

М  
МЕТОДИЧЕСКИЕ  
УКАЗАНИЯ

КИНЕМАТИКА

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2002

Министерство образования РФ

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

КИНЕМАТИКА

Методические указания  
к выполнению курсовой работы

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2002

## Содержание

Общие указания.....	3
Задача 1. Исследование движения точки при координатном способе задания ее движения.....	5
1.1. Условия задачи.....	5
1.2. Порядок выполнения работы.....	7
1.3. Пример выполнения задания.....	7
Задача 2. Исследование движения звеньев плоского механизма.....	13
2.1. Условия задачи.....	13
2.2. Порядок выполнения работы.....	13
2.3. Пример выполнения задания.....	16
Список литературы.....	25

Редактор И. Г. Скачек

ЛР № 020617 от 24.06.98 г.

---

Подписано в печать 24.01.02. Формат 60x84  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,75.

Тираж 600 экз. Заказ 201

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5

Кинематика: Методические указания к выполнению курсовой работы / Сост.: Н. Б. Новиков, В. Ю. Скворцов, В. А. Евгеньев. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. 28 с.

Курсовая работа является основной формой самостоятельной работы студентов по курсу «Теоретическая механика» и имеет целью закрепление навыков к практическому применению теории по разделу «Кинематика». Рассматриваются две задачи по темам: «Кинематика точки» и «Плоское движение твердого тела».

Предназначены для студентов всех факультетов и специальностей СПбГЭТУ «ЛЭТИ», изучающих кинематику в курсе «Теоретическая механика».

Утверждено

редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Курс теоретической механики имеет целью дать студентам знание основных законов механического движения материальных тел и систем тел под действием приложенных к ним сил, а также привить навыки к использованию этих законов при решении теоретических и практических задач в различных областях физики и техники.

При выполнении представленных заданий необходимо проанализировать движение точки и элементов механической системы. Практическое знание законов кинематики позволит в дальнейшем перейти к решению задач динамики сложных систем, что, в конечном счете, и является целью курса теоретической механики.

В данных методических указаниях использованы материалы работ [1], [2].

При выполнении курсовой работы должны быть соблюдены следующие требования:

1. Работу необходимо оформить на листах формата А4 и затем скрепить их. Титульный лист должен иметь следующий вид:

**С.-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ»**

**Кафедра .....**

**Курсовая работа по теоретической механике**

**Задание №....., вариант №.....**

**Выполнил студент .....**

(факультет, курс, группа, фамилия, имя, отчество)

**Руководитель .....**

**Дата .....**

2. Текст каждой задачи переписывается полностью. Исходные данные, используемые при решении (числовые значения величин, заданные уравнения и т. п.), должны быть приведены в виде таблицы.

3. Решение каждой задачи сопровождается краткими пояснениями. Как минимум, должны быть названы буквенные обозначения всех величин.

4. Все вычисления следует выполнять в общем виде, приводя полностью производимые промежуточные преобразования. Числовые значения величин подставляются в окончательные результаты преобразований, причем строго в

том порядке, в котором записаны буквенные значения. При вычислении кинематических характеристик движения материальных объектов обязательно приводить все необходимые векторные формулы.

5. При выполнении курсовой работы все вычисления с точностью до трех верных знаков приводятся с достаточной подробностью, исключаяющей необходимость восстановления опущенных (не приведенных) промежуточных выкладок во время проверки.

6. Чертежи вычерчиваются на миллиметровке аккуратно и точно, с соблюдением выбранного масштаба. Выбранные масштабы длин, скоростей, ускорений, сил изображаются на соответствующем чертеже. На чертеже должны быть обозначены все величины (расстояния, углы и т. д.), используемые при решении задачи, а также все найденные величины (векторы скорости, ускорения и т. д.), причем последние выделяются более жирными линиями или линиями не черного цвета. Над буквами, обозначающими векторы, надо ставить черточки.

Все необходимые для выполнения работы формулы и определения приведены в примерах выполнения заданий.

## Задача 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

### 1.1. Условия задачи

По заданным кинематическим уравнениям движения точки (табл. 1.1) определить:

- 1) траекторию точки;
- 2) вектор скорости, вектор ускорения, а также радиус кривизны траектории точки в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , где  $t_0$  определяется по указанному в графе 4 табл. 1.1 условию, а  $\Delta t$  задается преподавателем.

Таблица 1.1

Номер варианта	$x = x(t)$ , м	$y = y(t)$ , м	$\tau_0$ – момент времени, когда впервые после начала движения точки выполняется условие
1	2	3	4
1	$1 + 2 \sin \frac{\pi t}{2}$	$2 + 3 \cos \frac{\pi t}{2}$	$y = [y]_{\min}$
2	$2 \sin \frac{\pi t}{3}$	$4 \cos^2 \frac{\pi t}{3}$	Траектория пересекает ось $y$
3	$2t$	$2 \cos^2 4t$	$y = [y]_{\max}$
4	$\frac{1}{2} \sin t$	$1 - \sin^2 t + 2 \sin t$	$x = \frac{1}{2} [x]_{\max}$
5	$3 \sin 2t + 2$	$4 \cos 2t - 1$	$x = [x]_{\min}$
6	$4 \cos 6t$	$1 + 2 \sin 3t$	Траектория пересекает ось $y$
7	$4t^2$	$3 \sin^2 \pi t$	$y = [y]_{\max}$
8	$4 \sin \frac{\pi t}{2}$	$1 - \sin^2 \frac{\pi t}{2}$	Траектория пересекает ось $y$
9	$t$	$\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 8$	$y(\tau_0) = 1$
10	$2 \sin^2 \frac{\pi t}{2}$	$\frac{t^2}{9}$	$x = [x]_{\min}$
11	$1 - \sin \frac{\pi t}{4}$	$1 - \frac{\pi t}{\cos 4}$	$x = [x]_{\max}$
12	$5 \cos 2t - 3$	$8 \sin 2t + 4$	Траектория пересекает ось $x$

