

Минобрнауки России

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра автоматизации процессов химической промышленности

А.В.Черникова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Практикум к контрольным работам №1-3

Санкт-Петербург
2015

УДК 681.5

Черникова, А.В. Теория автоматического управления: Практикум к контрольным работам №1-3/ А.В. Черникова. – СПб: СПбГТИ(ТУ), 2015. - 73 с.

Практикум по дисциплине Теория автоматического управления предназначен для студентов заочной формы, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Автоматизация технологических процессов и производств» в соответствии с компетенциями ОК-7, ПК-8 и «Системный анализ и управление» в соответствии с компетенциями ОПК-1, ОПК-2, ПК-1, ПК-4.

Содержание практикума соответствует задачам теоретической и практической подготовки по разделам дисциплины: математическое описание линейных САУ, устойчивость линейных САУ и качество переходных процессов.

Настоящее издание освещает процедуру выполнения контрольных работ, содержит необходимые теоретические сведения, методические указания и примеры решения задач, задания и исходные данные к контрольным работам №1-3.

Рецензент:

И.А.Смирнов, канд. техн. наук, доцент кафедры системы автоматизированного проектирования и управления СПбГТИ(ТУ).

Полученные результаты были достигнуты в рамках государственного задания Минобрнауки России

Утвержден на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления 05. 02. 2015 г., протокол №6

Рекомендован к изданию РИСо СПбГТИ (ТУ).

ВВЕДЕНИЕ

Для студентов заочной формы самостоятельная работа является неотъемлемой частью учебного процесса и заключается в том, чтобы в *межсессионный* период изучить материал дисциплины по учебникам, учебно-методическим пособиям, с использованием электронных образовательных ресурсов. На основе изученного материала студент должен выполнить письменные задания: контрольные работы и курсовую работу.

В ходе изучения дисциплины Теория автоматического управления предполагается выполнение студентами заочной формы пяти письменных контрольных работ.

Контрольные работы охватывают основные разделы дисциплины.

Контрольная работа №1. Временные и частотные характеристики элементов линейных САУ.

Контрольная работа №2. Устойчивость линейных САУ.

Контрольная работа №3. Построение области устойчивости и оценка качества линейных САУ на основе временных характеристик.

Контрольная работа №4. Дискретные САУ.

Контрольная работа №5. Нелинейные САУ.

По результатам выполнения контрольных работ студенту необходимо представить отчёт в рукописном или распечатанном виде.

Отчёт должен включать: титульный лист, условие задачи, подробное описание решения задачи, таблицу расчетов и графики (при необходимости), ответ задачи. Во время защиты контрольных работ студент должен знать ход решения задачи, уметь отвечать на теоретические вопросы, непосредственно связанные с тематикой задачи. На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта. Пример оформления титульного листа контрольной работы представлен в Приложении А.

Каждая контрольная работа содержит задачи из 10 вариантов. **Номер варианта соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента.**

Настоящий практикум содержит теоретические сведения, примеры задач и задания для выполнения контрольных работ №1-3.

1 ВРЕМЕННЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основными задачами теории автоматического управления (ТАУ) являются исследования статических и динамических свойств систем автоматического управления (САУ) и разработка систем, удовлетворяющих заданным техническим требованиям. Исследование процесса работы некоторой САУ, заданной своей структурой и элементами, при различных параметрах этих элементов и различных воздействиях, составляет задачу анализа.

Основными характеристиками отдельных элементов и систем в целом являются:

- ✓ **дифференциальное уравнение**, которое является наиболее общей и полной формой описания свойств элементов и системы управления в целом, хотя не дает наглядного представления о динамических свойствах;

- ✓ **передаточная функция $W(p)$** , которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем; передаточную функцию получают из дифференциального уравнения с использованием метода операционного исчисления;

- ✓ **временные характеристики**, которые определяют поведение элементов или системы во времени при нанесении внешнего воздействия и являются наиболее наглядным описанием их динамических свойств;

- ✓ **частотные характеристики**, которые определяют поведение элемента или системы при гармоническом воздействии различных частот, они находят применение в ТАУ, так как реальные возмущения, а, следовательно, и реакции на них элемента или САУ могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Все эти характеристики тесно связаны друг с другом.

1.1 ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как было отмечено, временные характеристики являются наиболее наглядным описанием динамических свойств отдельных элементов и САУ. Кроме того, наиболее простым при оценке качества работы системы управления является анализ переходных процессов, вызванных внешними воздействиями. Поэтому изучение временных характеристик является весьма важным.

К типовым временным характеристикам относят *переходную* и *весовую* функции элемента (САУ), а при нанесении на элемент (САУ) нетипового воздействия говорят о временной характеристике или *переходном процессе* элемента (САУ).

Так как подход к получению и исследованию временных характеристик для отдельных элементов и систем в целом одинаков, то в дальнейшем будем говорить только об элементах, подразумевая, в том числе, и систему в целом.

Воздействием в ТАУ принято называть взаимодействие между САУ (а также между ее частями) и внешней средой. Воздействия передаются посредством физических величин (напряжения, силы тока, давления воздуха, степени открытия клапана и др.). **Сигнал** отображает информацию, которая содержится в воздействии. Обычно сигнал выражается некоторой математической функцией, например, $g(t)$, $u(t)$, $y(t)$, однозначно отображающей изменения воздействия во времени. В дальнейшем, при изложении материала, будем использовать оба термина.

Рассмотрим временные характеристики элементов и способы их получения.

Переходная функция элемента $h(t)$ представляет собой переходный процесс изменения во времени выходной величины, вызванного подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия $1[t]$ при нулевых начальных условиях (рисунок 1).



Рисунок 1 - Преобразование единичного ступенчатого воздействия в переходную функцию

Такое воздействие рассматривается как типовое в связи с тем, что оно может быть легко реализовано в реальных САУ.

Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменной, ее вид представлен на рисунке 2.

Математическое описание единичной ступенчатой функции

$$x(t) = 1 \cdot \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.$$

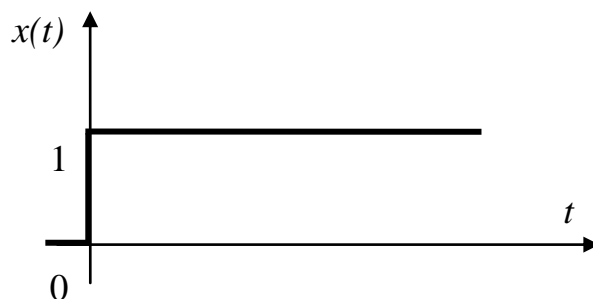


Рисунок 2 - График единичной ступенчатой функции

Связь между $h(t)$ и $W(p)$ устанавливается через обратное преобразование Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \{ W(p) \cdot X(p) \} \stackrel{3}{=} L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} \quad (1)$$

Замечание: преобразование Лапласа изучается студентами в разделе высшей математики. Основные положения изложены в Приложении Б.

Наряду с переходной применяется **весовая (импульсная) функция** $w(t)$, представляющая собой реакцию элемента на дельта- функцию (рисунок 3).

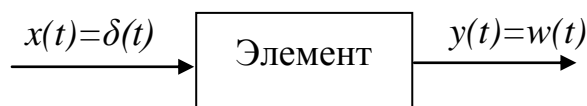


Рисунок 3 - Преобразование дельта- функции в весовую функцию

Дельта-функция (функция Дирака) – это математическая идеализация предельно короткого и предельно большого по амплитуде импульсного сигнала с площадью, равной единице, который условно показан в виде утолщения на оси ординат на рисунке 4.

Математическое описание дельта-функции имеет вид

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}.$$

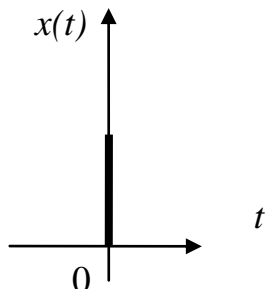


Рисунок 4 - График дельта- функции

Связь между $w(t)$ и $W(p)$ также устанавливается через обратное преобразование Лапласа

$$w(t) = L^{-1} \{ W(p) \cdot X(p) \} \stackrel{3}{=} L^{-1} \{ W(p) \}. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) видно, что и переходная и весовая функции связаны с передаточной функцией простыми соотношениями. Следует также отметить, что они связаны и между собой:

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t).$$

Кроме ступенчатой и дельта- функции, для анализа элементов также применяются воздействия вида $x(t) = k \cdot t \cdot 1_{\square}$, $x(t) = \varepsilon \cdot t^2 \cdot 1_{\square}$ и их сочетания.

Линейный сигнал описывается функцией вида $x(t) = k \cdot t \cdot 1_{\square}$, его график изображен на рисунке 5.

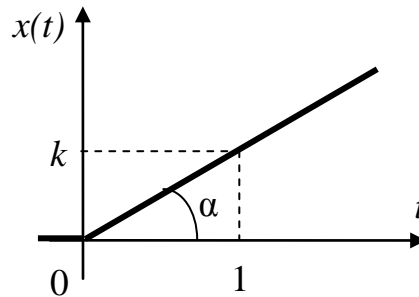


Рисунок 5 - Линейный сигнал

Следует отметить, что дифференциальные уравнения, описывающие характер протекающих в элементах процессов, решаются при нулевых начальных условиях, поэтому и сигналы рассматриваются при нулевых начальных условиях. При описании линейного воздействия при нулевых начальных условиях используется домножение на $1[t]$:

$$x(t) = k \cdot t \cdot 1_{\square} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ k \cdot t, t \geq 0 \end{cases}$$

Коэффициент k представляет собой тангенс угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс ($\operatorname{tg} \alpha$) и равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему.

Аналогично при нулевых начальных условиях описывается квадратичная функция, ее график приведен на рисунке 6:

$$x(t) = \varepsilon \cdot t^2 \cdot 1_{\square} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \varepsilon \cdot t^2, t \geq 0 \end{cases}$$

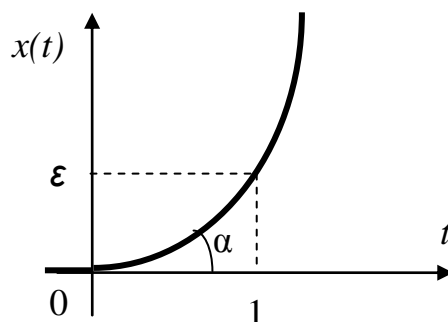


Рисунок 6 - График квадратичной функции

Следует также отметить, что сигналы могут иметь так называемое запаздывание, т.е. могут быть «сдвинуты» по оси абсцисс. Например,

единичная ступенчатая функция с запаздыванием τ будет иметь вид, изображенный на рисунке 7.

При описании этого сигнала используется запись: $x(t) = 1 \cdot \bar{u}(t - \tau)$. Аналогично, чтобы описать любой сигнал с запаздыванием, следует в основной формуле к параметру t добавить « $-\tau$ », где τ – величина запаздывания.

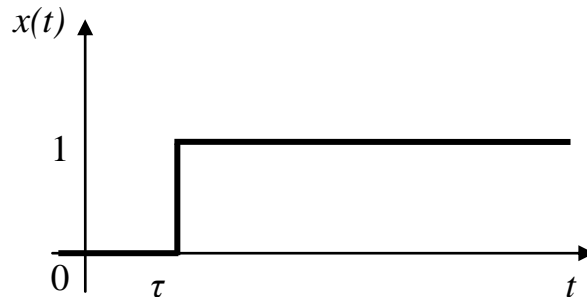


Рисунок 7 - Ступенчатая функция с запаздыванием

В реальных случаях входные воздействия САУ представляют собой сложные и часто случайные функции времени. Это, например, треугольный (рисунок 8), трапецеидальный (рисунок 9), прямоугольный (рисунок 10) сигналы, прямоугольная волна (рисунок 11) и т.п. Реальные воздействия можно аппроксимировать типовыми сигналами или их совокупностью.

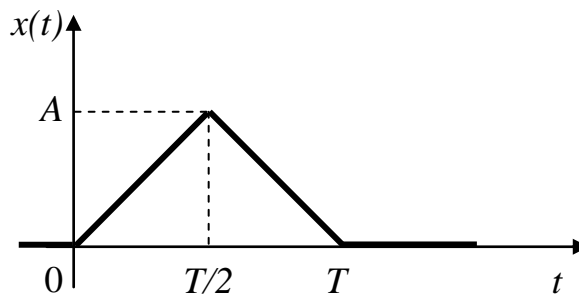


Рисунок 8 - График треугольного сигнала

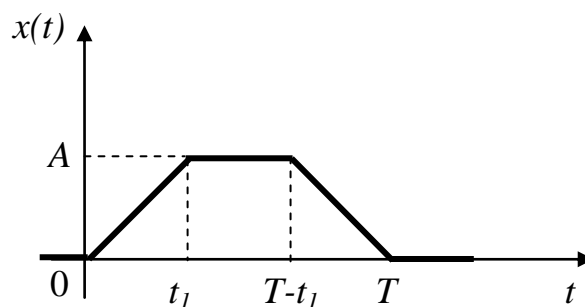


Рисунок 9 - График трапецеидального сигнала

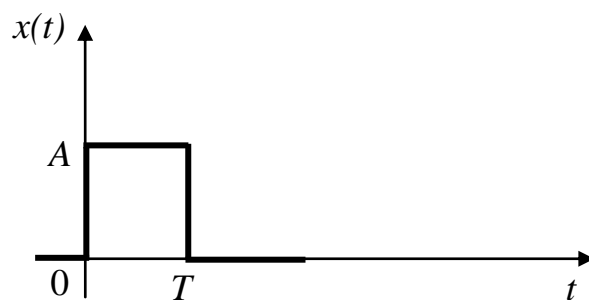


Рисунок 10 - График прямоугольного сигнала

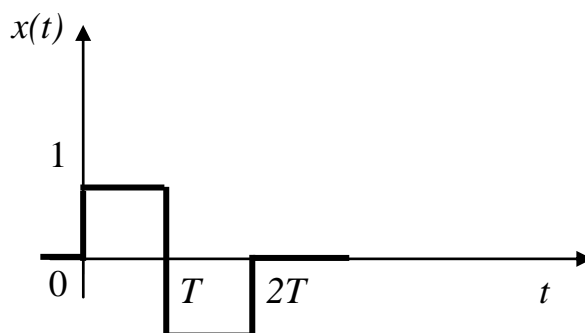


Рисунок 11 - График прямоугольной волны

Для описания сложных сигналов следует представить их в виде суммы (или разности) простейших типовых сигналов.

Рассмотрим порядок решения задачи получения выходного сигнала элемента, при подаче на его вход сложного воздействия.

Согласно **принципу суперпозиции**, для линейного элемента реакция на линейную комбинацию воздействий равна той же линейной комбинации реакций элемента на каждое воздействие в отдельности. Иными словами требуется представить сложную функцию как сумму простых, найти реакцию элемента на каждую простую составляющую, тогда сумма реакций и будет $y(t)$. Принцип суперпозиции проиллюстрирован на рисунке 12.

Алгоритм решения задачи будет включать следующие этапы:

1) представить сложное входное воздействие как сумму простых типовых сигналов;

2) найти изображения по Лапласу для каждой полученной составляющей $X_i(p) = L \{x_i(t)\}$;

3) найти реакцию элемента (математическая модель которого задана передаточной функцией $W(p)$) на каждую простую составляющую по формуле

$$y_i(t) = L^{-1} \{ W(p) \cdot X_i(p) \}; \quad (3)$$

4) построить график функции $y(t)$ как сумму составляющих $y_i(t)$.

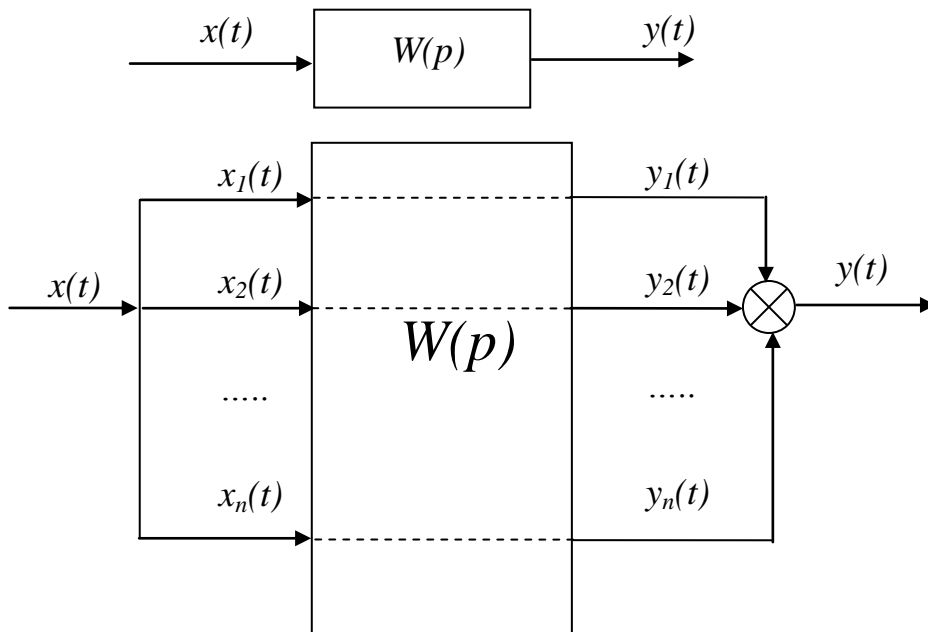


Рисунок 12 - Иллюстрация принципа суперпозиции

1.2 ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Частотные характеристики описывают свойства элементов и САУ менять гармонические сигналы на разных частотах. Они находят применение в ТАУ, так как реальные воздействия, а следовательно и реакции на них элемента или САУ могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Пусть на вход линейного элемента (рисунок 13) в момент времени $t=0$ подано гармоническое воздействие с частотой ω $x(t) = x_m \cdot \sin \omega t$.



Рисунок 13 - Преобразование гармонического воздействия

По завершении переходного процесса установится режим вынужденных колебаний, и выходная величина $y(t)$ будет изменяться по тому же закону, что и входная $x(t)$, но в общем случае с другой амплитудой y_m и с фазовым сдвигом φ по оси времени относительно входного сигнала (рисунок 14) $y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Проведя аналогичный опыт, но при другой частоте ω , можно увидеть, что амплитуда y_m и фазовый сдвиг φ изменились, т. е. они зависят от частоты. Можно убедиться также, что для другого элемента зависимости

параметров y_m и φ от частоты ω иные. Поэтому такие зависимости могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

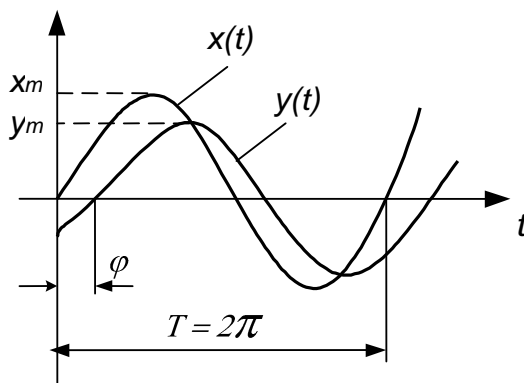


Рисунок 14 - Виды сигналов на входе и выходе элемента

Кроме передаточной функции по Лапласу в ТАУ активно используется передаточная функция по Фурье, называемая также **частотной передаточной функцией**.

Она позволяет получить информацию обо всех показателях синусоидального выходного сигнала элемента, если известны амплитуда и частота его входного синусоидального воздействия.

Частотные передаточные функции получают с использованием преобразования Фурье, которое определяется выражением

$$x(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

где $x(t)$, $t \geq 0$ — любая функция времени, удовлетворяющая условию применения преобразования Фурье.

Кроме того, частотную передаточную функцию не трудно получить из передаточной функции, используя замену $W(p) \Big|_{p=j\omega} = W(j\omega)$.

