Методические указания
к выполнению курсовой работы
по курсу «Теория принятия решений»
Тема: «Построение математической модели и разработка программного обеспечения для решения задачи организационного управления»
Вариант….

1. Содержание курсовой работы

Курсовая работа должна содержать следующие разделы:

- словесное описание задачи;
- построение математической модели;
- выбор, обоснование и описание метода решений рассматриваемой задачи;
- решение сформулированной задачи;
- анализ модели на чувствительность.

2. Постановка задачи и построение ее математической модели

Продемонстрируем на простейшем примере процесс построения математической модели задачи, выбор метода решения и анализ полученных результатов.

Постановка задачи.

Небольшая фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних (I) и наружных (E) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта – A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 т и 8 т соответственно. Расходы A и B на 1 тонну соответствующих красок приведены в таблице 1.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки.

Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тысячи долларов для краски E, 2 тысячи долларов для краски I.

Таблица 1

Исходный продукт	Расход исходных продуктов (т) на 1 т краски	
	краска E	краска I
A	1	2
B	2	1

Какое количество красок каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным ?

Построение математической модели.

Процесс построения математической модели можно начать с ответов на следующие три вопроса:

- Для определения каких величин должна быть построена модель ?
- Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы ?
- В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи ?

Конструктивный путь формулировки ответов на поставленные вопросы в том, чтобы словесно выразить суть проблемы.

Словесная формулировка проблемы

Фирме требуется определить ***объемы производства*** (в тоннах) каждой из красок (управляемые переменные), максимизирующие ***доход*** (в тысячах долларов) от реализации продукции (цель), с учетом ***спроса и расхода*** исходных продуктов (ограничения).

Математическая формулировка

Переменные. Т.к. нужно определить объемы производства каждого вида краски, то переменными в модели являются:

x_E – суточный объем производства краски E (в тоннах),

x_I – суточный объем производства краски I (в тоннах).

Целевая функция. Т.к. стоимость одной тонны краски E равна 3 тысячи долларов, суточный доход от ее продажи составит $3x_E$ тысячи долларов. Аналогично доход от реализации x_I тонн краски I составит $2x_I$ тысячи долларов. При допущении независимости объемов сбыта каждой из красок общий доход равен сумме двух слагаемых – дохода от продажи краски E и дохода от продажи краски I.

Обозначив общий доход (в тысячах долларов) через Z, можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить допустимые значения x_E и x_I, максимизирующие величину общего дохода $Z = 3x_E + 2x_I$.

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на расход исходных продуктов и спрос на изготовление краски. Ограничение на расход исходных продуктов можно записать следующим образом:

Расход исходного продукта для производства обоих видов краски	≤	Максимально возможный запас исходного продукта

Это приводит к следующим двум ограничениям:

$x_E + 2x_I \le 6$ (для A),

$2x_E + x_I \le 8$ (для B).

Ограничения на величину спроса на продукцию имеют вид:

Превышение спроса на краску I относительно спроса на краску E	≤	1 тонна/сутки,

(спрос на краску I) $\le$ 2 тонны/сутки.

Математически эти ограничения записываются следующим образом:

$x_I - x_E \le 1$ (соотношение величин спроса на краску I и на краску E),

$x_I \le 2$ (максимальная величина спроса на краску I).

Неявное ограничение заключается в том, что объемы производства продукции не могут принимать отрицательных значений. Чтобы предотвратить получение таких недопустимых решений, потребуем выполнения *условия неотрицательности* переменных, т.е. введем ограничения:

$x_I \ge 0$ (объем производства краски I),

$x_E \ge 0$ (объем производства краски E).

Итак, математическую модель можно записать следующим образом.

Определить суточные объемы производства краски I и краски E (в тоннах), т.е. переменные x_I и x_E, при которых достигается

$\max Z = 3x_E + 2x_I$ (целевая функция)
и которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x_E + 2x_I \le 6 \\ 2x_E + x_I \le 8 \\ x_I - x_E \le 1 \\ x_I \le 2 \\ x_I \ge 0\,,\, x_E \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(ограничения).}$$

Выбор и обоснование метода решений поставленной задачи.

Т.к. все входящие в модель функции (ограничения и целевая функция) являются линейными, то данная задача относится к классу задач линейного программирования (ЛП), поэтому для ее решения необходимо применить один из методов решения задач ЛП. Универсальный метод решения таких задач – симплекс-метод, но т.к. математическая модель рассматриваемой задачи содержит две переменные, то для ее решения может быть применен графический способ решения.

