

М. Н. ПРОХОРОВ, С. В. КОСТИН

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

(2012/2013 учебный год)

(осенний семестр)

МОСКВА

2012

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 1

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 1, 0, -1 \rangle, \quad B = \langle 0, 2, -3 \rangle, \quad C = \langle 2, 4, -2 \rangle, \quad D = \langle -2, 6, 2 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на плоскость  $ABC$ .

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle 3, 4, 0 \rangle, \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  и через прямую  $L$ .

**Задача 3.** Даны прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0, 2x - y - 1 = 0\}.$$

- 1) Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны.
- 2) Найти расстояние  $d(L_1, L_2)$  между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 4.** Дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L = \{x + z - 1 = 0, y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z = 0\}.$$

- 1) Найти точку  $P$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .
- 2) Найти угол  $\angle(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 5.** Дана точка  $A$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 3, -5, 7 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

некоторого отрезка  $AB$ , конец  $B$  которого лежит в координатной плоскости  $Oxy\}$ .

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, 1, 1 \rangle,$$

$$\Sigma = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана точка  $S$  и дана сфера  $\Sigma$ :

$$S = \langle 5, 0, 0 \rangle, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в точке  $S$ , а образующие касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 2

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 3, 1, 1 \rangle, \quad B = \langle 1, 3, 1 \rangle, \quad C = \langle 1, 1, 3 \rangle, \quad D = \langle 1, 2, 3 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на прямую  $AC$  (прямая  $L_1$ ).

**Задача 2.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана прямая  $L$ :

$$P_1 = \langle 2, 1, 5 \rangle, \quad P_2 = \langle 1, 2, 5 \rangle, \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$  и образующей угол  $45^\circ$  с прямой  $L$ .

**Задача 3.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle -4, 3, 3 \rangle, \quad L = \{x - 2y + z - 4 = 0, 2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L_1$ , проходящей через точку  $P$  параллельно прямой  $L$ .

**Задача 4.** Даны прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0, y - z - 2 = 0\}.$$

- 1) Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются.
- 2) Найти точку  $P$  пересечения прямых  $L_1$  и  $L_2$ .
- 3) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через прямые  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 5.** Дана точка  $A$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle -3, -5, 9 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

некоторого отрезка  $AB$ , конец  $B$  которого лежит в координатной плоскости  $Oyz\}$ .

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1$ ,  $P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 0, 1 \rangle, \quad P_2 = \langle -1, -2, -2 \rangle,$$

$$\Sigma = \{2(z + 1) = 2x^2 + y^2\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана сфера  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \{(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в начале координат  $O$ , а образующие касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 3

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle -1, 0, -4 \rangle, \quad B = \langle 1, 2, -3 \rangle, \quad C = \langle 1, 8, -6 \rangle, \quad D = \langle -5, -3, 7 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно плоскости  $ABC$ .

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и даны прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$P = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  параллельно прямым  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 3.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1$  и  $Q_2$ :

$$P = \langle 0, 2, 1 \rangle, \quad Q_1 = \{x - 2y = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L$ , которая проходит через точку  $P$  параллельно плоскости  $Q_1$  и образует угол  $60^\circ$  с плоскостью  $Q_2$ .

**Задача 4.** Даны точки  $P_1, P_2, P_3$  и дана прямая  $L$ :

$$P_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad P_3 = \langle 0, 1, 5 \rangle,$$

$$L = \{x = 2t - 1, y = t + 2, z = -t + 1\}.$$

- 1) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точки  $P_1, P_2, P_3$ .
- 2) Найти точку  $P$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .
- 3) Найти угол  $\angle(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 2, 3, -5 \rangle, \quad B = \langle 2, -7, -5 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2} \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, 2, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle -1, 3, 0 \rangle,$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \right\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана точка  $S$  и дан эллипсоид  $\Sigma$ :

$$S = \langle 3, 0, -1 \rangle, \quad \Sigma = \left\{ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в точке  $S$ , а образующие касаются эллипсоида  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 4

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 3, 2, 2 \rangle, \quad B = \langle 2, 2, 3 \rangle, \quad C = \langle 2, 3, 2 \rangle, \quad D = \langle 2, 2, 2 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно прямой  $AC$  (прямая  $L_1$ ).

**Задача 2.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана плоскость  $Q$ :

$$P_1 = \langle -1, -2, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad Q = \{x + 2y + 2z - 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q_1$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$  перпендикулярно плоскости  $Q$ .