Окончание табл. 1.1

Номер варианта	$x = x(t)$ , м	$y = y(t)$ , м	$\tau_0$ – момент времени когда впервые после начала движения точки выполняется условие
1	2	3	4
13	$\frac{e^{(t-1)} + e^{-(t-1)}}{2}$	$4t$	$x = [x]_{\min}$
14	$8 \cos^2 \frac{\pi t}{2}$	$2 \sin \frac{\pi t}{2} - 1$	$x = [x]_{\max}$
15	$e^{-(2t-1)}$	$2t - 1$	Траектория пересекает ось $x$
16	$2 \sin \frac{\pi t}{2}$	$2 \cos \pi t$	$y = [y]_{\max}$
17	$\frac{1}{4} t^2$	$2 \ln(t+1) - \frac{t^2}{2}$	$v_y = 0$
18	$2 \sin^2 \frac{\pi t}{2}$	$t^2 - 1$	$v_x = 0$
19	$\frac{t-1}{e^{\frac{t-1}{2}} + e^{-\frac{t-1}{2}}}$	$\frac{t-1}{e^{\frac{t-1}{2}} - e^{-\frac{t-1}{2}}}$	Расстояние точки до начала координат равно 1 см
20	$\sin \frac{\pi t}{3}$	$2 \left( \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{1}{4} \right)^3$	$v_x = [v_x]_{\max}$
21	$\cos \frac{\pi t}{2}$	$3 + 2 \sin \frac{\pi t}{2}$	$x = [x]_{\max}$
22	$t^2 - t$	$e^{-2(t^2-t)}$	Траектория пересекает ось $y$
23	$\frac{t^2}{1 + e^{\frac{t^2}{2}}}$	$1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$	$v_x = [v_x]_{\min}$
24	$\cos 2\pi t$	$\left( \cos 2\pi t - \frac{1}{3} \right)^2$	$y = [y]_{\min}$
25	$2 \sin 2t (\sin 2t - 2)$	$\sin 2t$	Траектория пересекает ось $y$
26	$2 \sin \frac{\pi t}{2} - 3$	$4 \cos \frac{\pi t}{2} + 4$	$v_y = 0$
27	$\frac{t^2}{3} + 2$	$\ln(t^2 + 1) - 3$	Траектория пересекает ось $x$
28	$\frac{t^2}{2} - 4$	$e^{-t^2}$	Траектория пересекает ось $y$
29	$-3 \cos \pi t + 5$	$3 \sin \pi t$	Расстояние от точки до начала координат – наименьшее
30	$2t^2 - 1$	$3 \cos \pi t$	$a_y = [a_y]_{\min}$

1.2. Порядок выполнения работы

1. Построить траекторию точки, исследуя ее уравнение средствами математического анализа.
2. Определить момент времени  $t_1$  в соответствии с заданным в табл. 1.1 условием и указать положение точки на траектории в этот момент.
3. Построить по составляющим  $\vec{v}_x$ ,  $\vec{v}_y$  вектор скорости точки  $\vec{v}$  в расчетный момент времени.
4. Построить по составляющим  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  вектор  $\vec{a}$  ускорения в расчетный момент времени.
5. Вычислить модули касательного  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений, а также радиус кривизны траектории в расчетный момент времени. Указать на графике  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ ,  $\vec{a}_x$  и  $\vec{a}_y$  (в масштабе), где  $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$ ,  $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ .
6. Расчетные значения определяемых величин представить в форме табл. 1.2.

Таблица 1.2

Время $t$ , с	Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с <sup>2</sup>					Радиус кривизны $\rho$ , м
	$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a_\tau$	$a_n$	$a$	
0											
0,1											

7. Все графические построения производятся в масштабах:
  - для траектории и координат – м;
  - для скоростей – м/с;
  - для ускорений – м/с<sup>2</sup>.

1.3. Пример выполнения задания

По заданным кинематическим уравнениям движения точки ( $x$  и  $y$  – в метрах)

$$x = 2 \cos t; \quad (1.1)$$

$$y = 4 \cos 2t \quad (1.2)$$

определить: 1) траекторию точки; 2) вектор скорости, вектор ускорения, а также радиус кривизны траектории в момент времени, когда точка второй раз после начала движения пересекает ось  $x$ .

**Решение.** Для определения траектории точки исключим из уравнений (1.1) и (1.2) время  $t$ . Для этого представим (1.2) в виде

$$y = 4 \cos 2t = 4 (\cos^2 t - \sin^2 t) = 2 (4 \cos^2 t - 2).$$

Подставляя сюда выражение  $\cos^2 t$  из (1.1), получим уравнение траектории точки в виде

$$y = 2 (x^2 - 2). \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{и} \quad -4 \leq y \leq 4. \quad (1.4)$$

Таким образом, траектория точки есть дуга параболы (1.3), координаты точек которой удовлетворяют условию (1.4).

Из (1.3) следует, что кривая, которой принадлежит траектория точки, симметрична относительно оси  $y$ .

Находим  $\frac{dy}{dx} = 4x$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$ .

Из условия  $y'_x = 0$  получаем, что экстремум функции  $y = y(x)$  достигается при  $x_1 = 0$ . Так как при этом  $y''_x > 0$ , то при  $x_1 = 0$  функция  $y(x)$  принимает минимальное значение и  $y_{\min} = y(x_1) = -4$ . Определим точки пересечения кривой (1.3) с осью  $x$ . Из условия  $y(x) = 0$  получаем:

$$x_1 = -\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = +\sqrt{2}.$$

Отметим дополнительно, что для функции  $y = 2(x^2 - 2)$  имеет место следующее условие:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = +\infty$ .

Указанные свойства функции  $y = y(x) = 2(x^2 - 2)$ , а именно:

- 1) симметрия относительно оси  $y$ ;
- 2) наличие единственного экстремума (минимума) при  $x_1 = 0$ ;
- 3) нули функции (в точках  $x_1' = -\sqrt{2}$  и  $x_2' = +\sqrt{2}$ );
- 4) знак второй производной ( $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$  при всех  $x$ );

5) поведение функции на бесконечности – позволяют построить график функции  $y = y(x)$ .

Вместе с тем, используя условие (1.4), можно выделить на этом графике дугу, которая является траекторией точки. Для уточнения вида кривой целесообразно подсчитать по формулам (1.3) и (1.4) несколько промежуточных точек. Так, при  $x = \pm 0,5$ ;  $y = -3,5$ ; при  $x = \pm 2$ ;  $y = 4$ . Данные, необходимые для построения траектории, приводим в табл. 1.3, а траекторию на рис. 1.1.

