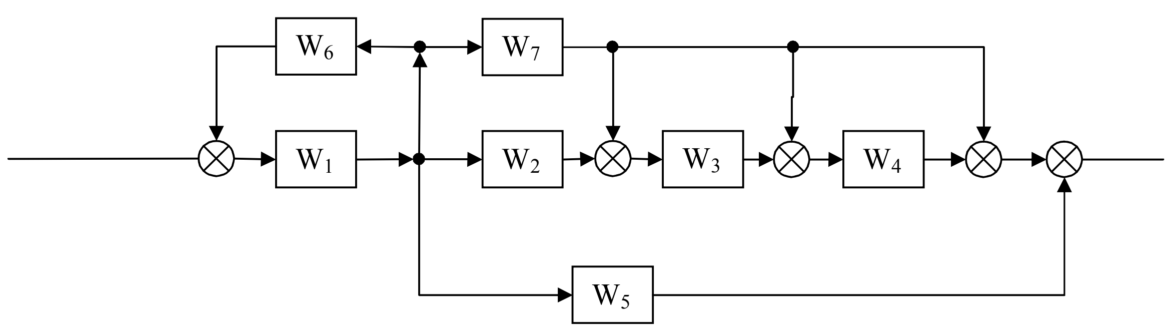
17)



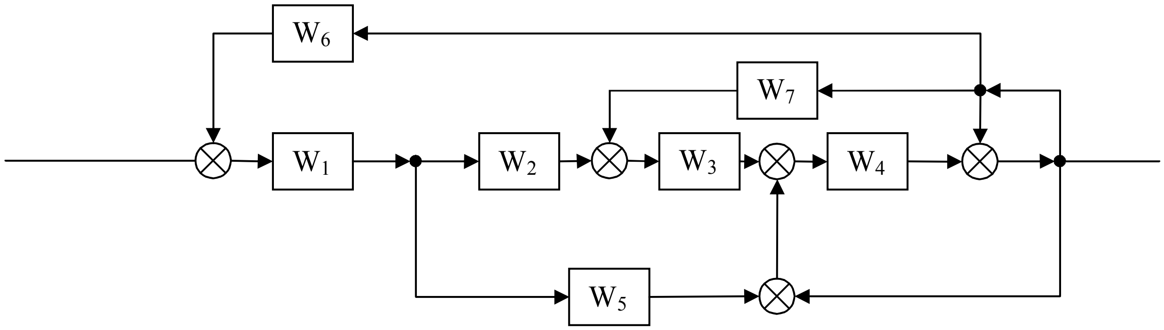
18)



19)

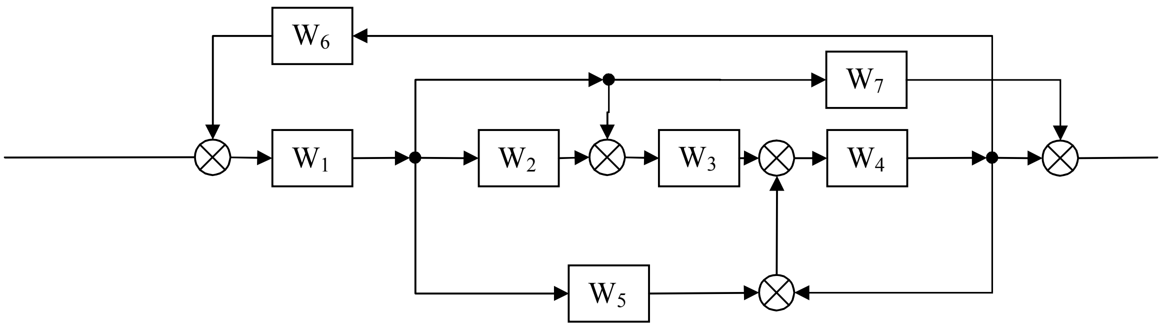


20)



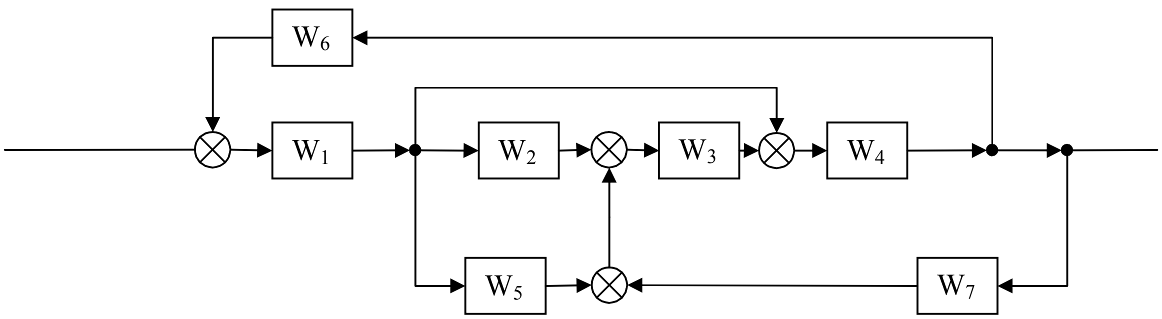
W6
W7
W1
W2
W3
W4
W5

21)



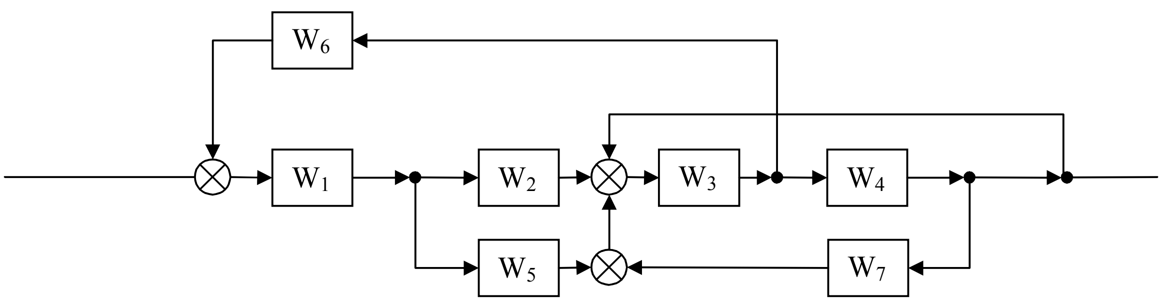
W6
W7
W1
W2
W3
W4
W5

22)



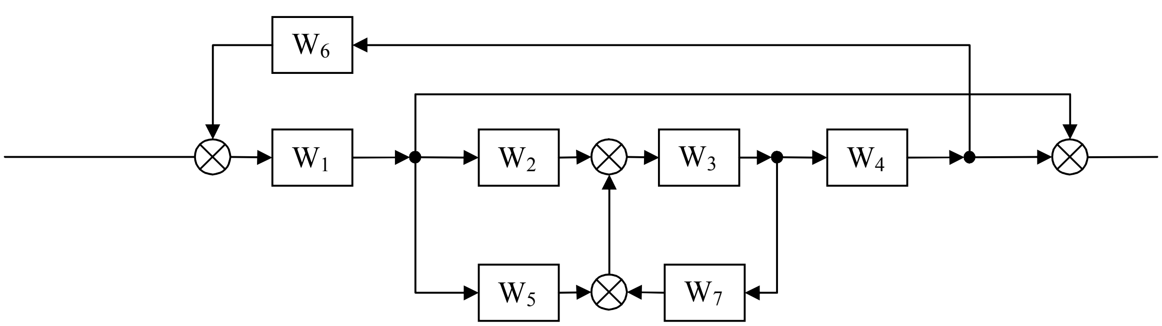
W6
W1
W2
W3
W4
W5
W7

23)

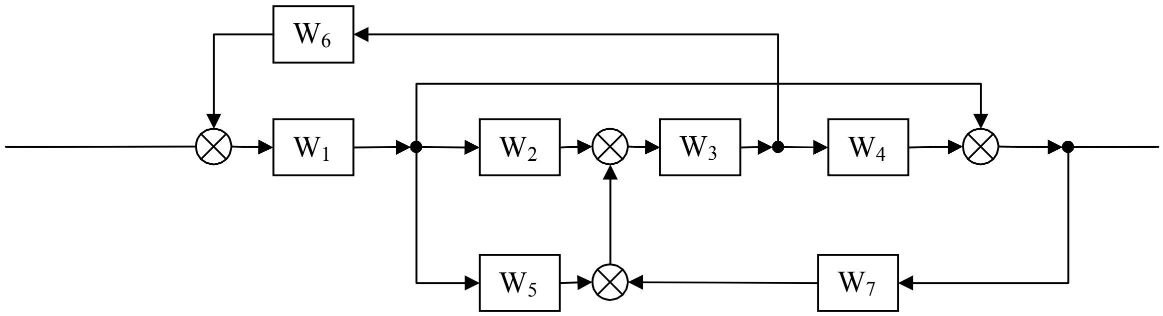


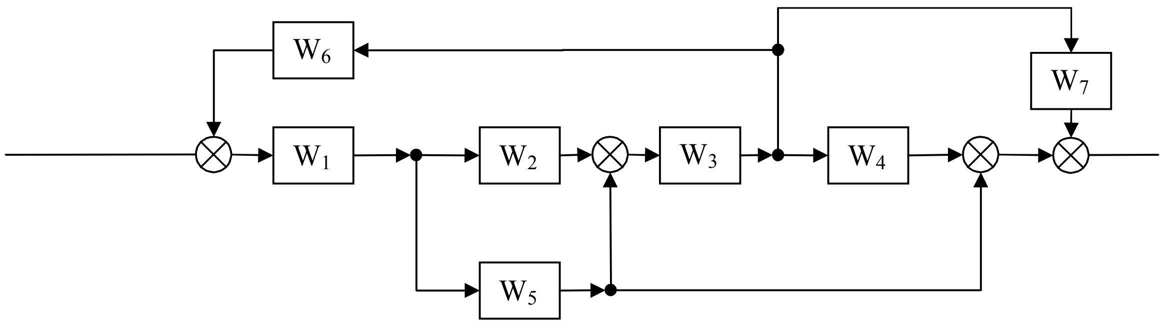
W6
W1
W2
W3
W4
W5
W7

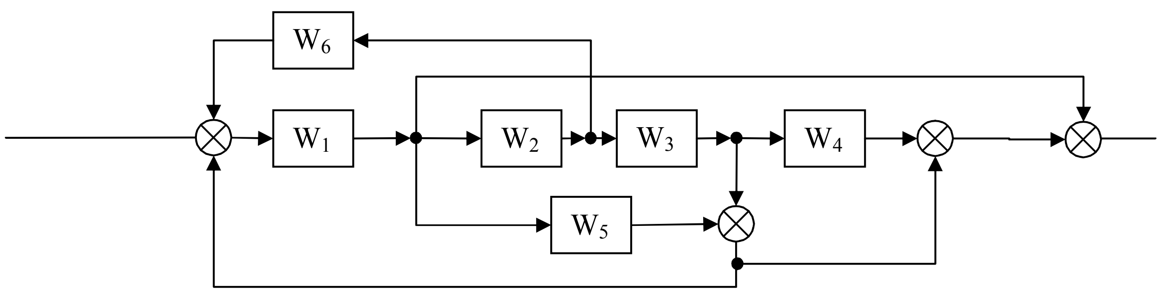
24)

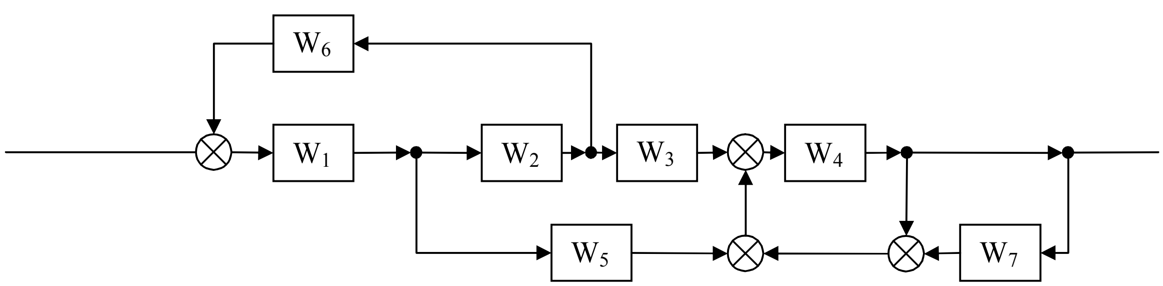


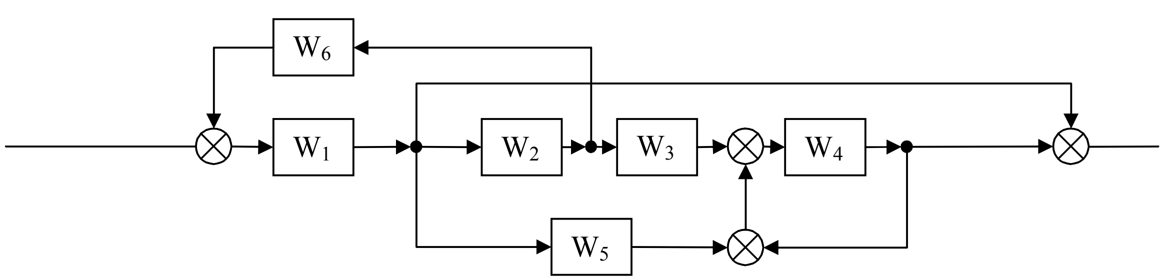
W6
W1
W2
W3
W4
W5
W7

25) 
W6
W1
W2
W3
W4
W5
W7

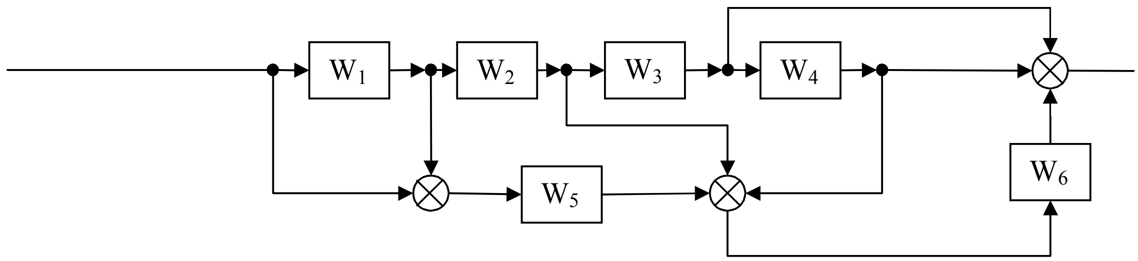
26) 
W6
W7
W1
W2
W3
W4
W5

27) 
W6
W1
W2
W3
W4
W5

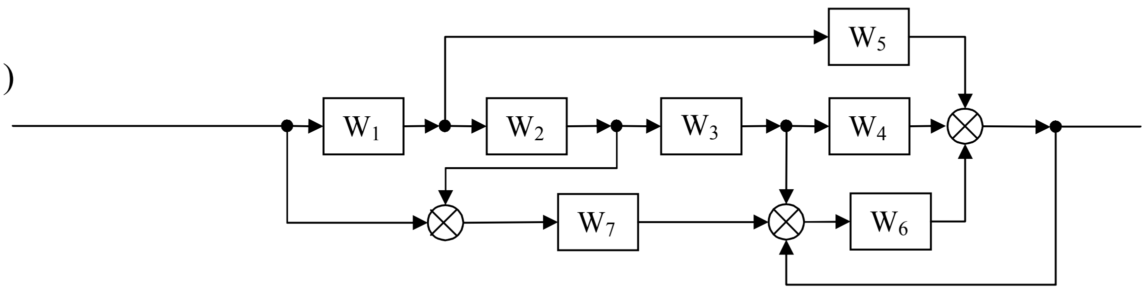
28) 
W6
W1
W2
W3
W4
W5
W7

29) 
W6
W1
W2
W3
W4
W5

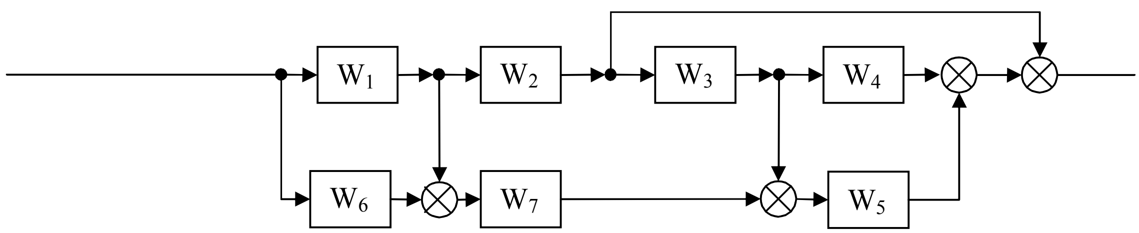
30)



