Задания контрольной работы по Математике для студентов направления обучения «Психолого-педагогическое образование»

Преподаватель:

Д.В.Шевченко

e-mail: DV@ieml.ru

Оглавление

Аннотация

Данное пособие составлено по материалам учебных пособий Е.А. Парышевой и Р.З. Салахутдинова для контрольных работ и практических занятий, разработанных в институте Экономики, управления и права (г. Казань) в различные годы.

В данном пособии рассматриваются основные способы и методы решения задач, необходимые для выполнения контрольного задания, приводится перечень теоретических вопросов.

Инструкция к курсу и указания по выполнению контрольной работы

1. Дисциплина

Математика

для студентов направления обучения Психолого-педагогическое образование (все профили).

Формы отчетности: контрольная работа и экзамен в 1 семестре.

2. Преподаватель

Шевченко Денис Вячеславович,

канд. физ.-мат. наук, доцент; зав. каф. высшей математики.

3. Контактная информация

Электронный адрес: DV@ieml.ru.

Вконтакте: vk.com/dv1973.

Телефон (843) 2319290 доб. 1024.

4. Назначение дисциплины

Дисциплина "Математика" ориентирована на подготовку студентов к широкому использованию математики и математических методов в своей профессиональной деятельности. В процессе обучения студенты углубляют свои знания по отдельным разделам математики, которые предлагались еще по школьной программе. Кроме того, к рассмотрению представлены новые разделы, необходимые для овладения последующими дисциплинами (как естественнонаучного, так и общепрофессионального и специального циклов). В результате овладения данным курсом, студент должен получить базовые знания математических методов оптимизации и анализа и методов статистической обработки данных, и, в конечном итоге, – мощный математический аппарат, который призван помочь ему в дальнейшей профессиональной деятельности.

5. График присутственных часов и дистанционных консультаций

Консультации можно получить:

по электронной почте;

по скайпу;

на кафедре во время присутственных часов;

по телефону кафедры во время присутственных часов (краткие консультации организационного плана).

Время присутствия на кафедре уточнить по телефону или по e-mail.

6. Требования к экзамену

Темы, выносимые на экзамен:

На экзамен выносятся следующие подразделы курса:

1. Матрицы и определители.
2. Системы линейных алгебраических уравнений.
3. Элементарная теория векторов.
4. Элементы аналитической геометрии на плоскости.
5. Множества и функции.
6. Пределы и непрерывность.
7. Дифференциальное исчисление
8. Исследование функций. Графики функций.
9. Теория вероятностей.
10. Математическая статистика.

Все подразделы изложены в соответствующих темах в системе Moodle.

Контрольные работы размещены в системе Moodle. Контрольные работы также можно получить в электронном виде у менеджеров деканата Института Дистанционного Обучения и кафедры Высшей математики.

Условия проведения экзамена в традиционной форме:

Перед экзаменом в обязательном порядке должна быть сдана контрольная работа.

На экзамене студенты получают билет, содержащий ряд заданий на основные темы курса. Максимальное время выполнения заданий – 2 часа. Студенты, не справившиеся с 60% заданий, получают оценку «неудовлетворительно». Студенты, справившиеся с 60–80% заданий, получают оценку «удовлетворительно». Студенты, справившиеся более чем с 80% заданий, получают оценку «хорошо» или могут сдать теоретическую часть для получения оценки «отлично». В теоретической части особое внимание уделяется приложениям рассматриваемых задач и их решений в профессиональной области.

Экзамен проходит в институте в назначенный по расписанию день.

Условия проведения экзамена в неконтактной форме:

Перед экзаменом в обязательном порядке должна быть сдана контрольная работа.

Для студентов-удаленников с согласованием с деканатом ИДО возможны два варианта сдачи экзамена в неконтакной форме:

1. Сдача экзамена по скайпу, аналогично традиционной форме сдачи.

2. При проблемах с доступом или скоростью интернет после рассмотрения ситуации в деканате и индивидуального разрешения:

Студенту высылается экзаменационное задание на 2 часа. В случае его успешной сдачи высылается теоретическое задание на 4 часа. Времы высылки заданий согласуется заранее по электронной почте.

7. Требования к выполнению контрольной работы

Требования изложены в соответствующем файле.

В файле содержатся необходимый теоретический материал, примеры выполнения заданий и задачи для самостоятельного решения.

<u>Вариант контрольной работы определяется последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки.</u>

В связи с высокой сложностью набора формул допускается оформление работы не на компьютере, но и аккуратным почерком. При сдаче по электронной почте письменно оформленной работы промежуточные и итоговая версия предоставляются в отсканированном виде в форматах jpg или pdf с предварительной архивацией (zip, rar и т.п.). Файлы необходимо сканировать или фотографировать в самом низком расширении. Скан-копии должны иметь правильную ориентацию для чтения, а их названия должны быть однотипными и содержать номер страницы.