При этом частотная передаточная функция может быть представлена

➤ в прямоугольной форме $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$; (4)

➤ в показательной форме $W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$; (5)

➤ в тригонометрической форме $W(j\omega) = A(\omega) \cdot (\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega))$.

В ТАУ используют следующие частотные характеристики:

- амплитудная частотная характеристика (АЧХ);
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ);
- амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) — зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты.

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Пример АЧХ приведен на рисунке 15.

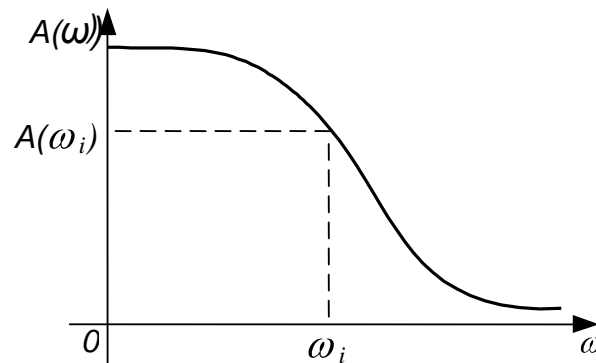


Рисунок 15 - Вид АЧХ

АЧХ может быть получена по известной частотной передаточной функции

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (6)$$

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) – зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты.

ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах. Пример ФЧХ приведен на рисунке 16.

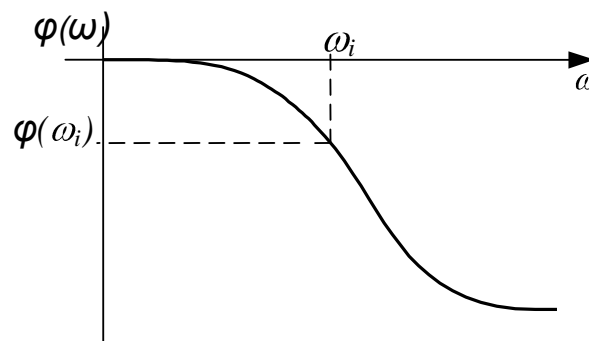


Рисунок 16 - Вид ФЧХ

ФЧХ также может быть получена по частотной передаточной функции

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (7)$$

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую – **амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) - $W(j\omega)$** .

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно изменяется длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, и есть АФЧХ (рисунок 17). Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

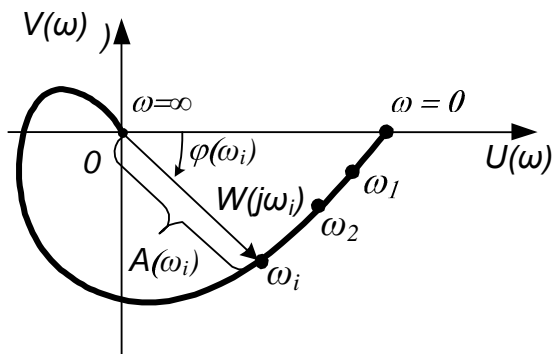


Рисунок 17 - Вид АФЧХ

Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно **действительной** и **мнимой частотными характеристиками** и обозначают $U(\omega)$, $V(\omega)$.

При практических инженерных расчетах САУ удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют **логарифмическими**. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем, эти отрезки в большинстве случаев удастся построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

1.3 ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Рассмотрим примеры решения задач, которые предлагаются студентам для самостоятельного выполнения.

Пример 1. Модель элемента задана в виде передаточной функции

$$W(p) = \frac{2}{3p + 1}.$$

Требуется получить выражение и построить график весовой функции $w(t)$ данного элемента.

Решение.

Весовая функция элемента есть его реакция на дельта-функцию.

$$\text{Согласно выражению (2), } w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{2}{3 \cdot p + 1} \right\}.$$

Чтобы выполнить обратное преобразование Лапласа, воспользуемся таблицей преобразований (см. Приложение Б). В таблице имеется выражение, которое совпадает по структуре с выражением в фигурных скобках: $\frac{1}{p+a}$.

Приведем выражение в фигурных скобках к табличному виду, для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа, в соответствии с которым константа выносится за знак изображения (см. Приложение Б)

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{2}{3 \cdot p + 1} \right\} &= 2 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot p + 1} \right\} = 2 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \left(p + \frac{1}{3} \right)} \right\} = 2 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{3}} \right\} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \frac{1}{3}} \right\} = \frac{2}{3} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \frac{1}{3}} \right\} \end{aligned}$$

Получили выражение в фигурных скобках, в точности соответствующее табличному, где $a=1/3$.

Тогда

$$w(t) = \frac{2}{3} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{p + \frac{1}{3}} \right\} = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Задавая значения t от 0 до ∞ , можно получить график весовой функции. Однако даже при использовании вычислительной техники такой процесс является утомительным и зачастую так и не приводит к нужному результату. Для проверки правильности решения удобно воспользоваться предельными теоремами Лапласа (Приложение Б) и рассчитать начальное и конечное значения функции. Кроме того, зная конечное значение функции, можно приблизительно определить момент окончания расчета.

Найдем начальное значение весовой функции согласно (ПЗ):

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \frac{2}{3 \cdot p + 1} = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \left[\frac{2}{3 \cdot p + 1} \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p}{3p + 1}.$$

Разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на максимальную степень переменной p и воспользуемся свойствами пределов:

предел частного равен частному пределов, предел суммы равен сумме пределов и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Исходя из этого, имеем, что
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{p}} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично получим конечное значение весовой функции, согласно (П4):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot K(p) \cdot W(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[\frac{2}{3p+1} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2p}{3p+1} = 0.$$

Полученные значения $w(0) = \frac{2}{3}$ и $w(\infty) = 0$ помогут нам при расчете остальных значений весовой функции, по конечному значению можно определить момент окончания расчета (в нашем примере, когда кривая будет стремиться к оси абсцисс).

Составим таблицу и построим график функции. Данный расчет удобно выполнить в табличном редакторе Excel, экранная форма приведена на рисунке 18.

Ответ: $w(t) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$, график представлен на рисунке 18.

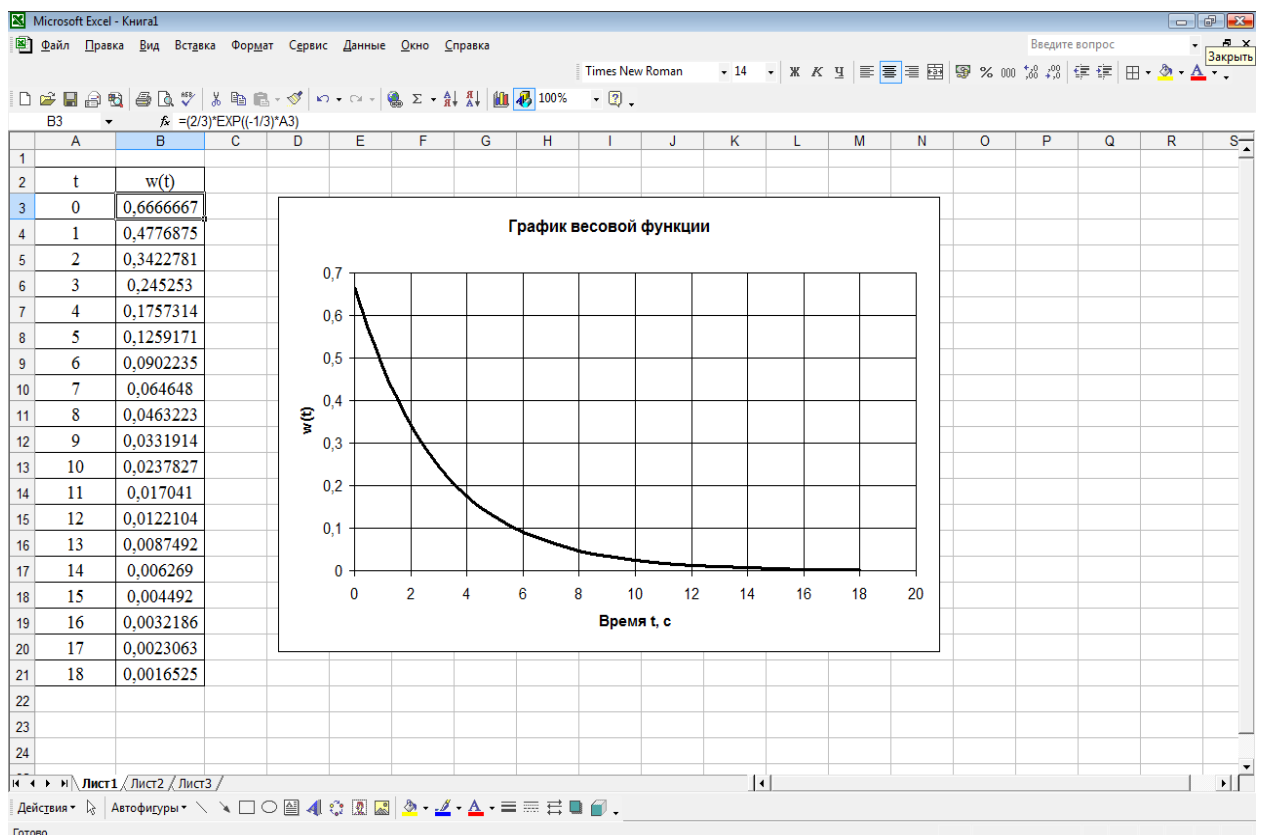


Рисунок 18 - Экранная форма расчета весовой функции

Пример 2. Модель элемента задана в виде передаточной функции $W(p) = \frac{-2}{3p}$. Требуется получить выражение и построить график переходной функции $h(t)$ данного элемента.

Решение.

Переходная функция элемента, согласно выражению (1),

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{p \cdot 3 \cdot p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{-2}{3p^2} \right\}.$$

Выполним обратное преобразование Лапласа в соответствии с рекомендациями, изложенными в примере 1.

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{-2}{3 \cdot p^2} \right\} = -\frac{2}{3} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = -\frac{2}{3} t.$$

Рассчитаем начальное и конечное значения функции по предельным теоремам Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -\infty.$$

Моментом окончания расчета может быть любой момент времени, когда становится понятен характер изменения функции, например, $t=16$ с.

По данным расчета построим график переходной функции, фрагмент расчета и вид которой приведены на рисунке 19.

Ответ: $h(t) = -\frac{2}{3} t$, график представлен на рисунке 19.

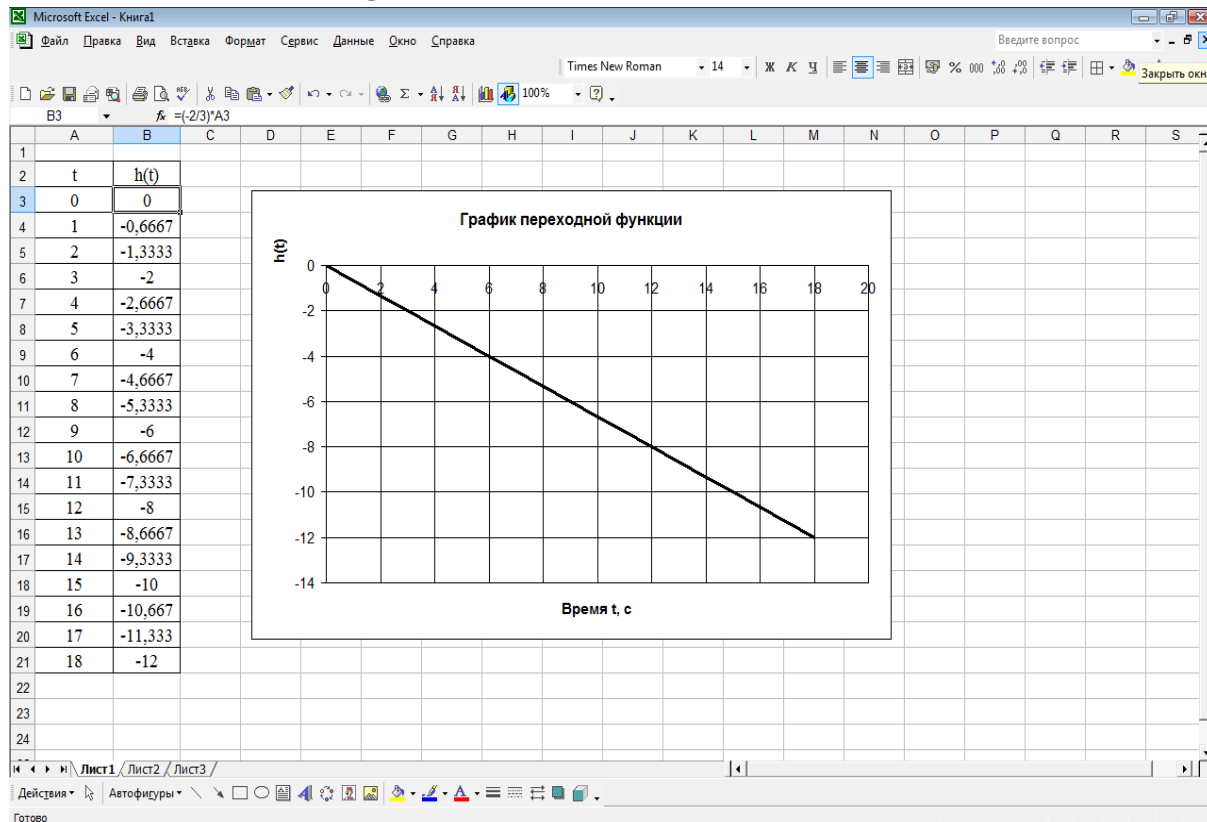


Рисунок 19 - Экранная форма расчета переходной функции

Прежде, чем приступать к решению задачи нахождения реакции элемента на сложное воздействие, рассмотрим пример аналитического описания сложного сигнала.

Пример 3. Пусть задан график функции $x(t)$, изображенный на рисунке 20, требуется получить аналитическое выражение.

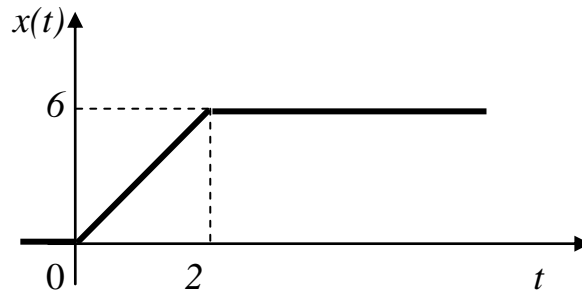


Рисунок 20 - График входного сигнала

Решение.

Первый участок сложного воздействия $x(t)$ соответствует типовому линейному сигналу и описывается функцией вида

$$x_1(t) = \frac{6}{2} \cdot t \cdot 1[t] = 3 \cdot t \cdot 1[t].$$

Если бы с этим сигналом ничего не происходило, то он так и продолжал бы возрастать. Однако, в момент времени $t=2$ он начал изменяться и из линейного возрастающего превратился в сигнал с постоянным значением амплитуды. Очевидно, что это произошло при сложении $x_1(t)$ с убывающей функцией с тем же углом наклона ($\alpha = \arctg k$), но имеющей запаздывание на $\tau=2$ с.

Тогда вторая составляющая нашего сложного воздействия $x(t)$ описывается выражением вида

$$x_2(t) = -3 \cdot (t - 2) \cdot 1[t - 2].$$

Изобразим функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на графике (рисунок 21).

Действительно, если мы теперь геометрически сложим наши функции (т.е. сложим координаты графиков для каждого значения времени), то мы получим функцию $x(t)$ (рисунок 22).

Окончательно исходный график сложной функции будет описываться формулой

$$x(t) = 3 \cdot t \cdot 1[t] - 3 \cdot (t - 2) \cdot 1[t - 2].$$

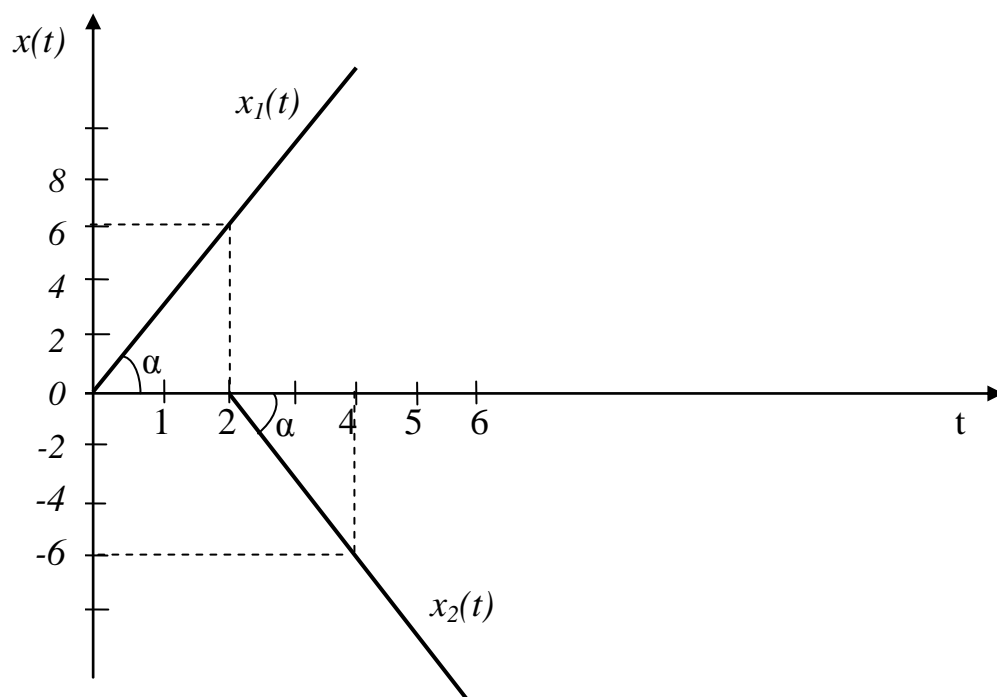


Рисунок 21 - Разложение сложного воздействия на простые составляющие

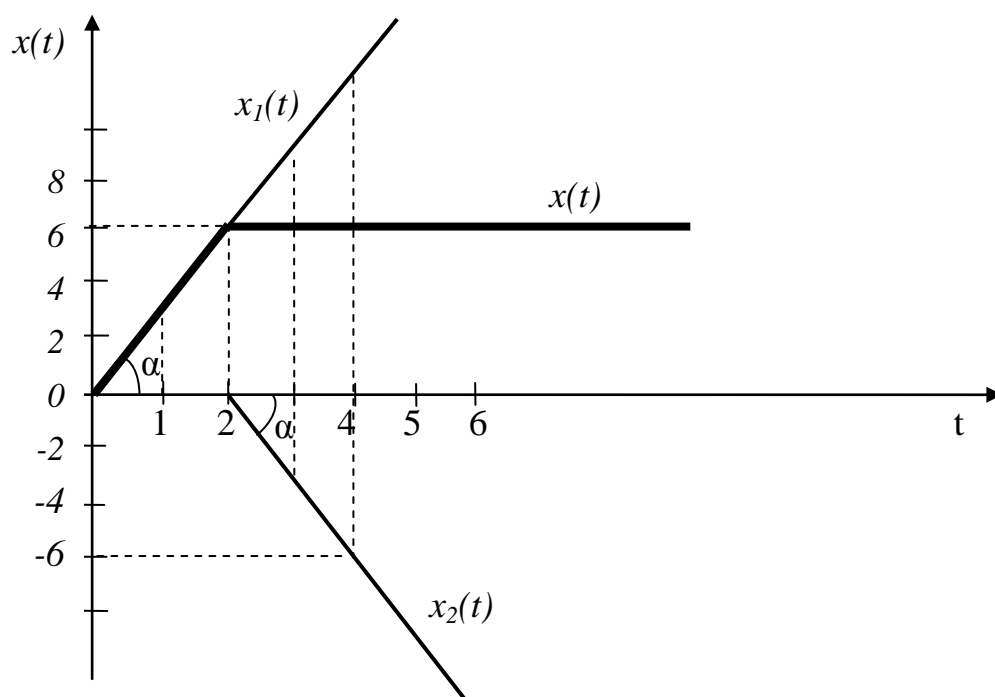


Рисунок 22- Составляющие и результирующая сложного сигнала

Ответ: $x(t) = 3 \cdot t \cdot 1[t] - 3 \cdot (t - 2) \cdot 1[t - 2]$.