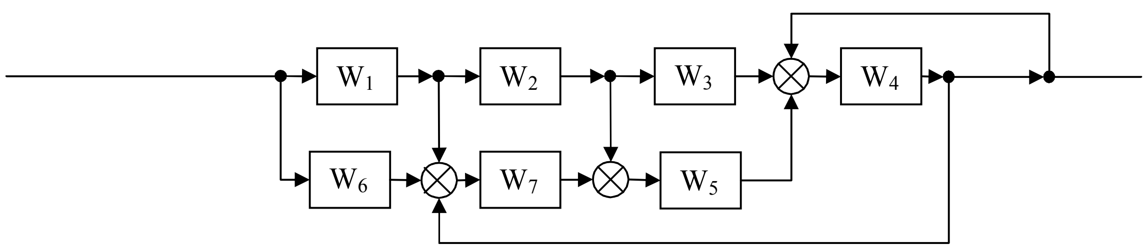
31)



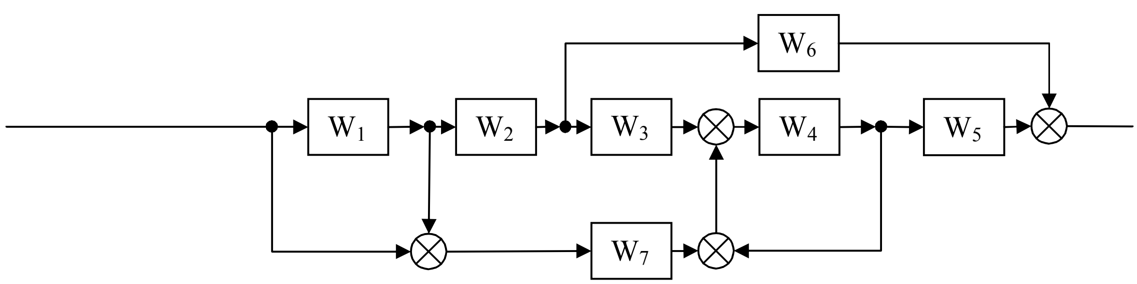
32)



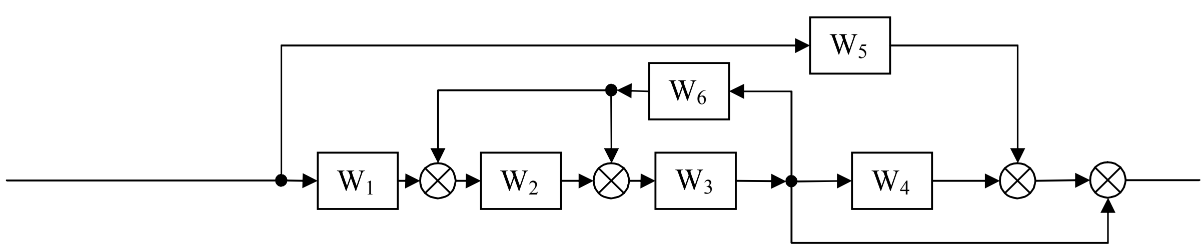
33)



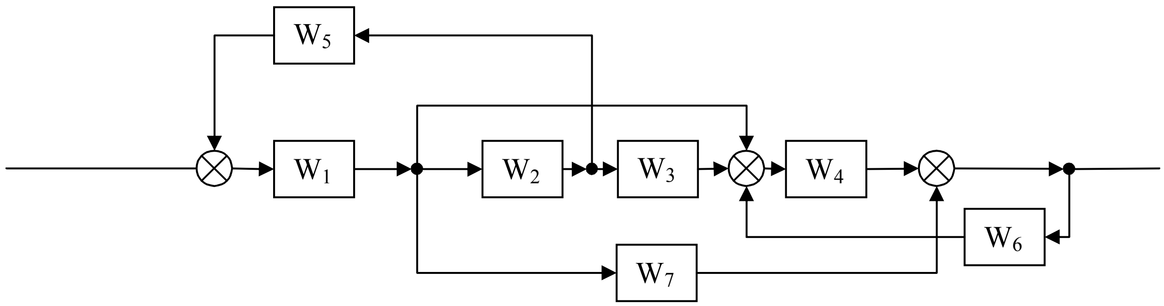
34)



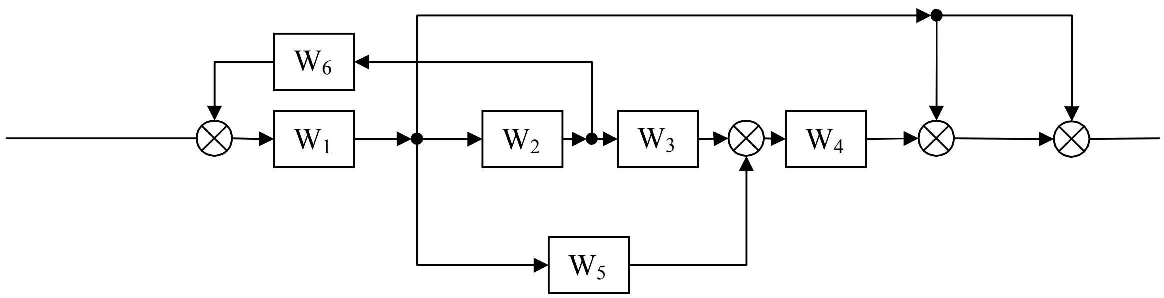
35)



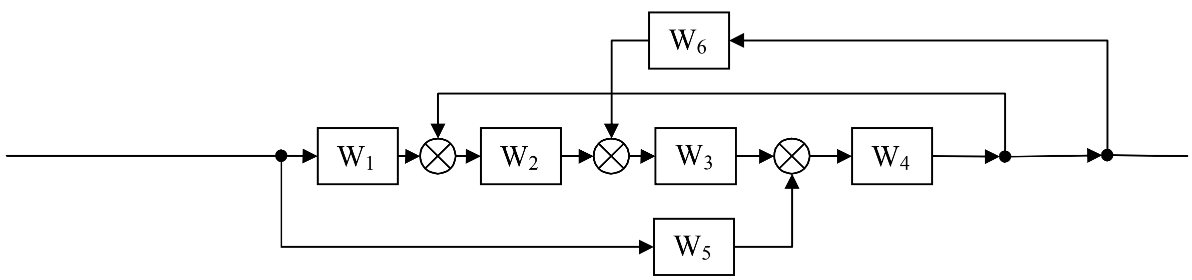
36)



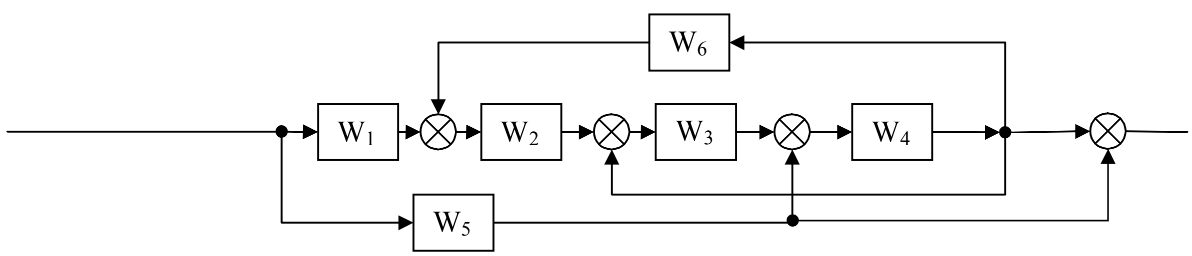
37)



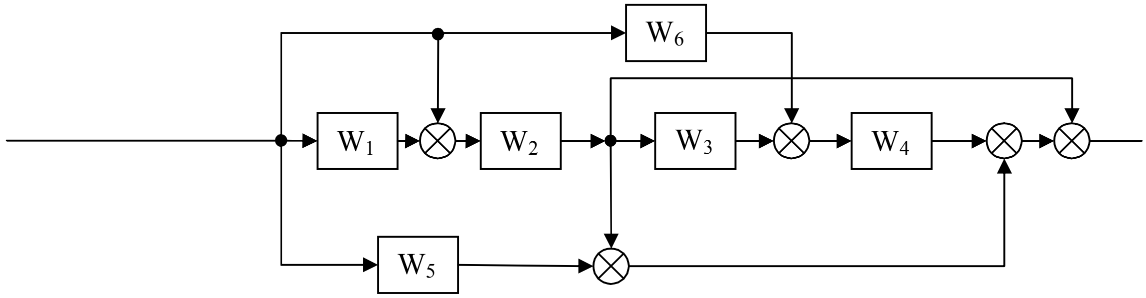
38)



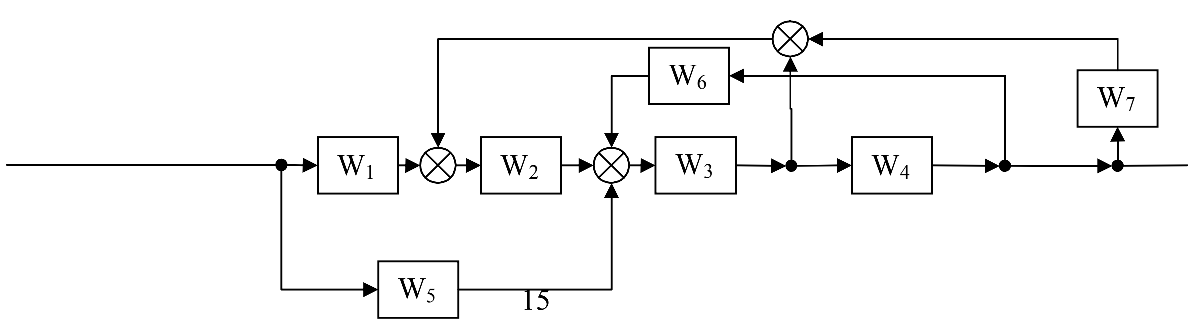
39)



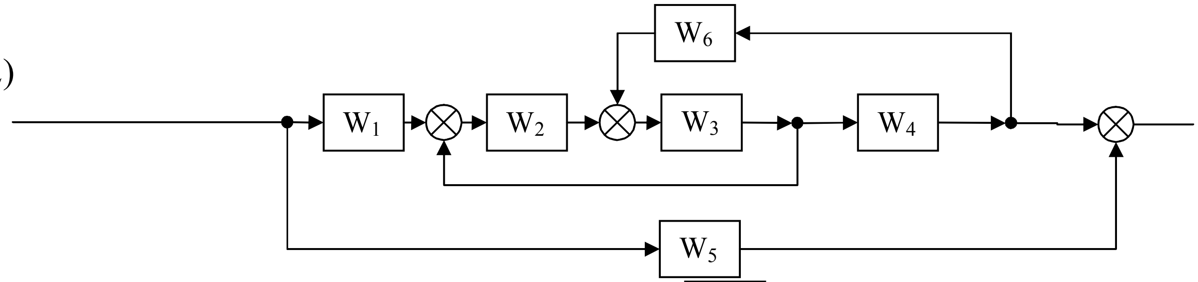
40)



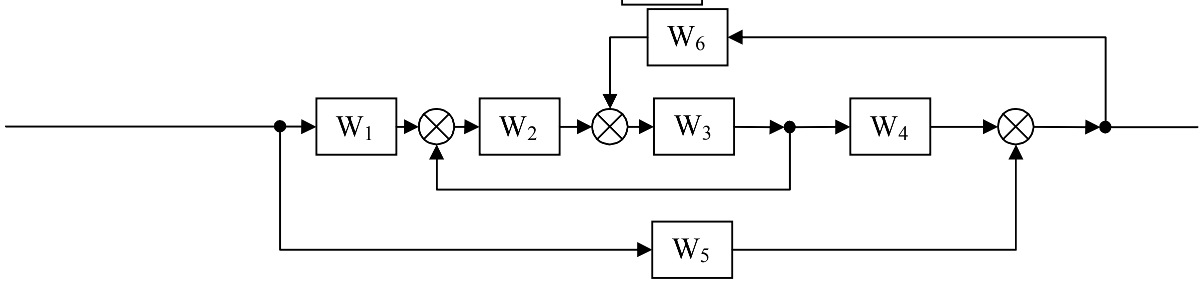
41)



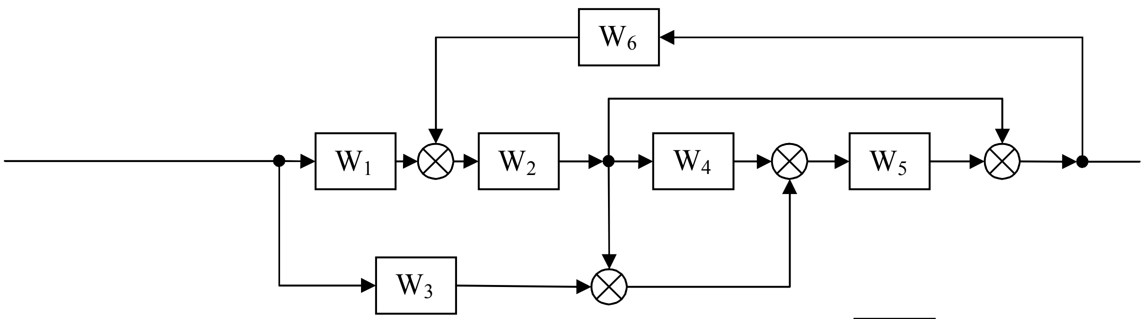
42)