Таблица 1.3

$x$	$x^2$	$x^2 - 2$	$y = 2(x^2 - 2)$
0	0	-2	-4
$\pm 0,5$	0,25	-1,75	-3,5
$\pm \sqrt{2}$	2	0	0
$\pm 2$	4	2	4

Определим момент времени, когда точка пересекает ось  $x$  во второй раз после начала движения. Из (1.2) получаем, что впервые после начала движения ( $t_{\text{нач}} = 0$ )  $y = 0$  при  $t = \pi/4$ , а во второй раз  $y = 0$  при  $t_0 = -(3/4)\pi$  с. Положим  $\Delta t = 0$ , тогда  $t_1 = t_0 + \Delta t = (3/4)\pi$  с. В этот момент  $t_1$  и надлежит определять искомые кинематические характеристики движения точки.

Вычислим координаты точки  $M$  в момент времени  $t_1 = (3/4)\pi$  с:

$$x(t)|_{t=t_1} = 2 \cos \frac{3}{4}\pi = -\sqrt{2} = -1,414 \text{ м};$$

$$y(t)|_{t=t_1} = 4 \cos \left( 2 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) = 0.$$

Проекция вектора скорости на координатные оси и модуль вектора скорости находим по формулам

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (1.5)$$

Для заданных уравнений движения (1.1) и (1.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -2 \sin t; \\ v_y &= -8 \sin t; \\ v &= \sqrt{(2 \sin t)^2 + (8 \sin t)^2} = 2 \sqrt{\sin^2 t + 16 \sin^2 2t} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

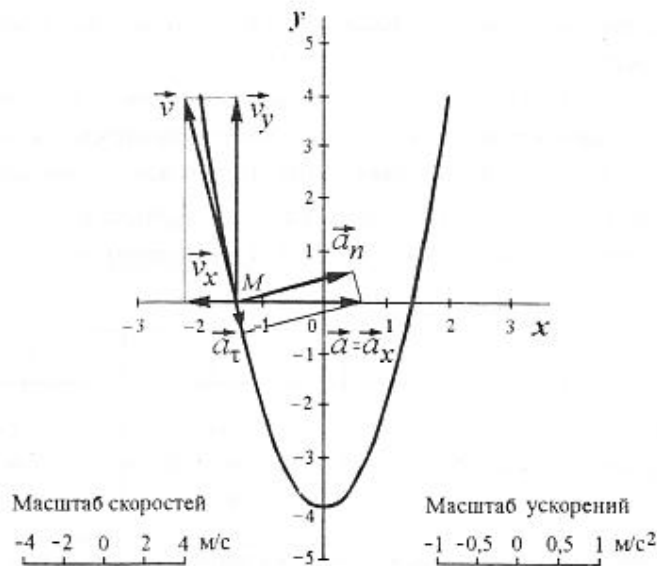


Рис. 1.1

и для момента времени  $t_1 = (3/4)\pi$  с получим:

$$v_x|_{t=t_1} = -2 \sin t_1 = -2 \sin \frac{3}{4}\pi = -\sqrt{2} = -1,414 \text{ м/с};$$

$$v_y|_{t=t_1} = -8 \sin 2t_1 = -8 \sin \left(2 \cdot \frac{3}{4}\pi\right) = 8 \text{ м/с};$$

$$v|_{t=t_1} = 2 \sqrt{\sin^2 t_1 + 16 \sin^2 2t_1} =$$

$$= 2 \sqrt{\sin^2 \frac{3}{4}\pi + 16 \sin^2 \left(2 \cdot \frac{3}{4}\pi\right)} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{66} = 8,124 \text{ м/с}.$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси и значение ускорения определяем по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}; \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}; \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Из (1.7) для заданных уравнений движения (1.1) и (1.2) с учетом (1.6) получим:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -2 \cos t; \\ a_y &= -16 \cos 2t; \\ a &= \sqrt{(2 \cos t)^2 + (16 \cos 2t)^2} = 2 \sqrt{\cos^2 t + 64 \cos^2 2t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Из (1.8) для заданного момента времени  $t_1 = (3/4)\pi$  с получим:

$$a_x|_{t=t_1} = -2 \cos \frac{3}{4}\pi = \sqrt{2} = 1,414 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y|_{t=t_1} = 16 \cos \left(2 \cdot \frac{3}{4}\pi\right) = 0;$$

$$a|_{t=t_1} = \sqrt{\left(2 \cos \frac{3}{4}\pi\right)^2 + \left[16 \cos \left(2 \cdot \frac{3}{4}\pi\right)\right]^2} = 1,414 \text{ м/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорения определяем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv}{dt}; \\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

В соответствии с (1.6) и (1.9) имеем:

$$\begin{aligned} a_\tau &= 2 \left| \frac{d}{dt} \sqrt{\sin^2 t_1 + 16 \sin^2 2t_1} \right| = \\ &= 2 \left| \frac{2 \sin t \cdot \cos t + 16 \cdot 2 \cdot \sin 2t \cdot \cos 2t}{2 \sqrt{\sin^2 t_1 + 16 \sin^2 2t_1}} \right| = \\ &= \frac{2 |\sin t \cdot \cos t (1 + 64 \cos 2t)|}{|\sin t| \sqrt{1 + 64 \cos^2 t}} = 2 \frac{|\cos t (1 + 64 \cos 2t)|}{\sqrt{1 + 64 \cos^2 t}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При  $t_1 = (3/4)\pi$  с получим:

$$a_\tau|_{t=t_1} = 2 \frac{\left| \cos \frac{3}{4}\pi \left[1 + 64 \cos \left(2 \cdot \frac{3}{4}\pi\right)\right] \right|}{\sqrt{1 + 64 \cos^2 \left(\frac{3}{4}\pi\right)}} =$$

$$= 2 \frac{\left| \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right|}{\sqrt{1 + 64 \cos^2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 32}} = \frac{1,414}{5,744} = 0,246 \text{ м/с}^2;$$

если скорость выражена достаточно сложной функцией, то вместо (1.10) проще использовать следующую формулу для  $\vec{a}_\tau$ , полученную дифференцированием (1.5) по времени:

$$a_\tau = \left| \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right| = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|;$$

$$a_n = \sqrt{a^2(t_1) - a_\tau^2(t_1)} = \sqrt{1,414^2 - 0,246^2} = \sqrt{2 - 0,0605} = \sqrt{1,9395} = 1,389 \text{ м/с}^2.$$

Строим в масштабе составляющие  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  ускорения на графике; их сумма геометрически должна быть равной полному ускорению точки  $\vec{a}$ .