Критерии оценок для контрольной работы

- **«незачтено»** – выполнен чужой вариант или выполнено менее 60% заданий или все задания выполнены с существенными ошибками, или имеются существенные ошибки в оформлении или организации переписки;
- **«зачтено»** – без ошибок выполнено не менее 60% заданий. Возможны мелкие недочеты при решении задач и при оформлении работы. Четко сформулированы ответы и выводы.

8. Настойчивые пожелания по организации переписки

При переписке по электронной почте или в вконтакте прошу придерживаться следующих правил:

1. Представляться в каждом письме (в начале или в конце) по форме: ФИО полностью, номер группы, город, дисциплина, которой посвящено письмо.

2. В теме письма указывать Фамилию И.О., номер группы, город, дисциплину, собственно тему письма.

3. В начале письма обязательно копируйте основные моменты нашей с Вами прошлой переписки, имеющие отношение к письму. Обычно это достигается автоматически включением соответствующей опции почтового браузера.

4. При отсылке нескольких файлов или одного файла размером более 100 КБайт их необходимо заархивировать в единый файл и только после этого прикрепить к письму. Рекомендуемые архивы zip, rar, 7z. Архивация в самораспаковывающийся файл (exe) не допускается.

5. Файлы необходимо сканировать или фотографировать в самом низком расширении. Скан-копии должны иметь правильную ориентацию для чтения, а их названия должны быть однотипными и содержать номер страницы.

6. При оценке преподавателем Вашей работы или экзаменационного ответа необходимо четко выразить свое согласие или несогласие с данной оценкой.

7. Все согласия или несогласия с оценками копировать на адрес менеджера деканата. Отсылать менеджеру письма с самими работами не обязательно.

При нарушении правил переписки возможны задержки в ответах (из-за долгой идентификации автора и проблемы), а также потери Ваших писем как по техническим причинам (большой объем или подозрение на спам) так и в результате удаления по ошибке вместо чужих.

ПРИМЕР ПЕРЕПИСКИ:

Тема:

Иванов И.И. д2321у, Казань, Математика 1 семестр, исправление 2 задачи.

Текст письма:

Здравствуйте, Денис Вячеславович.

Высылаю Вам исправленное решение второй задачи. Все ли правильно на этот раз?

С оценкой остальных задач согласен.

Подпись:

С уважением,

Иванов Иван Иванович,

группа д2321у, Казань, Математика 1 семестр.

Выдержки из прошлой переписки:

On Sun, 16 Sep 2012 00:31:08 +0400 (MSD), Иванов Иван <IIvanov@corpmail.ru> wrote:

> *Здравствуйте, Денис Вячеславович!*
> *Отправляю черновик решения заданий*
> *по математике. Все ли правильно?*

On Sun, 16 Sep 2012 08:22:13 +0400 (MSD), Денис Шевченко <shevchen-ko@ieml.ru> wrote:

> *Иван Иванович, здравствуйте!*
> *Вашу работу проверил. Почти все выполнено правильно.*
> *Ошибка только во второй задаче. Вы забыли поменять*
> *знак в третьей строке.*
> *Сами формулы использованы правильно.*
> *Первую задачу можно оценить на 10 баллов (все правильно).*
> *Во второй задаче необходима доработка.*
> *Третью задачу оценил на 8 баллов*
> *(чертежи выполнены с большим количеством помарок).*
> *За 4-ю задачу все 10 баллов.*
> *Так держать.*
> *Жду переработанный вариант.*
> *Желаю успеха.*
>
> *С уважением,*
> *Д.В.Ш.,DV@ieml.ru*

Контрольные задания

1. Даны матрицы A, B, C. Вычислить матрицу D=AB+C

Вариант	A	B	C
1.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель третьего порядка

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

4. Составить уравнение прямой линии на плоскости, проходящей через заданные точки

1. (–1, 2) и (0, 10); **2.** (–2, –1) и (3, 9); **3.** (–3, 1) и (4, 8); **4.** (–4, 3) и (–2, 7).
5. (–5, 2) и (0, 6); **6.** (–6, –1) и (3, 5); **7.** (–7, 1) и (4, 4); **8.** (–8, 3) и (–2, 3).
9. (–9, 2) и (0, 2); **10.** (–10, –1) и (3, 1).