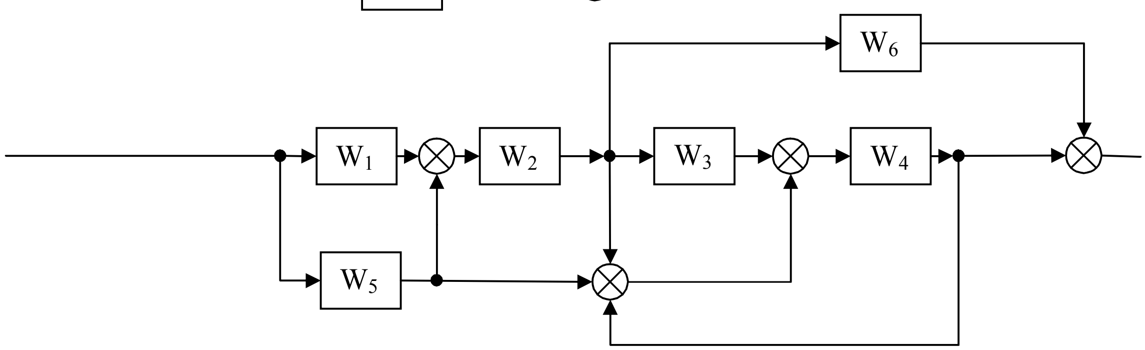
43)



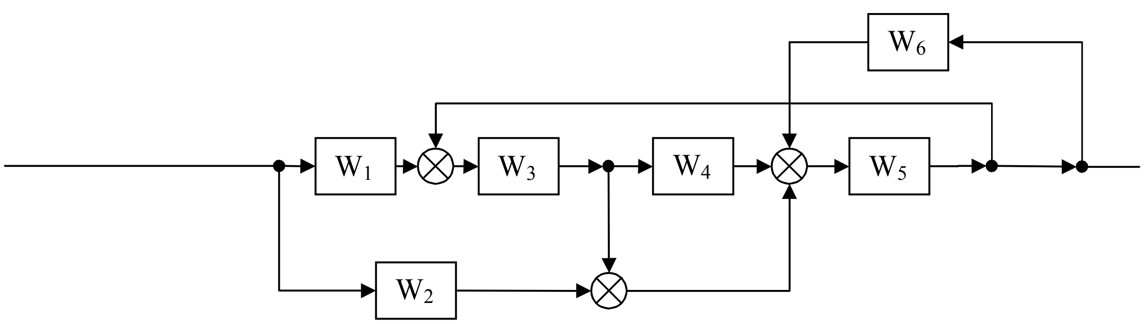
44)



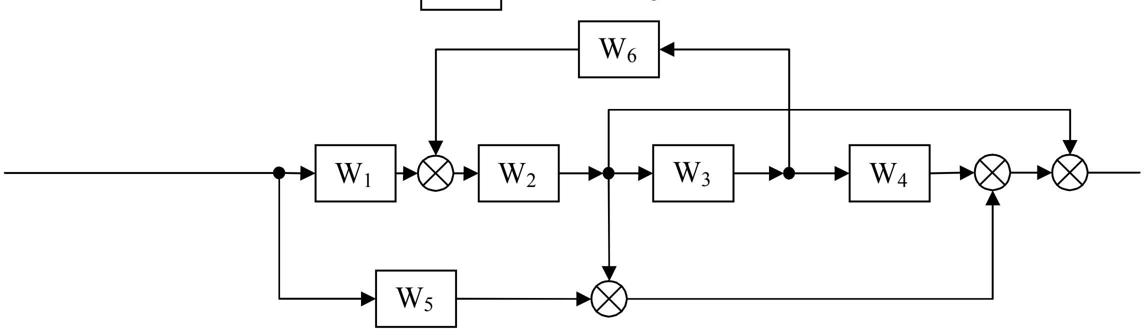
45)



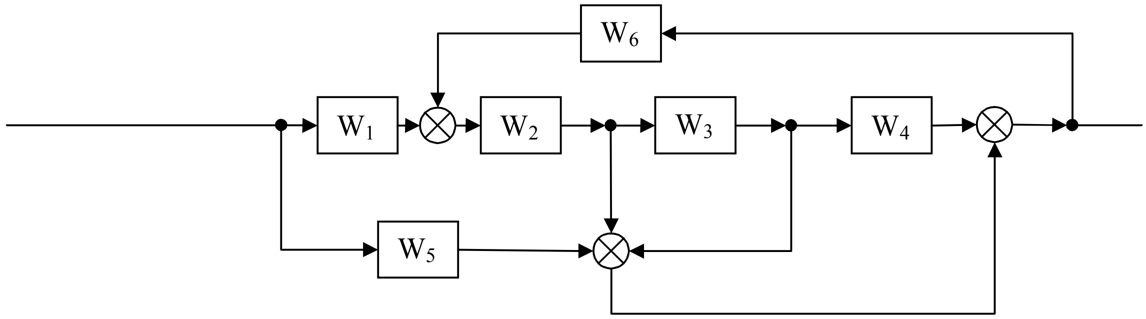
46)



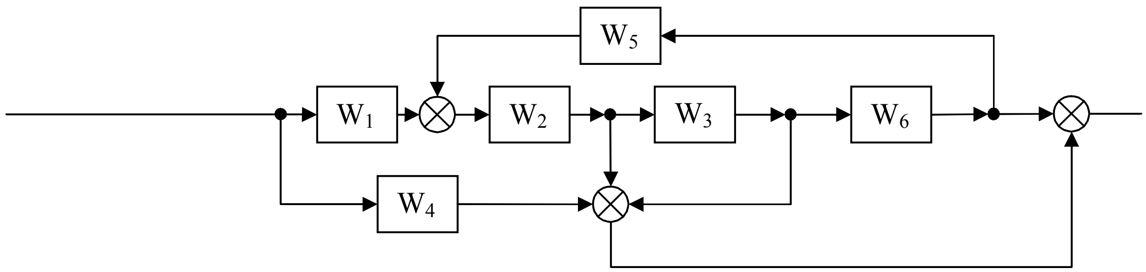
47)



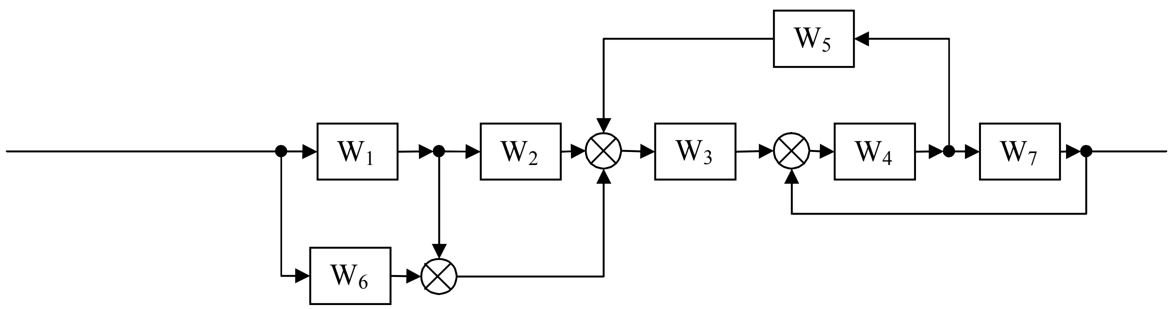
48)


W_6
W_1
W_2
W_3
W_4
W_5

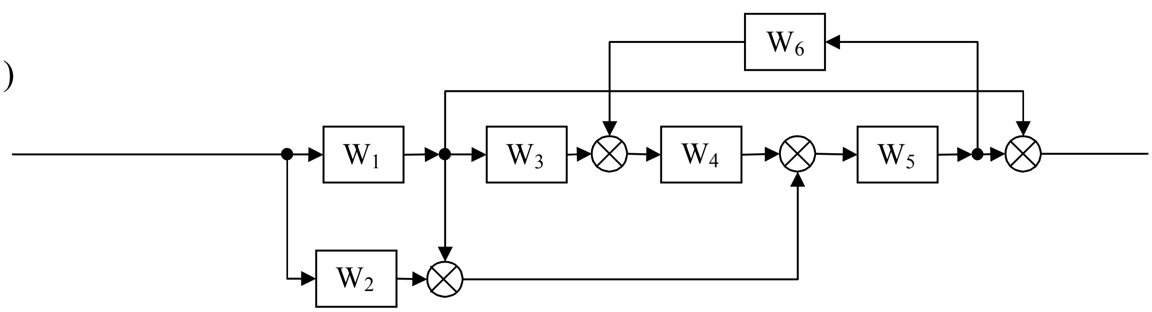
49)


W_5
W_1
W_2
W_3
W_6
W_4

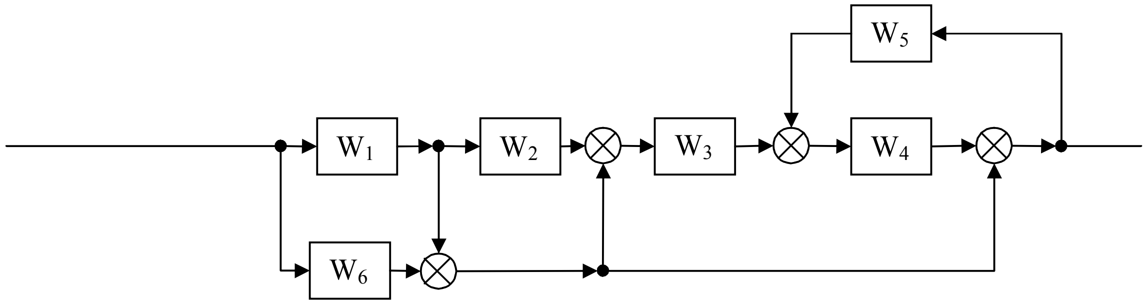
50)


W_5
W_1
W_2
W_3
W_4
W_7
W_6

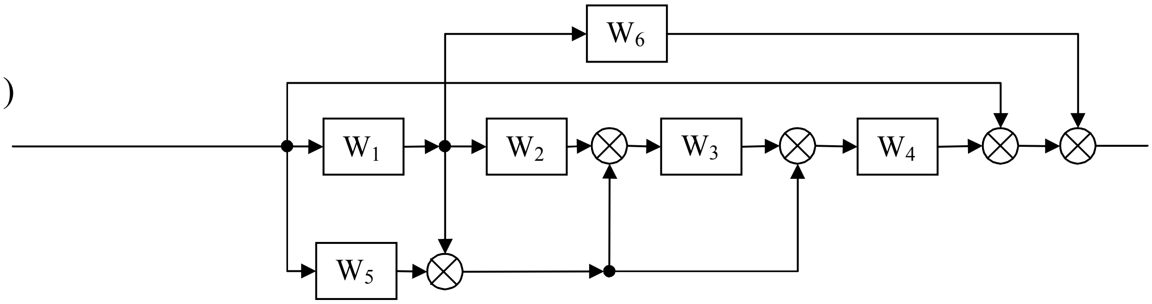
51)


W_6
W_1
W_3
W_4
W_5
W_2

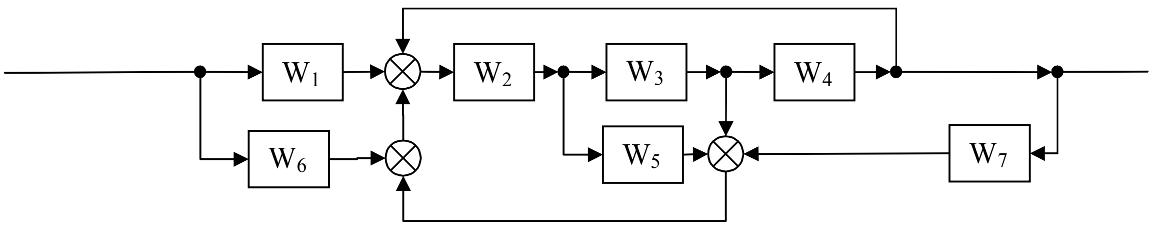
52)


W_5
W_1
W_2
W_3
W_4
W_6

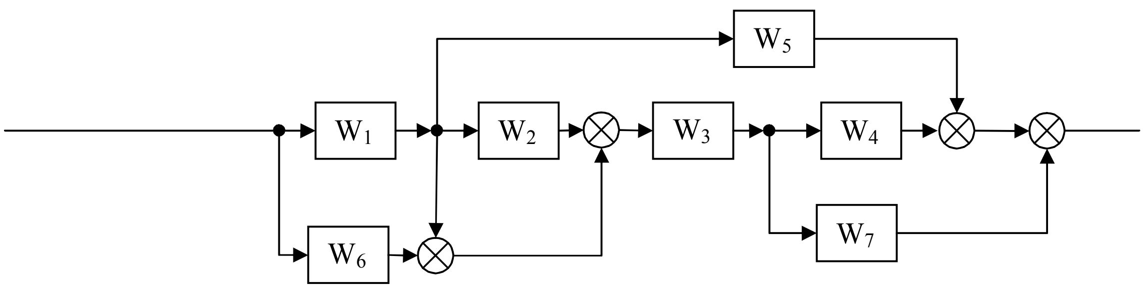
53)



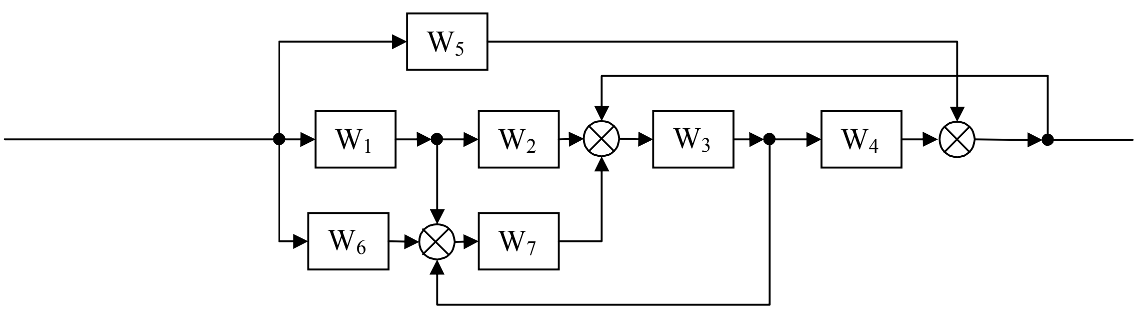
54)



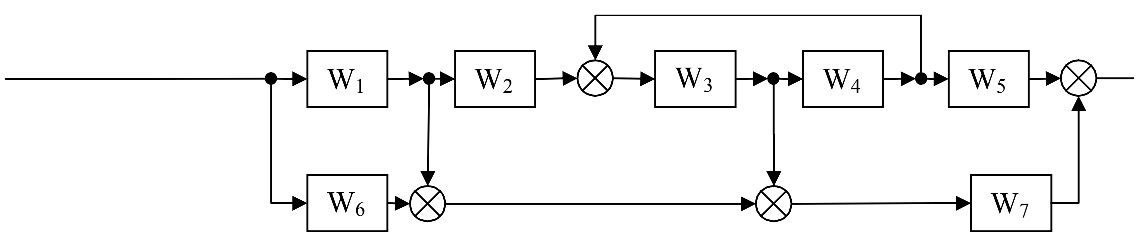
55)



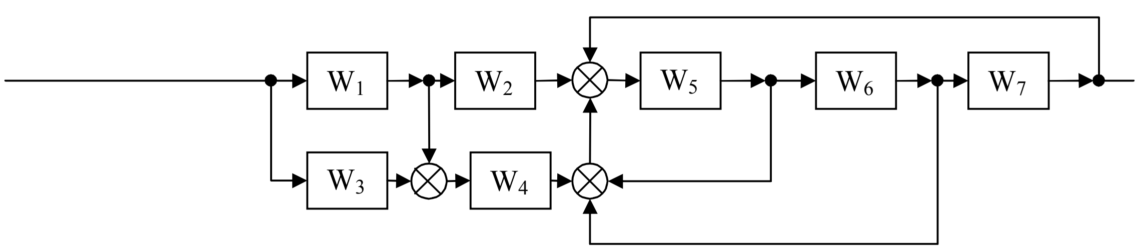
56)