**Задача 3.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана плоскость  $Q$ :

$$P_1 = \langle 0, 0, 4 \rangle, \quad P_2 = \langle 2, 2, 0 \rangle, \quad Q = \{x + y - z = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение прямой  $L$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 2) Найти точку  $P$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .
- 3) Найти угол  $\angle(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P = \langle -4, 3, 0 \rangle, \quad Q_1 = \{x - 2y + z = 0\}, \quad Q_2 = \{2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L$ , проходящей через точку  $P$  параллельно плоскостям  $Q_1$  и  $Q_2$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle -1, 0, 0 \rangle, \quad B = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .



**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, 1, 1 \rangle,$$

$$\Sigma = \{9(x-1)^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дан вектор  $\mathbf{a}$  и дана окружность  $\Gamma$ :

$$\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4 \rangle, \quad \Gamma = \{x^2 + y^2 = 9, z = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma$ , образующие которой параллельны вектору  $\mathbf{a}$ , а направляющей служит окружность  $\Gamma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 5

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 1, 2, -3 \rangle, \quad B = \langle 5, 1, -2 \rangle, \quad C = \langle 2, -2, -2 \rangle, \quad D = \langle 2, 2, 8 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти уравнение прямой  $L_2$ , симметричной прямой  $AD$  (прямая  $L_1$ ) относительно плоскости  $ABC$ .

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P = \langle -1, -1, 2 \rangle, \quad Q_1 = \{x - 2y + z - 4 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - 2z + 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно плоскостям  $Q_1$  и  $Q_2$ .

**Задача 3.** Даны прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L_1 = \{2x - y - 7 = 0, 2x - z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{3x - 2y + 8 = 0, 3x - z = 0\}.$$

- 1) Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  скрещиваются.
- 2) Найти угол  $\angle(L_1, L_2)$  между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 4.** Дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L = \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \right\}, \quad Q = \{2x + y - z = 0\}.$$

- 1) Доказать, что прямая  $L$  параллельна плоскости  $Q$ .
- 2) Найти расстояние  $d(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 5.** Пусть  $\Sigma$  — куб, центр которого находится в начале координат  $O$ , грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек  $M$ :

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P \\ \text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 0, 2 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, -1, 2 \rangle,$$

$$\Sigma = \{x^2 + (y + 1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана плоскость  $Q$  и дана поверхность  $\Sigma$ :

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 - y^2 = z\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma_1$ , образующие которой перпендикулярны плоскости  $Q$ , а направляющей служит кривая  $\Gamma = \Sigma \cap Q$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 6

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle -3, 2, 0 \rangle, \quad B = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad C = \langle 4, 4, 1 \rangle, \quad D = \langle 4, 1, 7 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $L_2$  прямой  $AD$  (прямая  $L_1$ ) на плоскость  $ABC$ .

**Задача 2.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-1}{6} = \frac{y-1/2}{5} = \frac{z-1}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через прямую  $L_1$  параллельно прямой  $L_2$ .

**Задача 3.** Даны плоскости  $Q_1, Q_2, Q_3$ :

$$Q_1 = \{3x - 4y = 0\}, \quad Q_2 = \{y = 0\}, \quad Q_3 = \{z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L$ , проходящей через начало координат  $O$  и образующей одинаковые углы с плоскостями  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle -1, 2, -3 \rangle, \quad L = \{x - 2 = 0, y - z - 1 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно прямой  $L$ .
- 2) Найти точку  $P_1$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 1, 2, -3 \rangle, \quad B = \langle 3, 2, 1 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 2, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, 0, 2 \rangle,$$

$$\Sigma = \{2(1 - z) = 2x^2 + y^2\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана плоскость  $Q$  и дана сфера  $\Sigma$ :

$$Q = \{x + y - 2z - 5 = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma_1$ , образующие которой перпендикулярны плоскости  $Q$  и касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 7

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle -1, 1, -1 \rangle, \quad B = \langle 1, 3, 0 \rangle, \quad C = \langle 0, -1, 1 \rangle, \quad D = \langle 9, -3, -7 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на плоскость  $ABC$ .

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad Q_1 = \{2x + 2y - z - 1 = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z + 3 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  и образующей угол  $60^\circ$  с плоскостями  $Q_1$  и  $Q_2$ .