Пример 4. Модель элемента задана в виде передаточной функции $W(p) = \frac{4}{5p+1}$. Входное воздействие имеет вид прямоугольного сигнала, изображенного на рисунке 23. Требуется построить график выходного сигнала для данного элемента.

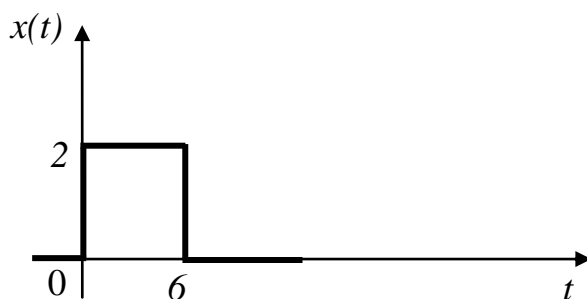


Рисунок 23 - Вид входного воздействия для примера 4

Решение.

Воспользуемся алгоритмом, изложенным выше при рассмотрении реакции элемента на сложное воздействие.

1. Разложим входной сигнал на простые составляющие и опишем каждую из них как функцию времени.

Очевидно, что наша сложная функция может быть представлена в виде суммы двух ступенчатых функций с амплитудами 2 и -2 (рисунок 24). Тогда $x_1(t) = 2 \cdot 1[t]$, а $x_2(t) = -2 \cdot 1[t-6]$.

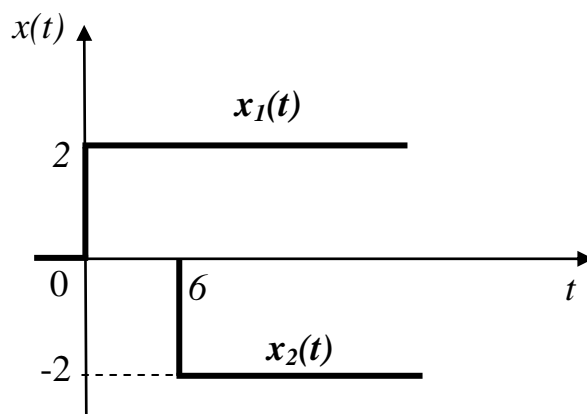


Рисунок 24 - Разложение сигнала $x(t)$ на простые составляющие

2. Найдем изображения по Лапласу от каждой составляющей функции $x(t)$.

$$X_1(p) = L \{x_1(t)\} = L \{2 \cdot 1[t]\} = \frac{2}{p}$$

$$X_2(p) = L \mathcal{L}(t) \stackrel{3}{=} L \mathcal{L}[2 \cdot 1[t-6]] \stackrel{3}{=} \frac{-2}{p} \cdot e^{-6p}.$$

Замечание: при нахождении изображения от функции с запаздыванием применяем теорему смещения (Приложение Б).

3. Найдем, согласно (3), реакцию элемента на каждую составляющую входного воздействия.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= L^{-1} \mathcal{Y}_1(p) \stackrel{3}{=} L^{-1} \mathcal{W}(p) \cdot X_1(p) \stackrel{3}{=} L^{-1} \left\{ \frac{4}{5p+1} \cdot \frac{2}{p} \right\} = \\ &= 8 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(5p+1)} \right\} = 8 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{5 \cdot p \cdot (p + \frac{1}{5})} \right\} = 8 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{5}}{p \cdot (p + \frac{1}{5})} \right\} = \\ &= 8 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{5}t}), \\ y_2(t) &= L^{-1} \mathcal{Y}_2(p) \stackrel{3}{=} L^{-1} \mathcal{W}(p) \cdot X_2(p) \stackrel{3}{=} L^{-1} \left\{ \frac{4}{5p+1} \cdot \frac{-2}{p} \cdot e^{-6p} \right\} = \\ &= -8 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{5}(t-6)}). \end{aligned}$$

4. Воспользуемся табличным редактором Microsoft Excel и рассчитаем значения функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$, а затем найдем значения выходного сигнала $y(t)$ и построим его график.

На экранной форме, представленной на рисунке 25, видно, что значения составляющей $y_2(t)$ рассчитываются только с момента времени $t=6$, т.к. сигнал имеет запаздывание на 6 с, а все предыдущие значения должны быть равными нулю (причем операцию обнуления значений надо выполнить вручную, поставив нули в соответствующие ячейки).

Экранная форма, представленная на рисунке 26, соответствует окончательному этапу расчета выходного сигнала $y(t)$, который получаем путем сложения значений его составляющих в каждый момент времени.

Строим график выходного сигнала и проверяем правильность расчетов, используя предельные теоремы Лапласа.

Начальное значение:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} y_1(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \mathcal{Y}_1(p) \stackrel{3}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \left[\frac{8}{p(5p+1)} \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{8}{5p+1} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} y_2(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \mathcal{Y}_2(p) \stackrel{3}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \left[\frac{-8}{p(5p+1)} \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{-8}{5p+1} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} y_1(t) + \lim_{t \rightarrow 0} y_2(t) = 0.$$

Конечное значение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mathbf{I}_1(p) \stackrel{-}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[\frac{8}{p(5p+1)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} 8 = 8,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mathbf{I}_2(p) \stackrel{-}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left[\frac{-8}{p(5p+1)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} (-8) = -8.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

Ответ: график выходного сигнала представлен на рисунке 26.

A	B	C	D
t	y1(t)	y2(t)	y(t)
0	0	0	
1	1,450154	0	
2	2,6374396	0	
3	3,6095069	0	
4	4,4053683	0	
5	5,0569645	0	
6	5,5904463	0	
7	6,0272243	-1,450154	
8	6,3848279	-2,63744	
9	6,6776089	-3,609507	
10	6,9173177	-4,405368	
11	7,1135747	-5,056964	
12	7,2742564	-5,590446	
13	7,4058114	-6,027224	
14	7,5135195	-6,384828	
15	7,6017035	-6,677609	
16	7,6739024	-6,917318	
17	7,7330138	-7,113575	
18	7,7814102	-7,274256	
19	7,8210338	-7,405811	
20	7,8534749	-7,513519	
21	7,8800354	-7,601703	
22	7,9017813	-7,673902	
23	7,9195853	-7,733014	
24	7,934162	-7,78141	
25	7,9460964	-7,821034	

Рисунок 25 – Расчетные значения составляющих выходного сигнала

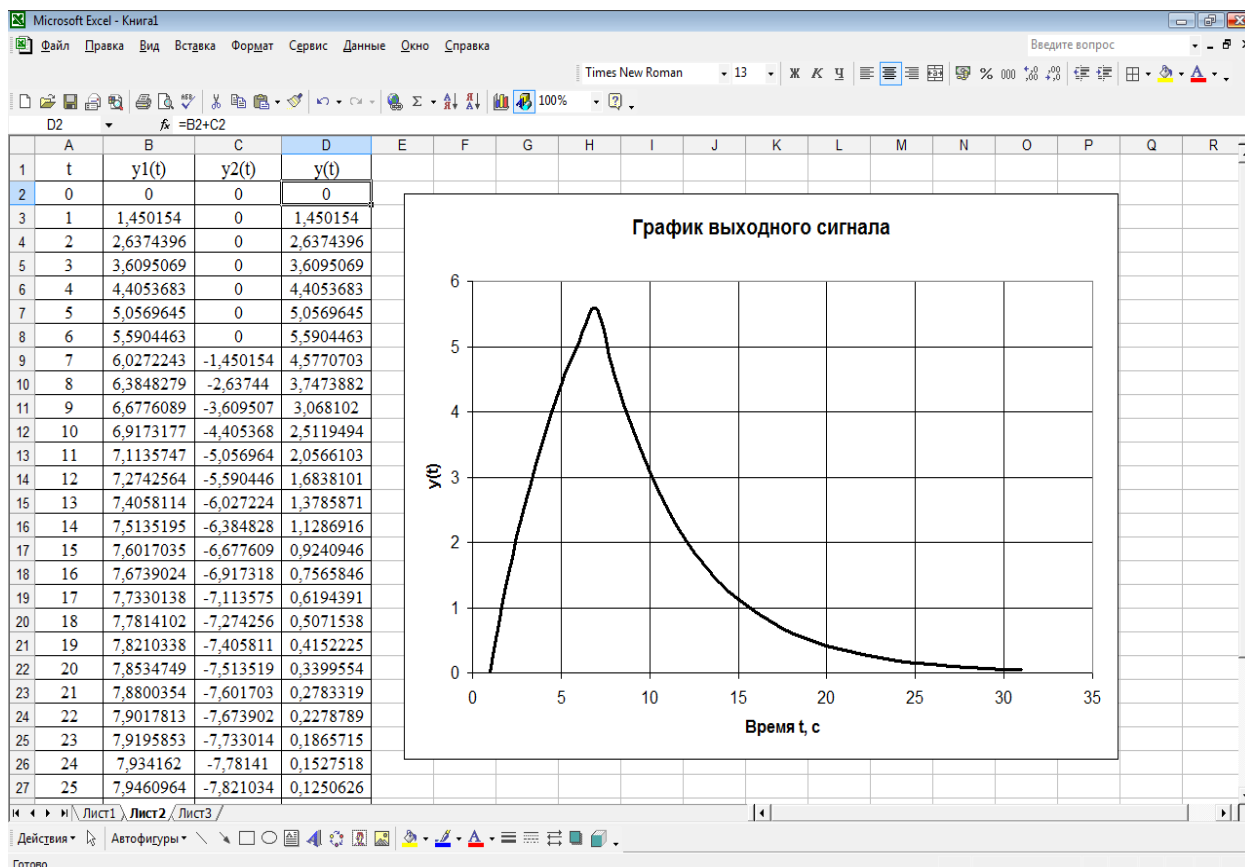


Рисунок 26 - Экранная форма расчета выходного сигнала

Рассмотрим примеры, связанные с расчетом и построением графиков частотных характеристик.

Пример 5. Найти АЧХ и ФЧХ по известной передаточной функции элемента $W(p)$, если $W(p) = \frac{2}{4p+1}$.

Решение.

Как было отмечено выше, частотные характеристики могут быть получены из частотной передаточной функции на основании зависимостей (6) и (7), поэтому, прежде всего, перейдем от передаточной функции по Лапласу $W(p)$ к передаточной функции по Фурье $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{2}{4j\omega+1}.$$

Частотная передаточная функция представляет собой дробь. Для того, чтобы разложить данное выражение на действительную и мнимую части можно использовать два подхода. Рассмотрим каждый из них.

1) Умножим числитель и знаменатель дроби на комплексно-сопряженное знаменателю выражение.

$$W(j\omega) = \frac{2}{4j\omega + 1} \cdot \frac{1 - 4j\omega}{1 - 4j\omega} = \frac{2 - j \cdot 8\omega}{1 + 16\omega^2}.$$

Теперь почленно разделим слагаемые числителя на знаменатель

$$W(j\omega) = \frac{2 - j \cdot 8\omega}{1 + 16\omega^2} = \frac{2}{1 + 16\omega^2} + j \cdot \frac{-8\omega}{1 + 16\omega^2}.$$

Отсюда

$$U(\omega) = \frac{2}{1 + 16\omega^2} \text{ и } V(\omega) = \frac{-8\omega}{1 + 16\omega^2}.$$

Зная действительную и мнимую части, найдем выражения для АЧХ

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{2}{1 + 16\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-8\omega}{1 + 16\omega^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4 + 64\omega^2}{(1 + 16\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{4(1 + 16\omega^2)}{(1 + 16\omega^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 16\omega^2}} \end{aligned}$$

и для ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{-8\omega}{1 + 16\omega^2}}{\frac{2}{1 + 16\omega^2}} = \operatorname{arctg} \frac{-8\omega}{2} = \operatorname{arctg}(-4\omega) = -\operatorname{arctg} 4\omega.$$

Ответ: $A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{1 + 16\omega^2}}, \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} 4\omega.$

2) Если частотная передаточная функция представляет собой дробь, то можно представить числитель и знаменатель в прямоугольной форме (3):

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{U_1(\omega) + jV_1(\omega)}{U_2(\omega) + jV_2(\omega)}.$$

Тогда, используя известные в теории комплексных чисел соотношения, можно записать

$$\text{для АЧХ } A(\omega) = \frac{|R(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{\sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)}}{\sqrt{U_2^2(\omega) + V_2^2(\omega)}}$$

$$\text{и для ФЧХ } \varphi(\omega) = \arg R(j\omega) - \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)}.$$

Для нашего примера

$$W(j\omega) = \frac{2}{1 + j \cdot 4\omega}, \text{ т.е. } U_1(\omega) = 2, V_1(\omega) = 0, U_2(\omega) = 1, V_2(\omega) = 4\omega.$$

Тогда выражение для АЧХ $A(\omega) = \frac{\sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)}}{\sqrt{U_2^2(\omega) + V_2^2(\omega)}} = \frac{2}{\sqrt{1+16\omega^2}}$

и для ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \arctg \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)} = \arctg 0 - \arctg 4\omega = 0 - \arctg 4\omega = -\arctg 4\omega$$

Ответ: $A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{1+16\omega^2}}$, $\varphi(\omega) = -\arctg 4\omega$.

Как видно, в обоих случаях получили одинаковые ответы.

Замечание: при выполнении контрольной работы студент может решать задачу любым способом.

Пример 6. Найти АЧХ и ФЧХ по известной передаточной функции элемента $W(p)$, если $W(p) = \frac{5(p+1)}{(2p+1)(3p+1)}$.

Решение.

Получим частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{5(j\omega+1)}{(2j\omega+1)(3j\omega+1)} = \frac{5(1+j\omega)}{(1+j2\omega)(1+j3\omega)}.$$

Воспользуемся вторым способом и представим каждый множитель числителя и знаменателя в прямоугольной форме (3):

$$W(j\omega) = \frac{L(j\omega) \cdot K(j\omega)}{M(j\omega) \cdot N(j\omega)} = \frac{(U_1(\omega) + jV_1(\omega)) \cdot (U_2(\omega) + jV_2(\omega))}{(U_3(\omega) + jV_3(\omega)) \cdot (U_4(\omega) + jV_4(\omega))},$$

где $U_1(\omega)=5$, $V_1(\omega)=0$, $U_2(\omega)=1$, $V_2(\omega)=\omega$, $U_3(\omega)=1$, $V_3(\omega)=2\omega$, $U_4(\omega)=1$, $V_4(\omega)=3\omega$.

Тогда, используя известные в теории комплексных чисел соотношения, запишем для АЧХ

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)} \sqrt{U_2^2(\omega) + V_2^2(\omega)}}{\sqrt{U_3^2(\omega) + V_3^2(\omega)} \sqrt{U_4^2(\omega) + V_4^2(\omega)}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+4\omega^2} \sqrt{1+9\omega^2}}$$

и для ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} + \arctg \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)} - \arctg \frac{V_3(\omega)}{U_3(\omega)} - \arctg \frac{V_4(\omega)}{U_4(\omega)} =$$

$$= 0 + \arctg \omega - \arctg 4\omega - \arctg 3\omega = \arctg \omega - \arctg 4\omega - \arctg 3\omega .$$

Ответ: $A(\omega) = \frac{5 \cdot \sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+4\omega^2} \sqrt{1+9\omega^2}}, \varphi(\omega) = \arctg \omega - \arctg 4\omega - \arctg 3\omega .$

Пример 7. Построить график АФЧХ по известной передаточной функции элемента $W(p)$, если $W(p) = \frac{3,5}{4p+1}$.

Решение.

Получим выражение для частотной передаточной функции и разложим ее на действительную и мнимую части

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{3,5}{4j\omega+1} = \frac{3,5}{4j\omega+1} \cdot \frac{1-4j\omega}{1-4j\omega} = \frac{3,5 + j \cdot 14\omega}{1+16\omega^2} = \frac{3,5}{1+16\omega^2} + j \frac{14\omega}{1+16\omega^2} .$$

Получили $U(\omega) = \frac{3,5}{1+16\omega^2}$ и $V(\omega) = \frac{14\omega}{1+16\omega^2}$.

Теперь, изменяя частоту ω от 0 до ∞ , построим график АФЧХ (рисунок 27). Сложность при построении графика может возникнуть с выбором шага расчета. В данном примере для частоты от 0 до $\omega_c = 1/4$ шаг расчета выберем равный 0,05, а затем увеличим его до $\Delta\omega = 0,1$.

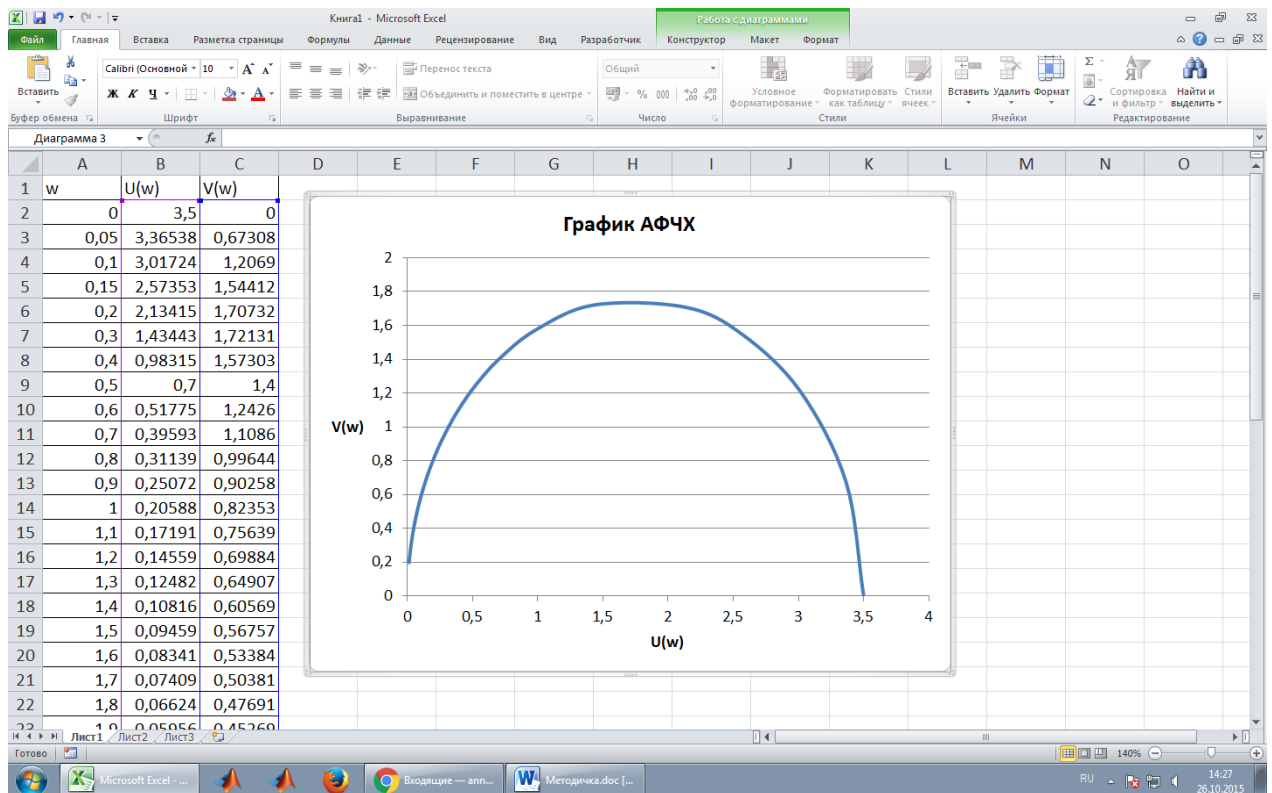


Рисунок 27 Экранная форма расчета АФЧХ

Ответ: график АФЧХ представлен на рисунке 27.