Если рассматриваемая задача решается с помощью симплекс-метода, то необходимо ограничения записать в виде равенств, вводя в каждое ограничение соответствующую остаточную переменную.

$$\begin{cases} x_E + 2x_I + y_1 = 6 \\ 2x_E + x_I + y_2 = 8 \\ x_I - x_E + y_3 = 1 \\ x_I + y_4 = 2 \\ x_I \ge 0\,,\, x_E \ge 0\,,\ y_i \ge 0, i = 1 \div 4 \end{cases} .$$

В результате введения дополнительных переменных получаем, что система разрешена относительно базисных переменных, и, т.к. они принимают положительные значения, то задача нахождения исходного опорного решения решена. В противном случае необходимо воспользоваться одним из методов нахождения исходного опорного решения. ***<u>Используемые методы должны описаны.</u>***

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные члены	X_E	X_I	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Y_1	6	1	2	1	0	0	0
Y_2	8	2	1	0	1	0	0
Y_3	1	-1	1	0	0	1	0
Y_4	2	0	1	0	0	0	1
Z	0	-3	-2	0	0	0	0
1 итерация							
Y_1	2	0	3/2	1	-1/2	0	0
X_E	4	1	1/2	0	1/2	0	0
Y_3	5	0	3/2	0	1/2	1	0
Y_4	2	0	1	0	0	0	1
Z	12	0	-1/2	0	3/2	0	0
2 итерация							
X_I	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
X_E	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
Y_3	3	0	0	-1	1	1	0

Y_4	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1
Z	38/3	0	0	1/3	4/3	0	0

Решение задачи.

Чтобы продемонстрировать, как проводится анализ модели на чувствительность, решим сформулированную задачу с помощью симплекс-метода. Для этого запишем целевую функцию в виде: $Z - 3x_E - 2x_I = 0$ и запишем исходные данные в симплекс-таблицу. Процесс нахождения оптимального решения приведен в таблице 2.

Выполнив две итерации для получения оптимального решения, получили результирующую симплекс-таблицу, из которой следует, что оптимальное решение имеет вид:

x_I = 4/3 тонны, x_E = 10/3 тонны, при этом Z = 38/3 тыс.долл.

Анализ модели на чувствительность.

Проведем анализ полученного решения. Результирующая симплекс-таблица «насыщена» весьма важными данными, лишь небольшую часть которых составляют оптимальные значения переменных. Из симплекс-таблицы непосредственно, либо при помощи простых дополнительных вычислений можно получить информацию относительно

- оптимального решения,
- статуса ресурсов,
- ценности каждого ресурса,
- чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, вариациям коэффициентов целевой функции.

Оптимальное решение

Используя данные, содержащиеся в симплекс-таблице для оптимального решения, основные результаты можно представить так:

Таблица 3

Управляемые переменные	Оптимальное значение	Решение
X_I	4/3	Объем производства краски I должен быть равен 4/3 т в сутки
X_E	10/3	Объем производства краски E должен быть равен 10/3 т в сутки
Z	38/3	Доход от реализации продукции равен 38/3 тыс.долл (в сутки)

Статус ресурсов

Все ресурсы могут быть разделены на дефицитные и недефицитные в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи. Говоря о ресурсах, фигурирующих в задаче ЛП, подразумевают, что установлены некоторые максимальные пределы их запасов, поэтому в соответствующих исходных ограничениях должен использоваться знак $\leq$. Следовательно, ограничения со знаком $\geq$ не могут рассматриваться как ограничения на ресурсы. Скорее, ограничения такого типа отражают то обстоятельство, что решение должно удовлетворять определенным требованиям, например, обеспечению минимального спроса или минимальных отклонений от установленных структурных характеристик производства (сбыта).

В модели рассматриваемой задачи фигурируют четыре ограничения со знаком $\leq$. Первые два ограничения (определяющие допустимый расход исходных продуктов) представляют собой «истинные» ограничения на ресурсы. Третье и четвертое ограничения относятся к спросу.

Из вышеизложенного следует, что статус ресурсов для любой модели ЛП можно установить непосредственно из результирующей симплекс-таблицы, обращая внимание на значения остаточных переменных. Применительно к рассматриваемой задаче можно привести следующую сводку результатов.