**Задача 3.** Даны прямые  $L_1, L_2$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0} \right\}, \quad L_2 = \{3x + 2y + z - 6 = 0, 2x + y + z - 4 = 0\},$$

$$Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

- 1) Найти точку  $P_1$  пересечения прямой  $L_1$  и плоскости  $Q$ .
- 2) Найти точку  $P_2$  пересечения прямой  $L_2$  и плоскости  $Q$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $L$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle 3, 4, 0 \rangle, \quad L = \{2x + y - z + 4 = 0, x + 2y + z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L_1$ , проходящей через точку  $P$  параллельно прямой  $L$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 0, 0, -4 \rangle, \quad B = \langle 0, 0, 4 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 10\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle -1, 3, 4 \rangle,$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4(y - 1)^2 - z^2 = 0\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана прямая  $L$  и дана сфера  $\Sigma$ :

$$L = \{x = 2t - 3, y = -t + 7, z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma_1$ , образующие которой параллельны прямой  $L$  и касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 8

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 3, 2, 3 \rangle, \quad B = \langle 1, 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 1, 2, 5 \rangle, \quad D = \langle 1, 2, 3 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на прямую  $AC$  (прямая  $L_1$ ).

**Задача 2.** Дана точка  $P$ :

$$P = \langle 2, 3, -4 \rangle.$$

Найти уравнение перпендикуляра  $L$ , опущенного из точки  $P$  на ось  $Oy$ .

**Задача 3.** Даны точки  $P_1, P_2$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P_1 = \langle -1, 1, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, 3, 3 \rangle,$$

$$Q_1 = \{3x + y - z + 2 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - z + 2 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение прямой  $L$  пересечения плоскостей  $Q_1$  и  $Q_2$ .
- 2) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$  параллельно прямой  $L$ .

**Задача 4.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана прямая  $L$ :

$$P_1 = \langle -1, -1, -1 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, -2, -2 \rangle, \quad L = \{x - 2z + 1 = 0, y + 2z - 1 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение прямой  $L_1$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 2) Найти угол  $\angle(L_1, L)$  между прямыми  $L_1$  и  $L$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 0, -5, 0 \rangle, \quad B = \langle 0, 5, 0 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 6\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .



**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, 1, 4 \rangle,$$

$$\Sigma = \{9x^2 + 4(y - 1)^2 - 36z^2 = 36\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана точка  $A$  и дана прямая  $L$ :

$$A = \langle 2, -1, 1 \rangle, \quad L = \{x = 3t + 1, y = -2t - 2, z = t + 2\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности  $\Sigma$ , проходящей через точку  $A$ , если осью этой поверхности является прямая  $L$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 9

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 0, -1, 2 \rangle, \quad B = \langle 1, 1, 4 \rangle, \quad C = \langle 3, -1, 5 \rangle, \quad D = \langle 2, 1, -4 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно плоскости  $ABC$ .

**Задача 2.** Дана плоскость  $Q$ :

$$Q = \{2x + y - \sqrt{5}z = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q_1$ , проходящей через ось  $Oz$  и образующей угол  $60^\circ$  с плоскостью  $Q$ .

**Задача 3.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle 1, 2, 8 \rangle, \quad L = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти проекцию  $P_1$  точки  $P$  на прямую  $L$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P = \langle 1, 2, 4 \rangle, \quad Q_1 = \{2x - y + 3z - 6 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - z + 3 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение прямой  $L$  пересечения плоскостей  $Q_1$  и  $Q_2$ .
- 2) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  и через прямую  $L$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 0, -2, 0 \rangle, \quad B = \langle 0, 2, 0 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 5\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - 2 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, -4, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, -3, 2 \rangle,$$

$$\Sigma = \{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана точка  $S$  и дана сфера  $\Sigma$ :

$$S = \langle 5, 0, 0 \rangle, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в точке  $S$ , а образующие касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 10

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 2, -1, -1 \rangle, \quad B = \langle -1, -1, 2 \rangle, \quad C = \langle -1, 2, -1 \rangle, \quad D = \langle -1, -1, -1 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти точку  $D_1$ , симметричную точке  $D$  относительно прямой  $AC$  (прямая  $L_1$ ).

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и даны плоскости  $Q_1, Q_2$ :

$$P = \langle 2, 0, -3 \rangle, \quad Q_1 = \{3x - y + 2z - 7 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - 2z - 3 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение прямой  $L$  пересечения плоскостей  $Q_1$  и  $Q_2$ .
- 2) Найти уравнение прямой  $L_1$ , проходящей через точку  $P$  параллельно прямой  $L$ .