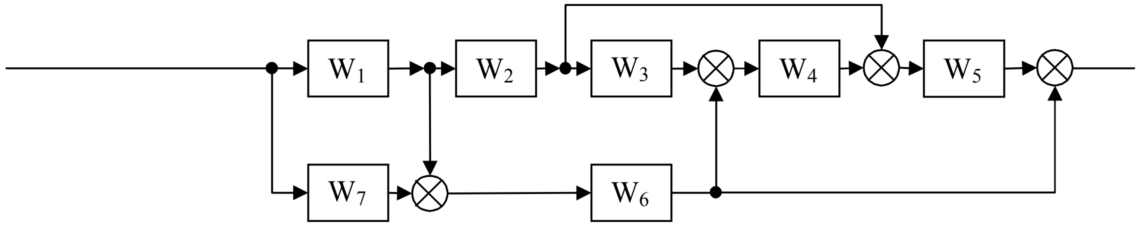
57)



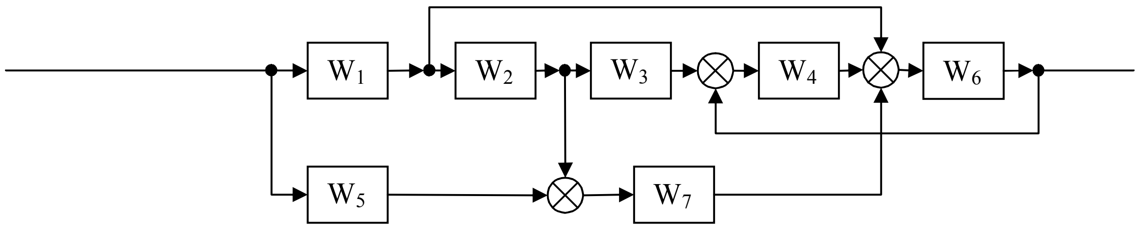
58)



59)

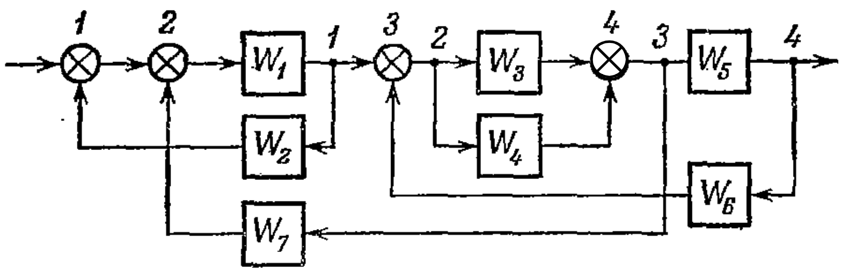


60)



Пример выполнения задания

Ниже приведен пример упрощения сложной структурной схемы на основе правил эквивалентного преобразования:



Вначале сумматор 1 (см. рис.) переносится вправо через сумматор 2, определяется передаточная функция встречно-параллельного соединения линейных звеньев W_1 и W_2:

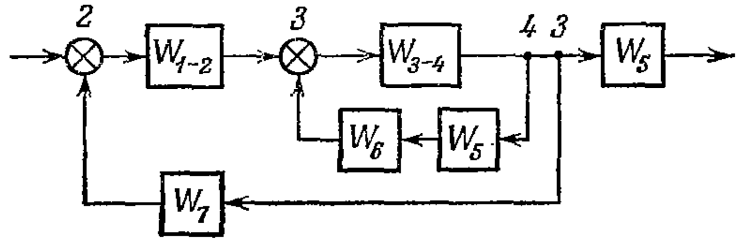
$$W_{1-2} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2},$$

и параллельного соединения W_3 и W_4:

$$W_{3-4} = W_3 + W_4.$$

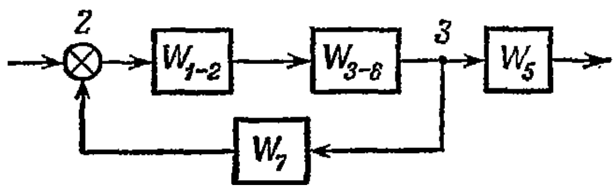
Узел 4 переносится влево через линейный блок W_5 и узел 3. При этом в боковую ветвь добавляется, согласно правилу №5, линейный блок W_5.

В результате схема приобретает следующий вид:



Затем рассчитывается передаточная функция встречно-параллельного соединения, в прямом канале которого находится $W_{3\text{-}4}$, а в обратной связи – последовательное соединение звеньев W_5 и W_6:

$$W_{3-6} = \frac{W_3 + W_4}{1 - (W_3 + W_4)W_5 W_6}$$



Полученная в результате преобразования схема уже относится к простейшим, что позволяет легко определить ее передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{W_{1-2}W_{3-6}}{1 - W_{1-2}W_{3-6}W_7}W_5 = \frac{\dfrac{W_1}{1 - W_1W_2}\dfrac{W_3 + W_4}{1 - (W_3 + W_4)W_5W_6}W_5}{1 - \dfrac{W_1}{1 - W_1W_2}\dfrac{W_3 + W_4}{1 - (W_3 + W_4)W_5W_6}W_7}$$

после упрощения окончательно получаем:

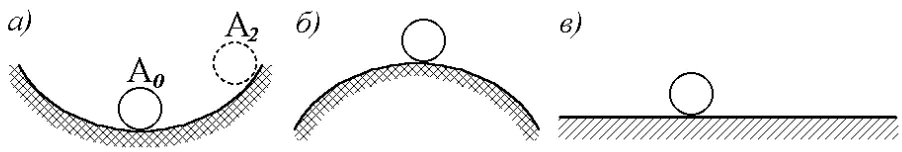
$$W(p) = \frac{W_1W_5(W_3 + W_4)}{(1 - W_1W_2)\big(1 - (W_3 + W_4)W_5W_6\big) - W_1W_7(W_3 + W_4)}$$

Домашнее задание №2
Исследование устойчивости линейной САУ

2.1 Теоретическое введение

Устойчивость автоматической системы – это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после прекращения воздействия, выведшего систему из этого состояния. Неустойчивая система не возвращается в исходное состояние, а непрерывно удаляется от него.

Точная и строгая теория управления систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, создана А.М. Ляпуновым в 1892.



Здесь, на рисунке а), A_0 – невозмущенное состояние, A_2 – возмущенное состояние; на рисунке б) изображено неустойчивое состояние системы, а на рисунке в) – ее нейтральное состояние. По аналогии с состояниями можно ввести понятие возмущенного и невозмущенного движения.

Свободное движение линейной или линеаризованной системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0$$

где $x(t) = x_c(t)$ - свободная составляющая выходной величины системы.

Система является **устойчивой**, если свободная составляющая $x_c(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю, т.е. если

$$\lim_{t \to \infty} x_c(t) = 0 .$$

Если свободная составляющая неограниченно возрастает, т.е. если

$$\lim_{t \to \infty} x_c(t) = \infty ,$$

то система **неустойчива**.

Наконец, если свободная составляющая не стремится ни к нулю, ни к бесконечности, то система находится **на границе устойчивости**.

Для определения устойчивости линейной непрерывной САУ можно применять следующее общее условие устойчивости (**Правило Ляпунова**):

Для устойчивости линейной автоматической системы управления необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательны.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0 .$$

Основной недостаток правила Ляпунова, затрудняющий его непосредственное применение, заключается в необходимости поиска корней характеристического полинома. Существуют различные критерии (условия), позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения по его коэффициентам, не решая это уравнение.

Различают две группы критериев устойчивости: алгебраические (Рауса и Гурвица), основанные на анализе коэффициентов характеристического уравнения, и частотные (Михайлова), основанные на анализе частотных характеристик.

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Автоматическая система, описываемая характеристическим уравнением

$$a_0 p + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

***устойчива**, если при $a_0>0$ положительны все определители Δ_1, Δ_2, . . .Δ_n вида*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{2i-3} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{2i-4} & a_{2i-2} \end{vmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots n$$

Если хотя бы один из определителей, называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система **неустойчива**. Если главный определитель Δ_n=0, а все остальные определители неотрицательны, то система находится на **границе устойчивости**.

Сформулируем **необходимое условие устойчивости**:

Для устойчивости линейной непрерывной САУ **необходимо** (но не всегда достаточно!), чтобы все коэффициенты ее характеристического полинома были положительны (одного знака).

Рассмотрим частные случаи применения критерия Гурвица для n=1; 2; 3; 4. Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия, можно получить следующие условия.

1. Для уравнения первого порядка (n=1)

$$a_0 p + a_1 = 0$$

условие устойчивости: $a_0>0$ и $\Delta_1=a_1>0$, т.е. для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были больше нуля.

2. Для уравнения второго порядка (n=2)

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

условие устойчивости:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 > 0,\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = a_2\Delta_1 > 0 \text{ или } a_2 > 0 \end{array}\right\}$$

Т.о., и для системы второго порядка необходимое условие устойчивости (положительность коэффициентов) является одновременно и достаточным.

3. Для уравнения третьего порядка (n=3)

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

условие устойчивости:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 > 0,\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \Rightarrow a_3 > 0 \end{array}\right\}$$

При n=3 для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были больше нуля и произведение средних коэффициентов уравнения (a_1, a_2) было больше произведения крайних (a_0, a_3).

4. Для уравнения четвертого порядка (n=4)

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$$

кроме положительности всех коэффициентов требуется выполнение условия

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 .$$

При n=4 система будет устойчива при всех коэффициентах больших нуля и при

$$a_i > 0;\ i = \overline{1,n} .$$

Т.о., для устойчивости систем не выше четвертого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_{n-1} были положительными.

Алгебраический критерий устойчивости Рауса

Этот критерий устойчивости был в 1877 г. предложен английским математиком и механиком Э. Раусом в виде некоторого правила (алгоритма), которое наиболее просто поясняет таблица.

В первой строке таблицы записывают в порядке возрастания индексов коэффициенты характеристического уравнения, имеющие четный индекс; во второй строке — коэффициенты с нечетным индексом. Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как

$$\mathrm{C}_{i\,j} = \mathrm{C}_{i-2\,j+1} - \mathrm{C}_{i-1\,j+1} * \lambda_i, \; \lambda_i = \frac{C_{i-2\,0}}{C_{i-1\,0}}$$

В выражениях: *j* — индекс, означающий номер столбца таблицы; *i* – индекс, означающий номер строки таблицы.

	$C_{00} = a_0$	$C_{01} = a_2$	$C_{02} = a_4$	$C_{03} = a_6$	…
	$C_{10} = a_1$	$C_{11} = a_3$	$C_{12} = a_5$	$C_{13} = a_7$	…
$\lambda_2 = \frac{C_{00}}{C_{10}}$	$C_{20} = C_{01} - C_{11} * \lambda_2$	$C_{21} = C_{02} - C_{12} * \lambda_2$	$C_{22} = C_{03} - C_{13} * \lambda_2$	…	…
$\lambda_3 = \frac{C_{10}}{C_{20}}$	$C_{30} = C_{11} - C_{21} * \lambda_3$	$C_{31} = C_{12} - C_{22} * \lambda_3$	$C_{32} = C_{13} - C_{23} * \lambda_3$	…	…
$\lambda_4 = \frac{C_{20}}{C_{30}}$	$C_{40} = C_{21} - C_{31} * \lambda_4$	$C_{41} = C_{22} - C_{32} * \lambda_4$	$C_{42} = C_{43} - C_{43} * \lambda_4$	…	…
$\lambda_5 = \frac{C_{30}}{C_{40}}$	$C_{50} = C_{31} - C_{41} * \lambda_5$	$C_{51} = C_{32} - C_{42} * \lambda_5$	$C_{52} = C_{33} - C_{43} * \lambda_5$	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…

Заметим, что число строк таблицы Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единица.

После того как таблица Рауса заполнена, по ней можно сделать суждение об устойчивости системы. **Условие устойчивости Рауса** формулируется так:

для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т. е. $C_{i0} > 0$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Частотный критерий устойчивости Михайлова

Пусть левая часть уравнения движения, называемая характеристическим полиномом, имеет вид

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n .$$

Подставим в этот полином вместо переменного *p* чисто мнимый корень, который в дальнейшем будем обозначать *jw*. Тогда получим функцию комплексного переменного

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

которую можно представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) .$$

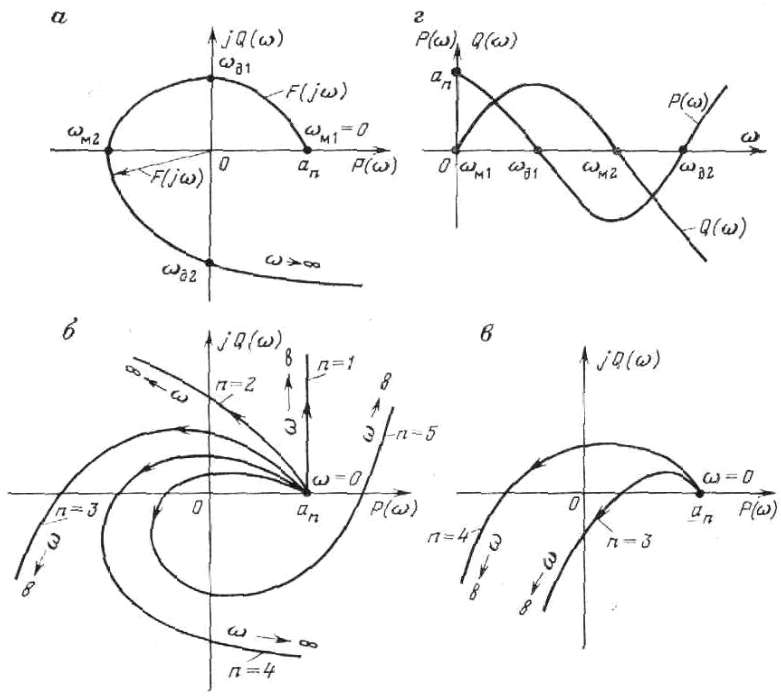
Действительная часть *P* (ω) содержит только четные степени переменного ω

$$P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots ,$$

а мнимая часть — только нечетные

$$Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \ldots .$$

Каждому фиксированному значению переменного ω соответствует комплексное число, которое можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости. Если теперь изменять параметр (*ω* от 0 до ∞, то конец вектора *D (jω)* опишет некоторую линию (рис. а), которая называется характеристической кривой или **годографом Михайлова**. По виду этой кривой можно судить об устойчивости системы.



Формулировка критерия Михайлова:

Автоматическая система управления, описываемая уравнением n-го порядка, устойчива, если при изменении ω от 0 до ∞ характеристический вектор системы D (jω) повернется против часовой стрелки на угол nπ/2, не обращаясь при этом в нуль.

Это означает, что характеристическая кривая устойчивой системы должна при изменении с ω до 0 до ∞ пройти последовательно через n квадрантов. Из приведенных выше выражений следует, что кривая $D\,(j\omega)$ всегда начинается в точке на действительной оси, удаленной от начала координат на величину a_n.