Радиус кривизны траектории вычислим по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Для заданного момента времени  $t_1 = (3/4)\pi$  с имеем:

$$\rho = \frac{v^2(t_1)}{a_n(t_1)} = \frac{(8,124)^2}{1,389} = 47,52 \text{ м}.$$

Полученные значения кинематических величин для расчетного момента времени  $t_1$  приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Время $t_1, \text{с}$	Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с <sup>2</sup>					$\rho,$ м
	$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a_\tau$	$a_n$	$a$	
$\frac{3}{4}\pi$	-1,414	0	-1,414	8	8,124	1,414	0	0,246	1,389	1,414	47,52

Равенство геометрической суммы  $\vec{a}_x$  и  $\vec{a}_y$ , а также  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  одному и тому же вектору  $\vec{a}$  (при построении в одном масштабе) свидетельствует о правильности произведенных расчетов.

## Задача 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

### 2.1. Условия задачи

В шарнирном четырехзвенном плоском механизме  $OABO_1DE$  (рис. 2.1, схемы 1-3) ведущее звено  $OA$  равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$ . Звено  $O_1B$  имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку  $O_1$ . Точка  $E$  движется прямолинейно по вертикали вдоль оси  $\xi$ . Каток радиуса  $r$  движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Номер схемы механизма, размеры звеньев, угловая скорость ведущего звена  $\omega_{OA}$  и его положение для каждого из вариантов приведены в табл. 2.1. Для выданного варианта задания необходимо в указанном положении механизма найти скорости точек  $A, B, D, E$  и диаметрально противоположных точек  $G, H$  обода катка, ускорение точки  $B$ , а также угловые скорости всех звеньев и угловые ускорения звеньев  $AB$  и  $O_1B$ .

### 2.2. Порядок выполнения работы

1. Для заданного положения механизма требуется определить скорости точек  $B, D, E, G$  и  $H$ , используя способ мгновенного центра скоростей, поэтому перед выполнением графической части работы следует:

а) определить скорость точки  $A$ ;

б) найти мгновенные центры скоростей для всех звеньев механизма и, оценив их расположение, выбрать масштаб длин таким образом, чтобы мгновенные центры скоростей располагались в пределах чертежа;

в) начертить в выбранном масштабе схему механизма, указав на ней мгновенные центры скоростей всех звеньев и векторы скоростей всех указанных ранее точек. Масштаб скоростей может отличаться от масштаба длин. На чертеже требуется указать принятые масштабы длин и скоростей.

2. Применяя способ мгновенного центра скоростей, определить и показать на схеме направление вращения всех звеньев механизма.