**Задача 3.** Дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L = \{3x - y + 1 = 0, 3x + 2z - 2 = 0\}, \quad Q = \{2x + y + z - 4 = 0\}.$$

Найти угол  $\angle(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$ , дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$P = \langle 1, 5, 10 \rangle, \quad L = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \right\}, \quad Q = \{x + 2y + 3z - 29 = 0\}.$$

- 1) Найти точку  $P_1$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .
- 2) Найти уравнение прямой  $L_1$ , проходящей через точки  $P$  и  $P_1$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 0, -10, 0 \rangle, \quad B = \langle 0, 10, 0 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 12\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{3}{2 - 3 \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad P_2 = \langle 0, -3, 2 \rangle,$$

$$\Sigma = \{36z = 4x^2 + 9(y + 3)^2\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана сфера  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \{(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в начале координат  $O$ , а образующие касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 11

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 2, -2, 1 \rangle, \quad B = \langle 1, -1, -1 \rangle, \quad C = \langle 2, 0, -1 \rangle, \quad D = \langle -4, 4, 1 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти уравнение прямой  $L_2$ , симметричной прямой  $AD$  (прямая  $L_1$ ) относительно плоскости  $ABC$ .

**Задача 2.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \right\}, \quad L_2 = \{x - 2 = 0, y - 2 = 0\}.$$

- 1) Найти уравнение плоскости  $Q_1$ , проходящей через прямую  $L_1$  параллельно прямой  $L_2$ .
- 2) Найти уравнение плоскости  $Q_2$ , проходящей через прямую  $L_2$  параллельно прямой  $L_1$ .
- 3) Найти расстояние  $d(Q_1, Q_2)$  между плоскостями  $Q_1$  и  $Q_2$ .

**Задача 3.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \{x - y + z - 4 = 0, 2x + y - 2z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{x + y + z - 4 = 0, 2x + 3y - z - 6 = 0\}.$$

Найти угол  $\angle(L_1, L_2)$  между прямыми  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 4.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle 1, 0, -1 \rangle, \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно прямой  $L$ .

**Задача 5.** Дана точка  $A$ , дана плоскость  $Q$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 1, 2, 3 \rangle, \quad Q = \{x + y + z = 0\}, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в плоскости } Q\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{4}{3 - \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 0, 2 \rangle, \quad P_2 = \langle 1, 2, 3 \rangle,$$

$$\Sigma = \{2(2 - z) = x^2 + 2y^2\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана точка  $S$  и дан эллипсоид  $\Sigma$ :

$$S = \langle 3, 0, -1 \rangle, \quad \Sigma = \left\{ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности  $\Sigma_1$ , вершина которой находится в точке  $S$ , а образующие касаются эллипсоида  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 12

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 0, 5, 1 \rangle, \quad B = \langle 1, -2, -1 \rangle, \quad C = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad D = \langle -7, -7, 8 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $L_2$  прямой  $AD$  (прямая  $L_1$ ) на плоскость  $ABC$ .

**Задача 2.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \right\}.$$

- 1) Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны.
- 2) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через прямые  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 3.** Дана точка  $P$  и дана прямая  $L$ :

$$P = \langle 3, 0, 4 \rangle, \quad L = \{2x - y + 1 = 0, 2x - z = 0\}.$$

Найти расстояние  $d(P, L)$  от точки  $P$  до прямой  $L$ .

**Задача 4.** Дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L = \{x + 2y + 3z - 13 = 0, 3x + y + 4z - 19 = 0\}, \quad Q = \{5x - 3y + z = 0\}.$$

- 1) Найти точку  $P$  пересечения прямой  $L$  и плоскости  $Q$ .
- 2) Найти угол  $\angle(L, Q)$  между прямой  $L$  и плоскостью  $Q$ .

**Задача 5.** Даны точки  $A, B$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle -2, 0, 0 \rangle, \quad B = \langle 2, 0, 0 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 16\}.$$

Найти уравнение ГМТ  $M$ .



**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 0, 0, 1 \rangle, \quad P_2 = \langle 3, -2, 1 \rangle,$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4y^2 = (z - 1)^2\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дан вектор  $\mathbf{a}$  и дана окружность  $\Gamma$ :

$$\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4 \rangle, \quad \Gamma = \{x^2 + y^2 = 9, z = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma$ , образующие которой параллельны вектору  $\mathbf{a}$ , а направляющей служит окружность  $\Gamma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 13

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 1, -2, 0 \rangle, \quad B = \langle -2, 4, -2 \rangle, \quad C = \langle 0, 7, 4 \rangle, \quad D = \langle 5, 6, -3 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на плоскость  $ABC$ .