Характеристические кривые, соответствующие устойчивым системам (рис. б), имеют плавную спиралеобразную форму и уходят в бесконечность в том квадранте, номер которого равен порядку уравнения. Если характеристическая кривая проходит п квадрантов не последовательно или проходит меньшее число квадрантов, система неустойчива (рис. в).

Если кривая D ($j\omega$) проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости. Действительно, если характеристическое уравнение имеет один нулевой корень $p_k = 0$ (апериодическая граница устойчивости) или одну пару чисто мнимых корней $p_k = \pm j\beta_k$ (колебательная граница устойчивости), то функция D ($j\omega$) при $\omega = 0$ или $\omega = \beta_k$ обратится в нуль.

2.2 Содержание домашнего задания

Определить устойчивость САУ тремя способами – с помощью:

1. Критерия Гурвица;
2. Критерия Рауса;
3. Критерия Михайлова.

Варианты заданий:

№ варианта	Характеристический полином системы управления
1	$A(p)=4*p^5+8*p^4+9*p^3+2*p^2+2*p+5$
2	$A(p)=p^5+5*p^4+3*p^3+3*p^2+2*p+6$
3	$A(p)=8*p^5+5*p^4+6*p^3+2*p^2+2*p+1$
4	$A(p)=p^5+3*p^4+5*p^3+4*p^2+2*p+1$
5	$A(p)=3*p^5+8*p^4+9*p^3+p^2+2*p+7$
6	$A(p)=2*p^5+8*p^4+5*p^3+5*p^2+p+9$
7	$A(p)=p^5+3*p^4+7*p^3+5*p^2+2*p+1$
8	$A(p)=6*p^5+5*p^4+5*p^3+2*p^2+2*p+7$
9	$A(p)=3*p^5+p^4+7*p^3+2*p^2+p+1$
10	$A(p)=p^5+p^4+4*p^3+2*p^2+3*p+1$
11	$A(p)=2*p^5+2*p^4+5*p^3+4*p^2+2*p+1$
12	$A(p)=p^5+p^4+4*p^3+3*p^2+2*p+1$
13	$A(p)=2p^5+p^4+7*p^3+p^2+2*p+6$
14	$A(p)=2*p^5+2*p^4+8*p^3+6*p^2+2*p+1$
15	$A(p)=4*p^5+5*p^4+8*p^3+6*p^2+p+2$
16	$A(p)=p^5+p^4+7*p^3+6*p^2+4*p+5$
17	$A(p)=6*p^5+7*p^4+7*p^3+6*p^2+2*p+1$
18	$A(p)=p^5+2*p^4+6*p^3+7*p^2+6*p+2$
19	$A(p)=p^5+7*p^4+5*p^3+7*p^2+p+1$
20	$A(p)=2*p^5+5*p^4+6*p^3+7*p^2+2*p+1$
21	$A(p)=p^5+3*p^4+6*p^3+6*p^2+p+2$
22	$A(p)=p^5+3*p^4+5*p^3+6*p^2+5*p+2$
23	$A(p)=3*p^5+8*p^4+5*p^3+9*p^2+p+2$
24	$A(p)=2*p^5+3*p^4+5*p^3+4*p^2+2*p+1$
25	$A(p)=2*p^5+3*p^4+4*p^3+5*p^2+2*p+2$
26	$A(p)=4*p^5+6*p^4+7*p^3+7*p^2+3*p+1$
27	$A(p)=3*p^5+6*p^4+7*p^3+5*p^2+2*p+1$

№ варианта	Характеристический полином системы управления
28	$A(p)=2*p^5+3*p^4+7*p^3+6*p^2+3*p+3$
29	$A(p)=2*p^5+7*p^4+4*p^3+8*p^2+p+2$
30	$A(p)=4*p^5+6*p^4+8*p^3+4*p^2+p+2$
31	$A(p)=3*p^5+5*p^4+5*p^3+5*p^2+2*p+1$
32	$A(p)=2*p^5+2*p^4+4*p^3+3*p^2+2*p+2$
33	$A(p)=p^5+2*p^4+2*p^3+3*p^2+p+1$
34	$A(p)=4*p^5+6*p^4+7*p^3+5*p^2+2*p+1$
35	$A(p)=p^5+3*p^4+3*p^3+7*p^2+2*p+2$
36	$A(p)=6*p^5+7*p^4+5*p^3+5*p^2+p+5$
37	$A(p)=5*p^5+5*p^4+7*p^3+5*p^2+2*p+1$
38	$A(p)=p^5+2*p^4+4*p^3+8*p^2+2*p+4$
39	$A(p)=5*p^5+7*p^4+7*p^3+9*p^2+p+1$
40	$A(p)=p^5+4*p^4+4*p^3+6*p^2+3*p+2$
41	$A(p)=2*p^5+2*p^4+6*p^3+5*p^2+3*p+1$
42	$A(p)=2*p^5+3*p^4+5*p^3+5*p^2+2*p+2$
43	$A(p)=p^5+3*p^4+7*p^3+8*p^2+9*p+2$
44	$A(p)=2*p^5+p^4+5*p^3+2*p^2+3*p+1$
45	$A(p)=4*p^5+3*p^4+6*p^3+4*p^2+p+2$
46	$A(p)=2*p^5+5*p^4+5*p^3+5*p^2+2*p+1$
47	$A(p)=p^5+2*p^4+5*p^3+6*p^2+3*p+2$
48	$A(p)=2*p^5+2*p^4+8*p^3+7*p^2+p+1$
49	$A(p)=p^5+4*p^4+8*p^3+5*p^2+4*p+2$
50	$A(p)=5*p^5+8*p^4+8*p^3+8*p^2+2*p+1$
51	$A(p)=2*p^5+9*p^4+3*p^3+4*p^2+p+2$
52	$A(p)=p^5+5*p^4+9*p^3+7*p^2+p+1$
53	$A(p)=3*p^5+9*p^4+4*p^3+2*p^2+p+2$
54	$A(p)=p^5+2*p^4+8*p^3+8*p^2+2*p+1$
55	$A(p)=2*p^5+2*p^4+5*p^3+5*p^2+p+1$
56	$A(p)=5*p^5+3*p^4+7*p^3+p^2+2*p+2$
57	$A(p)=p^5+3*p^4+4*p^3+8*p^2+2*p+1$
58	$A(p)=p^5+4*p^4+3*p^3+5*p^2+2*p+1$
59	$A(p)=p^5+3*p^4+8*p^3+5*p^2+3*p+1$
60	$A(p)=p^5+p^4+8*p^3+2*p^2+8*p+1$

Пример выполнения задания

Определим устойчивость системы с характеристическим полиномом

$$A(p) = p^5+2*p^4+3*p^3+4*p^2+2*p+1$$

1. Критерий Гурвица

Проверим старший коэффициент $a_5 = 1 > 0$. Составим определители Гурвица для системы 5 порядка:

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_1 = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} \qquad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Рассчитаем значения определителей:

$\Delta_1 = 2 > 0,$
$\Delta_2 = 2*3 – 1*4 = 6 – 4 = 2 > 0,$
$\Delta_3 = 2*3*4 + 0 + 1*1*2 – 0 – 1*4*4 – 2*2*2 = 24 + 2 – 16 – 8 = 2 > 0,$

$$\Delta_4 = 2*\Delta_3 – 1*\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2*2 – (18 +1 – 12 – 4) = 4 – 3 = 1 > 0,$$

$\Delta_5 = 1*\Delta_4 = 1*1 = 1 > 0.$

По критерию Гурвица сделаем вывод: система управления устойчива.

Замечание 1. Если окажется, что какой-либо из определителей меньше нуля, вычисление последующих можно не проводить – система неустойчива.

Замечание 2. Если главный определитель $\Delta_5 = 0$, а все остальные определители неотрицательны, система находится на границе устойчивости.

2. Критерий Рауса

Составим таблицу для системы 5 порядка:

	$C_{00} = a_0$	$C_{01} = a_2$	$C_{02} = a_4$
	$C_{10} = a_1$	$C_{11} = a_3$	$C_{12} = a_5$
$\lambda_2 = \frac{C_{00}}{C_{10}}$	$C_{20} = C_{01} - C_{11} * \lambda_2$	$C_{21} = C_{02} - C_{12} * \lambda_2$	—
$\lambda_3 = \frac{C_{10}}{C_{20}}$	$C_{30} = C_{11} - C_{21} * \lambda_3$	$C_{31} = C_{12}$	—
$\lambda_4 = \frac{C_{20}}{C_{30}}$	$C_{40} = C_{21} - C_{31} * \lambda_4$	—	—
$\lambda_5 = \frac{C_{30}}{C_{40}}$	$C_{50} = C_{31}$	—	—

Рассчитаем содержимое ячеек таблицы:

	$C_{00} = 1$	$C_{01} = 3$	$C_{02} = 2$
	$C_{10} = 2$	$C_{11} = 4$	$C_{12} = 1$
$\lambda_2 = 0{,}5$	$C_{20} = 3 – 4*0{,}5 = 1$	$C_{21} = 2 – 1*0{,}5 = 1{,}5$	—
$\lambda_3 = 2/1 = 2$	$C_{30} = 4 – 1{,}5*2 = 1$	$C_{31} = 1$	—
$\lambda_4 = 1/1 = 1$	$C_{40} = 1{,}5 – 1*1 = 0{,}5$	—	—
$\lambda_5 = 1/0{,}5 = 2$	$C_{50} = 1$	—	—

По критерию Рауса сделаем вывод: система управления устойчива.

Замечание 3. Если окажется, что значение в какой-либо из ячеек затемненного столбца меньше нуля, вычисление последующих можно не проводить – система неустойчива.

Замечание 4. Если $C_{40} = 0$ или $C_{50} = 0$, а остальные значения ячеек затемненного столбца неотрицательны, система находится на границе устойчивости.

3. Критерий Михайлова

Выполним подстановку $p = jw$, где j – мнимая единица, $j^2 = –1$, а w – частота, $w \in [0; \infty)$, выделим действительную и мнимую части

$$A(jw) = (jw)^5 + 2(jw)^4 + 3(jw)^3 + 4(jw)^4 + 2(jw) + 1 = jw^5 + 2w^4 - 3jw^3 - 4w^2 - 2jw + 1$$

$$u(w) = \operatorname{Re} A(jw) = 2w^4 - 4w^2 + 1$$

$$v(w) = \operatorname{Im} A(jw) = w^5 - 3w^3 + 2w$$

и найдем их корни:

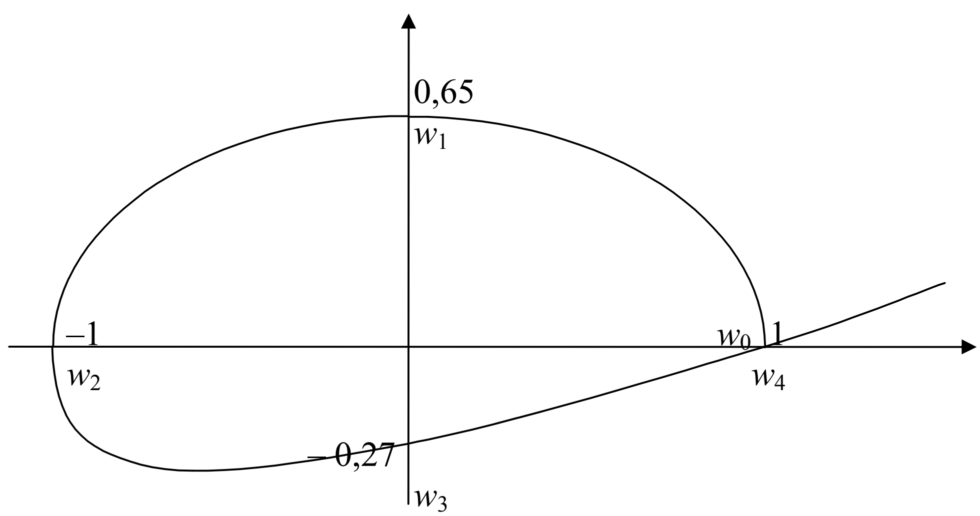
$$u(w) = 0$$
$$2w^4 - 4w^2 + 1 = 0$$
$$t = w^2$$
$$D = 2$$
$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$w_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx \sqrt{1{,}7071} \approx 1{,}3066$$
$$w_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx \sqrt{0{,}2929} \approx 0{,}5412$$

$$v(w) = 0$$
$$w^5 - 3w^3 + 2w = 0$$
$$t = w^2$$
$$w_0 = 0$$
$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$t = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$$
$$w_4 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$$
$$w_2 = \sqrt{1} = 1$$

Индексы при корнях действительной и мнимой частей расставлены в порядке возрастания величины корня. Подставим значения корней в $u(w)$ и $v(w)$ и заполним таблицу:

w	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
u	1	0	-1	0	1
v	0	0,65	0	-0,27	0

Построим параметрический график в плоскости (u, v).



Из графика видно, что система управления устойчива.

Замечание 5. В случае недостатка точек для построения графика можно добавить в таблицу произвольные значения w.

Замечание 6. Если годограф Михайлова проходит через начало координат, система находится на границе устойчивости.

Замечание 7. Если годограф не поворачивается на заданный угол, т.е. не обходит нужное количество квадрантов (5) или обходит их в неправильном порядке, система неустойчива.

Домашнее задание №3
Определение устойчивости замкнутой САУ

3.1 Теоретическое введение

Об устойчивости системы автоматического управления см. п. 2.1.
Формулировку критерия Рауса см. п. 2.1.

Частотный критерий устойчивости Найквиста

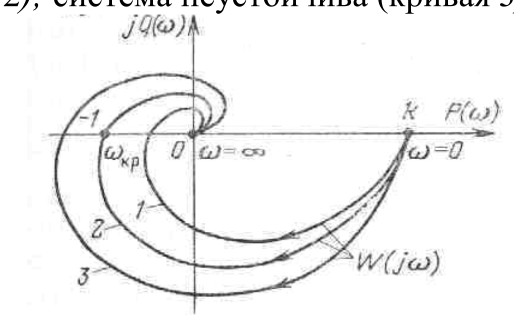
Критерий Найквиста был сформулирован в 1932 г. американским физиком Х. Найквистом. В отличие от критериев Гурвица, Рауса и Михайлова, которые основаны на анализе характеристического уравнения системы, критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости **замкнутой** системы по амплитудно-фазовой характеристике **разомкнутого** контура системы.

В этом заключается существенное преимущество критерия, т.к. построение АФХ разомкнутого контура для большинства реальных систем оказывается проще, чем построение годографа Михайлова. Особенно упрощается это построение для одноконтурных систем, состоящих из типовых звеньев.

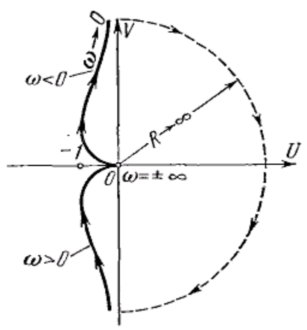
Основная формулировка критерия Найквиста:
Автоматическая система управления устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ разомкнутого контура не охватывает точку с координатами ($-1; j0$).

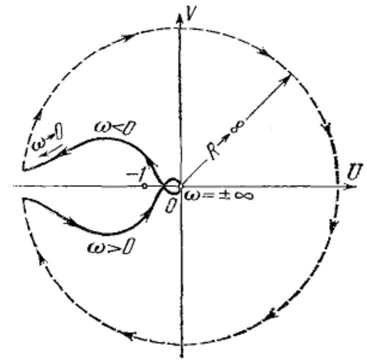
Эта формулировка справедлива для систем, которые в разомкнутом состоянии устойчивы. Таковыми являются большинство реальных систем, состоящих из устойчивых элементов.