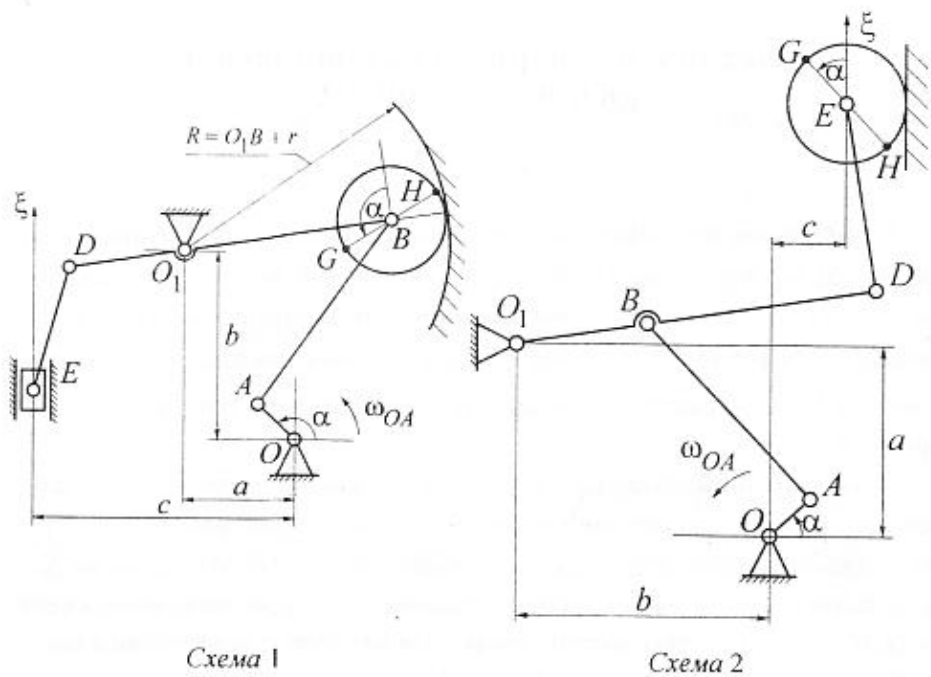


Схема 1

Схема 2

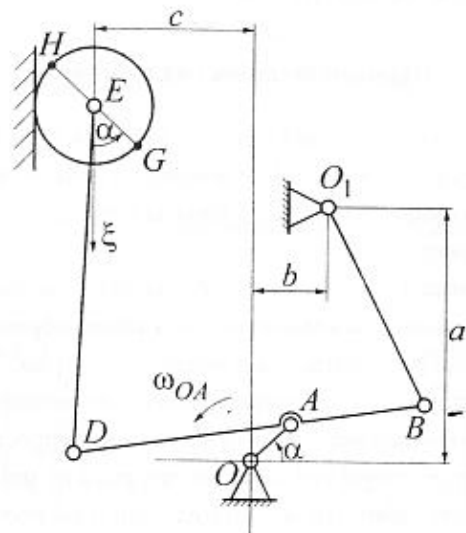


Схема 3

Рис. 2.1

Таблица 2.1

№ варианта	№ схемы	Размеры, м								$\alpha, \dots^\circ$	$\omega_{OA}, \text{с}^{-1}$	$r, \text{м}$
		OA	AB	O <sub>1</sub> B	BD	DE	a	b	c			
1	2	2,5	12,5	7,5	3,5	12,0	12,0	4,0	4,0	45	40	6,0
2	1	2,5	10,0	7,5	10,5	8,0	6,5	9,0	13,0	45	20	4,0
3	3	6,0	7,5	17,5	15,0	18,0	16,0	5,0	7,0	90	10	8,0
4	2	2,5	12,5	7,5	3,5	12,0	12,0	4,0	4,0	90	40	4,0
5	1	2,5	10,0	7,5	10,5	8,0	6,5	9,0	13,0	60	20	4,5
6	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	210	10	10,0
7	2	2,5	13,0	7,5	3,5	10,0	12,0	4,0	4,0	135	40	4,0
8	1	4,0	20,0	10,0	14,0	15,0	12,0	15,0	21,0	135	25	5,0
9	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	300	10	8,0
10	2	4,0	15,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	180	30	5,0
11	1	4,0	20,0	10,0	14,0	15,0	12,0	15,0	21,0	180	25	5,5
12	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	315	10	8,0
13	2	4,0	15,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	225	40	6,0
14	1	5,0	17,5	16,0	23,5	18,0	14,0	19,0	27,0	225	25	6,0
15	3	4,0	5,0	13,0	10,0	18,0	11,0	3,0	4,5	270	15	6,5
16	2	4,0	18,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	270	30	5,0
17	1	5,0	20,0	16,0	23,5	16,0	14,0	19,0	27,0	270	25	6,5
18	3	4,0	5,0	12,0	10,0	16,0	11,0	3,0	4,5	225	15	5,5
19	2	5,0	20,0	10,0	6,0	25,0	21,0	6,0	7,0	315	30	9,0
20	1	6,0	20,0	17,5	25,0	20,0	16,0	20,0	30,0	315	30	8,0
21	3	4,0	5,0	12,5	10,0	12,0	10,0	3,0	4,5	180	15	4,0
22	2	5,0	20,0	10,0	6,0	25,0	21,0	6,0	7,0	300	30	10,0
23	1	6,0	20,0	17,5	25,0	20,0	16,0	20,0	30,0	300	30	7,0
24	3	2,5	3,0	7,5	6,0	10,0	7,5	2,0	3,0	135	8	4,0
25	2	5,0	20,0	10,0	6,0	20,0	21,0	6,0	7,0	210	30	8,0
26	1	8,0	35,0	25,0	40,0	25,0	20,0	25,0	40,0	120	20	10,0
27	3	2,5	3,0	7,5	6,0	7,5	7,5	2,0	4,5	75	8	3,5
28	2	5,0	21,0	10,0	6,0	20,0	21,0	6,0	7,0	120	30	10,0
29	1	8,0	35,0	25,0	35,0	25,0	20,0	25,0	40,0	150	20	9,0
30	3	2,5	3,0	7,5	6,0	7,5	7,5	2,0	3,0	60	8	3,0

3. Проверить правильность определения скорости  $\vec{v}_B$  точки  $B$ , применяя способы: а) полюса; б) проекций.

4. Определить ускорение точки  $A$  и, используя способ полюса, найти ускорение точки  $B$ . Построить на схеме в выбранном масштабе ускорение  $\vec{a}_A$  точки  $A$  и ускорение  $\vec{a}_B$  точки  $B$  с его составляющими. Указать масштаб ускорений.

5. Проверить правильность определения ускорения  $\vec{a}_B$  построением многоугольника ускорений.

### 2.3. Пример выполнения задания

В шарнирном плоском механизме  $OMNO_1LE$  (рис. 2.2, а) ведущее звено  $OM$  равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$ . Звено  $O_1N$  имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку  $O_1$ . С шатуном  $MN$  жестко связан прямоугольный треугольник  $MNL$ . Каток с центром  $E$  движется прямолинейно вдоль горизонтальной направляющей. Элементы механизма: звено  $LE$ , жесткий треугольник  $MNL$  и каток с центром  $E$  – совершают плоскопараллельное движение. Данные для решения задачи приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ варианта	№ схемы	Размеры, м									$\alpha, \dots^\circ$	$\omega_{OM}, \text{с}^{-1}$
		$OM$	$MN$	$ML$	$NL$	$O_1N$	$LE$	$a$	$c$	$r$		
31	4	3,0	8,0	5,65	5,65	8,0	13,0	13,0	1,5	3,0	60	20

#### Решение.

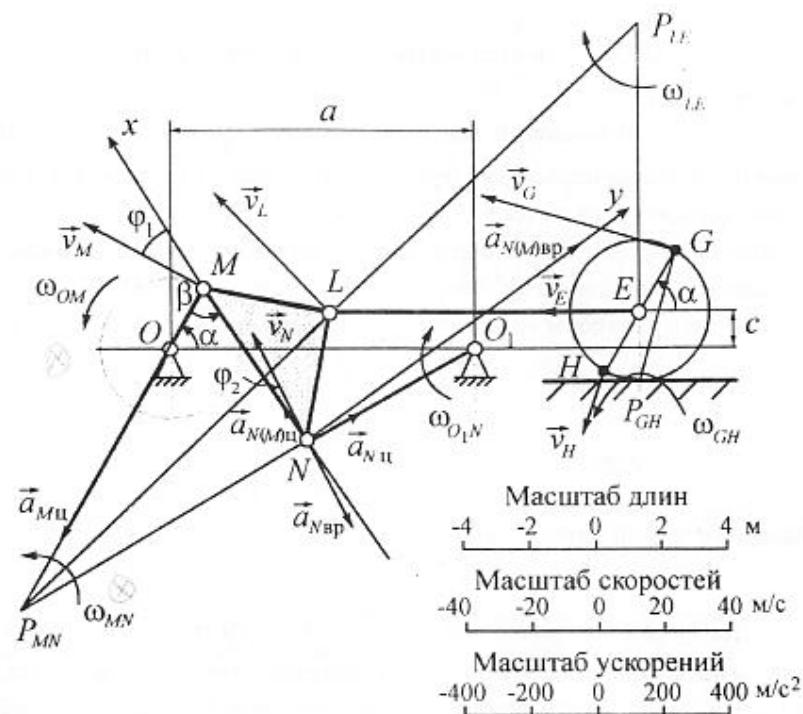
1. Определение скорости точки  $M$ :

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_{OM} \times \vec{OM} \quad (2.1)$$