5. Построить график функции (с помощью преобразования графиков основных элементарных функций) или в пакете MS Excel

1. $y = 2\sin x - 3$ **2.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **3.** $y = 3\cos\frac{x}{5}$, **4.** $y = \frac{3}{x+1} - 2$

5. $y = \sqrt{3x} - 6$ **6.** $y = \left|x^2 - 1\right|$, **7.** $y = \left|x^3 + 5\right|$ **8.** $y = (5x)^2 - 2$,

9. $y = \frac{1}{5x} - 4$ **10.** $y = 5\ln(4x)$

6. Значение функции f(x) известно в точках a и b. С помощью линейной интерполяции найти значение функции в точке c

Вариант	*a*	*f(a)*	*b*	*f(b)*	*c*
1	-1	10	2,5	15	0
2	1	5	2	8	1,5
3	2	6,5	3	7,5	2,5
4	2,5	0	4,5	1,75	3
5	–2	–12,5	0	–1	–1
6	0	2	1	3	0,5
7	1,5	120	3,5	125	2
8	0,5	10	1,5	0,75	1
9	1,5	5	3	6	2,5
10	0,5	25	2	21	1,4

7. Найти предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2}{x+1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{x+1}$ **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-15}{\sqrt{x^2+1}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x^7+1}}{x^3\sqrt{x}+1}$,

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x^2}{x^3+1}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$,

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+10}+x^2}{\sqrt{x^4+1}}$.

8. Вычислить производную функции

1. $y=5x^2+x\cos x$ **2.** $y=\cos x\sin x-\dfrac{3}{x}$ **3.** $y=\cos x\cdot e^x-x^2$

4. $y=\dfrac{x+3}{3+x^2}$ **5.** $y=\sin 4x-\dfrac{x+1}{x-2}$ **6.** $y=x\operatorname{ctg}x+\ln 4x$

7. $y=\dfrac{x^2+4}{\sin x-5}$ **8.** $y=\dfrac{1}{x-4}+(x+1)^5$ **9.** $y=x^2e^x-x^4$

10. $y=\left(x+3\right)^3\cdot\sin x$

***9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке* [–2, 2].**

1. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$,

2. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 10$,

3. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$,

4. $f(x) = x^3 - 6x + 7$,
5. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 10$,
6. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$,
7. $f(x) = x^3 - x^2$,
8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$,
9. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$,
10. $f(x) = x^4 - 1$.

10. Исследовать функцию и построить ее график. Проверить график в пакете MS Excel

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ **2.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$ **3.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 3}$,

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **6.** $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$,

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ **8.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4}$ **9.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3 - 4x}$,

10. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$.

11. Вычислить приближенно, используя дифференциал функции

1. $\sin(0{,}05)$; **2.** $e^{0{,}04}$; **3.** $(1{,}2)^5$, **4.** $\ln(1{,}03)$ **5.** $\mathrm{tg}(0{,}02)$;
6. $\sqrt{1{,}1}$; **7.** $\sqrt[5]{0{,}95}$; **8.** $\ln(0{,}98)$ **9.** $e^{-0{,}1}$; **10.** $\sqrt{0{,}96}$.

12. Найти эмпирическую формулу методом наименьших квадратов в случае линейной зависимости величин. Изобразить на графике исходные значения и прямую линейного тренда. Можно решить данное задание в MS Excel.

номер варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	1.61	2.60	3.49	4.72	4.08	6.89	8.53	9.82
2	1.22	2.84	3.62	4.74	1.67	5.50	6.65	9.16
3	1.44	2.91	3.58	4.70	– 0.61	– 0.92	– 3.25	– 4.03
4	1.46	2.13	3.44	4.50	0.83	– 1.61	– 2.32	– 3.10
5	1.58	2.93	3.83	4.19	5.18	7.87	8.83	8.88
6	1.22	2.60	3.97	4.51	2.93	4.38	4.35	5.31
7	1.26	2.90	3.58	4.59	0.22	– 1.77	– 1.96	– 3.57
8	1.88	2.73	3.30	4.90	2.87	3.69	3.72	5.55
9	1.90	2.16	3.91	4.94	– 3.82	– 3.88	– 4.49	– 5.77
0	1.31	2.40	3.69	4.59	– 1.82	– 3.19	– 4.23	-5.53

13. Используя классическое определение вероятности, решить задачу:

0. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, делится на три.

1. Бросают два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, равна семи.

2. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что разность цифр, выпавших на гранях кубика, равна двум.

3. Бросают два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, равна восьми.

4. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что произведение цифр, выпавших на гранях кубика, равно восьми.

5. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, делится на четыре.

6. Бросают два игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, равна шести.

7. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что разность цифр, выпавших на гранях кубика, равна трем.

8. Бросают два игральных кубика. Найти вероятность того, что разность цифр, выпавших на гранях кубика, равна одному.

9. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что произведение цифр, выпавших на гранях кубика, равно шести.

14. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей решить задачи:

0. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены, соответственно с вероятностями 0,8; 0,9 и 0,6. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 1-й экзамен; б) ровно один экзамен; в) хотя бы один экзамен.

1. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 2-й экзамен; б) ровно два экзамена; в) хотя бы два экзамена.

2. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,6; 0,8 и 0,8. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 3-й экзамен; б) только 3-й экзамен; в) три экзамена.

3. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,5; 0,9 и 0,6. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) только 1-й и 3-й экзамены; б) хотя бы 1-й и 3-й экзамены в) не более двух экзаменов.

4. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,9; 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) только 1-й экзамен; б) не более одного экзамена; в) не сдаст ни одного экзамена.

5. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены, соответственно с вероятностями 0,7; 0,6 и 0,8. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 1-й экзамен; б) ровно один экзамен; в) хотя бы один экзамен.

6. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,6; 0,9 и 0,7. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 2-й экзамен; б) ровно два экзамена; в) хотя бы два экзамена.

7. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,5; 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) 3-й экзамен; б) только 3-й экзамен; в) три экзамена.

8. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,9; 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) только 1-й и 3-й экзамены; б) хотя бы 1-й и 3-й экзамены в) не более двух экзаменов.

9. В сессию студенты сдают 1-й, 2-й и 3-й экзамены соответственно с вероятностями 0,8; 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что данный студент сдаст: а) только 1-й экзамен; б) не более одного экзамена; в) не сдаст ни одного экзамена.

15. Используя локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа решить задачи:

0. В школах региона в среднем из каждых 100 первоклассников 80 имеют мобильные телефоны. Найти вероятность того, что из данных 400 первоклассников: а) точно 300 имеют телефоны; б) имеют телефоны от 300 до 350 детей?

1. В регионе в среднем из каждых 100 семей 70 имеют ЖК телевизоры. Какова вероятность того, что из данных 500 семей: а) точно 300 имеют ЖК телевизоры; б) имеют ЖК телевизоры от 300 до 350 семей?

2. В регионе по результатам проверок установлено, что в среднем каждое второе МП (малое предприятие) имеет нарушение финансовой дисциплины. Какова вероятность того, что из 1000 МП нарушают финансовую дисциплину: а) 450 МП; б) от 450 до 500 МП?

3. При перевозке в среднем повреждается каждое десятое изделие. Какова вероятность того, что при перевозке в партии из 900 изделий будет повреждено: а) ровно 80 изделий; б) от 80 до 100 изделий?

4. Известно, что в среднем одна четвертая часть пересаженных саженцев липы погибает. Какова вероятность того, что из 300 саженцев не приживутся: а) ровно 49 саженцев; б) от 9 до 49 саженцев?

5. В регионе в среднем из каждых 100 семей 30 имеют автомобили. Найти вероятность того, что из данных 1000 семей: а) точно 400 имеют автомобили; б) имеют автомобили от 300 до 400 семей?

6. В среднем из каждых 100 студентов 20 имеют спортивный разряд. Какова вероятность того, что из данных 800 студентов: а) точно 200 имеют разряд; б) имеют разряд от 100 до 200 студентов?

7. В регионе по результатам проверок установлено, что в среднем каждое четвертое МП (малое предприятие) имеет нарушение финансовой дисциплины. Какова вероятность того, что из 1500 МП нарушают финансовую дисциплину: а) 245 МП; б) от 45 до 245 МП?

8. Известно, что безубыточными являются лишь 90% инвестиционных проектов. Какова вероятность того, что из 450 проектов будут безубыточными: а) ровно 410 проектов; б) от 400 до 410 проектов?

9. Известно, что в среднем только половина претендентов на должность удовлетворяет квалификационным требованиям. Какова вероятность того, что из 400 претендентов требованиям удовлетворяет: а) ровно 220 человек; б) от 200 до 220 человек?

16. Свойства нормального распределения

0. Расфасовку сахара в партии по 1000 пакетов производит станок-автомат. Пусть вес пакета (в кг.) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=5$, $\sigma=0{,}1$. Определить долю пакетов, вес которых: а) более 5,3 кг; б) лежит между 4,8 и 5,2 кг.

1. Пусть сумма вклада (в тыс.р.) клиентов данного банка является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=15$, $\sigma=1{,}5$. Из 2000 клиентов определить долю тех, вклад которых: а) более 19,5 т.р.; б) лежит между 12 т.р. и 18 т.р.

2. Пусть цена обучения (в тыс.р.) в вузах региона является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=25$, $\sigma=1$. Из 50 вузов определить долю тех, обучение в которых: а) более 28 т.р.; б) лежит между 23 т.р. и 27 т.р.

3. Пусть доход (в млн.р.), который получают МП (малые предприятия) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=8, \sigma=1{,}5$. Из 500 МП определить долю тех, доходы которых: а) более 12,5 млн.р.; б) между 5 и 11 млн.р.

4. В течение часа станок-автомат штампует 600 заготовок для деталей. Диаметр заготовки (в мм.) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=52, \sigma=0{,}15$. Какова доля заготовок, диаметр которых: а) более 52,45 мм; б) между 51,7 и 52,3 мм.

5. Расфасовку сахара в партии по 200 мешков производит станок-автомат. Пусть вес мешка (в кг.) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=30$, $\sigma=0{,}5$. Определить долю пакетов, вес которых: а) более 31,5 кг; б) лежит между 29 и 31 кг.