1.4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Контрольная работа №1 «Временные и частотные характеристики линейных САУ» включает 5 задач. Номер варианта соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента.

Задача 1

Получить выражение и построить график весовой функции $w(t)$ элемента, передаточная функция которого приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные к задаче 1

№ варианта	$W(p)$	№ варианта	$W(p)$
0	$W(p) = \frac{-2,5}{(3p+1)^2}$	5	$W(p) = \frac{2,8}{p^2+4}$
1	$W(p) = \frac{4}{(5p+1)^2}$	6	$W(p) = \frac{0,3}{p^2}$
2	$W(p) = \frac{-8,3}{p(2p+1)}$	7	$W(p) = \frac{-0,43}{p^2}$
3	$W(p) = \frac{0,3}{p(4p+1)}$	8	$W(p) = \frac{3}{(2p+1)(3p+1)}$
4	$W(p) = \frac{-4}{p^2+1}$	9	$W(p) = \frac{-5}{(2p+1)(3p+1)}$

Задача 2

Получить выражение и построить график переходной функции $h(t)$ элемента, передаточная функция которого приведена в таблице 2.

Таблица 2 – Исходные данные к задаче 2

№ варианта	$W(p)$	№ варианта	$W(p)$
1	2	3	4
0	$W(p) = \frac{1}{p(4p+1)}$	5	$W(p) = \frac{-0,5}{(p+\frac{1}{2})(p+\frac{1}{3})}$
1	$W(p) = \frac{-0,25}{p(7p+1)}$	6	$W(p) = \frac{2}{(4p+1)(5p+1)}$

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
2	$W(p) = \frac{8}{p^2 + 1}$	7	$W(p) = \frac{-1,2}{(4p+1)(3p+1)}$
3	$W(p) = \frac{-2}{p^2 + 1}$	8	$W(p) = \frac{3}{p}$
4	$W(p) = \frac{5}{(p+\frac{1}{3})(p+\frac{1}{4})}$	9	$W(p) = \frac{-4,5}{p}$

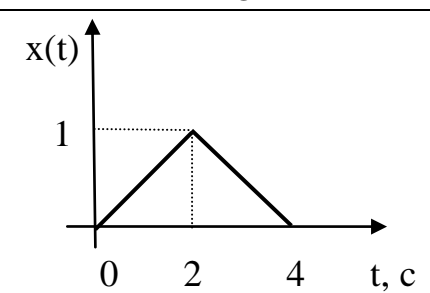
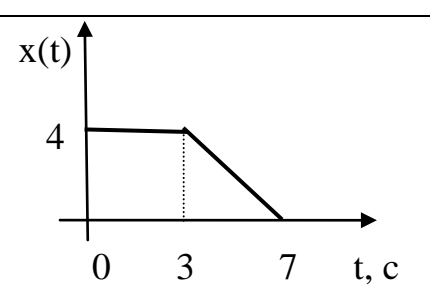
Задача 3

Построить график выходного сигнала, если задана модель элемента системы управления и вид входного сигнала.

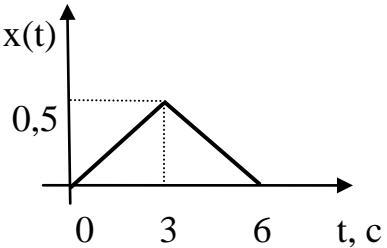
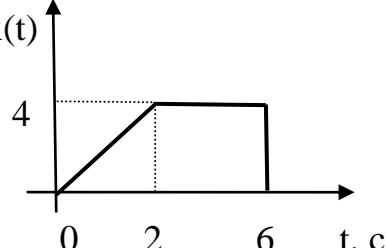
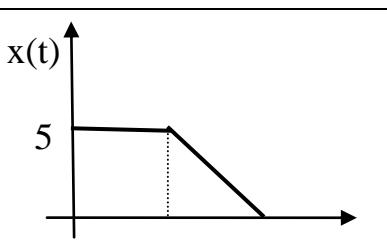
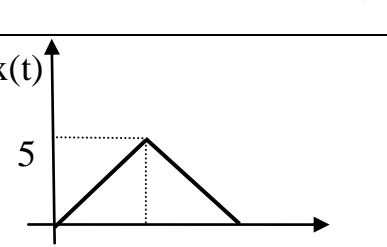
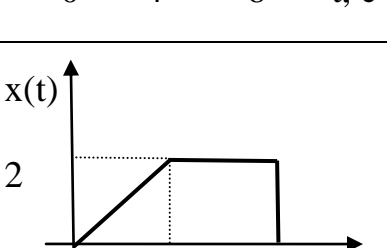
Модель элемента задана в виде передаточной функции $W(p)$, а входной сигнал задан в виде графика, которые приведены в таблице ПЗ.

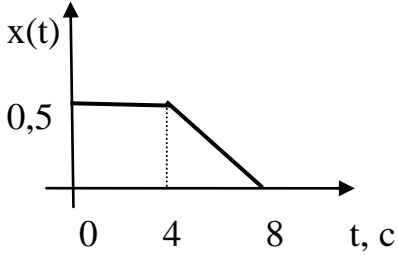
В контрольной работе необходимо получить математическое выражение для выходного сигнала $y(t)$, рассчитать 10-15 значений, проверить начальное и конечное значения по предельной теореме Лапласа, по полученным данным построить график.

Таблица 3 – Исходные данные к задаче 3

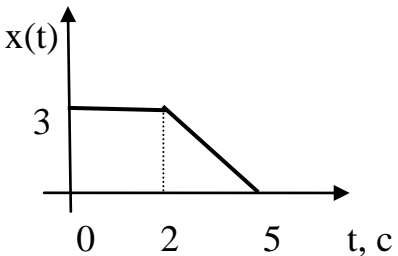
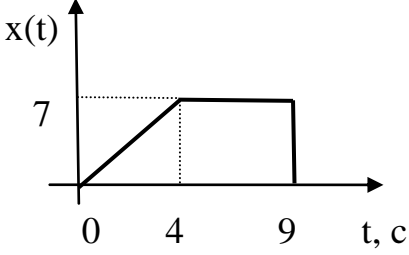
№ варианта	$W(p)$	Вид графика входного сигнала
1	2	3
0	$\frac{-2}{3p+1}$	
1	$\frac{2}{4p+1}$	

Продолжение таблицы 3

1	2	3
2	$\frac{-20}{7p+1}$	
3	$\frac{-2,5}{5p+1}$	
4	$\frac{2}{p+\frac{1}{4}}$	
5	$\frac{-4}{5p+1}$	
6	$\frac{5}{p+\frac{1}{2}}$	

7	$\frac{-6}{4p+1}$	
---	-------------------	--

Продолжение таблицы ПБЗ

1	2	3
8	$\frac{1}{p+0,2}$	
9	$\frac{1,5}{2p+1}$	

Задача 4

Получить выражения для АЧХ и ФЧХ элемента, передаточная функция которого приведена в таблице 4.

Таблица 4 – Исходные данные к задаче 4

№ варианта	$W(p)$	№ варианта	$W(p)$
0	$W(p) = \frac{10p}{(0,2p+1)^2}$	5	$W(p) = \frac{100}{p(p+5)^2}$
1	$W(p) = \frac{4p}{(5p+1)^2}$	6	$W(p) = \frac{30(2p+1)}{p(3p+1)}$
2	$W(p) = \frac{15}{p(3p+1)}$	7	$W(p) = \frac{(0,5p+1)}{p(0,2p+1)}$
3	$W(p) = \frac{3}{p(2p+1)}$	8	$W(p) = \frac{10p}{(2p+1)(3p+1)}$

4	$W(p) = \frac{4,5}{p(p+0,5)^2}$	9	$W(p) = \frac{0,5p}{(0,2p+1)(0,3p+1)}$
---	---------------------------------	---	--

Задача 5

Построить график АФЧХ элемента, передаточная функция которого приведена в таблице 5.

Вариант задания выбирается в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки студента.

Таблица 5 – Исходные данные к задаче 5

<i>№ варианта</i>	<i>$W(p)$</i>	<i>№ варианта</i>	<i>$W(p)$</i>
0	$W(p) = \frac{10}{(0,2p+1)(0,3p+1)}$	5	$W(p) = \frac{-5}{(2p+1)(3p+1)}$
1	$W(p) = \frac{1,5}{(0,5p+1)(0,02p+1)}$	6	$W(p) = \frac{1,5}{p(0,5p+1)}$
2	$W(p) = \frac{15}{p(4p+1)}$	7	$W(p) = \frac{-2,5}{(0,4p+1)(0,02p+1)}$
3	$W(p) = \frac{-0,5}{p(0,2p+1)}$	8	$W(p) = \frac{-8,3}{p(2p+1)}$
4	$W(p) = \frac{3}{(2p+1)(3p+1)}$	9	$W(p) = \frac{0,3}{p(4p+1)}$

2 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Проектирование любой САУ начинается с постановки требований к качеству ее работы. Эти требования диктуются необходимостью обеспечить определенный характер протекания процессов в объекте управления. Важно понимать, что рассуждать о качестве работы системы имеет смысл только в случае ее устойчивости, так как неустойчивая система просто неработоспособна. Поэтому при проектировании систем в первую очередь решаются вопросы, связанные с обеспечением устойчивости САУ.

2.1 ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость САУ - одна из важнейших характеристик.

Под *устойчивостью САУ* понимают свойство системы возвращаться в состояние равновесия после прекращения изменения воздействия, выведшего систему из этого состояния.

Неустойчивая САУ не возвращается в состояние равновесия, а непрерывно удаляется от него.

От устойчивости САУ зависит ее работоспособность. Система, не обладающая устойчивостью, вообще не способна выполнять функции управления. Неустойчивая система может привести управляемый объект в аварийное состояние. Поэтому проблема устойчивости систем является одной из центральных в ТАУ.

Задачами анализа устойчивости САУ обычно являются:

- определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;
- определение допустимого по условиям устойчивости, диапазона изменения некоторых параметров системы;
- выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.

2.2 НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Общее математическое условие устойчивости - для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными (или чтобы все корни характеристического уравнения системы располагались в левой части комплексной плоскости).

Пусть имеем характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (8)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($p_k = \alpha_k$), мнимыми ($p_k = j\beta_k$) и комплексными ($p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$). При этом

комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью. На рисунке 28 изображены возможные случаи расположения корней p_k на комплексной плоскости и соответствующие им функции $x_k(t)$, которые показаны внутри окружностей.

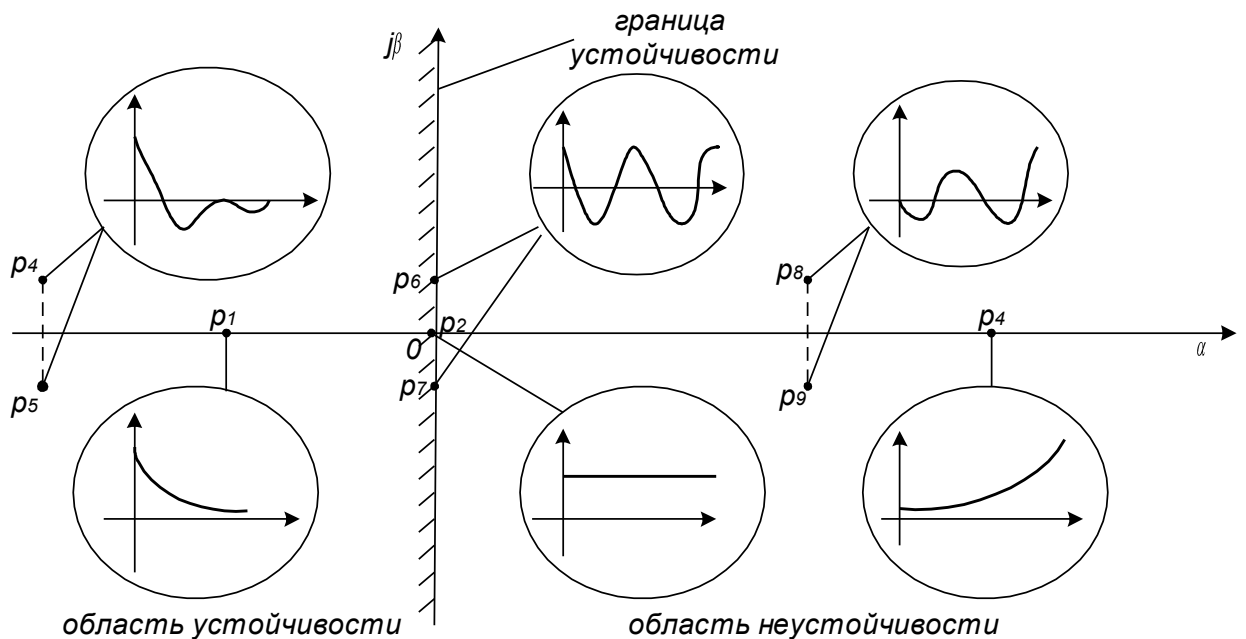


Рисунок 28 - Влияние корней характеристического уравнения САУ на ее устойчивость

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему, т. е. устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть (располагается в правой части комплексной плоскости), то система будет неустойчивой.

Мнимая ось $j\beta$ является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней ($p_k = +j\beta_k$, $p_{k+1} = -j\beta_k$), а все остальные корни находятся в левой части комплексной плоскости, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания. В этом случае говорят, что система находится на колебательной границе устойчивости.

Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень ($\beta = 0$), а все остальные корни находятся в левой части комплексной плоскости, то система находится на апериодической границе устойчивости. Если таких корня два,

то система неустойчива.

2.3 КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Как было показано выше, для суждения об устойчивости линейной САУ достаточно определить лишь знаки действительных частей корней характеристического уравнения.

В ТАУ разработан ряд правил, с помощью которых можно судить о знаках действительных частей корней, не решая характеристическое уравнение и не находя числовые значения самих корней. Эти правила получили название критериев устойчивости.

Различают алгебраические и частотные критерии устойчивости.

Алгебраические критерии устанавливают необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней в форме ограничений, накладываемых на определенные комбинации коэффициентов характеристического уравнения системы.

Частотные критерии определяют связь между устойчивостью системы и формой ее частотных характеристик.

Наибольшее распространение в инженерной практике нашли алгебраические критерии Гурвица и Рауса.

Рассмотрим один из них - критерий Гурвица.

Критерий был сформулирован и доказан в 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем, который разработал свой критерий, решая чисто математическую задачу исследования устойчивости линейного дифференциального уравнения. Гурвиц обратился к этой задаче по просьбе словацкого ученого А. Стодолы, занимавшегося вопросами регулирования турбин.

Применительно к задачам ТАУ *критерий Гурвица* можно сформулировать так:

система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (9)$$

устойчива, если при $a_n > 0$ положительны все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ вида

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{i-2} & a_i \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (10)$$

Если хотя бы один из определителей (10), называемых определителями

Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Определители Гурвица составляют следующим образом. На главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_i (в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже – с последовательно убывающими индексами. На место с коэффициентами с индексами большими n или меньшими нуля проставляют нули. При этом каждый i -й определитель получается размером $i \times i$.

Так как последний столбец определителя Δ_n содержит всегда только один элемент a_n , отличный от нуля, то согласно известному свойству определителей $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$.

Рассмотрим применение критерия Гурвица. Условия устойчивости по критерию Гурвица для характеристических уравнений разного порядка представлены в таблице 6.

Критерий Гурвица целесообразно применять для анализа устойчивости систем не выше четвертого порядка. При $n > 4$ вычисление определителей становится громоздким.

Таблица 6 - Условия устойчивости по критерию Гурвица

Порядок характерис- тического уравнения САУ	Вид характеристического уравнения САУ	Условия устойчивости по Гурвицу
1	2	3
1	$a_0 p + a_1 = 0$	$\begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \end{cases}$
2	$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$	$\begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$

Продолжение таблицы 6

1	2	3
3	$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$	$\begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \Leftrightarrow \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases}$
4	$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$	$\begin{cases} a_0 > 0 \\ \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \Leftrightarrow \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \\ \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_4 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0 \end{cases}$

Из частотных критериев наибольшее распространение нашли критерии Михайлова и Найквиста.

В 1938 году советским ученым Л.В.Михайловым был предложен графоаналитический критерий устойчивости, названный в его честь. Данный критерий позволяет не только судить об устойчивости, но и наглядно оценивать степень влияния параметров системы на ее устойчивость.

Рассмотрим основные положения **критерия Михайлова**.

Для того, чтобы непрерывная система регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы характеристический годограф при изменении частоты ω от 0 до ∞ , начинаясь на действительной положительной полуоси, обходил последовательно в положительном направлении (против

часовой стрелки) n -квадрантов, нигде не обращаясь в нуль, где n - порядок характеристического уравнения системы регулирования (рисунок 29). Иначе говоря, вектор Михайлова $D(j\omega)$, при изменении частоты ω от 0 до ∞ , совершает против часовой стрелки поворот на угол $n \cdot \pi/2$.

Для того, чтобы проверить устойчива ли САУ в соответствии с критерием Михайлова, достаточно получить характеристическое уравнение замкнутой системы $D(p) = 0$, а затем, построив вектор Михайлова $D(j\omega)$, визуально оценить факт устойчивости.

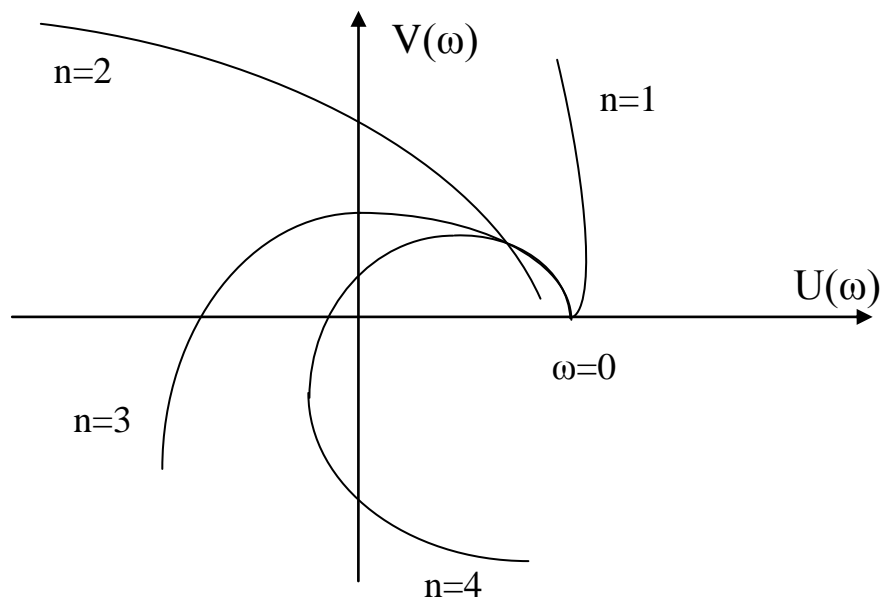


Рисунок 29 - Примеры годографов вектора Михайлова для случая устойчивых САУ

Отметим некоторые признаки неустойчивости, которыми можно руководствоваться при использовании критерия Михайлова:

- при $\omega=0$ годограф начался не на положительной действительной полуоси;
- на некотором участке вектор годографа вращался по часовой стрелке;
- нарушилась последовательность прохождения квадрантов;
- при некотором значении ω_k годограф прошел через начало координат;
- кривая Михайлова начинается в начале координат.

На первом этапе достаточно выявить факт устойчивости (неустойчивости) САУ, а затем разработчику необходимо провести детальный анализ ситуации и выявить возможные пути повышения запаса устойчивости САУ.

Часто вместо построения всего годографа вектора Михайлова

оказывается достаточным исследовать значения корней его действительной и мнимой частей. Нетрудно заметить, что при последовательном прохождении n -квадрантов годограф $D(j\omega)$ поочередно n раз пересекает оси координат, т.е. поочередно обращается в нуль мнимая и действительная части $D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ (рисунок 30).