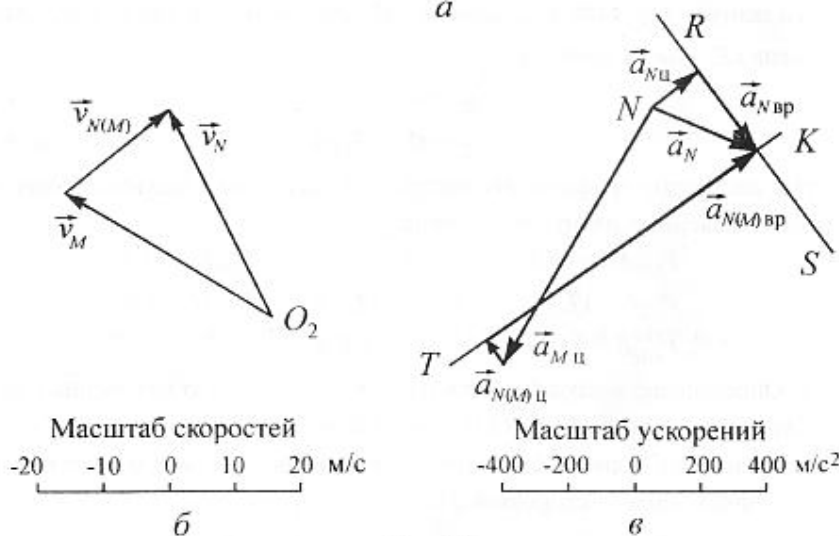
откуда  $v_M = \omega_{OM} \sin 90^\circ = 20 \cdot 3 = 60 \text{ м/с}$ .

2. Построение мгновенных центров скоростей:

а) мгновенными центрами скоростей звеньев  $OM$ ,  $O_1N$  и катка будут, соответственно, точки  $O$ ,  $O_1$  и  $P_{GH}$ ;



а



б

в

Рис. 2.2

б) для звена  $MNL$  известен вектор  $\vec{v}_M$  скорости точки  $M$  и линия вектора скорости точки  $N$ .

Положение мгновенного центра скоростей  $P_{MN}$  звена  $MNL$  определится точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек  $M$  и  $N$  к направлениям скоростей этих точек.

Зная положение мгновенного центра скоростей звена  $MNL$ , определяем направление скоростей точек  $N$  и  $L$  жесткого треугольника  $MNL$ .

Для этого построим мгновенные радиус-векторы  $P_{MN}N$  и  $P_{MN}L$  этих точек. Так как  $\vec{v}_N \perp P_{MN}N$  и  $\vec{v}_L \perp P_{MN}L$ , то

$$\left. \begin{aligned} v_N &= \omega_{MN} \cdot P_{MN}N, \\ v_L &= \omega_{MN} \cdot P_{MN}L. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Аналогично можно записать и для  $v_M$ :

$$v_M = \omega_{MN} \cdot P_{MN}M; \quad (2.3)$$

в) для звена  $LE$  известны вектор  $\vec{v}_L$  скорости точки  $L$  и линия вектора скорости точки  $E$ . В точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек  $L$  и  $E$  к направлениям скоростей этих точек, определится положение мгновенного центра скоростей  $P_{LE}$  звена  $LE$ . Используя мгновенный центр скоростей звена  $LE$ , можно записать:

$$v_L = \omega_{LE} \cdot P_{LE}L; \quad (2.4)$$

$$v_E = \omega_{LE} \cdot P_{LE}E; \quad (2.5)$$

г) в результате графических построений получены следующие значения модулей мгновенных радиус-векторов:

$$P_{MN}M = 15,8 \text{ м}; \quad P_{MN}N = 14,4 \text{ м}; \quad P_{MN}L = 18,4 \text{ м};$$

$$P_{LE}L = 17,8 \text{ м}; \quad P_{LE}E = 12,2 \text{ м}; \quad P_{GH}H = 1,6 \text{ м};$$

$$P_{GH}E = 3,0 \text{ м}; \quad P_{GH}G = 5,8 \text{ м}.$$

3. Определение модулей скоростей точек с помощью мгновенных центров. Скорости точек  $N$ ;  $L$ ;  $E$ ;  $G$  и  $H$  определяются по формулам (2.2)–(2.5). Как видно из этих формул, скорости точек пропорциональны их расстояниям до мгновенных центров скоростей. Получаем:

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{P_{MN}N}{P_{MN}M}; \quad \frac{v_N}{v_L} = \frac{P_{MN}N}{P_{MN}L}; \quad \frac{v_L}{v_E} = \frac{P_{LE}L}{P_{LE}E};$$

$$\frac{v_E}{v_H} = \frac{P_{GH}E}{P_{GH}H}; \quad \frac{v_E}{v_G} = \frac{P_{GH}E}{P_{GH}G}.$$

Отсюда

$$v_N = \frac{v_M}{P_{MN}M} \cdot P_{MN}N = \frac{60,0}{15,8} \cdot 14,4 = 54,7 \text{ м/с};$$

$$v_L = \frac{v_N}{P_{MN}N} \cdot P_{MN}L = \frac{54,7}{14,4} \cdot 18,4 = 70,0 \text{ м/с};$$

$$v_E = \frac{v_L}{P_{LE}L} \cdot P_{LE}E = \frac{70,0}{17,8} \cdot 12,2 = 48,0 \text{ м/с};$$

$$v_H = \frac{v_E}{P_{GH}E} \cdot P_{GH}H = \frac{48,0}{3,0} \cdot 1,6 = 25,6 \text{ м/с};$$

$$v_G = \frac{v_E}{P_{GH}E} \cdot P_{GH}G = \frac{48,0}{3,0} \cdot 5,8 = 92,8 \text{ м/с}.$$

4. Определение угловых скоростей звеньев механизма. Угловая скорость жесткого треугольника  $MNL$  может быть определена по любой из формул (2.2), (2.3):

$$\omega_{MN} = \frac{v_M}{P_{MN}M} = \frac{v_N}{P_{MN}N} = \frac{v_L}{P_{MN}L};$$

$$\omega_{MN} = \frac{60,0}{15,8} = \frac{57,7}{14,4} = \frac{70,0}{18,4} = 3,8 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость звена  $LE$  определится из формул (2.4), (2.5):

$$\omega_{LE} = \frac{v_L}{P_{LE}L} = \frac{v_E}{P_{LE}E};$$

$$\omega_{LE} = \frac{70,0}{17,8} = \frac{48,0}{12,2} = 3,93 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения угловых скоростей звена  $NO_1$  и катка воспользуемся, соответственно, формулами

$$v_N = \omega_{O_1N} \cdot O_1N;$$

$$\omega_{O_1N} = \frac{v_N}{O_1N} = \frac{54,7}{8,0} = 6,85 \text{ с}^{-1}$$

и для катка

$$v_E = \omega_{GH} \cdot P_{GH} E,$$

$$\omega_{GH} = \frac{v_E}{P_{GH} E} = \frac{48,0}{3,0} = 16,0 \text{ с}^{-1}.$$

Полученные результаты приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Скорости точек, м/с							Угловые скорости звеньев, с <sup>-1</sup>				
$v_M$	$v_N$	$v_L$	$v_E$	$v_G$	$v_H$	$v_{AB}$	$\omega_{OM}$	$\omega_{O_1N}$	$\omega_{MN}$	$\omega_{DE}$	$\omega_{GH}$
60,0	54,7	70,0	48,0	92,7	25,6	30,5	20,0	6,85	3,8	3,93	16,0

По результатам вычислений в пп. 1–4 и по формулам (2.1)–(2.5) изобразим векторы скоростей точек  $M$ ,  $N$ ,  $L$ ,  $E$ ,  $H$  и  $G$  и направления вращения звеньев механизма на схемах (рис. 2.2, а, б).