6. Пусть сумма вклада (в тыс.р.) клиентов данного банка является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=50$, $\sigma=5$. Из 1000 клиентов определить долю тех, вклад которых: а) более 65 т.р.; б) лежит между 40 т.р. и 60 т.р.

7. Пусть цена обучения (в тыс.р.) в вузах региона является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=70$, $\sigma=3$. Из 100 вузов определить долю тех, обучение в которых: а) более 79 т.р.; б) лежит между 64 т.р. и 76 т.р.

8. Пусть доход (в млн.р.), который получают МП (малые предприятия) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=5, \sigma=1$. Из 300 МП определить долю тех, доходы которых: а) более 8 млн.р.; б) между 3 и 7 млн.р.

9. В течение часа станок-автомат штампует 2000 заготовок для деталей. Диаметр заготовки (в мм.) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=112, \sigma=0{,}2$. Какова доля заготовок, диаметр которых: а) более 112,5 мм; б) между 111,6 и 112,4 мм.

Решение типовых примеров

1.1. Сложить две матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

<u>Решение.</u> Складывать (вычитать) можно только матрицы одинакового размера, а т.к. размеры матрицы A – (3×2) и B – (3×2) (где 3 – число строк, 2 – число столбцов) совпадают, то для того, чтобы сложить две матрицы, надо к каждому элементу первой матрицы прибавить соответствующие элементы второй матрицы:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & -1+1\\ 0+3 & -4+0\\ 2+2 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -4\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A+B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

1.2. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ на число *3*.

<u>Решение.</u> Для того, чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-6)\\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -18\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $3A=\begin{pmatrix}6 & -18\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.3. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Умножение матриц A и B определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

$$C_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}=A_{\mathbf{m}\times k}\cdot B_{k\times\mathbf{n}}$$

Совпадают

Размерность результирующей матрицы

В нашем случае размер A – (2×3), а размер B – (3×3), поэтому умножение производить можно; размерность результирующей матрицы C – (2×3). Для того чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i–й строки и j–го столбца новой матрицы, нужно элементы i–й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j–го столбца второй матрицы и результат сложить, т.е. элементы матрицы C вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1(-1)+0\cdot 5+2(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u> 1) *Метод разложения по элементам строки или столбца*.

С помощью метода разложения по элементам строки (столбца) можно вычислить определители любого порядка. Строку (столбец), по элементам которого производится разложение, следует выбирать так, чтобы в ней содержалось наибольшее количество нулей.

Разложим определитель по элементам какой-либо строки или столбца. Например, выберем для разложения третий столбец:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{13} + 0\cdot A_{23} + 3\cdot A_{33} = 3\cdot A_{13} + 3\cdot A_{33}. \quad (1)$$

Здесь A_{13}, A_{23}, A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы a_{13}, a_{23}, a_{33} соответственно, которые в общем случае для элемента a_{ij} находятся по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \quad (2)$$

Минор M_{ij} – определитель, получаемый из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Например, для нахождения M_{13} вычеркивается 1-я строка и 3-йстолбец:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6.$$

Аналогично определяем M_{23}, вычеркивая 2-ю строку и 3-й столбец.

M_{33} получается вычеркиванием 3-й строки и 3-го столбца:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 3.$$

Тогда алгебраические дополнения (по формуле (2)) будут равны:

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot 6 = 6,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot 3 = 3.$

Подставляя найденные значения в (1), найдем определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27.

2) *Метод Саррюса*.

С помощью метода Саррюса можно вычислять только определители третьего порядка.

Сначала к исходному определителю справа приписываем первый и второй столбцы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Тогда определитель равен сумме произведений элементов, стоящих на главной диагонали и диагоналях, параллельных ей, взятых со своими знаками, и произведению элементов побочной диагонали и параллельных ей диагоналях, взятых с противоположными знаками.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 27.$$

$- \quad - \quad -+ \quad + \quad +$

Ответ: 27.

3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

1) *Метод Крамера*.

Выпишем определитель матрицы системы А:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

(Так как определитель не равен 0, то метод Крамера использовать можно, и система имеет единственное решение.)

Определитель Δ_1 получаем из определителя Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов B, а остальные столбцы остаются прежними:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 10 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

Аналогично, заменяя в исходном определителе второй, а затем третий столбцы на столбец свободных членов, получим соответственно Δ_2 и Δ_3.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 12.$$

Теперь воспользуемся формулой Крамера и найдем все переменные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3.$$

2) *Метод Гаусса*.

Метод Гаусса – это универсальный метод решения систем линейных уравнений. Он заключается в последовательном исключении переменных.

Составим расширенную матрицу системы, которая включает в себя матрицу системы и столбец свободных членов.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Произведем элементарные преобразования со строками матрицы, приведя ее к треугольному виду, т.е. к матрице, в которой все элементы, ниже главной диагонали равны нулю (при этом диагональные элементы не равны нулю).