**Задача 2.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \{x - z + 2 = 0, y - 2z - 1 = 0\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1} \right\}.$$

- 1) Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются.
- 2) Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через прямые  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 3.** Даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - z - 1 = 0, y + z - 1 = 0\}.$$

Доказать, что прямые  $L_1$  и  $L_2$  перпендикулярны.

**Задача 4.** Дана прямая  $L$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0} \right\}, \quad Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

Найти проекцию  $L_1$  прямой  $L$  на плоскость  $Q$ .

**Задача 5.** Дана точка  $A$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle 3, -5, 7 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

некоторого отрезка  $AB$ , конец  $B$  которого лежит в координатной плоскости  $Oxy\}$ .

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 2, 1, -1 \rangle,$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - (z - 1)^2 = 1 \right\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана плоскость  $Q$  и дана поверхность  $\Sigma$ :

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 - y^2 = z\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma_1$ , образующие которой перпендикулярны плоскости  $Q$ , а направляющей служит кривая  $\Gamma = \Sigma \cap Q$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (ДО)

(1-й курс, 1-й семестр)  
(2012/2013 учебный год)

## Типовой расчет

### Вариант 14

**Задача 1.** Даны точки  $A, B, C, D$ :

$$A = \langle 1, 1, 4 \rangle, \quad B = \langle -1, 3, 4 \rangle, \quad C = \langle -1, 1, 6 \rangle, \quad D = \langle -1, 1, 4 \rangle.$$

- 1) Найти объем  $V_{ABCD}$  пирамиды  $ABCD$ .
- 2) Найти площадь  $S_{ABC}$  грани  $ABC$ .
- 3) Найти уравнение прямой  $AB$  (прямая  $L$ ).
- 4) Найти длину ребра  $AB$ .
- 5) Найти уравнение плоскости  $ABC$  (плоскость  $Q$ ).
- 6) Найти проекцию  $D_1$  точки  $D$  на прямую  $AC$  (прямая  $L_1$ ).

**Задача 2.** Дана точка  $P$  и даны векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ :

$$P = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad \mathbf{a}_1 = \langle 0, 1, 2 \rangle, \quad \mathbf{a}_2 = \langle -1, 0, 1 \rangle.$$

Найти уравнение плоскости  $Q$ , проходящей через точку  $P$  параллельно векторам  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ .

**Задача 3.** Дана точка  $P$  и даны прямые  $L_1, L_2$ :

$$P = \langle 1, 1, 2 \rangle, \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{-1} \right\}, \quad L_2 = \{x - z + 2 = 0, y - 2z - 1 = 0\}.$$

Найти уравнение прямой  $L$ , проходящей через точку  $P$  перпендикулярно прямым  $L_1$  и  $L_2$ .

**Задача 4.** Даны прямые  $L_1, L_2$  и дана плоскость  $Q$ :

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3} \right\},$$

$$Q = \{x + y - z = 0\}.$$

- 1) Доказать, что прямая  $L_1$  параллельна плоскости  $Q$ .
- 2) Доказать, что прямая  $L_2$  лежит в плоскости  $Q$ .

**Задача 5.** Дана точка  $A$  и дано геометрическое место точек  $M$ :

$$A = \langle -3, -5, 9 \rangle, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

некоторого отрезка  $AB$ , конец  $B$  которого лежит в координатной плоскости  $Oyz\}$ .

Найти уравнение ГМТ  $M$ .

**Задача 6.** Кривая  $\Gamma$  задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos \varphi}.$$

Определить тип кривой  $\Gamma$ .

**Задача 7.** Даны точки  $P_1, P_2$  и дана поверхность второго порядка  $\Sigma$ :

$$P_1 = \langle 2, 1, 0 \rangle, \quad P_2 = \langle 2, 1, 8 \rangle,$$

$$\Sigma = \left\{ 1 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right\}.$$

- 1) Определить тип поверхности  $\Sigma$ .
- 2) Изобразить схематически поверхность  $\Sigma$ .
- 3) Изобразить сечения поверхности  $\Sigma$  координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
- 4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности  $\Sigma$  лежат точки  $P_1$  и  $P_2$ .
- 5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью  $\Sigma$  имеет прямая, проходящая через точки  $P_1$  и  $P_2$  (прямая  $L$ ).

**Задача 8.** Дана плоскость  $Q$  и дана сфера  $\Sigma$ :

$$Q = \{x + y - 2z - 5 = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности  $\Sigma_1$ , образующие которой перпендикулярны плоскости  $Q$  и касаются сферы  $\Sigma$ .

**Замечание 1.** Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

**Замечание 2.** Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.