5. Определение скорости точки  $N$  способом полюса. Для определения скорости точки  $N$  звена  $MN$  за полюс выбираем точку  $M$ , так как для нее известны значение и направление скорости, найденные по (2.1). Тогда скорость точки  $N$  определяется выражением

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{v}_{N(M)}$$

или

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{\omega}_{MN} \times \overline{MN}, \quad (2.6)$$

где  $\vec{v}_{N(M)} = \vec{\omega}_{MN} \times \overline{MN}$  – вращательная скорость точки  $N$  относительно полюса – точки  $M$ .

В (2.6) известны: величина и направление вектора  $\vec{v}_M$ ; линия вектора  $\vec{v}_N$ ; линия вектора  $\overline{MN}$ .

Построим треугольник скоростей (2.6). Из произвольной точки  $O_2$  (рис. 2.2, б) в выбранном масштабе строим вектор  $\vec{v}_M$  и прямую, параллельную вектору  $\vec{v}_N$ . Чтобы определить вершину треугольника, из конца вектора  $\vec{v}_M$  проводим прямую, параллельную линии вектора  $\vec{v}_{N(M)}$ . Точка пересечения этой линии с линией вектора  $\vec{v}_N$  определит вершину треугольника и, следовательно, конец вектора  $\vec{v}_N$ .

Из полученного векторного треугольника скоростей, пользуясь масштабом, находим:  $v_N = 55,0$  см/с;  $v_{N(M)} = 30$  см/с.

6. Применяя теорему проекций, определяем скорость точки  $N$  по известной скорости точки  $M$ , проецируя векторы  $\vec{v}_N$  и  $\vec{v}_M$  на  $MN$ :

$$v_N \cdot \cos \varphi_2 = v_M \cdot \cos \varphi_1.$$

Углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяем из чертежа механизма (рис. 2.2, а). Получаем

$$\varphi_2 = 5^\circ; \varphi_1 = 25^\circ. \text{ Тогда } v_N \cos 5^\circ = v_M \cos 25^\circ \text{ и } v_N = \frac{60,0 \cdot 0,9063}{0,9962} = 54,7 \text{ м/с.}$$

Сравнивая полученные в пп. 3, 5, 6 для скорости  $v_N$  значения, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 %.

7. Аналитический способ определения ускорения точки  $N$ . Ускорение точки  $N$  определяется выражением

$$\vec{a}_N = \vec{a}_M + \vec{a}_{N(M)}, \quad (2.7)$$

где  $\vec{a}_M = \vec{a}_{M \text{ в р}} + \vec{a}_{M \text{ ц}}$  – ускорение точки  $M$  звена  $OM$ , которая принята за полюс;  $\vec{a}_{N(M)}$  – ускорение точки  $N$  во вращательном движении звена  $MN$  вокруг выбранного полюса  $M$ . Вектор  $\vec{a}_{N(M)}$  представим в виде

$$\vec{a}_{N(M)} = \vec{a}_{N(M) \text{ в р}} + \vec{a}_{N(M) \text{ ц}}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{a}_{N(M) \text{ в р}}$  – вращательная составляющая ускорения  $\vec{a}_{N(M)}$ ;  $\vec{a}_{N(M) \text{ ц}}$  – центростремительная составляющая.

Имеем

$$a_{N(M) \text{ в р}} = \epsilon_{MN} \cdot MN; \quad (2.9)$$

$$a_{N(M) \text{ ц}} = \omega_{MN}^2 \cdot MN. \quad (2.10)$$

С другой стороны, поскольку точка  $N$  принадлежит кривошине  $O_1N$ , вращающемуся вокруг оси  $O_1$ , то ускорение точки  $N$  складывается из центростремительного ускорения  $\vec{a}_{N \text{ ц}}$  и вращательного ускорения  $\vec{a}_{N \text{ в р}}$ , т. е.

$$\vec{a}_N = \vec{a}_{N \text{ в р}} + \vec{a}_{N \text{ ц}}.$$

При этом

$$a_{N \text{ в р}} = \epsilon_{O_1N} \cdot O_1N; \quad (2.11)$$

$$a_{N \text{ ц}} = \omega_{O_1N}^2 \cdot O_1N. \quad (2.12)$$

Векторное уравнение (2.7) с учетом (2.8)–(2.12) можно записать в виде

$$\vec{a}_{N \text{ в р}} + \vec{a}_{N \text{ ц}} = \vec{a}_{M \text{ в р}} + \vec{a}_{M \text{ ц}} + \vec{a}_{N(M) \text{ в р}} + \vec{a}_{N(M) \text{ ц}}. \quad (2.13)$$

Определяем модули ускорений, входящих в формулу (2.13):

$$\begin{aligned} a_{M\text{ц}} &= \omega_{OM}^2 \cdot OM = 20^2 \cdot 3 = 1200 \text{ м/с}^2; \\ a_{M\text{вр}} &= \epsilon_{OM} \cdot OM = 0, \text{ так как } \omega_{OM} = \text{const}; \\ a_{N\text{ц}} &= \omega_{O_1N}^2 \cdot O_1N = 6,85^2 \cdot 8,0 = 375,4 \text{ м/с}^2; \\ a_{N(M)\text{ц}} &= \omega_{MN}^2 \cdot MN = 3,8^2 \cdot 8,0 = 115,5 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор  $\vec{a}_{N(M)\text{ц}}$  известен по направлению (он направлен от точки  $N$  к точке  $M$ ). Ускорение  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  точки  $N$

$$a_{N\text{вр}} = \epsilon_{O_1N} \cdot O_1N \quad (2.14)$$

и ее вращательное ускорение  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$

$$a_{N(M)\text{вр}} = \epsilon_{MN} \cdot MN \quad (2.15)$$

известны только по линиям действия. Определяем их величину аналитически.