Шаг 1. Если в матрице элемент $a_{11} = 0$, то перестановкой строк нужно добиться того, чтобы элемент $a_{11} \neq 0$. В нашем примере $a_{11} \neq 0$.

Сначала обнулим элементы первого столбца ниже главной диагонали. Для этого поочередно умножим элементы первой строки на числа $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-2}{1} = 2$ и $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{3}{1} = -3$, и прибавим соответственно к элементам второй и третьей строк:

$$\begin{array}{c}2\cdot\\ +\downarrow\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 8\\ -2 & 3 & -3 & -5\\ 3 & -4 & 5 & 10\end{array}\right)\begin{array}{c}-3\\ \downarrow\end{array} + \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & 7 & -1 & 11\\ 0 & -10 & 2 & -14\end{array}\right)$$

Шаг 2. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$, то обнулим элемент второго столбца ниже главной диагонали. Для этого умножим вторую строку на число $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{-10}{7} = \frac{10}{7}$ и прибавим к третьей строке:

$$\frac{10}{7}\times\downarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & 7 & -1 & 11\\ 0 & -10 & 2 & -14\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 8\\ 0 & 7 & -1 & 11\\ 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{12}{7}\end{array}\right).$$

Полученная матрица имеет треугольный вид.

Т.о. получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8\\ 7x_2 - x_3 = 11\\ \frac{4}{7}x_3 = \frac{12}{7}\end{cases}$$

Откуда найдем из последнего уравнения $x_3 = 3$; из второго $x_2 = \frac{11 + x_3}{7} = 2$; из первого $x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: $A(5;\ 4)$ и $B(2;\ -3)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ имеет вид: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Уравнение прямой, проходящей через заданные точки:

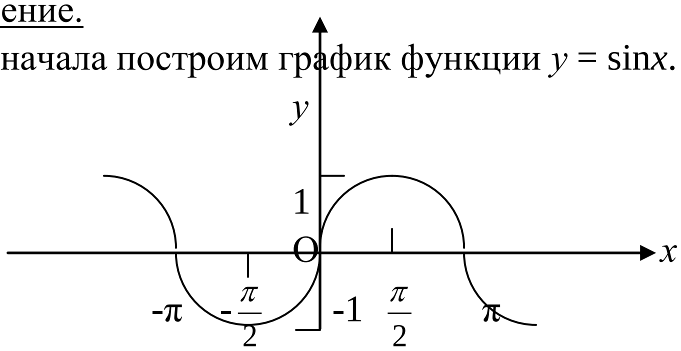
$$\frac{y-(-3)}{4-(-3)}=\frac{x-2}{5-2} \Rightarrow \frac{y+3}{7}=\frac{x-2}{3} \Rightarrow 3(y+3)=7(x-2) \Rightarrow 7x-3y=5.$$

Ответ: уравнение прямой $7x-3y=5$

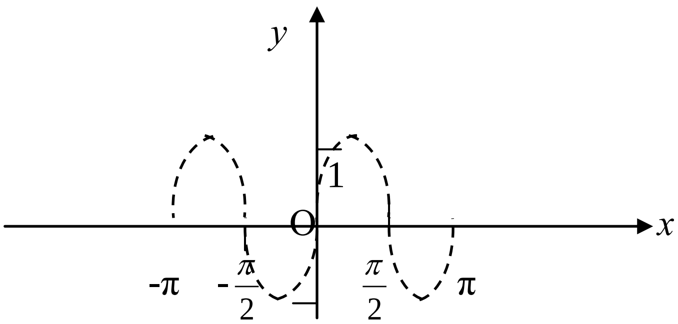
5. Построить график функции $y = -4\cdot\sin 2x + 1$ (с помощью преобразования графиков основных элементарных функций).

Решение.

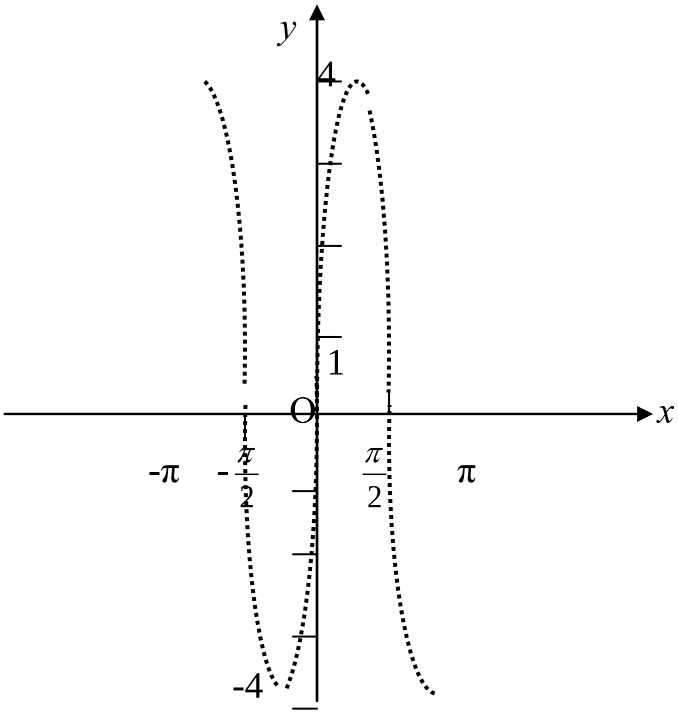
1) Сначала построим график функции $y = \sin x$.