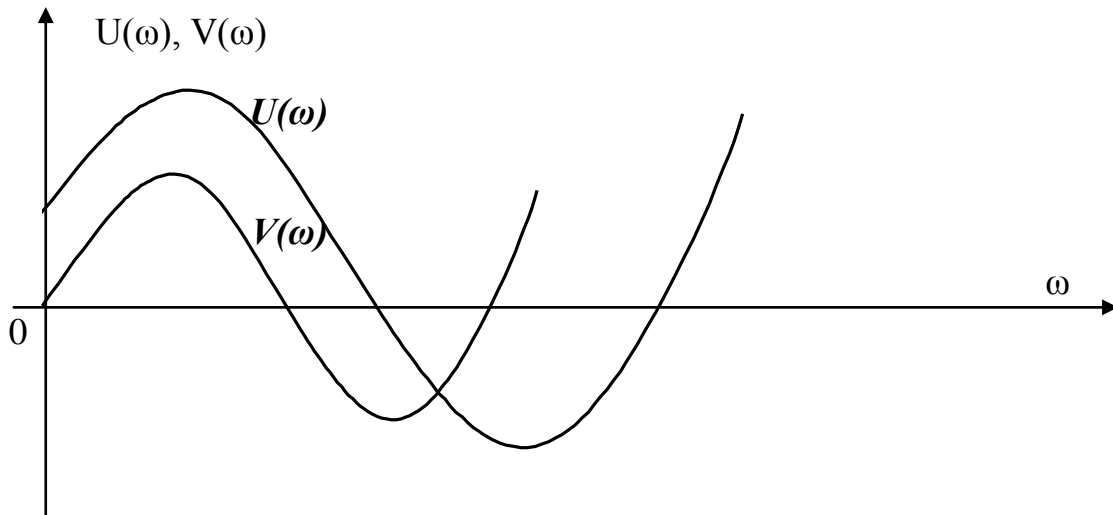


Рисунок 30 - График действительной и мнимой частей годографа Михайлова

На основании вышесказанного можно сформулировать *следствие из критерия Михайлова*.

Для того чтобы САУ была устойчива, должны выполняться следующие условия:

1) корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ должны быть вещественными и чередующимися;

2) при $\omega=0$ мнимая часть должна быть равна нулю, ее первая производная и действительная часть должны быть положительными

$$V(\omega)|_{\omega=0} = 0, \frac{\partial V(\omega)}{\partial \omega} > 0, U(\omega)|_{\omega=0} > 0.$$

2.4 ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Рассмотрим задачи, в которых требуется оценить устойчивость САУ.

В условии задачи может быть указано, какой критерий или условие устойчивости следует использовать, в противном случае, следует воспользоваться любым из известных подходов к оцениванию устойчивости линейных САУ.

Пример 8

Используя необходимое и достаточное условие устойчивости, выяснить, будет ли замкнутая САУ устойчива, если ее характеристическое уравнение имеет вид $4p^3 + 6p^2 + 2p + 3 = 0$.

Решение.

Необходимое и достаточное условие устойчивости для САУ любого порядка формулируется следующим образом: для того, чтобы замкнутая система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы корни ее характеристического уравнения находились в левой полуплоскости комплексной плоскости переменной p .

Найдем корни уравнения $D(p) = 4p^3 + 6p^2 + 2p + 3 = 0$.

Для этого сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобку

$$(4p^3 + 2p) + (6p^2 + 3) = 2p(2p^2 + 1) + 3(2p^2 + 1) = (2p^2 + 1)(2p + 3) = 0.$$

Приравнявая к нулю каждый множитель, получаем

$$2p^2 + 1 = 0$$

$$p^2 = -\frac{1}{2}$$

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm j \cdot 0,7$$

$$2p + 3 = 0$$

$$p_3 = -\frac{3}{2} = -1,5$$

и

Имеем три корня: два мнимых $p_1 = j \cdot 0,7$, $p_2 = -j \cdot 0,7$, и один действительный $p_3 = -1,5$.

Изобразим эти корни на комплексной плоскости (рисунок 31).



Рисунок 31 - Иллюстрация к примеру 8

Из рисунка видно, что два корня расположены на колебательной

границе устойчивости, а один корень уравнения в области устойчивости.

Ответ: замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

Пример 9

Будет ли замкнутая САУ устойчива (по критерию Гурвица), если ее характеристическое уравнение имеет вид $2p^4 + 4p^3 + p^2 + p + 3 = 0$?

Решение.

Запишем условие устойчивости САУ 4-го порядка в соответствии с критерием Гурвица (таблица 6):

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_4 > 0 \\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0 \end{cases}$$

Подставим в систему неравенств численные значения коэффициентов характеристического уравнения $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$. Так как все коэффициенты отличны от нуля и положительные, то достаточно проверить выполнение последнего неравенства:

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0$$

$$1 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 3 \cdot 4^2 = -46 < 0$$

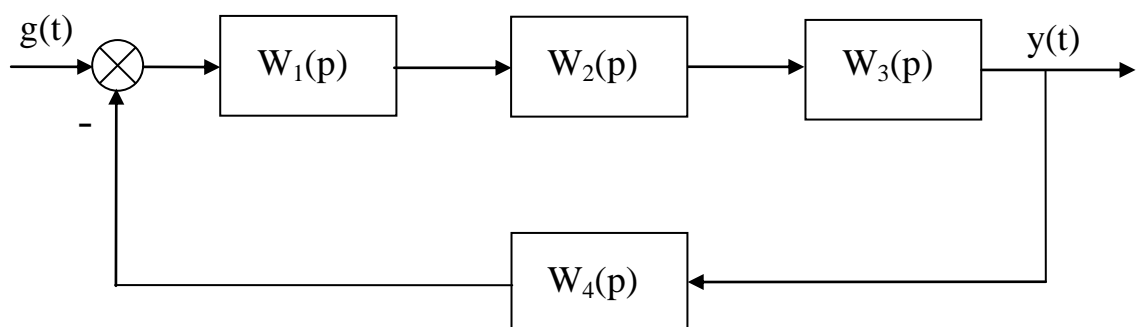
Так как неравенство не выполняется, то САУ неустойчива.

Ответ: замкнутая САУ неустойчива.

Пример 10

Используя критерий Гурвица, записать условие устойчивости для замкнутой САУ.

Структурная схема системы имеет вид



Выражения для передаточных функций заданы:

$$W_1(p) = k_1 + \frac{k_2}{p}, \quad W_2(p) = k_3, \quad W_3(p) = \frac{k_4 p}{T_1 p + 1}, \quad W_4(p) = \frac{k_5}{T_2 p + 1}.$$

Решение.

Чтобы применить критерий Гурвица, прежде всего, следует получить характеристическое уравнение замкнутой САУ.

Найдем передаточную функцию замкнутой САУ, имеющей структурную схему, изображенную выше, и заданные передаточные функции элементов

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)} = \frac{\left(k_1 + \frac{k_2}{p}\right) \cdot k_3 \cdot \frac{k_4 p}{T_1 p + 1}}{1 + \left(k_1 + \frac{k_2}{p}\right) \cdot k_3 \cdot \frac{k_4 p}{T_1 p + 1} \cdot \frac{k_5}{T_2 p + 1}} = \\ &= \frac{\frac{(k_1 p + k_2) \cdot k_3 \cdot k_4 p}{p(T_1 p + 1)}}{\frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + (k_1 p + k_2) \cdot k_3 \cdot k_4 p \cdot k_5}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}} = \frac{(k_1 p + k_2) \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot (T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + (k_1 p + k_2) \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5} = \\ &= \frac{k_1 k_3 k_4 T_2 p^2 + k_1 k_3 k_4 p + k_2 k_3 k_4 T_2 p + k_2 k_3 k_4}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + k_1 k_3 k_4 k_5 p + 1 + k_2 k_3 k_4 k_5} \end{aligned}$$

Знаменатель передаточной функции замкнутой системы представляет собой ее характеристический полином. Тогда характеристическое уравнение можно получить, приравняв к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы:

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + k_1 k_3 k_4 k_5 p + 1 + k_2 k_3 k_4 k_5 = 0$$

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + k_1 k_3 k_4 k_5) p + (1 + k_2 k_3 k_4 k_5) = 0$$

Получили уравнение 2-го порядка, для которого условие устойчивости по критерию Гурвица можно записать в виде системы неравенств (таблица 6)

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases},$$

подставляя значения коэффициентов характеристического уравнения $a_0 = T_1 T_2$, $a_1 = T_1 + T_2 + k_1 k_3 k_4 k_5$, $a_2 = 1 + k_2 k_3 k_4 k_5$, окончательно запишем

$$\begin{cases} T_1 T_2 > 0 \\ T_1 + T_2 + k_1 k_3 k_4 k_5 > 0 \\ 1 + k_2 k_3 k_4 k_5 > 0 \end{cases}.$$

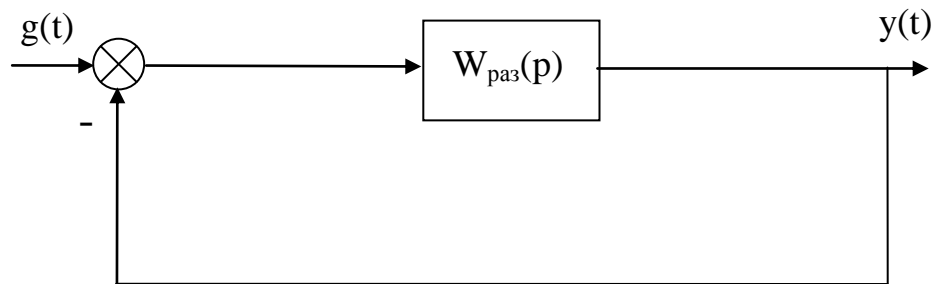
Проанализируем полученную систему неравенств. Известно, что параметры передаточных функций элементов имеют конкретный физический смысл. Так T_1, T_2 - постоянные времени элементов, величины, характеризующие их инерционные свойства, измеряются в единицах времени и всегда положительные, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 - коэффициенты передачи (усиления) элементов, показывают во сколько раз сигнал на выходе элемента будет изменяться по сравнению с сигналом на входе, могут принимать положительные и отрицательные значения. Таким образом, первое неравенство выполняется всегда, а второе можно преобразовать, тогда получим
$$\begin{cases} k_1 k_3 k_4 k_5 > 0 \\ 1 + k_2 k_3 k_4 k_5 > 0 \end{cases}.$$

Ответ: условие устойчивости замкнутой САУ в соответствии с критерием Гурвица имеет вид
$$\begin{cases} k_1 k_3 k_4 k_5 > 0 \\ 1 + k_2 k_3 k_4 k_5 > 0 \end{cases}.$$

Пример 11

По известной передаточной функции разомкнутой системы выяснить, будет ли замкнутая САУ устойчива. При решении использовать критерий Михайлова.

Структурная схема САУ имеет вид



Передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением
$$W_{раз}(p) = \frac{3p^2 + p + 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

Решение.

Чтобы применить критерий Михайлова, прежде всего, следует получить характеристическое уравнение замкнутой САУ.

Получить характеристическое уравнение можно способом, изложенным в примере 10, получив сначала передаточную функцию замкнутой САУ, а затем приравняв к нулю ее знаменатель. Также можно воспользоваться приемом, позволяющим получить характеристическое уравнение по известной передаточной функции разомкнутой САУ.

С учетом структуры, передаточная функция замкнутой САУ имеет вид:

$$\Phi(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{A(p)}{D(p)},$$

тогда характеристический полином $D(p) = 1 + W_{раз}(p)$, а характеристическое уравнение получим, приравняв его к нулю.

Для нашего примера

$$D(p) = 1 + W_{раз}(p) = 1 + \frac{3p^2 + p + 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1} = \frac{p^3 + 5p^2 + 3p + 2}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1} = 0.$$

Как известно, дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем характеристическое уравнение замкнутой САУ $D(p) = p^3 + 5p^2 + 3p + 2 = 0$.

Чтобы применить критерий Михайлова для оценки устойчивости замкнутой САУ, необходимо построить характеристический годограф. Для этого выполним замену $D(p)|_{p=j\omega} = 0$ и разложим уравнение на действительную и мнимую части.

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2 = 0$$

При возведении мнимой единицы j в различные степени получают следующие значения: $j^1 = j$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ и т.д.

$$D(j\omega) = -j \cdot \omega^3 - 5 \cdot \omega^2 + j \cdot 3 \cdot \omega + 2 = 0,$$

$$D(j\omega) = U(\omega) + j \cdot V(\omega) = (-5\omega^2 + 2) + j \cdot (-\omega^3 + 3\omega) = 0.$$

Следует помнить, что при разложении комплексного числа в действительную часть входят те слагаемые, в которых нет мнимой единицы j , а в мнимую – те слагаемые, которые содержат мнимую единицу j , но без нее, с учетом знака.

$$\begin{cases} U(\omega) = -5\omega^2 + 2 \\ V(\omega) = -\omega^3 + 3\omega \end{cases} \quad (11)$$

Теперь, изменяя ω от 0 до ∞ , можно рассчитать значения $U(\omega)$, $V(\omega)$ и построить характеристический годограф. При расчете значений частоты и построении графика можно воспользоваться средствами вычислительной техники, при этом следует лишь определиться с шагом изменения частоты и моментом окончания расчета. А можно использовать приближенный инженерный подход, позволяющий по наименьшему числу точек с допустимой погрешностью ответить на вопрос «устойчива система или нет».

Проанализируем, как должен выглядеть график частотного годографа устойчивой САУ 3-го порядка.

Из графика, представленного на рисунке 32, видно, что характерными являются 4 точки:

- 1 точка, в которой $\omega=0$;
- 2 точка, в которой $U(\omega) = 0$;
- 3 точка, в которой $V(\omega) = 0$;
- 4 точка, в которой $\omega=\infty$.

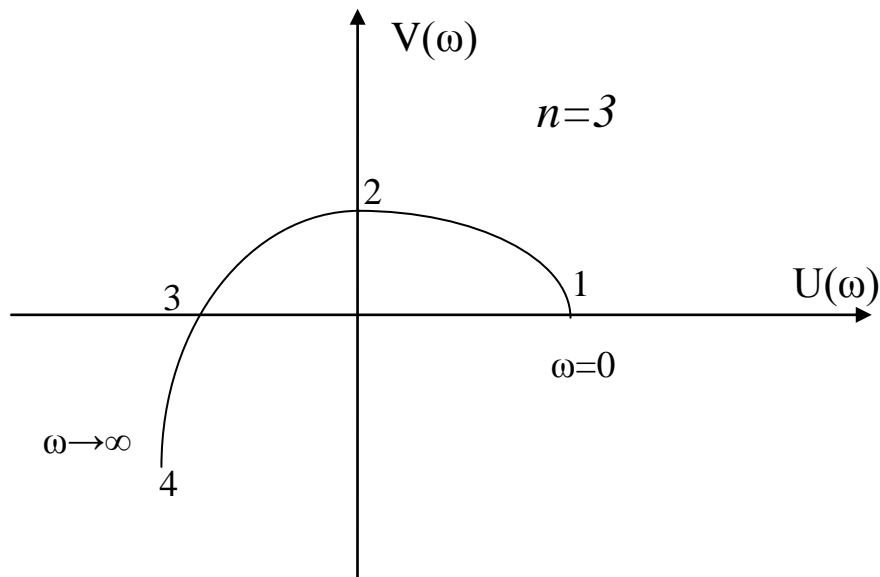


Рисунок 32 - Иллюстрация к примеру 11

Составим таблицу значений $U(\omega)$, $V(\omega)$ и занесем в нее исходные данные для расчета:

№ точки	ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
1	0		
2		0	
3			0
4	∞		

Используя систему уравнений (4), заполним пустые ячейки таблицы.

Для точки 1 ($\omega=0$):

$$\begin{cases} U(0) = -5\omega^2 + 2 = 2 \\ V(0) = -\omega^3 + 3\omega = 0 \end{cases}$$

Для точки 2 ($U(\omega) = 0$):

$$U(\omega) = -5\omega^2 + 2 = 0$$

$$-5\omega^2 = -2$$

$$\omega^2 = 0,4$$

$$\omega = \pm\sqrt{0,4}$$

Так как рассматриваем изменение частоты от 0 до ∞ , то выбираем только одно значение частоты - $\omega = +\sqrt{0,4} \approx 0,63$, тогда $V(0,63) = -\omega^3 + 3\omega = 1,64$.

Для точки 3 ($V(\omega) = 0$):

$$V(\omega) = -\omega^3 + 3\omega = 0$$

$$\omega(-\omega^2 + 3) = 0$$

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm\sqrt{3}.$$

Значение $\omega=0$ соответствует 1 точке, мы его уже рассмотрели, а из двух оставшихся значений выбираем положительное $\omega = +\sqrt{3} \approx 1,7$, т.к. рассматриваем изменение частоты от 0 до ∞ . Тогда $U(1,7) = -5\omega^2 + 2 = -13$.

Для точки 4 ($\omega=\infty$):

$$\begin{cases} U(\infty) = -5\omega^2 + 2 = -\infty \\ V(\infty) = -\omega^3 + 3\omega = -\infty \end{cases}.$$

Таблица значений $U(\omega)$ и $V(\omega)$ примет вид:

№ точки	ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
1	0	2	0
2	0,63	0	1,64
3	1,7	-13	0
4	∞	$-\infty$	$-\infty$

По данным выделенной части таблицы (без учета масштаба) построим график (рисунок 33).

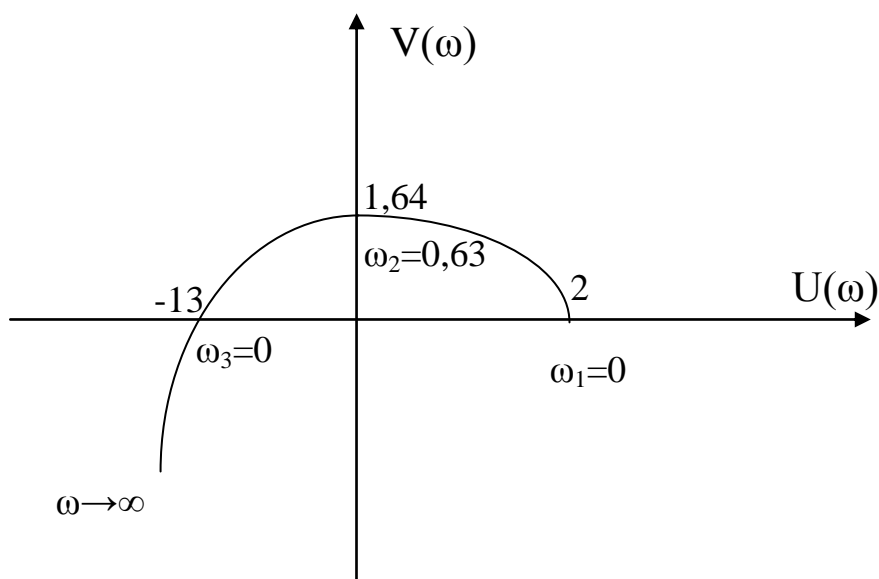


Рисунок 33 - Характеристический годограф Михайлова

Из графика видно, что все признаки устойчивости, в соответствии с критерием Михайлова, выполняются, следовательно, САУ устойчива.

Ответ: САУ устойчива.

Пример 12

Используя следствие из критерия Михайлова, выяснить, будет ли замкнутая система устойчива. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид $p^5 + p^4 + 8p^3 + 5p^2 + 15p + 4 = 0$.

Решение:

Исследование системы на устойчивость на основе следствия из критерия Михайлова связано с анализом корней уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$, полученных приравниванием к нулю действительной и мнимой частей характеристического уравнения замкнутой САУ.