На рисунке изображены амплитудно-фазовые характеристики разомкнутого контура, соответствующие трем различным случаям: система устойчива (кривая 1); система находится на колебательной границе устойчивости (кривая 2*);* система неустойчива (кривая *3).*



Для использования изложенного приема применительно к астатическим системам, которые содержат интегрирующее звено, и амплитудно-фазовые характеристики которых начинаются в бесконечно удаленной точке, характеристику W ($j\omega$) предварительно дополняют дугой окружности бесконечно большого радиуса на угол $\pi r/2$, где r – степень астатизма системы (см. рис.)





Для суждения об устойчивости систем, имеющих АФХ сложной конфигурации, когда кривая АФХ пересекает действительную ось левее точки (–1; *j*0) несколько раз, можно также использовать правило переходов, сформулированное советским ученым Я. 3. Цыпкиным: АФХ не охватывает точку (–1; *j*0), т. е. система устойчива, если при возрастании ω разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов АФХ через ось абсцисс слева от точки (-1; *j*0) равна нулю.

Если АФХ начинается или заканчивается на отрезке (- ∞;-1), то считают, что характеристика совершает полперехода.

Частота, при которой амплитудная характеристика $A\ (\omega)$ [модуль функции $W\ (j\omega)$] принимает значение 1, называется частотой среза и обозначается ω_{cp}. Частоту, при которой фазовый сдвиг $\varphi\ (\omega) = -\pi$, обозначают ω_{π}.

Пользуясь введенными обозначениями, можно записать условие нахождения системы на границе устойчивости:

$$\omega_{cp} = \omega_{\pi}$$

Частота, с которой система колеблется на границе устойчивости, называется критической и обозначается $\omega_{\text{кр}}$.

Таким образом, особая роль точки (-1; *j*0) заключается в том, что она, во-первых, соответствует превращению отрицательной обратной связи в положительную, и во-вторых, является граничной между режимами усиления и ослабления сигналов звеном $W\,(j\omega)$.

Иногда на практике встречаются системы, в контуре которых имеется одно или несколько неустойчивых элементов. Такие системы в разомкнутом состоянии неустойчивы.

Для суждения об их устойчивости в замкнутом состоянии используют **(обобщенную) формулировку критерия Найквиста**:

Автоматическая система управления устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика $W\,(j\omega)$ *разомкнутого контура охватывает l/2 раз точку с координатами* (-1; *j*0), *где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутого контура.*

Количество охватов при этом можно определять по правилу Цыпкина как разность между числом положительных и отрицательных переходов.

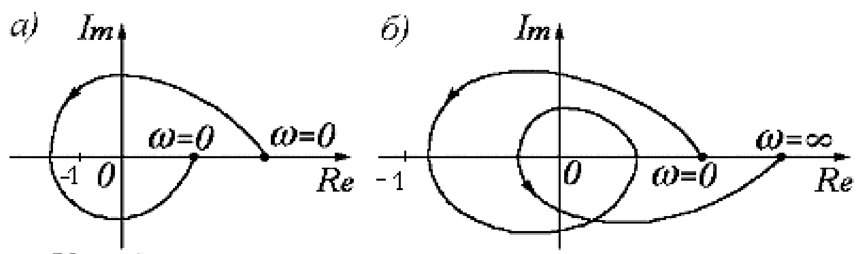
Из обеих формулировок следует, что для суждения об устойчивости системы необходимо предварительно установить устойчивость ее в разомкнутом состоянии (и число правых корней характеристического полинома). Обычно эта вспомогательная задача решается сравнительно легко, **при помощи критерия Рауса**: для этого приравнивают к нулю знаменатель передаточной функции *W(p)* разомкнутого контура и анализируют данное характеристическое уравнение.

Во многих практических случаях устойчивость разомкнутого контура может быть оценена без каких-либо вычислений непосредственно по виду входящих в контур звеньев.

Устойчивость системы управления и запас устойчивости могут быть определены также с использованием пары характеристик: АЧХ и ФЧХ.

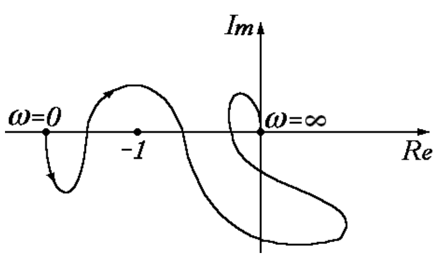
Примеры

1. $m = 2$



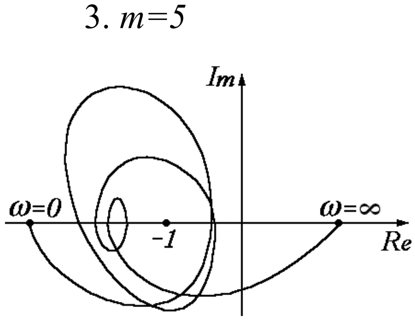
Устойчива неустойчива

2. $m = 2$



$+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\neq\frac{2}{2}\Rightarrow$ Система неустойчива.

3. $m=5$

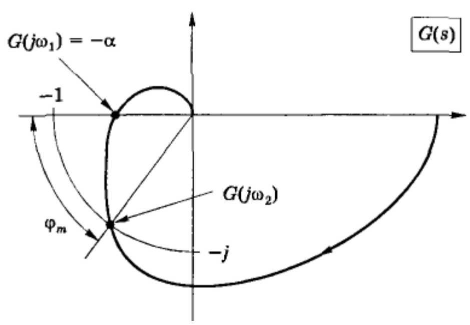


$+\frac{1}{2}+1+1+1-1=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow$ Устойчива.

Запас устойчивости

Чтобы система была работоспособна, она должна быть устойчивой. Но просто устойчивости еще может оказаться недостаточно, и тому есть две причины. Во-первых, устойчивая система кроме всех остальных качеств должна иметь приемлемые временные характеристики. Кроме того, модель, используемая при анализе и синтезе системы управления, никогда не является точной. Следовательно, работа с моделью может показать, что система устойчива, тогда как реальная система окажется неустойчивой. Поэтому обычно требуют, чтобы система не просто была устойчивой, но и обладала некоторым запасом устойчивости.

По этим двум причинам вводится понятие относительной устойчивости системы. Будем характеризовать относительную устойчивость степенью близости диаграммы Найквиста к точке –1. Обычно для этого используются два показателя, приведенные на рисунке.



Первый из этих показателей — это запас устойчивости по амплитуде. Запас по амплитуде определяется как число, на которое должен быть умножен коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости. На рисунке координата точки пересечения диаграммой Найквиста отрицательного направления действительной оси обозначена как $-\alpha$. Если передаточную функцию разомкнутой системы умножить на коэффициент $K = 1/\alpha$, то диаграмма Найквиста пройдет через точку –1, и замкнутая система окажется на границе устойчивости. Поэтому можно дать следующее определение:

Запас устойчивости по амплитуде. Если диаграмма Найквиста для разомкнутой системы пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-\alpha$ и при этом замкнутая система устойчива, то запас по амплитуде равен $1/\alpha$. Если диаграмма Найквиста имеет несколько пересечений отрицательного направления действительной оси, то запас по амплитуде определяется по той точке, которая дает наименьшее значение $1/\alpha$.

Вторым часто используемым показателем относительной устойчивости является запас по фазе:

Запас устойчивости по фазе. Запас по фазе определяется наименьшей величиной угла, на который надо повернуть диаграмму Найквиста, чтобы она прошла через точку -1.

На рисунке запас по фазе обозначен как угол φ_m. Он определяется на той частоте, при которой амплитуда функции $G(j\omega)$ равна единице. Тогда запас по фазе

$$\varphi_m = \arg G(j\omega_2) - 180°.$$

3.2 Содержание домашнего задание

Определить устойчивость замкнутой САУ с помощью критерия Найквиста. Определить запас устойчивости по амплитуде.

Варианты задания:

№ варианта	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$W(p)=2/(p^4+3*p^3+3*p^2+4*p+1)$
2	$W(p)=2/(p^4+4*p^3+3*p^2+4*p+1)$
3	$W(p)=2/(2*p^4+5*p^3+3*p^2+4*p+1)$
4	$W(p)=2/(p^4+2*p^3+4*p^2+4*p+1)$
5	$W(p)=2/(p^4+5*p^3+3*p^2+2*p+2)$
6	$W(p)=1/(p^4+2*p^3+3*p^2+4*p+1)$
7	$W(p)=2/(p^4+2*p^3+4*p^2+3*p+1)$
8	$W(p)=3/(p^4+2*p^3+7*p^2+4*p+3)$
9	$W(p)=2/(p^4+2*p^3+3*p^2+5*p+1)$
10	$W(p)=1/(p^4+4*p^3+3*p^2+3*p+1)$
11	$W(p)=5/(p^4+3*p^3+3*p^2+4*p+1)$
12	$W(p)=5/(p^4+2*p^3+4*p^2+5*p+2)$
13	$W(p)=2/(p^4+3*p^3+3*p^2+4*p+1)$
14	$W(p)=3/(3*p^4+8*p^3+5*p^2+4*p+1)$
15	$W(p)=3/(p^4+2*p^3+5*p^2+4*p+2)$
16	$W(p)=3/(p^4+2*p^3+4*p^2+4*p+1)$
17	$W(p)=1/(p^4+8*p^3+2*p^2+4*p+1)$
18	$W(p)=5/(p^4+2*p^3+3*p^2+p+1)$
19	$W(p)=1/(p^4+5*p^3+6*p^2+4*p+3)$
20	$W(p)=3/(p^4+2*p^3+9*p^2+5*p+3)$
21	$W(p)=2/(p^4+3*p^3+8*p^2+4*p+1)$
22	$W(p)=5/(p^4+6*p^3+7*p^2+4*p+1)$
23	$W(p)=3/(p^4+7*p^3+3*p^2+6*p+1)$
24	$W(p)=5/(p^4+9*p^3+7*p^2+4*p+1)$
25	$W(p)=4/(p^4+6*p^3+5*p^2+8*p+1)$
26	$W(p)=1/(p^4+7*p^3+6*p^2+6*p+2)$
27	$W(p)=2/(p^4+9*p^3+5*p^2+4*p+4)$
28	$W(p)=2/(p^4+3*p^3+3*p^2+4*p+1)$
29	$W(p)=1/(p^4+3*p^3+3*p^2+7*p+1)$

№ варианта	Передаточная функция разомкнутой системы
30	$W(p)=5/(p^4+2*p^3+5*p^2+4*p+1)$
31	$W(p)=2/(p^4+4*p^3+3*p^2+9*p+1)$
32	$W(p)=5/(p^4+2*p^3+5*p^2+4*p+1)$
33	$W(p)=1/(p^4+6*p^3+3*p^2+6*p+1)$
34	$W(p)=5/(p^4+2*p^3+5*p^2+4*p+1)$
35	$W(p)=2/(p^4+6*p^3+8*p^2+4*p+2)$
36	$W(p)=5/(p^4+6*p^3+3*p^2+2*p+1)$
37	$W(p)=4/(2*p^4+5*p^3+3*p^2+2*p+1)$
38	$W(p)=1/(2*p^4+6*p^3+5*p^2+4*p+1)$
39	$W(p)=2/(2*p^4+5*p^3+4*p^2+4*p+1)$
40	$W(p)=3/(2*p^4+7*p^3+5*p^2+8*p+1)$
41	$W(p)=4/(2*p^4+6*p^3+4*p^2+4*p+1)$
42	$W(p)=1/(p^4+6*p^3+7*p^2+8*p+1)$
43	$W(p)=4/(p^4+2*p^3+7*p^2+9*p+1)$
44	$W(p)=1/(2*p^4+5*p^3+4*p^2+5*p+1)$
45	$W(p)=4/(p^4+7*p^3+4*p^2+4*p+1)$
46	$W(p)=4/(3*p^4+6*p^3+5*p^2+4*p+1)$
47	$W(p)=4/(p^4+6*p^3+9*p^2+4*p+1)$
48	$W(p)=1/(p^4+6*p^3+3*p^2+7*p+1)$
49	$W(p)=1/(3*p^4+9*p^3+5*p^2+7*p+1)$
50	$W(p)=3/(p^4+5*p^3+5*p^2+8*p+1)$
51	$W(p)=5/(5*p^4+5*p^3+9*p^2+4*p+3)$
52	$W(p)=5/(p^4+6*p^3+8*p^2+5*p+1)$
53	$W(p)=5/(2*p^4+7*p^3+5*p^2+9*p+1)$
54	$W(p)=3/(3*p^4+4*p^3+6*p^2+4*p+1)$
55	$W(p)=1/(p^4+2*p^3+5*p^2+4*p+1)$
56	$W(p)=4/(2*p^4+2*p^3+8*p^2+4*p+1)$
57	$W(p)=1/(p^4+8*p^3+4*p^2+7*p+1)$
58	$W(p)=5/(4*p^4+8*p^3+6*p^2+4*p+1)$
59	$W(p)=4/(2*p^4+5*p^3+6*p^2+9*p+2)$
60	$W(p)=4/(2*p^4+7*p^3+5*p^2+7*p+1)$

Пример выполнения задания

Определим устойчивость системы с характеристическим полиномом

$$W(p) = 2/(3*p^4+5*p^3+7*p^2+4*p+4)$$

Вначале составим таблицу Рауса для системы 4 порядка:

	$C_{00} = a_0$	$C_{01} = a_2$	$C_{02} = a_4$
	$C_{10} = a_1$	$C_{11} = a_3$	—
$\lambda_2 = \frac{C_{00}}{C_{10}}$	$C_{20} = C_{01} - C_{11} * \lambda_2$	$C_{21} = C_{02}$	—
$\lambda_3 = \frac{C_{10}}{C_{20}}$	$C_{30} = C_{11} - C_{21} * \lambda_3$	—	—
$\lambda_4 = \frac{C_{20}}{C_{30}}$	$C_{40} = C_{21}$	—	—

Рассчитаем содержимое ячеек таблицы:

	$C_{00} = 3$	$C_{01} = 7$	$C_{02} = 4$
	$C_{10} = 5$	$C_{11} = 4$	—
$\lambda_2 = 0{,}6$	$C_{20} = 7 - 4*0{,}6 = 4{,}6$	$C_{21} = 4$	—
$\lambda_3 = 5/4{,}6 = 1{,}087$	$C_{30} = 4 - 4*1{,}087 = -0{,}348$	—	—
$\lambda_4 = 4{,}6/(-0{,}3478) = -13{,}22$	$C_{40} = 4$	—	—

По критерию Рауса сделаем вывод: в разомкнутом состоянии система управления неустойчива, имеет 2 правых корня.