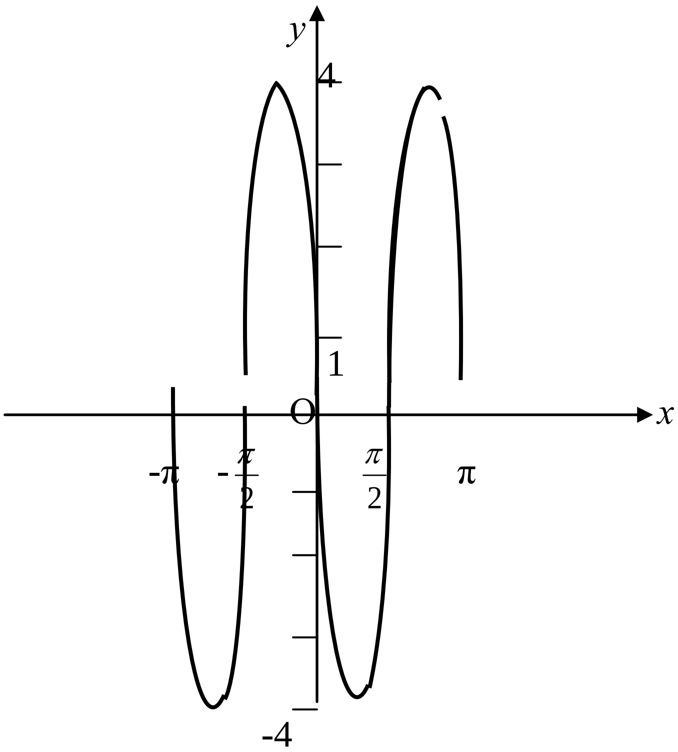
2) Сжатием графика в 2 раза вдоль оси Ox получаем график функции $y=\sin 2x$.



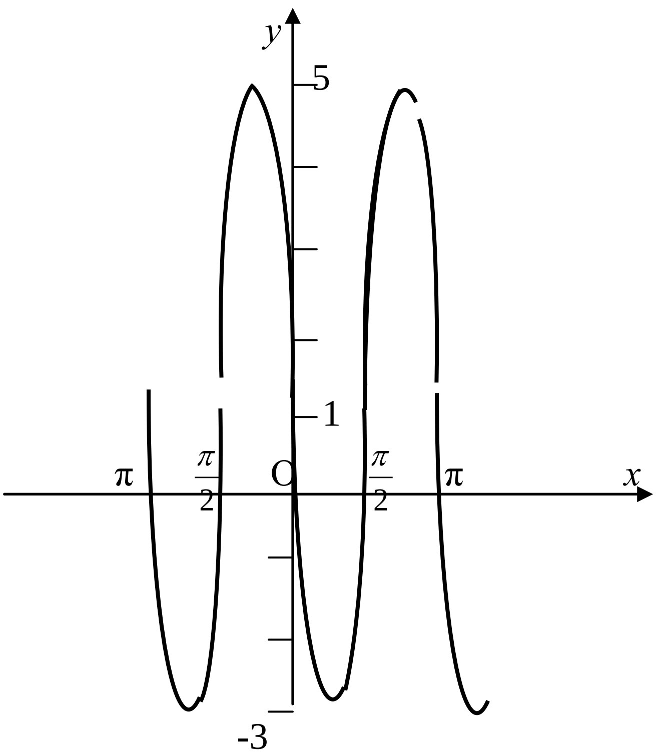
3) Растянем график $y = \sin 2x$ вдоль оси Oy в 4 раза и получим график функции $y = 4\sin 2x$.



4) Зеркально отобразив график относительно оси Ox, получим $y = -4\sin 2x$.



5) Сдвинем полученный график на 1 единицу вверх параллельно оси Oy. Таким образом, график функции $y = -4\cdot\sin 2x + 1$ имеет вид:



6. Значение функции известно в точках a и b. С помощью линейной интерполяции найти значение функции в точке c.

a	*f(a)*	*b*	*f(b)*	*c*
2	2,42	2,04	2,88	2,008

Решение. Формула линейного интерполирования:

$f(c) \approx f(a) + \dfrac{c-a}{h}\Delta f$, где $h = b - a$, $\Delta f = f(b) - f(a)$.

Подставляя в формулу известные значения из таблицы, получим:

$f(2{,}008) \approx 2{,}42 + \dfrac{2{,}008-2}{0{,}04}\cdot 0{,}46 = 2{,}512.$

Ответ. $f(2{,}008) \approx 2{,}512$.