Выполним замену $D(p)\big|_{p=j\omega} = 0$ и разложим уравнение на действительную и мнимую части.

$$D(p) = p^5 + p^4 + 8p^3 + 5p^2 + 15p + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^5 + (j\omega)^4 + 8(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 15(j\omega) + 4 = \\ &= j \cdot \omega^5 + \omega^4 - j \cdot 8 \cdot \omega^3 - 5 \cdot \omega^2 + j \cdot 15 \cdot \omega + 4 = \\ &= (\omega^4 - 5 \cdot \omega^2 + 4) + j \cdot (\omega^5 - 8 \cdot \omega^3 + 15 \cdot \omega) = 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} U(\omega) = \omega^4 - 5\omega^2 + 4 \\ V(\omega) = \omega^5 - 8\omega^3 + 15\omega \end{cases}$$

Найдем корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$.

1). $U(\omega) = \omega^4 - 5\omega^2 + 4 = 0$ - биквадратное уравнение. Выполним замену $\omega^2 = m$ и решим уравнение относительно новой переменной.

$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = 4.$$

Вернемся к переменной ω с учетом замены, тогда решение первого уравнения дает корни действительной части характеристического уравнения $\omega_1^D = 1, \omega_2^D = -1, \omega_3^D = 2, \omega_4^D = -2$.

$$2). V(\omega) = \omega^5 - 8\omega^3 + 15\omega = \omega(\omega^4 - 8\omega^2 + 15) = 0.$$

Первый корень уравнения - $\omega_1^M = 0$. Чтобы найти остальные корни, решим биквадратное уравнение. Выполним замену $\omega^2 = n$ и перейдем к новой переменной.

$$n^2 - 8n + 15 = 0$$

$$n_1 = 3, n_2 = 5.$$

Вернемся к переменной ω с учетом замены, тогда решение второго уравнения дает корни мнимой части характеристического уравнения $\omega_2^M = \sqrt{3}, \omega_3^M = -\sqrt{3}, \omega_4^M = \sqrt{5}, \omega_5^M = -\sqrt{5}$.

Полученные корни уравнений – вещественные, проверим, являются ли они чередующимися. Будем рассматривать только положительные корни

(рисунок 34), т.к. если они чередуются, то и отрицательные, которые им симметричны, также будут чередоваться.

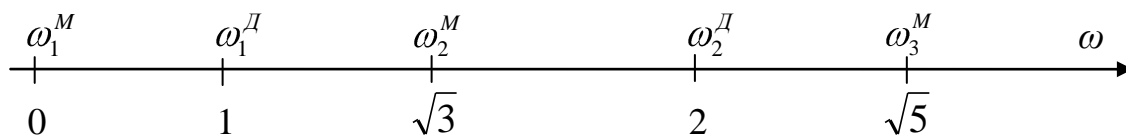


Рисунок 34 – Расположение корней на координатном луче

Корни уравнений оказались чередующимися.

Кроме того, следует проверить второе условие устойчивости в соответствии со следствием из критерия Михайлова. Результаты проверки представлены в таблице 7.

Таблица 7 - Проверка выполнимости условий устойчивости в соответствии со следствием из критерия Михайлова

Условие устойчивости	Проверка выполнимости условия
При $\omega=0$ мнимая часть должна быть равна нулю $V(\omega) _{\omega=0} = 0$	$V(\omega) _{\omega=0} = \omega^5 - 8\omega^3 + 15\omega = 0$
Первая производная мнимой части должна быть положительной $\frac{\partial V(\omega)}{\partial \omega} > 0$	$\frac{\partial V(\omega)}{\partial \omega} _{\omega=0} = 5\omega^4 - 24\omega^2 + 15 = 15 > 0$
Действительная часть должна быть положительной $U(\omega) _{\omega=0} > 0$	$U(\omega) _{\omega=0} = \omega^4 - 5\omega^2 + 4 = 4 > 0$

Все условия выполняются, следовательно, система устойчива.

Ответ: САУ устойчива.

1.4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Задача 1

Используя необходимое и достаточное условие устойчивости, выяснить, будет ли замкнутая САУ устойчива.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$, а значения коэффициентов уравнения приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Исходные данные к задаче 1

№ варианта	a_0	a_1	a_2	a_3
0	3	6	1	2
1	4	8	1	2
2	6	6	1	1
3	5	10	1	2
4	1,5	3	1	2
5	2,5	5	1	2
6	3,5	7	1	0
7	4,5	9	1	2
8	5	5	2	2
9	4	1	1	0

Задача 2

Используя критерий Гурвица, выяснить, будет ли замкнутая САУ устойчива.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$.

Значения коэффициентов уравнения приведены в таблице 9.

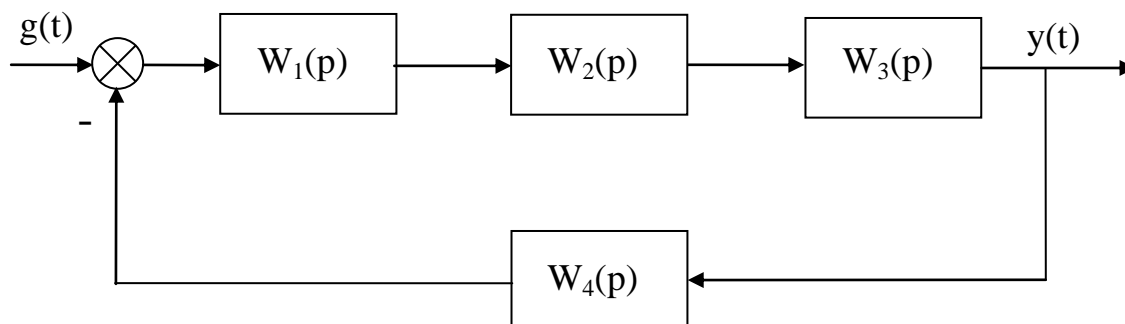
Таблица 9 – Исходные данные к задаче 2

№ варианта	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	4	3	1	5	2
1	6	2	0,5	3	3,5
2	0,96	0,8	0,3	0,1	0,12
3	2,8	3,4	1,6	0,4	1,25
4	0,6	0,3	0,2	1,5	0,35
5	5,8	3	7,5	2	1
6	3,4	4,4	2,5	1	5,7
7	2,5	1	0,8	3,5	0,14
8	0,55	1,5	0,7	3,2	2,6
9	1,2	2,7	3,6	0,8	5,4

Задача 3

Используя критерий Гурвица, записать условие устойчивости для замкнутой системы регулирования.

Структурная схема системы имеет вид



Выражения для передаточных функций приведены в таблице 10.

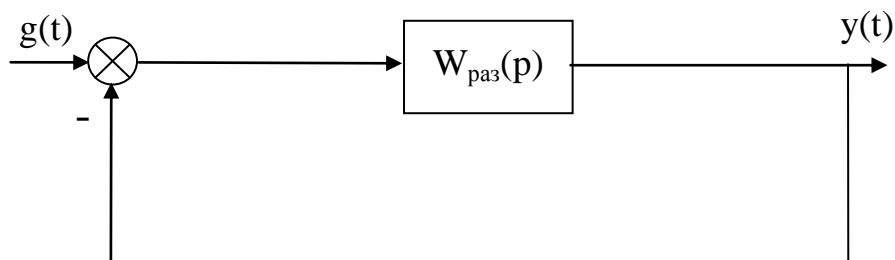
Таблица 10 – Исходные данные к задаче 3

№ варианта	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$
0	$k_1 + \frac{k_2}{p}$	$\frac{k_3}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_4}{T_2 p + 1}$	k_5
1	$k_1 + \frac{k_2}{p}$	k_3	$\frac{k_4}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$	k_5
2	$k_1 + \frac{k_2}{p}$	k_3	$\frac{k_4}{p(T p + 1)}$	k_5
3	$k_1 + \frac{k_2}{p}$	$\frac{k_3}{p}$	$\frac{k_4}{T p + 1}$	k_5
4	$\frac{k_1}{p}$	$\frac{k_2}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_3}{T_2 p + 1}$	k_4
5	k_1	$\frac{k_2}{T_1 p + 1}$	$\frac{k_3}{T_2 p + 1}$	$\frac{k_4}{p}$
6	$\frac{k_1}{p}$	k_2	$\frac{k_3}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$	k_4
7	k_1	k_2	$\frac{k_3}{T^2 p^2 + T p + 1}$	$\frac{k_4}{p}$
8	$\frac{k_1}{p}$	$\frac{k_2}{T^2 p^2 + T p + 1}$	k_3	k_4
9	$k_1 + \frac{k_2}{p}$	$\frac{k_3}{p(T p + 1)}$	k_4	k_5

Задача 4

По известной передаточной функции разомкнутой системы выяснить, будет ли замкнутая система устойчива. При решении использовать критерий Михайлова.

Структурная схема САУ имеет вид



Передаточная функция разомкнутой системы в общем виде определяется выражением $W_{раз}(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$, значения коэффициентов приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Исходные данные к задаче 4

№ варианта	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2
0	1	1	-2	2	1	7	1
1	1	2	-3	1	2	8	2
2	1	3	-1	-1	3	5	3
3	1	1	-1	-2	4	6	4
4	1	2	2	2	5	3	1
5	1	3	-2	1	1	4	2
6	1	1	2	-1	2	1	3
7	1	2	2	-2	3	2	4
8	1	3	3	2	4	1	1
9	1	1	-3	1	1	8	2

Задача 5

Используя следствие из критерия Михайлова, выяснить, будет ли замкнутая система устойчива.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$, значения коэффициентов уравнения приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные к задаче 5

№ варианта	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	2	1	5	4	3	1
1	2	5	4	8	1	2
2	3	4	6	6	1	1
3	4	4	5	7	1	2
4	2	2	5	3	3	1
5	3	2	6	3	1	1
6	3	1	6	4	1	1
7	2	1	8	4	5	2
8	2	1	8	6	5	3
9	2	1	4	6	1	3

3 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИВОЙ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

3.1 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем случае задача САУ заключается в выводе регулируемых величин на требуемое (рабочее) значение и в поддержании рабочих режимов, несмотря на действие возмущений. Для систем стабилизации, например, под рабочим понимается установившийся режим, когда между задающим воздействием и регулируемой величиной поддерживается соответствие с ошибкой не более заданной. Способность системы противостоять возмущениям при решении поставленных задач регулирования характеризуют их свойства, называемые устойчивостью.

Понятие устойчивости можно определить следующим образом: система устойчива, если переходные процессы в ней затухают при ограниченном задающем воздействии и наоборот, если переходные процессы при тех же условиях не затухают, то система считается неустойчивой (рисунок 35).

Заметим, что определить устойчивость системы не значит что-либо сказать о качестве ее работы. Сказать, что система устойчивая, значит сказать о затухании переходных процессов в системе. Однако количественно охарактеризовать переходные процессы можно лишь с помощью показателей качества. Таким образом «устойчивость» понятие качественное. Устойчивая система – значит «работоспособная система». «Хорошо или плохо работающая» - на этот вопрос понятие «устойчивость» ответа не дает. Однако прежде, чем исследовать качество работы системы, необходимо убедиться, что она устойчива, и выяснить те условия, при которых это возможно.

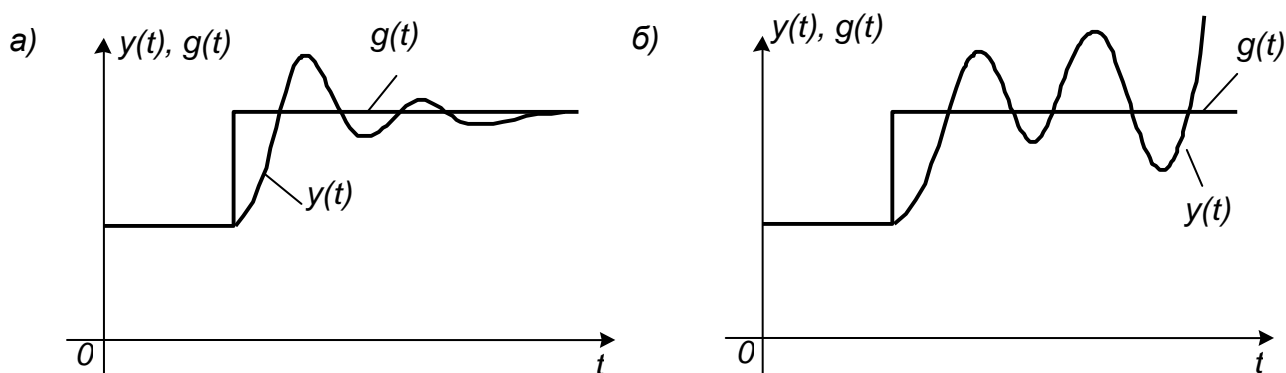


Рисунок 35 - Графики изменения сигналов САУ во времени
а) устойчивая система; б) неустойчивая система
 $g(t)$ – задающее воздействие, $y(t)$ – регулируемый параметр

При исследовании и проектировании САУ всегда приходится решать задачу определения устойчивости. В одном случае это вызвано необходимостью установить будет ли рассматриваемая система работоспособной при известных параметрах ее элементов. Здесь можно воспользоваться критериями устойчивости. В других случаях задача исследования ставится гораздо шире. Это связано со следующими обстоятельствами:

- 1) параметры объектов регулирования и некоторых элементов системы в процессе ее работы могут изменяться в некоторых пределах в силу ряда причин (например, старения элементов, заиливания трубопроводов и т.д.). Это, в свою очередь, может привести к неустойчивости процесса регулирования. Выяснение условий нарушения устойчивости позволяет предусмотреть меры, дающие возможность избежать потери устойчивости системы.
- 2) при синтезе системы перед разработчиками часто стоит задача выбора ограниченного числа параметров элементов системы. Так, например, в ряде случаев требуется определить лишь параметры регулятора, в то время как параметры других элементов уже выбраны, исходя из технических и технологических требований и требований к проектируемой системе. Задача разработчика заключается при этом в нахождении таких значений названных варьируемых параметров, при которых, прежде всего, обеспечивалась бы устойчивость процесса регулирования.

Из этого следует, что в ходе исследования и расчета систем необходимо уметь определять совокупности значений варьируемых параметров, при которых система регулирования заданной структуры остается устойчивой. Указанная совокупность параметров носит название области устойчивости в пространстве варьируемых параметров. Совокупность варьируемых параметров, при которых система неустойчива, носит название области неустойчивости. Область устойчивости от области неустойчивости отделяется границей устойчивости.

Существует метод выделения областей устойчивости в пространстве варьируемых параметров, предложенный Неймарком, и названный им Д-разбиением. Данный метод основан на оперировании с характеристическим многочленом системы, обычно обозначаемым как $D(p)$. Отсюда и название метода.

В общем случае суть метода Д-разбиения заключается в нахождении границы устойчивости и в дальнейшем определении того, с какой стороны от нее располагается область устойчивости.

При одном варьируемом параметре область устойчивости представляет собой отрезок прямой, при двух – часть плоскости, при трех – часть трехмерного пространства и т.п.

Практический интерес представляют случаи, когда число варьируемых параметров не больше трех, так как при этом результаты исследования можно представить наглядно (геометрически).

Как уже было отмечено, устойчивость любой САУ является необходимым, но не достаточным условием ее работоспособности. К каждой системе предъявляется целый ряд дополнительных требований. Это требования к надежности работы, экономичности, требования к габаритам системы и т.д.

Однако в ТАУ рассматривают вопросы анализа динамических характеристик, а так же вопросы синтеза САУ, исходя из требований к возможным изменениям регулируемой величины и к характеру ее изменений. Данные требования определяются в первую очередь особенностями технологического процесса, подлежащего регулированию, поэтому они должны быть сформулированы технологом. С другой стороны ряд требований к системе может ставить сам разработчик на основании собственного опыта.

После того, как указанные требования выставлены, очевидно, качество работы систем может оцениваться на основании желаемого и действительного изменения регулируемой величины, характеризующих данный процесс.

Система управления объектом, оборудованием может находиться в одном из режимов работы: переходном или установившемся.

В промышленных условиях работа систем управления объектами в переходных режимах имеет место в основном в следующих случаях:

- при выводе объектов на рабочий режим перед началом работы;
- при смене режимов работы, например, при переходе на переработку новой партии сырья или при переходе на выпуск новой продукции;
- при выключении оборудования после завершения работы;
- при возникновении различных нештатных ситуаций.

Задача управления объектом в переходном режиме, как правило, состоит в минимизации времени переходного процесса. Это объясняется тем, что во время выхода оборудования на новый режим продукция не выпускается и, следовательно, имеют место простои, снижающие, в конечном счете, его производительность.

При исследовании качества работы систем необходимо учитывать режим работы системы.

Если рассматривать системы стабилизации, работающие в режиме частых включений или частого перехода с одного рабочего режима на другой, а также системы программного управления и следящие, то необходимо анализировать переходные процессы, протекающие в системе при изменении задающего и возмущающего воздействий.

Если же речь идет о системах стабилизации, основная задача которых состоит в поддержании в течение длительного времени заданного значения регулируемой величины в требуемых пределах, то интерес представляют в

большинстве случаев переходные процессы, вызванные возмущающими воздействиями.

Говоря о САУ, принято различать три их основные качества: точность; быстродействие; запас устойчивости.

Суждение о точности связывается с поведением САУ в установившемся режиме, о быстродействии и запасе устойчивости – с поведением систем в переходных режимах.

Точность характеризуется ошибкой регулирования в установившемся режиме, быстродействие – быстротой протекания переходных процессов, запас устойчивости – удаленностью системы от границы устойчивости.

В зависимости от выбранных методов анализа и расчета систем каждое из названных качеств характеризуется своими количественными характеристиками – показателями качества: временными, частотными или корневыми. Наряду с перечисленными существуют так называемые интегральные оценки, позволяющие судить обо всех названных качествах САУ.

Более наглядными из существующих являются временные оценки, которые предлагается рассмотреть в контрольной работе на основании анализа переходных процесса системы регулирования.

Задачами анализа устойчивости САУ обычно являются:

- определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;
- определение допустимого по условиям устойчивости диапазона изменения некоторых параметров системы;
- выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.

3.2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

3.2.1 Исходные данные и постановка задачи

Непрерывная САУ, исследуемая в контрольной работе, имеет структурную схему, изображенную на рис.36.

Общий вид передаточных функций элементов системы:

$$W_1(p) = \frac{k_1 \cdot p + k_2}{p^n}, \quad W_2(p) = \frac{k_3(A_1 p + A_0)}{p^l(B_2 p^2 + B_1 p + B_0)}, \quad W_3(p) = \frac{k_4}{1 + Tp}$$

Входной сигнал системы (задающее воздействие) имеет вид $g(t) = G \cdot 1 \llcorner$.

Численные значения постоянных параметров передаточных функций элементов системы ($n, l, k_3, A_1, A_0, B_2, B_1, B_0, k_4, T$) и значение величины задающего воздействия (G) выбираются студентом согласно номеру задания.

Варьируемыми параметрами являются настройки пропорционально-интегрального регулятора k_1 и k_2 .

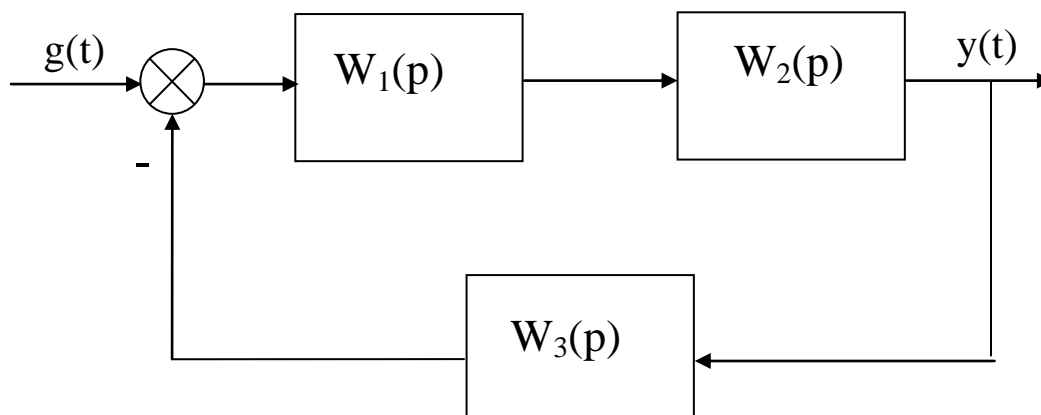


Рисунок 36 - Структурная схема САУ

Контрольная работа состоит из трех последовательно выполняемых частей.