Выполним подстановку $p = jw$, где j – мнимая единица, $j^2 = -1$, а w – частота, $w \in [0; \infty)$, выделим действительную и мнимую части

$$W(jw) = \frac{2}{3(jw)^4 + 5(jw)^3 + 7(jw)^2 + 4(jw) + 4} = \frac{2}{(3w^4 - 7w^2 + 4) - j(5w^3 - 4w)} =$$

$$= \frac{2((3w^4 - 7w^2 + 4) + j(5w^3 - 4w))}{((3w^4 - 7w^2 + 4) - j(5w^3 - 4w))((3w^4 - 7w^2 + 4) + j(5w^3 - 4w))} = \frac{2((3w^4 - 7w^2 + 4) + j(5w^3 - 4w))}{(3w^4 - 7w^2 + 4)^2 + (5w^3 - 4w)^2}$$

$$U(w) = \operatorname{Re} W(jw) = \frac{2(3w^4 - 7w^2 + 4)}{(3w^4 - 7w^2 + 4)^2 + (5w^3 - 4w)^2}$$

$$V(w) = \operatorname{Im} W(jw) = \frac{2(5w^3 - 4w)}{(3w^4 - 7w^2 + 4)^2 + (5w^3 - 4w)^2}$$

и найдем их корни:

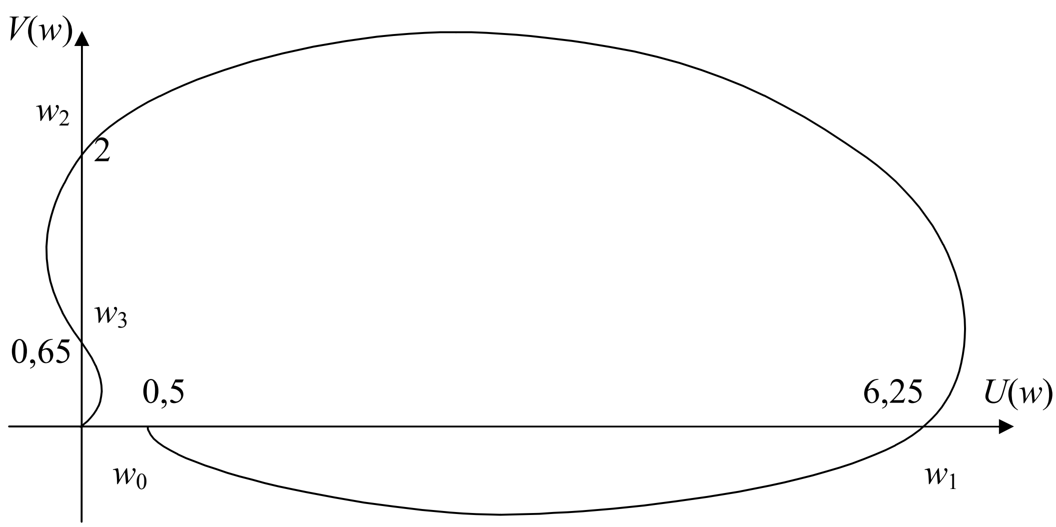
$$U(w) = 0$$
$$3w^4 - 7w^2 + 4 = 0$$
$$t = w^2$$
$$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$$
$$t = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6}$$
$$w_2 = \sqrt{1} = 1$$
$$w_3 = \sqrt{\frac{8}{6}} \approx \sqrt{1{,}3333} \approx 1{,}1547$$

$$V(w) = 0$$
$$5w^3 - 4w = 0$$
$$w_0 = 0$$
$$w_1 = \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}8944$$

Индексы при корнях действительной и мнимой частей расставлены в порядке возрастания величины корня. Подставим значения корней в $U(w)$ и $V(w)$ и заполним таблицу:

w	w_0	w_1	w_2	w_3	∞
U	0,5	6,25	0	0	0
V	0	0	2	0,65	0

Построим параметрический график в плоскости (U, V).



Поскольку разомкнутая система неустойчива, используем вторую (обобщенную) формулировку критерия Найквиста. Из графика видно, что замкнутая система также неустойчива ($l/2 = 1$, но график АФЧХ не охватывает точку (-1, j0)). Запас устойчивости для неустойчивых систем не определяется.

Замечание 1. В случае недостатка точек для построения графика можно добавить в таблицу произвольные значения w.

Замечание 2. Запас устойчивости по амплитуде следует определять только для систем устойчивых в разомкнутом и замкнутом состоянии.

Домашнее задание №4
Определение функции дискретного времени по ее изображению

4.1 Теоретическое введение

Определение z-преобразования функции дискретного времени

Математическое описание процесса цифровой обработки сигналов основано на представлении их в виде функции дискретного времени или числовых последовательностей:

$$x(0), x(1), x(2), x(3),\ldots,x(k),\ldots \tag{1}$$

Целочисленные индексы i=0, 1, 2, 3, …k… имеют смысл текущего времени. Если указать значение периода дискретизации T непрерывного сигнала x(t), то устанавливается однозначная связь между этим сигналом и числовой последовательностью. При этом каждое число последовательности x(k) равно значению непрерывного сигнала в момент времени t = kT:

$$x(t) = x(kT). \tag{2}$$

Это равенство показывает, что одной и той же последовательности x(k) соответствуют различные непрерывные сигналы, отличающиеся только масштабом по оси времени. Последовательность (1) имеет своим z-преобразованием следующее выражение:

$$\dot{X}(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z + ...x(k)z^{-1} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{3}$$

Это выражение называется прямым z-преобразованием функции дискретного времени или числовой последовательности x(k). Из этого выражения следует, что для того, чтобы заданной функции (последовательности) x(k) поставить в соответствие z-преобразование, необходимо каждый отсчет функции (член последовательности) умножить на некоторую комплексную переменную z^k, где k – номер отсчета функции, а затем сложить результаты. При этом каждое произведение, входящее в сумму (3), однозначно соответствует определенному отсчету функции. Показатель степени k говорит о месте коэффициента в последовательности чисел.

Зададим, например, некоторую числовую последовательность x(k) = (0.1; 2.3; 1.05…). Этой последовательности соответствует z-преобразование:

$$X(z) = 0.1 + 2.3\ z^{-1} + 1.05\ z^{-2} + \ldots$$

Произведение 1.05 z^{-2} означает, что в исходной последовательности x(k) число 1.05 идет вторым после начального (нулевого по счету) числа 0.1.

Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять знак соответствия между функцией дискретного времени и ее z-преобразования: x(k) → X(z).

Z-преобразование позволяет достаточно просто отразить основные операции цифровой обработки сигналов: задержки на определенное число тактов, умножения отсчетов сигнала на весовые коэффициенты и сложения. Так, для единичного импульса, аналогичного δ-функции и имеющего ненулевое значение только для k=0, прямое z-преобразование X(z) = 1. Для единичной ступенчатой последовательности, принимающей значения, равные единице для всех положительных k, z-преобразование

$$\dot{X}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \text{, т.е.} \tag{4}$$

является суммой членов геометрической прогрессии.

Использование формул бесконечных рядов дает еще ряд z-преобразований, приведенных в таблице соответствия.

Основные свойства прямого z-преобразования

В дальнейшем анализе сигналов и дискретных цепей оказываются важными три следующих свойства z-преобразования.

<u>1) Свойство линейности.</u> Если дискретным функциям f(k) и g(k) соответствуют их z-преобразования F(k) и G(k), то линейной комбинации A f(k) + B g(k) соответствует линейная комбинация z-преобразований A F(z) + B G(z).

<u>2) Задержка сигнала на целое число периодов дискретизации.</u> Согласно определению прямого z-преобразования (3) дискретному сигналу f(k), сдвинутому на время m в сторону запаздывания, т е. сигналу f(k-m) соответствует z-преобразование $F(z)z^{-m}$, где F(z) ← f(k).

<u>3) Дискретная свертка – эквивалент интеграла наложения для аналоговых цепей.</u> В области оригиналов дискретная свертка записывается так:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)g(k-i)$$

Имея z-преобразования X(z) ← x(k) и G(z) ← g(k), получим z-преобразование свертки как произведение z-преобразований:

$$Y(z)=X(z)G(z) \tag{5}$$

Методы вычисления обратного z-преобразования

Для нахождения функции дискретного времени x(k) по заданному z-преобразованию X(z) надо вычислить обратное z-преобразование:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi g}\int_{c} \dot{X}(z) z^{k-1} dz \tag{6}$$

Этот интеграл равен сумме вычетов функции $X(z)z^{k-1}$ в полюсах внутри контура С. Если в точке z_0 функция $X(z)z^{k-1}$ имеет полюс порядка s, то ее можно представить так

$$X(z)z^{k-1}=\psi(z)/(z- z_0)^s .$$

Вычет в точке z_0 дается формулой

$$\operatorname{Re} s\left[\dot{X}(z)z^{k-1}\right]=\frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-l}}{dz^{s-l}}\psi(z)\Big|_{x=x^a}$$

Если в точке z_0 имеется только полюс первого порядка, то

$$\operatorname{Re} s\,[X(z)z^{k-1}]=\psi(z_0).$$

Кроме того, для нахождения функции x(k) по ее заданному z-преобразованию X(z) существует ряд приемов, основанных на свойствах z-преобразования. Эти приемы можно разделить на две группы:

a) аналитические методы отыскания оригиналов x(k).
b) методы численного определения отсчетов функции x(k).

Использование таблиц z-преобразования

Этот прием основан на сопоставлении заданных численных коэффициентов перед степенями z-преобразования дискретной функции времени и аналогичных коэффициентов в табличных формулах z-преобразований.

Пусть, например, задано z-преобразование сигнала

$$\dot{X}(z)=\frac{3z}{z^2+0{,}8} \qquad \textbf{(7)}$$

Требуется найти в аналитическом виде оригинал, соответствующий этому z-преобразованию. Замечая, что высшая степень z в числителе - первая, а знаменателя - вторая и свободный член знаменателя меньше единицы находим в таблице соответствия дискретных функций и их z-преобразовании изображение, соответствующее этим условиям:

$$\dot{X}(z)=\frac{Aze^{-\alpha T}\sin\omega T}{z^2-2e^{-\alpha T}z\cos\omega T+e^{-2\alpha T}} \qquad (8)$$

Такому изображению соответствует оригинал

x(kT)=Ae-kαT sin(kωT). (9)

Сопоставляя коэффициенты перед первой степенью z в (7) и (8) , а также свободные члены, получим

0 = 2e-αT cos ωT

$$3 = Ae\text{-}\alpha T \sin \omega T \qquad (10)$$
$$0.8 = e\text{-}2\alpha T$$

Решение полученной системы уравнений относительно параметров A, α, ω позволяет аналитически определить искомый дискретный сигнал.
Так из третьего уравнения системы (10) получаем:

$$e^{-\alpha T} = (0,8)^{1/2} = 0,895$$

Отсюда $\alpha T = -\ln(0.895) = 0.11$. Подставляя $e^{-\alpha T} = 0,895$ в первое уравнение, получаем $0=2*0,895\cos \omega T$, что дает $\omega T=\pi/2+m*\pi (m=0,1\ldots)$.

Используя второе уравнение, получаем m=0, поскольку A>0 и $\sin \omega T > 0$. Отсюда $\omega=\pi/2T$. Так как частота дискретизации $\omega_д=2\pi/T$, то частота гармонического сигнала оказывается в 4 раза меньше частоты дискретизации. Учитывая, что $\sin \omega T=1$, определяем амплитуду сигнала:

$$A = 3/ e^{-\alpha T} = 3/0,895 = 3,35.$$

Таблица 4. Изображение решетчатых функций

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	Простое z – преобразование
оригинал	Преобразование Лапласа		
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$	—	$\delta_0[n]$	1
$1(t) - 1(t-T)$	$\frac{1-e^{-pT}}{p}$	$-\Delta 1[n] = \nabla 1[n-1]$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1[n]$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(nT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{3!(z-1)^4}$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!}$	$\frac{T^k z R_k(z)}{k!(z-1)^{k+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$

Таблица 4. Продолжение

Производящая непрерывная функция		Несмещенная решетчатая функция	Простое z – преобразование
оригинал	Преобразование Лапласа		
$\frac{t^2}{2!}e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(nT)^2}{2!}e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$
$\frac{t^k}{k!}e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{k+1}}$	$\frac{(nT)^k}{k!}e^{-\alpha nT}$	$\frac{zR_k(d^{-1}z)d^k}{k!(z-d)^{k+1}}$
$\sin\pi\frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2+\pi^2T^{-2}}$	$\sin\pi n=0$	0
$\cos\pi\frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2+\pi^2T^{-2}}$	$\cos\pi n=(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
$\sin\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}$	$\frac{0{,}5\pi T^{-1}}{p^2+0{,}25\pi^2T^{-2}}$	$\sin\frac{\pi}{2}n$	$\frac{z}{z^2+1}$
$\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2+0{,}25\pi^2T^{-2}}$	$\cos\frac{\pi}{2}n$	$\frac{z^2}{z^2+1}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\sin\beta nT$	$\frac{z\sin\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$\cos\beta nT$	$\frac{z^2-z\cos\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$
$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha nT}\sin\beta nT$	$\frac{zd\sin\beta T}{z^2-2zd\cos\beta T+d^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha nT}\cos\beta nT$	$\frac{z^2-zd\cos\beta T}{z^2-2zd\cos\beta T+d^2}$

Таким образом, для заданного z-преобразования (7) дискретный сигнал имеет вид:

$$x(k) = 3.35\ e^{-0.11k}\sin(k\ \pi/2) = 3.35*(0.895)^k \sin(k\ \pi/2).$$

Приведение исходного z-преобразования к табличному виду с использованием свойств z-преобразования.

Пусть задано некоторое z-преобразование, например:

$$\dot{X}(z) = \frac{3z^2 - z - 1}{2z^2 + 1}$$

Его можно представить в виде суммы z-преобразований:

$$\dot{X}(z)=\dot{X}_1(z)+\dot{X}_2(z)+\dot{X}_3(z)=\frac{3z^2}{2z^2+1}-\frac{z}{2z^2+1}-\frac{1}{2z\ \ +1} \qquad (11)$$

Для изображения $X_1(z)$ применяется нормирование коэффициентов перед старшей степенью z, т.е.

$$\dot{X}_1(z)=\frac{3}{2}\cdot\frac{z^2}{z^2+0{,}5}$$

Результат произведенного нормирования указывает на необходимость использовать табличной формулы

$$\dot{X}(z)=\frac{A_1z^2-A_1ze^{-\alpha T}\cos\omega T}{z^2-2e^{-\alpha T}z\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$$

Для нее составляется и решается система уравнений:

$A_1 = 1$,
$A_1e^{-\alpha T}\cos\omega T = 0$,
$e^{-2\alpha T} = 0.5$.