Проведем перпендикулярно к неизвестному вектору  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  (рис. 2.2, а) координатную ось  $Nx$  и спроектируем обе части векторного уравнения (2.13) на эту ось. Неизвестные векторы  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  и  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  направляем по линиям их действия условно. В нашем случае вектор  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  направлен противоположно вектору  $\vec{v}_{N\text{вр}}$ , а вектор  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  в положительном направлении оси  $Ny$ . Получим:

$$-a_{N\text{ц}} \cos(90^\circ - \gamma) - a_{N\text{вр}} \cos \gamma = -a_{M\text{ц}} \cos \beta + a_{N(M)\text{ц}}$$

Необходимые углы  $\beta$  и  $\gamma$  определяем по рис. 2.2, а:  $\beta = 66^\circ$  и  $\gamma = 5^\circ$ .

Подставляем числовые значения величин:

$$-376,0 - 0,0872 \cdot a_{N\text{вр}} \cdot 0,9962 = -1200,0 - 0,4067 \cdot 115,5,$$

откуда

$$a_{N\text{вр}} = \frac{488,0 - 115,5 - 32,88}{0,9962} = 342,0 \text{ м/с}^2.$$

Полученный знак (+) указывает, что направление вектора  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  было выбрано правильно.

Из формулы (2.14) следует, что

$$\epsilon_{O_1N} = \frac{a_{N\text{вр}}}{O_1N} = \frac{342,0}{8,0} = 42,8 \text{ с}^{-2}.$$

Определяем модуль искомого ускорения:

$$a_N = \sqrt{(a_{N\text{ц}})^2 + (a_{N\text{вр}})^2} = \sqrt{376^2 + 342^2} = 508 \text{ м/с}^2.$$

Для определения величины вектора  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  проектируем обе части векторного уравнения (2.13) на ось  $Ny$ , перпендикулярную звену  $MN$ .

Получим:

$$a_{N\text{ц}} \cos \gamma - |a_{N\text{вр}}| \cos(90^\circ - \gamma) = -a_{M\text{ц}} \cos(90^\circ - \beta) + a_{N(M)\text{вр}}.$$

Подставляем числовые значения величин:

$$376,0 \cdot 0,9962 - 342,0 \cdot 0,0872 = -1200,0 \cdot 0,9135 + a_{N(M)\text{вр}},$$

откуда

$$a_{N(M)\text{вр}} = 1096 + 374 - 29,7 = 1440,3 \text{ м/с}^2.$$

Из формулы (2.15) следует, что

$$\epsilon_{MN} = \frac{a_{N(M)\text{вр}}}{MN} = \frac{1440,3}{8,0} = 180,0 \text{ с}^{-2}.$$

8. Графический способ определения  $\vec{a}_{N\text{вр}}$ ,  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  и  $\vec{a}_N$ . Проверим правильность определения этих векторов графически. Для этого по формулам (2.8)–(2.13) и вычисленным величинам составляющих ускорения точки  $B$  в выбранном масштабе строим многоугольник ускорений (рис. 2.2, в), т. е. графически представляем векторное равенство (2.13):

а) последовательно переносим векторы, составляющие равенство (2.13), со схемы (рис. 2.2, а) параллельно самим себе, в выбранном масштабе ускорений;

б) откладываем от произвольной точки  $N$  вектор ускорения полюса  $\vec{a}_{M\text{ц}}$ ;

в) из конца вектора  $\vec{a}_{M\text{ц}}$  откладываем вектор  $\vec{a}_{N(M)\text{ц}}$ ;

г) из конца вектора  $\vec{a}_{N(M)\text{ц}}$  проводим прямую  $KT$ , параллельную линии вектора  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$ ;

д) с другой стороны, из той же точки  $N$  откладываем вектор  $\vec{a}_{N\text{ц}}$ ;

е) из конца вектора  $\vec{a}_{N\text{ц}}$  проводим прямую  $RS$ , параллельную линии вектора  $\vec{a}_{N\text{вр}}$ . Точка пересечения прямых  $RS$  и  $KT$  позволяет определить величины и направления векторов  $\vec{a}_{N\text{вр}}$ ,  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  и  $\vec{a}_N$ . Измеряя их на диаграмме, с учетом масштаба получим:

$$a_N = 500 \text{ м/с}^2; \quad a_{N\text{вр}} = 340 \text{ м/с}^2; \quad a_{N(M)\text{вр}} = 1450 \text{ м/с}^2.$$

Сопоставляя направления векторов  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  и  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  с направлениями вращения звеньев  $MN$  и  $O_1N$  соответственно, заключаем, что направление вектора  $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$  и вектора вращательной скорости  $\vec{v}_{N(M)}$  совпадают. Следовательно, вращение звена  $MN$  в данный момент времени является ускоренным.

Вектор  $\vec{a}_{N\text{вр}}$  направлен противоположно вектору скорости  $\vec{v}_N$ . Следовательно, звено  $O_1N$  в данный момент времени вращается замедленно.

Для сравнения полученных результатов составим табл. 2.4.

Таблица 2.4

Способ определения	Ускорения точек, м/с <sup>2</sup>						Угловые ускорения звеньев, с <sup>-2</sup>	
	$a_M$	$a_{N\text{ц}}$	$a_{N\text{вр}}$	$a_N$	$a_{N(M)\text{ц}}$	$a_{N(M)\text{вр}}$	$\epsilon_{O_1N}$	$\epsilon_{MN}$
Графический	1200	376	340	500	115,5	1450	42,5	181
Аналитический	1200	376	342	508	115,5	1440	42,8	180

Из таблицы видно, что разница между результатами, полученными указанными способами, лежит в допустимых пределах.

## Список литературы

1. Методические указания к выполнению курсовой работы. Теоретическая механика. Вып. I: Кинематика точки / Под ред. Е. А. Непомнящего и Ю. Н. Горина; ЛЭТИ. Л., 1977.
2. Методические указания к выполнению курсовой работы. Теоретическая механика. Вып. II: Кинематика составного движения точки и плоского движения / Под ред. Е. А. Непомнящего и Ю. Н. Горина; ЛЭТИ. Л., 1977.