1. Расчет и построение области устойчивости непрерывной линейной САУ.
2. Расчет и построение переходного процесса системы при изменении задающего воздействия.
3. Определение показателей качества системы управления по графику переходного процесса. Вывод о пригодности полученной системы управления.

3.2.2 Построение области устойчивости замкнутой системы

Для выполнения первой части контрольной работы необходимо проделать следующие процедуры.

1. Записать выражение передаточной функции замкнутой системы (по задающему воздействию $g(t)$). Для системы, изображенной на рисунке 36, имеем

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}. \quad (12)$$

2. С учетом заданных выражений передаточных функций элементов системы получить $\Phi(p)$ в виде отношения полиномов

$$\Phi(p) = \frac{R(p)}{D(p)}. \quad (13)$$

3. Записать характеристическое уравнение замкнутой системы (приравняв к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы)

$$D(p) = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (14)$$

где k – порядок характеристического полинома $D(p)$.

Коэффициенты этого уравнения будут зависеть от варьируемых параметров системы k_1 и k_2 – настроек регулятора.

4. Получить уравнения границ области устойчивости в плоскости настроек регулятора. Для этого необходимо рассмотреть следующие возможные значения корней уравнения (14).

Нулевой корень – $p=0$. Из (3) получаем $D(p)|_{p=0} = a_0 = 0$, тогда $a_0(k_1, k_2) = 0$ – уравнение апериодической границы устойчивости, соответствующей нулевому корню.

Мнимый корень – $p=j\omega$. Из (14) получаем $D(p)|_{p=j\omega} = a_k (j\omega)^k + a_{k-1} (j\omega)^{k-1} + a_1 \cdot j\omega + a_0 = U(\omega) + jV(\omega)$.

В общем случае уравнение колебательной границы будет определяться выражением

$$\left. \begin{aligned} U = f(\omega, k_1, k_2) &= 0 \\ V = f(\omega, k_1, k_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Бесконечный корень – $p=\infty$ дает при подстановке в (14) значение $D(p)|_{p=\infty} = a_k = 0$, тогда $a_k(k_1, k_2) = 0$ – уравнение границы третьего типа.

5. Построить линии границ области устойчивости в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2 .

6. Найти направление штриховки границ устойчивости и определить область устойчивости замкнутой системы в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2 .

Для колебательной границы, используя (15), вычислить определитель вида

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_1} & \frac{\partial f_1}{\partial k_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_1} & \frac{\partial f_2}{\partial k_2} \end{vmatrix} = \varphi(\omega). \quad (16)$$

Если при увеличении частоты ω получим $\varphi(\omega) > 0$, то, перемещаясь вдоль колебательной границы устойчивости в сторону увеличения частоты, будем штриховать ее левую сторону; если получим $\varphi(\omega) < 0$, то – правую.

Замечание. Направление штриховки колебательной границы устойчивости следует обязательно определить для положительных и отрицательных значений частоты.

Апериодическую границу и границу третьего типа штрихуют в сторону заштрихованной колебательной границы. Заштрихованная часть плоскости и определит область устойчивости замкнутой САУ, т.е. значение параметров k_1 и k_2 , обеспечивающих устойчивую работу системы.

3.2.3 Расчет переходного процесса при изменении задающего воздействия

Замкнутую систему регулирования по каналу управления (по задающему воздействию) можно представить в виде, изображенном на рисунке 37.

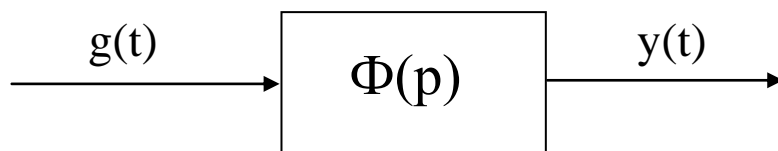


Рисунок 37 - Структура замкнутой САУ

Для расчета переходного процесса $y(t)$ при изменении задающего воздействия $g(t)$ необходимо:

- выбрать в построенной области устойчивости произвольные значения варьируемых параметров k_1 и k_2 ;
- определить численные значения коэффициентов полиномов $R(p)$ и $D(p)$ передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$, используя выражение (12);
- рассчитать и построить график переходного процесса САУ по задающему воздействию.

Для расчета переходного процесса можно использовать аналитический и программный методы.

Аналитический метод расчета переходного процесса требует выполнения довольно громоздких вычислительных процедур, которые существенно упрощаются при использовании стандартного программного обеспечения, например системы MATLAB.

Методика работы в MATLAB состоит следующем:

- Запускают систему MATLAB.
- Создают *tf*-объект, в соответствии с заданными значениями параметров.
- Определяют корни полинома знаменателя передаточной функции $\Phi(p)$ (полюса) с использованием команды *roots* или *pole*.

- Определяют корни полинома числителя передаточной функции $\Phi(p)$ (нули) с использованием команды *roots* или *zero*.
- Используя команду *step*, получают переходную функцию системы.

Замечание.

После нахождения значений корней p_1, p_2, p_3 характеристического уравнения $D(p)=0$, необходимо оценить знаки вещественных частей этих корней и принять решение о целесообразности построения переходного процесса.

Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывной системы заключается в том, что все корни характеристического уравнения системы должны иметь отрицательные вещественные части.

Нарушение этого условия может служить признаком того, что допущена ошибка в определении области устойчивости системы и настройки регулятора k_1 и k_2 фактически находятся в области неустойчивости или неправильно определены численные значения коэффициентов передаточной функции замкнутой системы (7). Рассчитанный переходный процесс при этом будет иметь расходящийся характер.

Пример.

Пусть задана передаточная функция САУ $\Phi(p) = \frac{p+2}{3p^3+4p^2+5p+3}$.

Найдем переходную функцию системы. Будем работать в командном режиме среды MATLAB.

1. Создадим LTI-объект с именем w, для этого выполним скрипт:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

```
Transfer function:
      s + 2
-----
3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3
```

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд *pole*, *zero*.

```
>> pole(w)
```

```
ans =

-0.2639 + 1.0825i
-0.2639 - 1.0825i
-0.8055
```

```
>> zero(w)
```

```
ans =

-2
```

3. Построим переходную функцию командой *step(w)*. Результат ее выполнения приведен на рисунке 38.

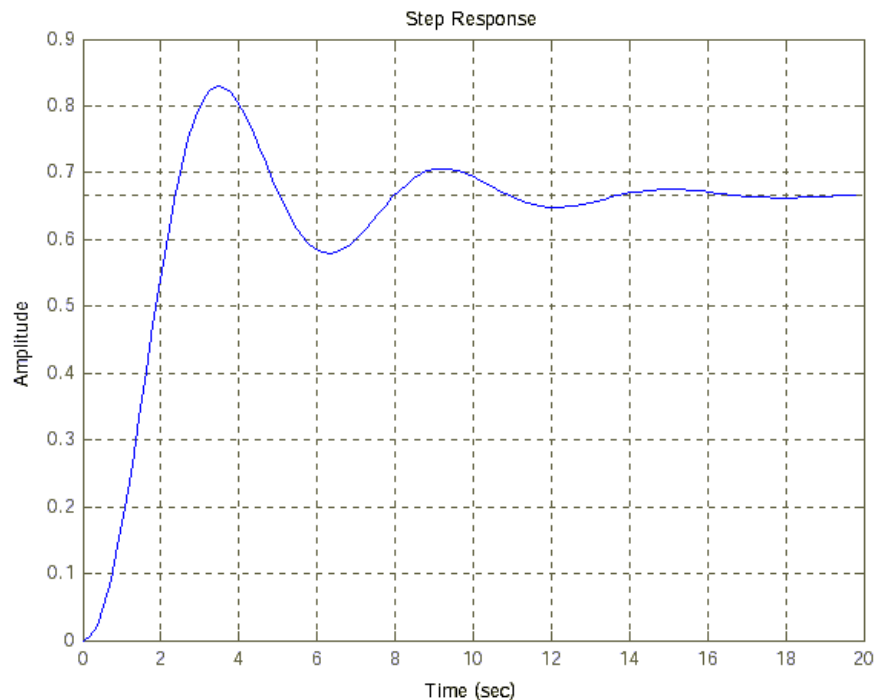


Рисунок 38 - Переходная функция $h(t)$

3.2.4 Оценка качества САУ по графику переходного процесса

В контрольной работе исследуется только один канал передачи воздействия в системе – канал управления, определяемый входным сигналом $g(t)$ и выходным сигналом $y(t)$.

Нормальное функционирование системы должно обеспечивать выполнение равенства $y(t) \approx g(t)$ во все моменты времени. Знак \approx означает, что регулируемая величина поддерживается на заданном значении с некоторой ошибкой.

Различают колебательный и апериодический типовые переходные процессы (рисунок 39).

Рассмотрим колебательный вид кривой переходного процесса САУ по задающему воздействию (рисунок 40).

Точность работы САУ характеризуется величиной ошибки в установившемся режиме

$$\varepsilon_{\infty} = g_{\infty} - y_{\infty}. \quad (17)$$

Значок ∞ обозначает установившееся значение соответствующего сигнала.

Быстродействие системы определяется несколькими количественными показателями: временем переходного процесса ($t_{\text{ПП}}$); временем первого максимума ($t_{\text{М}}$); временем нарастания ($t_{\text{Н}}$) и т.д.

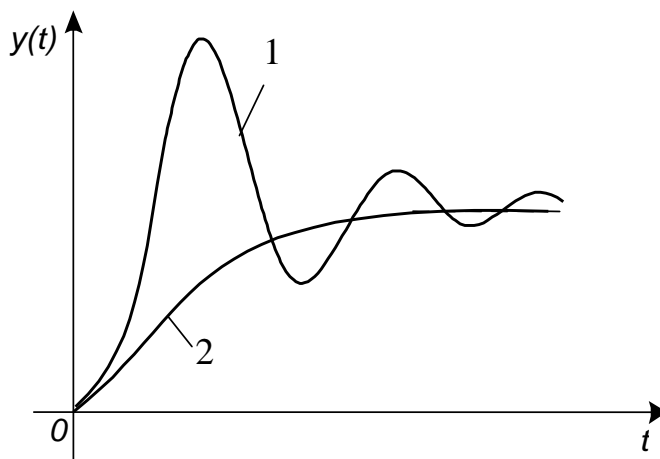


Рисунок 39 - Виды переходных процессов: 1 – колебательный, 2 – аperiodический

Наиболее характерным показателем быстродействия является время переходного процесса. Теоретически это время равно бесконечности. Поэтому в ТАУ для оценки быстродействия по каналу управления принято определять время от момента начала входного воздействия ($g(t)$) до момента, после которого имеет место неравенство

$$|y(t) - y_{\infty}| \leq \Delta, \quad (18)$$

где $\Delta = (0,03 \div 0,05) \cdot y_{\infty}$.

Иными словами, время переходного процесса – интервал, за который кривая попадает в зону $\pm\Delta$ и далее нигде из нее не выходит.

Время переходного процесса определяется только свойствами самой системы и удобно для корректного сравнения систем с различными законами регулирования с целью выбора лучшего из них.

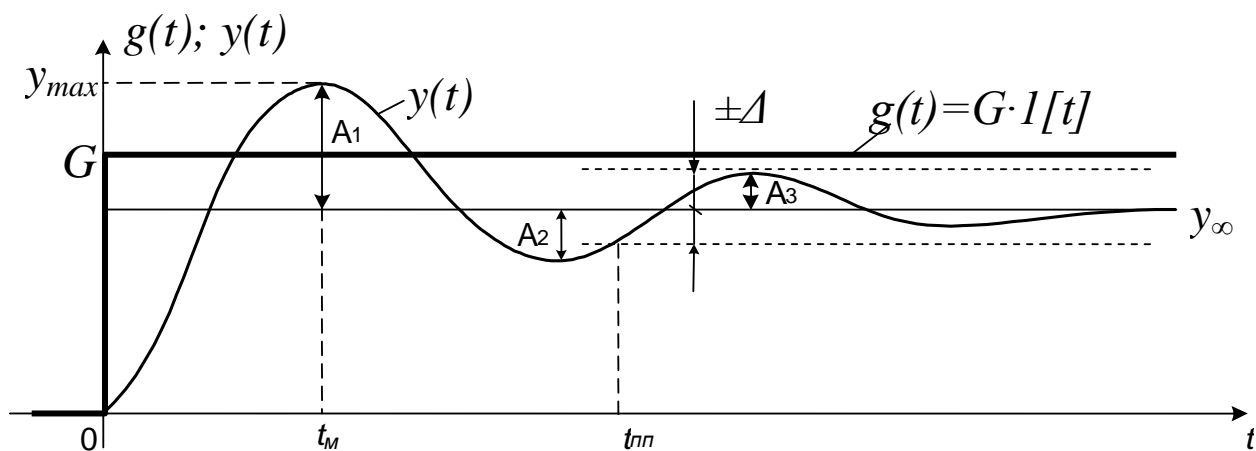


Рисунок 40 - Переходный процесс системы на ступенчатое задающее воздействие

Запас устойчивости (склонность системы к колебаниям) при использовании временных методов характеризуется следующими показателями: перерегулированием σ , затуханием ψ и числом колебаний N .

Перерегулирование и затухание выражаются в процентах и вычисляются по формулам:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\%, \quad (19)$$

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} \cdot 100\%. \quad (20)$$

Число колебаний N определяется как число минимумов и максимумов переходной функции за время переходного процесса.

Из практики работы систем регулирования известно, что для нормально работающих систем $\sigma \leq 30\%$, а $\psi = 90 \div 98\%$. Чем больше σ , N и меньше ψ , тем более склонна система к колебаниям, тем меньше ее запас устойчивости.

3.3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

1. Заданы следующие параметры элементов системы:

n	k_3	A_1	A_0	l	B_2	B_1	B_0	k_4	T	G	ΔG_{don}
1	5	0	1	0	50	15	1	1	0	1,0	$\pm 0,05$

Варьируемыми параметрами являются настройки пропорционально-интегрального регулятора k_1 и k_2 .

2. Запишем с учетом исходных данных передаточные функции элементов системы:

$$W_1(p) = \frac{k_1 \cdot p + k_2}{p^n} = \frac{k_1 p + k_2}{p},$$

$$W_2(p) = \frac{k_3(A_1 p + A_0)}{p^l(B_2 p^2 + B_1 p + B_0)} = \frac{5}{50 p^2 + 15 p + 1},$$

$$W_3(p) = \frac{k_4}{1 + Tp} = 1$$

3. Получим выражение для передаточной функции замкнутой САУ

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} = \frac{\frac{k_1 p + k_2}{p} \cdot \frac{5}{50 p^2 + 15 p + 1}}{1 + \frac{k_1 p + k_2}{p} \cdot \frac{5}{50 p^2 + 15 p + 1}} = \\ &= \frac{5(k_1 p + k_2)}{50 p^3 + 15 p^2 + (1 + 5k_1)p + 5k_2} = \frac{R(p)}{D(p)}. \end{aligned}$$

4. Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы (приравняв к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы)

$$D(p) = 50p^3 + 15p^2 + (1 + 5k_1)p + 5k_2 = 0$$

5. Получим уравнения границ области устойчивости в плоскости настроек регулятора.

Апериодическая граница устойчивости

Полагая, что $p=0$ и $a_0(k_1, k_2) = 0$, получаем $5k_2 = 0$.

Тогда $k_2 = 0$ - уравнение апериодической границы.

Граница третьего типа

Полагая, что $p=\infty$ и $a_k(k_1, k_2) = 0$, получаем, что $a_k = 50 \neq 0$, границы третьего типа НЕТ.

Колебательная граница

При подстановке $p=j\omega$ в характеристическое уравнение получаем

$$\begin{aligned} D(p) &= 50(j\omega)^3 + 15(j\omega)^2 + (1 + 5k_1)(j\omega) + 5k_2 = \\ &= -j50\omega^3 - 15\omega^2 + j(1 + 5k_1)\omega + 5k_2 = U(\omega) + jV(\omega). \end{aligned}$$

Запишем выражения для действительной и мнимой частей выражения:

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= -15\omega^2 + 5k_2 = 0 \\ V(\omega) &= -50\omega^3 + (1 + 5k_1)\omega = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Из системы уравнений легко получить выражения для варьируемых параметров

$$k_1 = \frac{50\omega^3 - \omega}{5\omega} = \frac{50\omega^2 - 1}{5} = 10\omega^2 - 0,2, \quad k_2 = \frac{15\omega^2}{5} = 3\omega^2.$$

Задаваясь значениями ω от 0 до ∞ , рассчитаем значения настроек регулятора k_1 и k_2 и получим данные для построения колебательной границы (таблица 13).

Таблица 13 - Расчет колебательной границы устойчивости

ω	0	0,1	0,2	0,5	0,8	1	∞
k_1	-0,2	-0,1	0,2	2,3	6,2	9,8	∞
k_2	0	0,03	0,12	0,75	1,92	3	∞

6. Построим линии границ области устойчивости в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2 (рисунок 41).

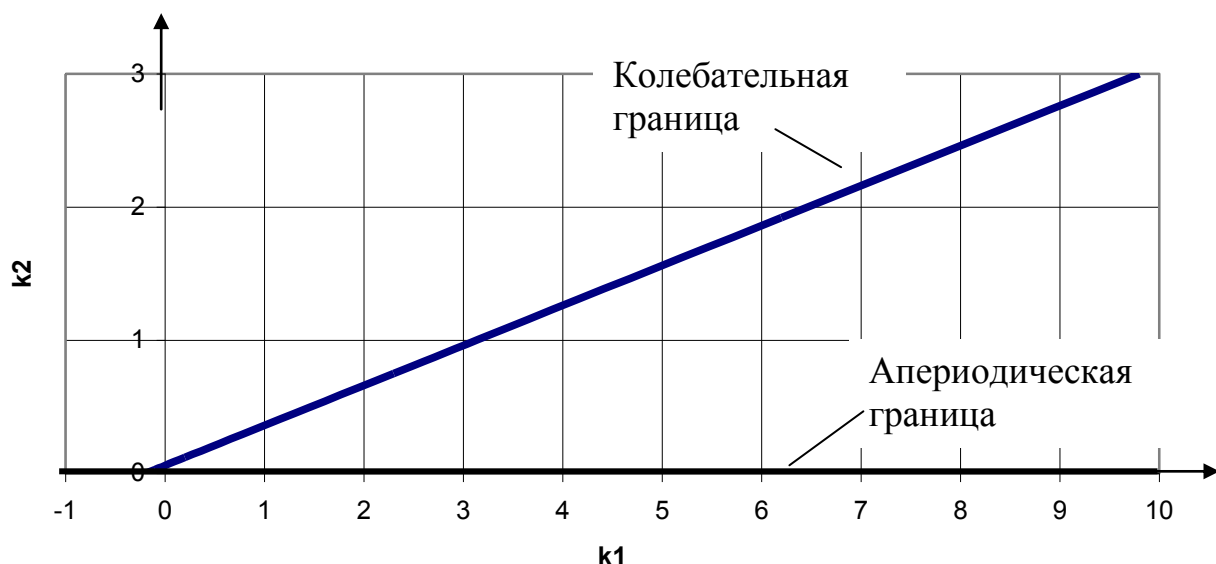


Рисунок 41 - Границы области устойчивости в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2

7. Для нахождения направления штриховки колебательной границы устойчивости вычислим определитель вида

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial k_1} & \frac{\partial V}{\partial k_2} \\ \frac{\partial U}{\partial k_2} & \frac{\partial V}{\partial k_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5\omega & 0 \end{vmatrix} = 0 - 25\omega.$$

Замечание. Частные производные первого столбца определителя берутся по переменной, которая соответствует оси абсцисс, а частные производные второго столбца – по переменной, которая соответствует оси ординат.