Таблица 4

Ресурс	Остаточная переменная	Статус ресурса
Исходный продукт А	$Y_1 = 0$	Дефицитный
Исходный продукт В	$Y_2 = 0$	Дефицитный
Превышение объема производства краски I по отношению к объему производства краски Е	$Y_3 = 3$	Недефицитный
Спрос на краску I	$Y_4 = 2/3$	Недефицитный

Положительное значение остаточной переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т.е. данный ресурс не является дефицитным. Если же остаточная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Из таблицы видно, что ресурсы 3 и 4, связанные с возможностями сбыта продукции, являются недефицитными. Поэтому любое увеличение их запасов сверх установленного максимального значения приведет лишь к тому, что они станут еще более недефицитными. Оптимальное решение задачи при этом остается неизменным.

Ресурсы, увеличение запасов которых позволяет улучшить решение (увеличить доход) – это исходные продукты А и В, т.к. они дефицитные. Возникает вопрос: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов с тем, чтобы получить от них максимальную отдачу ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим ценность ресурсов.

Ценность ресурсов

Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения Z, приходящегося на единицу прироста объема данного ресурса. Информация о ценности ресурсов представлена в последней симплекс-таблице. Рассмотрим значения коэффициентов Z – уравнения, стоящих при остаточных переменных y_1, y_2, y_3, y_4 . Коэффициенты при указанных переменных соответственно равны (1/3, 4/3, 0, 0). Отсюда, Z – уравнение для оптимального решения имеет вид

$$Z = 38/3 - \{(1/3)*y_1 + (4/3)*y_2 + 0*y_3 + 0*y_4\}.$$

Положительное приращение переменной y_1 относительно ее текущего нулевого значения приводит к пропорциональному уменьшению Z, причем коэффициент пропорциональности равен 1/3 тыс.долл/т. Но, как следует из первого ограничения

$$x_E + 2x_I + y_1 = 6$$

увеличение y_1 эквивалентно *снижению* запаса ресурса 1 (продукта А). Отсюда следует, что уменьшение запаса ресурса 1 вызывает пропорциональное уменьшение целевой функции с тем же коэффициентом пропорциональности, равным 1/3. Т.к. мы оперируем с линейными функциями, то полученный вывод можно обобщить, считая, что и *увеличение* запаса первого ресурса (эквивалентное введению избыточной переменной $y_1 < 0$) приводит к пропорциональному *увеличению* Z с тем же самым коэффициентом пропорциональности 1/3. Аналогичные рассуждения справедливы для ресурса 2.

В отношении ресурсов 3 и 4 было установлено, что их ценность равна нулю. Этого и следовало ожидать, т.к. ресурсы 3 и 4 оказались недефицитными.

Несмотря на то, что ценность различных ресурсов была представлена в стоимостном (тыс.долл) выражении, ее нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым возможна закупка соответствующих ресурсов. На самом деле речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу и количественно характеризующей ценность ресурса (теневая цена) только относительно полученного оптимального значения целевой функции. При изменении ограничений модели соответствующие экономические оценки также будут меняться.

Заметим, что ценность ресурса характеризует интенсивность улучшения оптимального значения Z. Однако, при этом не фиксируется интервал значений увеличения запасов ресурса, при которых интенсивность улучшения целевой функции остается постоянной. Для большинства практических ситуаций логично предположить наличие верхнего предела увеличения запасов, при превышении которого соответствующее ограничение становится избыточным, что в свою очередь приводит к новому базисному решению и соответствующим ему новым теневым ценам.

Максимальное изменение запаса ресурса

При решении вопроса о том, запас какого из ресурсов следует увеличить в первую очередь, обычно используются теневые цены. Чтобы определить интервал значений изменения запаса ресурса, при которых теневая цена данного ресурса, фигурирующая в последней симплекс-таблице, остается неизменной, необходимо выполнить ряд дополнительных вычислений.

Предположим, что запас 1 ресурса изменился на Δ_1, т.е. запас продукта А составит 6+ Δ_1 тонн. При $\Delta_1 > 0$ запас данного ресурса увеличивается, при $\Delta_1 < 0$ – уменьшается.

Как изменится симплекс-таблица при изменении величины запаса ресурса на Δ_1 ? Для ответа на этот вопрос необходимо ввести в правую часть 1 ограничения начальной симплекс-таблицы и затем выполнить все симплексные преобразования. Т.к. правые части ограничений никогда не используются в качестве разрешающих элементов, то на каждой итерации Δ_1 будет оказывать влияние только на правые части ограничений. Нетрудно проверить, что оптимальное решение в данном случае будет иметь вид, представленный в таблице 4.