в результате получаем в аналитическом виде оригинал

$$\dot{X}_1(z)=\frac{3}{2}\cdot A_1e^{-\alpha kT}\cos(k\omega T)$$

Аналогично производится обратное преобразование для второй дроби в выражении (11):

$$\dot{X}_2(z)=\frac{z}{2z^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z^2+0.5} \qquad (12)$$

Изображению (12) будет соответствовать оригинал:

$$x_2(k)=\frac{1}{2}A_2e^{-\alpha kT}\sin(k\omega T)$$

С целью приведения третьей дроби в выражении (11) к табличному виду, умножим и разделим ее на переменную z:

$$\dot{X}(z)=\frac{1}{2z^2+1}=\frac{z}{2z^2+1}\cdot z^{-1} \qquad (13)$$

Сравнение выражений (12) и (13) показывает, что $X_3(z)$ отличается от $X_2(z)$ только сдвигом во времени на величину T. Поэтому:

$$x_3(k)=\frac{1}{2}\cdot A_2\cdot e^{-\alpha(k-1)T}\sin\left[(n-1)\omega T\right]$$

Это слагаемое определено только для $k\geq1$,поэтому для k =0 существуют только $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Искомый сигнал в этом случае можно записать двумя способами:

$$1)\, x(k)=\begin{cases} x_1(k)+x_2(k) & для\, \mathrm{k}=0 \\ \mathrm{x}_1(k)+x_2(k)+x_3(k) & для\, k\geq 1 \end{cases}$$

$$2)\, x(k)=\left[x_1(k)+x_2(k)\right]\cdot 1(k)+x_3(k)\cdot 1(k-1)$$

Метод разложения на простые дроби

Представим z-преобразование функции x(к) дробно-рациональной функцией :

$$\dot{X}(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_0 z^N+a_1 z^{N-1}+a_2 z^{N-2}+\ldots a_N}{b_0 z^M+b_1 z^{M-1}+b_2 z^{M-2}+\ldots b_M}$$

в которой для z-преобразования реальных сигналов (k≥0) выполняется условие M>N. Найдем корни знаменателя дробно-рациональной функции X(z). При этом отношение полиномов A(z) и B(z) может быть представлено в виде суммы простых дробей. Возможны два варианта такого представления:

a) Корни простые (все z_i разные). В этом случае

$$\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{C_1 z}{z-z_1}+\frac{C_2}{z-z_2}+\frac{C_3 z}{z-z_3}+\ldots+\frac{C_\mathrm{n} z}{z-z_n} \qquad (14)$$

где C_i действительные коэффициенты.

Каждый член суммы (14) имеет табличное соответствие оригиналу

$$\frac{C_i z}{z-z_i}\leftrightarrow C_i x_i(k)$$

Воспользовавшись свойством линейности z-преобразования, получаем, что искомый оригинал

$$x(k)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k)$$

b) Корни кратные.

Если среди корней знаменатели B(z) имеется корень z_i, кратности l, то среди простых дробей появляются при разложении члены вида

$$\frac{C_1 z}{z-z_i};\frac{C_2 z}{(z-z_i)^2};\ldots.\frac{C_p z}{(z-z_i)^1}$$

4.2 Задание: Определить функцию дискретного времени по ее изображению.

Варианты задания:

Вариант	Изображение
1	X(z)=(z^2 +4)/(z^2 -2*z+1)
2	X(z)=(3*z^2 +5*z+4)/(z^2 +6*z+9)
3	X(z)=(7*z^2 +2*z)/(4*z^2 -16*z+16)

4	$X(z)=(3.1*z^2+0.5*z)/(z^2+2*z+1)$
5	$X(z)=(z^2+z+7)/(5z^2+6*z+1)$
6	$X(z)=(6*z^2-z-4)/(3*z^2+10*z+8)$
7	$X(z)=(0.75*z^2+0.35*z+2)/(4*z^2+z-5)$
8	$X(z)=(9*z+3)/(z^2+10*z+25)$
9	$X(z)=(2*z^2+z)/(z^2+7*z+6)$
10	$X(z)=(5*z^2+5*z)/(7*z^2+6*z-1)$
11	$X(z)=(7*z^2+5*z+3)/(3*z^2+5*z+2)$
12	$X(z)=(0.25*z^2+0.25)/(z^2+6*z+5)$
13	$X(z)=(6*z^2+7*z)/(5z^2+z-4)$
14	$X(z)=(2*z^2+3)/(z^2+16*z+64)$
15	$X(z)=(3*z^2+3*z+1)/(2*z^2+4*z+2)$
16	$X(z)=(4*z^2+5*z)/(4*z^2+5*z+1)$
17	$X(z)=(z^2+7)/(2*z^2+3*z-2)$
18	$X(z)=(3*z^2+3)/(3*z^2+7*z+2)$
19	$X(z)=(10*z^2+5*z+4)/(4*z^2+6*z+2)$
20	$X(z)=(10*z^2+8*z+7)/(6*z^2+7*z+1)$
21	$X(z)=(9*z+3)/(2*z^2+7*z+3)$
22	$X(z)=(2*z^2+5*z)/(3*z^2+5*z+2)$
23	$X(z)=(z^2+5*z+1)/(3*z^2+2*z-1)$
24	$X(z)=(4*z^2+z+4)/(z^2+z-2)$
25	$X(z)=(8*z^2+4)/(3*z^2+9*z+6)$
26	$X(z)=(9*z+1)/(z^2+6*z+5)$
27	$X(z)=(8*z^2+6*z+1)/(3z^2+5*z+2)$
28	$X(z)=(3*z^2+7*z)/(1z^2+2*z-3)$
29	$X(z)=(z^2+9)/(5*z^2+z-4)$
30	$X(z)=(7*z^2+5*z+2)/(7*z^2+6*z-1)$
31	$X(z)=(z^2+5)/(5*z^2+6*z+1)$
32	$X(z)=(7*z^2+6*z+1)/(2*z^2+7*z+3)$
33	$X(z)=(5*z+4)/(-7*z^2+6*z+1)$
34	$X(z)=(9*z^2+9*z+1)/(4*z^2+z-5)$
35	$X(z)=(3*z^2+5*z+4)/(6*z^2+1*z-1)$
36	$X(z)=(5*z+8)/(2*z^2+z-3)$
37	$X(z)=(3*z^2+7*z+4)/(3*z^2+5*z+2)$
38	$X(z)=(9*z^2+5*z+7)/(2*z^2+5*z+3)$
39	$X(z)=(3*z^2+z+3)/(z^2+3*z+2)$
40	$X(z)=(0*z^2+7*z+2)/(2*z^2+3*z+1)$
41	$X(z)=(3*z^2+9*z+8)/(1*z^2+3*z+2)$
42	$X(z)=(3*z^2+z+4)/(6*z^2+7*z+2)$
43	$X(z)=(3*z^2+6*z+9)/(3*z^2+7*z+4)$
44	$X(z)=(3*z^2+5*z+3)/(4*z^2+7*z+3)$
45	$X(z)=(9*z^2+5*z+4)/(5*z^2+3*z-8)$

46	X(z)=(2*z^2 +6*z)/(-8*z^2 +3*z+5)
47	X(z)=(3*z^2 +5*z+8)/(2*z^2 +7*z+6)
48	X(z)=(2*z^2 +3*z+7)/(3*z^2 +8*z-3)
49	X(z)=(9*z^2 +3*z+4)/(-3*z^2 +8*z+3)
50	X(z)=(3*z^2 +5*z+2)/(6*z^2 +5*z-1)
51	X(z)=(3*z^2 +6*z+3)/(-z^2 +5*z+6)
52	X(z)=(3*z^2 +5*z+7)/(3*z^2 +5*z-2)
53	X(z)=(8*z^2 +7*z+9)/(-2*z^2 +5*z+3)
54	X(z)=(3*z^2 +8*z+8)/(3*z^2 +4*z+1)
55	X(z)=(6*z^2 +5*z+6)/(-8*z^2 +2*z+1)
56	X(z)=(8*z^2 +7*z+3)/(4*z^2 +2*z-2)
57	X(z)=(7*z^2 +9*z+4)/(z^2 +2*z-8)
58	X(z)=(3*z^2 +5*z+1)/(-2*z^2 +2*z+4)
59	X(z)=(9*z^2 +8*z+2)/(-3*z^2 +2*z+1)
60	X(z)=(4*z^2 +6*z+9)/(1*z^2 +2*z-3)

Примеры выполнения задания:
Пример 1.

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 - 2{,}2z}{z^2 - 1.4z + 0.45}$$

Найдем корни знаменателя:

$$z^2 - 1.4z + 0.45 = 0.$$

Из этого уравнения получаем $z_{1,2} = 0.7 \pm 0.2$. Представим X(z) в виде суммы простых дробей

$$\dot{X}(z) = \frac{z^2 - 2.2z}{(z-0.5)(z-0.9)} = \frac{C_1 z}{z-0.5} + \frac{C_2 z}{z-0.9} \tag{15}$$

в которой значения коэффициентов C_1 и C_2 пока не известны. Приведем (15) к общему знаменателю:

$$\dot{X}(z) = \frac{C_1 z(z-0.9) + C_2 z(x-0.5)}{(z-0.5)(z-0.9)} = \frac{(C + C_2)z^2 - (0.9C_1)z^2 - (0.9C_1 + 0.5C_2)z}{(z-0.5)(z-0.9)} \tag{16}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в числителях левой части (15) и правой части(16), получим систему

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$0.9C_1 + 0.5C_2 = 2.2$$

Решение этой системы дает $C_1 = 4.25$, $C_2 = –3.25$. Следовательно,

$$\dot{X}(z) = \frac{4.25z}{z-0.5} - \frac{3.25z}{z-0.9}$$

Используя таблицу соответствия находим

$$x(k)=4.25*(0.5)^k-3.25*(0.9)^k.$$

Пример 2.

$$\dot{X}(z)=\frac{3z^2-3.1z+0.25}{x^2-1.4z+0.45}$$

Знаменатель здесь такой же, как и в первом примере. Поэтому корни знаменателя уже известны: $z_1=0.5$, $z_2=0.9$.

Если разложение на простые дроби искать в той же форме (14), то после приведения к общему знаменателю в числителе не окажется свободного члена (z^0). Поэтому необходимо искать разложение в такой форме, чтобы после приведения в числителе появлялся свободный член:

$$\dot{X}(z)=\frac{C_1 z}{z-z_1}+\frac{C_2 z}{z-z_2}+\frac{C_3}{z-z_1} \qquad (17)$$

Нетрудно видеть, что запись данной формы (17) несимметрична относительно корней z_1 и z_2. Возникает неопределенность, какой из корней 0.5 или 0.9 считать z_1, а какой z_2. В зависимости от выбора будем получать разные разложения и, как следствие, разные записи оригинала x(k). С другой стороны, фактическое значение оригинала не должно зависеть от порядка нумерации корней.

Сравним все последовательные выкладки при двух возможных выборах записи:

$$\dot{X}_1(z)=\frac{C_1 z}{z-0.9}+\frac{C_2 z}{z-0.5}+\frac{C_3}{z-0.9},$$

$$\dot{X}_2(z)=\frac{A_1 z}{z-0.9}+\frac{A_2 z}{z-0.5}+\frac{A_3}{z-0.5}$$

Приведение к общему знаменателю дает:

$$\dot{X}_1(z)=\frac{C_1 z^2-0.5C_1 z+C_3 z^2-0.9C_2 z+C_3 z-0.5C_3}{(z-0.9)(z-0.5)}$$

$$\dot{X}_2(z)=\frac{A_1 z^2-0.5A_1 z+A_2 z_2-0.9A_2 z+A_3 z-0.9A_3}{(z-0.9)(z-0.5)}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях z, получим для каждой формы записи систему уравнений:

$C_1+C_2=3$	$-A_1+A_2=3$
$-0.5C_1-0.9C_2+C_3=-3.1$	$-0.5A_1-0.9A_2+A_3=-3.1$
$-0.5C_3=0.25$	$-0.9A_3=0.25$

Решение этих систем уравнений дает следующие значения коэффициентов:

$C_1=0.25$; $C_2=2.75$; $C_3=-0.5$.

$A_1=0.11/0.36$; $A_2=1.19/0.36$; $A_3=-0.25/0.9$.

Переходя от z-преобразования к оригиналу, получим две формы записи:

$x_1(k)=[0.25*(0.9)^k+2.75*(0.5)^k]*1(k)-0.5*(0.9)^{k-1}*1(k-1)$,
$x_2(k)=[-(0.11/0.36)*(0.9)^k+(1.19/0.36)*(0.5)^k]*1(k)-(0.25/0.9)*(0.5)^k*1(k-1)$.

Введение сомножителей 1(k) и 1(k-1) показывает, какая из функций дискретного времени определена для k=0, 1,2.., а какая сдвинута на один такт и определена только для k≥1. Сравним значения оригиналов $x_1(k)$ и $x_2(k)$ для отдельных значений аргумента k.

При k =0

$$x_1(0)=0.25+2.75=3;\ x_2(0)=-(0.11/0.36)+(1.19/0.36)=3.$$

При k>1

$x_1(k)=0.25*(0.9)^k-0.5*(0.9)^k * (0.9)^{-1}+2.75*(0.5)^k=-0.3056*(0.9)^k+2.75*(0.5)^k$.
$x_2(k)=-(0.11/0.36)*(0.9)^k+(1.19/0.36)*(0.5)^k-(0.25/0.9)*(0.5)^k*(0.5)^{-1}=-0.3056*(0.9)^k+2.75*(0.5)^k$.

Как видим, оба оригинала $x_1(k)$ и $x_2(k)$ совпадают в каждой точке и, несмотря на разную форму записи, определяют одну и ту же функцию дискретного времени.

Пример 3.

$$\dot{X}(z)=\frac{z^2+0.45}{z^2-0.25z+0.25} \tag{18}$$

Корни знаменателя: $z_{1,2}=0.5$, l=2.
Разложение на простые дроби будет иметь вид

$$\dot{X}(z)=\frac{C_1 z}{z-0.5}+\frac{C_2 z}{(z-0.5)^2}+\frac{C_3}{z-0.5}$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\dot{X}(z)=\frac{C_1 z^2-0.5C_1 z+C_2 z+C_3 z-0.5C_3}{(z-0.5)^2} \tag{19}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях z в числителях (18) и (19), составим систему:

$$C_1=1;$$
$$-0.5C_1+C_2+C_3=0;$$
$$-0.5C_3=0.45.$$

Решение этой системы дает: $C_1=1$, $C_2= 1.4$, $C_3=-0.9$.
Подставляя полученные коэффициенты в разложение, окончательно получаем:

$$\dot{X}(z)=\frac{z}{z-0.5}+\frac{1.42}{(z-0.5)^2}-\frac{0.9}{z-0.5}$$

Этому разложению соответствует оригинал:

$$x(k)=[(0.5)^k+1.4k(0.5)^{k-1}]*1(k)-0.9(0.5)^{k-1}1(k-1).$$

Список литературы

1. **Бесекерский, В.А.** Теория систем автоматического управления [Текст] /Бесекерский В.А., Попов Е.П. – СПб: Изд-во «Профессия», 2004.
2. **Ерофеев, А.А.** Теория автоматического управления [Текст]. – СПб, «Политехника», 2003.
3. **Брюханов, В.Н.** Теория автоматического управления [Текст]: Учебник для вузов /Брюханов В.Н., Косов М.Г., Протопопов С.П. и др.; под редакцией Ю.М. Соломенцева. – М.: Высшая школа, 1999.
4. **Семенов, В.В.** Математическая теория управления в примерах и задачах [Текст]: Учебное пособие. / Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бартаковский А.С. – М.: Издательство МАИ, 1997.
5. **Кроссовского, А.А.** Справочник по теории автоматического управления [Текст] / Под редакцией Кроссовского А.А. – М.: Наука, 1987.
6. **Нетушила, А.В.** Теория автоматического управления [Текст]: Учебник для вузов. /Под ред. А.В. Нетушила. – М., Высшая школа, 1976.

Учебное издание

Халапян Сергей Юрьевич

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
по выполнению домашних заданий

Редактор: Иванова Н.И.
Компьютерный набор: Халапян С.Ю.
Корректор: Иванова Н.И.

Подписано в печать___________ Бумага для множительной техники
Формат _______ Усл. печ. л.________Тираж _____ экз. Заказ_______

Отпечатано с авторского оригинала
в отделе оперативной печати СТИ МИСиС
г. Старый Оскол, м-н Макаренко 40