При увеличении ω от 0 до ∞ , т.е. при $\omega > 0$, мы двигаемся по линии, соответствующей колебательной границе, слева направо, а так как $\Delta(\omega) < 0$, то заштриховываем правую часть плоскости.

Если частоту изменять в пределах от $-\infty$ до 0, т.е. при $\omega < 0$, определитель изменит знак, $\Delta(\omega) > 0$, и двигаясь в сторону увеличения частоты (справа налево) следует заштриховать левую часть плоскости (ту же часть, что и ранее). Это говорит о том, что при любом значении частоты ω область устойчивости будет находиться с одной и той же стороны от колебательной границы.

Апериодическую границу (а при наличии, и границу третьего типа) штрихуем в сторону колебательной границы.

Заштрихованная часть плоскости представляет собой искомую область устойчивости (рисунок 42).

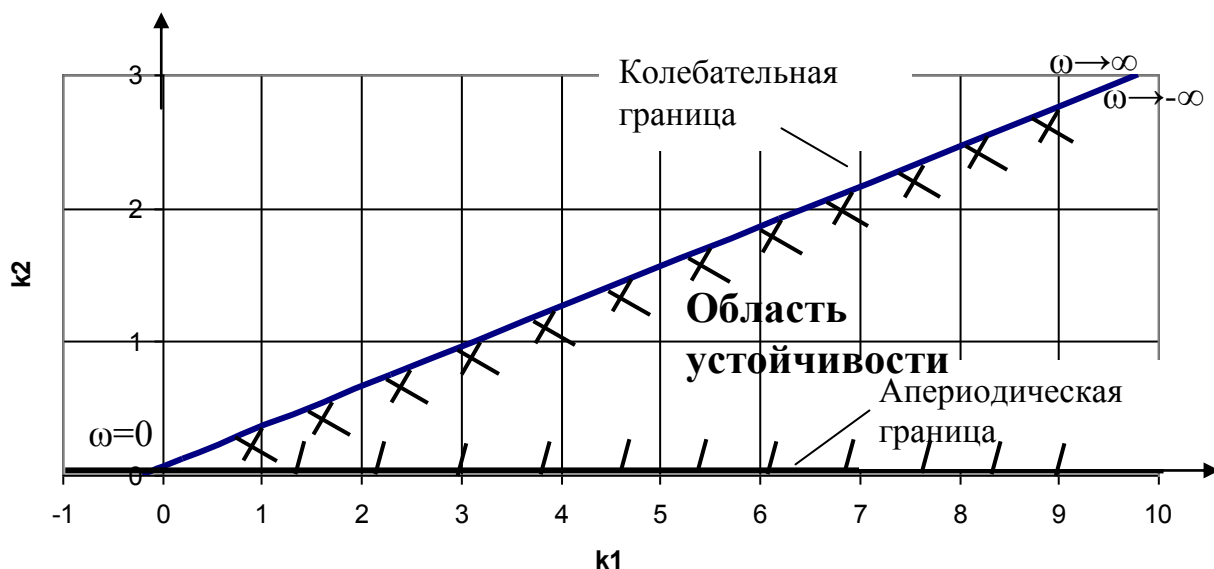


Рисунок 42 - Область устойчивости

8. В области устойчивости произвольно выбираем точку и находим соответствующие ей конкретные значения варьируемых параметров. Например, $k_1=0,8$ и $k_2=0,1$.

9. Передаточная функция замкнутой САУ при подстановке в нее выбранных значений варьируемых параметров примет вид:

$$\Phi(p) = \frac{5(0,8p + 0,1)}{50p^3 + 15p^2 + (1 + 5 \cdot 0,8)p + 5 \cdot 0,1} = \frac{4p + 0,5}{50p^3 + 15p^2 + 5p + 0,5} \frac{R(p)}{D(p)}.$$

10 Используя программный способ определения корней числителя и знаменателя передаточной функции, получим

нули передаточной функции (корни числителя) $p = -0,125$;

полюса передаточной функции (корни знаменателя) $p_1 = -0,128$,
 $p_2 = -0,086 + j \cdot 0,266$, $p_3 = -0,086 - j \cdot 0,266$.

При анализе корней знаменателя видно, что они имеют отрицательные действительные части, т.е. необходимое и достаточное условие устойчивости выполняется.

График переходного процесса САУ по задающему воздействию имеет вид, представленный на рисунке 43.

11. Оценим качество САУ. По графику переходного процесса оценим основные показатели работы системы при ступенчатом изменении задающего воздействия.

Точность

$$\varepsilon_{\infty} = g_{\infty} - y_{\infty} = 1 - 1 = 0.$$

Статической ошибки нет.

Быстродействие

Примем $\Delta = 0,05 \cdot y_{\infty} = 0,05 \cdot 1 = 0,05$. Построим зону $\pm\Delta$ и по графику найдем время переходного процесса, $t_{\text{III}} \approx 28\text{с}$.

Запас устойчивости

Перерегулирование и затухание вычисляем по формулам:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\% = \frac{1,38 - 1}{1} \cdot 100\% = 38\%,$$

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} \cdot 100\% = \frac{0,38 - 0,04}{0,38} \cdot 100\% = 89,5\% \approx 90\%.$$

Число колебаний $N=1$.

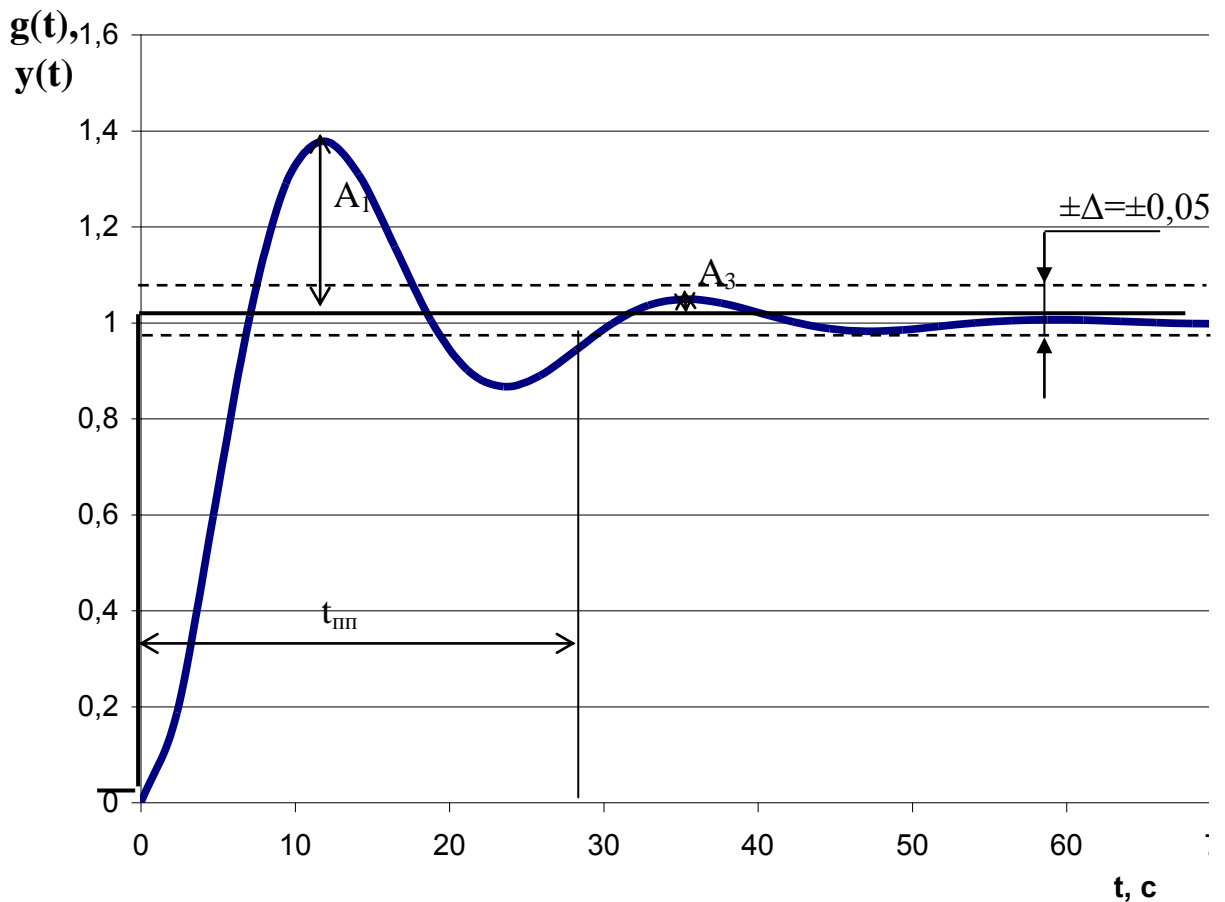
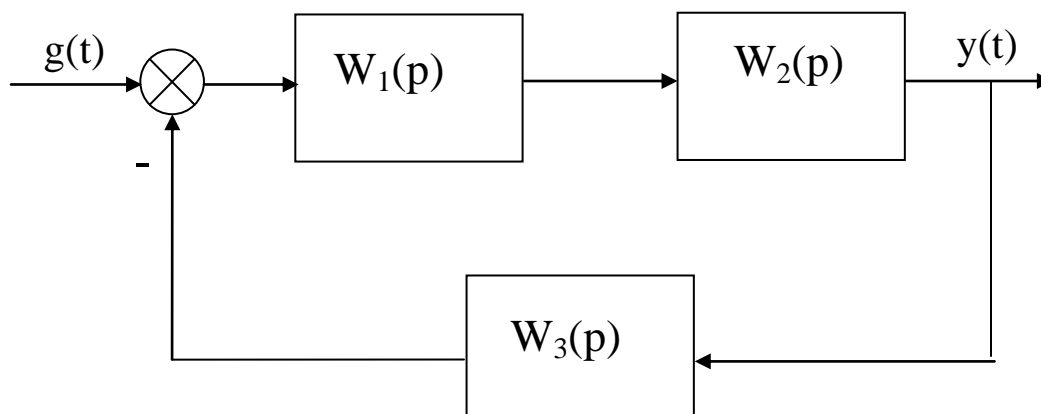


Рисунок 43 - Переходный процесс замкнутой САУ по задающему воздействию

Сравним полученные значения показателей качества работы рассчитанной системы регулирования с общетехническими и сделаем вывод: САУ при ступенчатом изменении задающего воздействия не имеет статической ошибки, обладает достаточным запасом устойчивости, время переходного процесса не более 30 с.

3.4 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

Структурная схема непрерывной САУ имеет вид



Общий вид передаточных функций элементов системы:

$$W_1(p) = \frac{k_1 \cdot p + k_2}{p^n}, W_2(p) = \frac{k_3(A_1 p + A_0)}{p^l(B_2 p^2 + B_1 p + B_0)}, W_3(p) = \frac{k_4}{1 + Tp}$$

Входной сигнал системы (задающее воздействие) имеет вид $g(t) = G \cdot 1 \llcorner$.

Численные значения постоянных параметров передаточных функций элементов системы ($n, l, k_3, A_1, A_0, B_2, B_1, B_0, k_4, T$) и значение величины задающего воздействия (G) представлены в таблице 14.

Таблица 14 – Исходные данные к контрольной работе №3

№ варианта	n	k_3	A_1	A_0	l	B_2	B_1	B_0	k_4	T	G	ΔG_{don}
0	1	1,2	0	1	0	20	8	3	1,1	0	2,5	$\pm 0,2$
1	1	-0,9	0	1	0	50	16	3	0,9	0	-2,5	$\pm 0,2$
2	0	0,8	0	1	1	100	25	1	1	0	2,5	$\pm 0,2$
3	0	-9,6	0	1	1	130	40	7	1,1	0	-2,5	$\pm 0,2$
4	1	0,8	10	1	0	0	30	1	0,9	2	-2,5	$\pm 0,2$
5	1	1,9	12	1	0	0	35	9,3	1	2,5	3,0	$\pm 0,3$
6	1	-4,1	11	1	0	0	60	2,3	1,1	5	-5,0	$\pm 0,5$
7	1	-5,3	9	1	0	0	65	2,1	0,9	5,5	1,0	$\pm 0,05$
8	0	0,8	0	1	1	100	25	1	1	0	2,5	$\pm 0,2$
9	0	-9,6	0	1	1	130	40	7	1,1	0	-2,5	$\pm 0,2$

Варьируемыми параметрами являются настройки пропорционально-интегрального регулятора k_1 и k_2 .

Требуется:

➤ построить область устойчивости замкнутой САУ в плоскости варьируемых параметров;

- рассчитать переходный процесс замкнутой САУ при изменении задающего воздействия при произвольно выбранных значениях варьируемых параметров (настроек регулятора) из построенной области устойчивости;
- оценить качественные показатели работы системы регулирования по каналу управления на основе анализа графика переходного процесса.

4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Студентам заочной формы обучения при выполнении контрольных работ №1-3 также рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Сотников, В. В. Основы теории управления. Базовый курс: учебное пособие / В. В. Сотников, Л. Ф. Макарова. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. – 155 с.
2. Власов, К. П. Теория автоматического управления: учебное пособие/ К. П. Власов. - Харьков: Гуманит. Центр, 2007. – 524 с.
3. Рапопорт, Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами: учебное пособие /Э. Я. Рапопорт. - М.: Высшая школа, 2005. – 292 с.
4. Фокин, А. Л. Робастное управление технологическими процессами: учебное пособие/ А. Л. Фокин, В. В. Сыроквашин, П. А. Бороздин. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2007. – 201 с.
5. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления/ В. Я. Ротач. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 396 с.
6. Яковлев, В. Б. Теория автоматического управления/ В. Б. Яковлев – М.: Высшая школа, 2003. — 240 с.
7. Бесекерский, В. А. Теория автоматического управления/ В. А. Бесекерский – М.: Наука, 2003. — 314 с.

Приложение А. Титульный лист контрольной работы
(обязательное)

Минобрнауки России

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

УГС	15.00.00 Машиностроение
Направление подготовки	15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
Профиль	Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)
Квалификация	бакалавр
Факультет	Информационных технологий и управления
Кафедра	Автоматизации процессов химической промышленности
Учебная дисциплина	Теория автоматического управления
Курс ____	Группа _____

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №_____

(название контрольной работы))

Студент	_____	_____
	(подпись, дата)	(инициалы, фамилия)
Руководитель,	_____	_____
	(подпись, дата)	(инициалы, фамилия)
Оценка за контрольную работу,	_____	_____
		(подпись руководителя)

Санкт-Петербург
201_

Приложение Б. Краткие сведения о преобразовании Лапласа (справочное)

Одним из методов, позволяющих существенно упростить решение дифференциальных уравнений и связать поведение элементов САУ и систем в целом во времени с их передаточными функциями, является преобразование Лапласа.

Сущность данного преобразования состоит в том, что используя определенный интеграл, можно перейти от области действительной переменной t к области комплексной переменной p , и функцию времени $f(t)$, называемую оригиналом, преобразовать в функцию комплексной переменной $F(p)$, называемую изображением.

Преобразование Лапласа ставит в соответствие оригиналу изображение посредством интегрального соотношения:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (\text{П1})$$

где $p = c + j\omega$ - комплексная величина.

Формула обратного преобразования Лапласа имеет следующий вид:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (\text{П2})$$

Уравнения (П1) и (П2) обычно записывают в сокращенной форме:

$$F(p) = L \{ f(t) \} \quad \text{и} \quad f(t) = L^{-1} \{ F(p) \}.$$

При отыскании изображения заданной функции и при обратном преобразовании на практике не вычисляют определенные интегралы, а пользуются готовыми таблицами преобразований Лапласа (таблица П1).

Таблица П1 - Фрагмент таблиц преобразования Лапласа

Оригинал функции $f(t)$	Изображение функции по Лапласу $F(p)$
$\delta(t)$	1
$1[t]$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$

Продолжение таблицы П1

Оригинал функции $f(t)$	Изображение функции по Лапласу $F(p)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Рассмотрим основные правила, описывающие переход от заданного математического действия над функцией действительной переменной в область комплексной переменной. Сводка таких правил называется основными свойствами преобразований Лапласа.

1. Теорема сложения

Изображение от суммы нескольких функций равно сумме изображений этих функций:

$$L \{ f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \} = L \{ f_1(t) \} + L \{ f_2(t) \} + \dots + L \{ f_n(t) \} = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) \quad (\text{П3})$$

и наоборот

$$L^{-1} \{ F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) \} = L^{-1} \{ F_1(p) \} + L^{-1} \{ F_2(p) \} + \dots + L^{-1} \{ F_n(p) \} = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (\text{П4})$$

2. Изображение функции, умноженной на константу

Константа выносится за знак изображения:

$$L \{ a \cdot f(t) \} = a \cdot L \{ f(t) \} = a \cdot F(p) \quad (\text{П5})$$

и наоборот

$$L^{-1} \{ a \cdot F(p) \} = a \cdot L^{-1} \{ F(p) \} = a \cdot f(t) \quad (\text{П6})$$

3. Изображение производной функции

При нулевых начальных условиях изображение от производной функции n -го порядка равно произведению переменной p^n на изображение исходной функции:

$$L \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = p^n \cdot F(p) \quad (\text{П7})$$

и наоборот

$$L^{-1} \{ p^n \cdot F(p) \} = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (\text{П8})$$

При ненулевых начальных условиях преобразование имеет следующий вид:

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n \cdot F(p) - f(0) \quad (\text{П9})$$

4. Изображение от функции с запаздыванием

Изображение от функции с запаздыванием τ равно произведению множителя $e^{-p\tau}$ на изображение исходной функции:

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} L\{f(t)\} = e^{-p\tau} \cdot F(p) \quad (\text{П10})$$

и наоборот

$$L^{-1}\{F(p) \cdot e^{-p\tau}\} = f(t-\tau) \quad (\text{П11})$$

5. Теорема Лапласа о начальном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p) \quad (\text{П12})$$

6. Теорема Лапласа о конечном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p) \quad (\text{П13})$$

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ВРЕМЕННЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	4
1.1 Временные характеристики	4
1.2 Частотные характеристики.....	10
1.3 Примеры выполнения задач из контрольной работы №1	13
1.4 Задания для контрольной работы №1	26
2 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	31
2.1 Понятие устойчивости системы автоматического управления.....	31
2.2 Необходимое и достаточное условие устойчивости	31
2.3 Критерии устойчивости.....	33
2.4 Примеры выполнения задач из контрольной работы №2	37
1.4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2.....	46
3 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИВОЙ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА.....	51
3.1 Основные теоретические сведения	51
3.2 Порядок выполнения контрольной работы №3	54
3.2.1 Исходные данные и постановка задачи	54
3.2.2 Построение области устойчивости замкнутой системы	55
3.2.3 Расчет переходного процесса при изменении задающего воздействия	57
3.2.4 Оценка качества САР по графику переходного процесса	59
3.3 Пример выполнения контрольной работы №3	61
3.4 Исходные данные для контрольной работы №3	66
4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	67
Приложение А. Титульный лист контрольной работы	68
Приложение Б. Краткие сведения о преобразовании Лапласа.....	69

Кафедра автоматизации процессов химической промышленности

Практикум к контрольным работам №1-3

Теория автоматического управления

Анна Владимировна Черникова

Отпечатано с оригинала макета

Формат 60х90 ¹/₁₆

Печ.л. 4,6

Тираж 50 экз. Зак. №

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013 Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Типография издательства СПбГТИ(ТУ), тел.49-49-365