Таблица 5

Базисные переменные	Решение
X_I	$4/3 + (2/3)\Delta_1$
X_E	$10/3 – (1/3)\Delta_1$
Y_3	$3 - \Delta_1$
Y_4	$2/3 –(2/3)\Delta_1$
Z	$38/3 + (1/3)\Delta_1$

Заметим, что новая правая часть каждого ограничения представляет сумму двух величин: постоянной, которая стоит в правой части ограничений до введения Δ_1, и члена, линейно зависящего от Δ_1. Коэффициенты при Δ_1 во вторых слагаемых равны коэффициентам при y_1 в заключительной симплекс-таблице.

Какие можно сделать выводы? Т.к. введение Δ_1 сказывается лишь на правой части симплекс-таблицы, то изменение запаса ресурса может повлиять только на *допустимость* решения. Поэтому Δ_1 не может принимать значений, при которых какая-либо из базисных переменных становится отрицательной. Т.е. должны выполняться следующие ограничения:

$$X_I = 4/3 + (2/3)\Delta_1 \geq 0,$$
$$X_E = 10/3 – (1/3)\Delta_1 \geq 0,$$
$$Y_3 = 3 - \Delta_1 \geq 0,$$
$$Y_4 = 2/3 –(2/3)\Delta_1 \geq 0.$$

Решая эту систему неравенств, получим $-2 \leq \Delta_1 \leq 1$. Любое значение Δ_1, выходящее за пределы указанного интервала, приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных.

Максимальное изменение коэффициентов стоимости

Наряду с определением допустимых изменений запасов ресурсов представляет интерес и установление интервала допустимых изменений коэффициентов прибыли или стоимости.

Заметим, что уравнение целевой функции также никогда не используется в качестве разрешающего уравнения. Поэтому любые изменения коэффициентов целевой функции окажут влияние только на Z-уравнение результирующей симплекс-таблицы. Это означает, что такие изменения могут сделать полученное решение не оптимальным. Наша цель заключается в том, чтобы найти интервалы значений изменений коэффициентов целевой функции, при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Предположим, что стоимость 1 т краски E изменяется до $3 + \delta_1$, где δ_1 может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Целевая функция в этом случае имеет вид:

$$Z = (3 + \delta_1)x_E + 2x_I .$$

Если провести необходимые симплексные преобразования, то Z-уравнение в последней симплекс-таблице имеет вид:

Таблица 6

Базисные перемен.	Решение	X_I	X_E	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Z	$38/3 + (10/3)\,\delta_1$	0	0	$1/3 - (1/3)\,\delta_1$	$4/3 + (2/3)\,\delta_1$	0	0

Коэффициенты при базисных переменных x_I, x_E, y_3, y_4 остаются равными 0. Это уравнение отличается от Z-уравнения до введения δ_1 только наличием членов, содержащих δ_1. Коэффициенты при δ_1 равны коэффициентам при соответствующих переменных в x_E - уравнении симплекс-таблицы для полученного ранее оптимального решения.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_1, удовлетворяющих условию неотрицательности (задача максимизации) всех коэффициентов при небазисных переменных в Z-уравнении. Таким образом должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 1/3 - (1/3)\,\delta_1 \ge 0 \\ 4/3 + (2/3)\,\delta_1 \ge 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $-2 \le \delta_1 \le 1$, и определяет пределы изменения коэффициента c_1. Таким образом, если $-2 \le \delta_1 \le 1$, то оптимальные значения переменных останутся неизменными, а оптимальное значение Z изменится в соответствии с выражением

$$38/3 + (10/3)\,\delta_1.$$

<u>*Замечание.*</u> Любое изменение коэффициента целевой функции при небазисной в оптимальном решении переменной приводит лишь к тому, что в заключительной симплекс-таблице в Z-уравнении изменяется только коэффициент, соответствующий этой переменной. Причем коэффициент при небазисной переменной в результирующем Z-уравнении нужно уменьшить на ту величину, на которую он увеличивается в исходном Z-уравнении.

В заключении заметим, что разобранный пример является простейшим. Он приведен в данных указаниях, чтобы продемонстрировать выполнение отдельных этапов исследования операций и, безусловно, не охватывает все возможные ситуации, которые могут возникнуть при решении задач.