7.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-1}{2x+1}$.

Решение. Так как под знаком предела стоит непрерывная в точке x=1 функция, то, используя определение непрерывной функции, имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{2x+1}=\frac{1^2+1-1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

7.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ при x=1 не определена («неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$»), и, следовательно, не является непрерывной в этой точке. Но при всех других значениях x

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Полученная функция определена и непрерывна в точке x=1, поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

7.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x}{2x^5+x^2-1}$

Решение. Здесь требуется найти предел отношения двух бесконечно больших величин. О таком пределе заранее ничего определенного сказать нельзя («неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$»). Преобразуем функцию под знаком предела, вынося за скобки x в старшей степени, и используем свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин. Тогда имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x}{2x^5+x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^5\left(2+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\frac{0+0}{2+0-0}=\frac{0}{2}=0.$$

Ответ: 0.

8. Найти производную функции:

а) $y = x + 2$ б) $y = (2x - 3)(3x + 2)$ в) $y = \dfrac{3+5x}{1-3x}$

г) $y = 5 \cdot \sqrt[3]{x^5}$ д) $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^6$ е) $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

ж) $y = \sqrt{\sin 2x}$ з) $y = \mathrm{tg}(3x^2 - 1)$ и) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$.

Справочный материал

Правила дифференцирования:

1) $c' = 0$;
2) $x' = 1$;
3) $(u + v)' = u' + v'$;
4) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
5) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
6) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$;
7) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Производная сложной функции

Если y есть функция от u: $y = f(u)$, где u в свою очередь есть функция от аргумента x: $u = \varphi(x)$, т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x (функцией от функции): $y = f(\varphi(x))$.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y'_x = y'_u \, u'_x$$

Таблица производных:

№	Функция y	Производная y'
1	C	0
2	x	1
3	u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4	$\sqrt{u}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
6	e^u	$e^u \cdot u'$

7	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
9	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
10	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
11	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
12	$\mathrm{tg}\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13	$\mathrm{ctg}\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16	$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17	$\mathrm{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Решение. а) $y = x + 2$

Используя правило дифференцирования (3) и формулы (1), (2), имеем:

$y' = (x + 2)' = (x)' + (2)' = 1 + 0 = 1.$

б). $y = (2x - 3)(3x + 2)$

$y' = ((2x - 3)(3x + 2))' = (2x - 3)' \cdot (3x + 2) + (2x - 3) \cdot (3x + 2)' = 2 \cdot (3x + 2) + (2x - 3) \cdot 3 = 12x - 5$. Здесь мы использовали правило дифференцирования (5).

в) $y = \frac{3+5x}{1-3x}$

Используя правило дифференцирования (7), имеем

$$y' = \left(\frac{3+5x}{1-3x}\right)' = \frac{(3+5x)'(1-3x)-(3+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{5(1-3x)-(3+5x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{14}{(1-3x)^2}$$

г) $y = 5 \cdot \sqrt[3]{x^5}$

Найдем производную, используя правило дифференцирования (4) и формулу (3).

$$y' = (5 \cdot \sqrt[3]{x^5})' = \left(5 \cdot x^{\frac{5}{3}}\right)' = 5\left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = 5 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{25}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{25 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{3}.$$

д) $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^6$

Пусть $x^3 - 2x^2 + 5 = u$, тогда $y = u^6$. По формуле (3), получим $y' = (u^6)' = 6u^5 \cdot u' = 6(x^3 - 2x^2 + 5)^5 \cdot (x^3 - 2x^2 + 5)' = 6(x^3 - 2x^2 + 5)^5 \cdot (3x^2 - 4x)$.

е) $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

По правилу дифференцирования (7) и формуле (10) получим:

$$y' = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)' = \frac{(1+\sin x)'(1-\sin x)-(1+\sin x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

ж) $y = \sqrt{\sin 2x}$

Используя формулы (4) и (10), имеем:

$$y' = (\sqrt{\sin 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}} \cdot (\sin 2x)' = \frac{\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} \cdot (2x)' = \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

з) $y = \mathrm{tg}(3x^2 - 1)$.

По формуле (12) имеем:

$$y' = (\mathrm{tg}(3x^2-1))' = \frac{1}{\cos^2(3x^2-1)} \cdot (3x^2-1)' = \frac{6x}{\cos^2(3x^2-1)}.$$

и) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

По формуле (8), а также (3), (4), (5) имеем:

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right).$$

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x$ на отрезке [0, 5].

Решение. Сначала найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 12$.

Затем найдем критические точки, т.е. точки, в которых $y' = 0$ или не существует: $3x^2 - 12 = 0$, откуда критические точки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Точка $x_1 = -2$ не принадлежит отрезку [0, 5], поэтому мы исключаем ее из рассмотрения.

Вычислим значения функции в критической точке $x_2 = 2$ и на концах интервала и выберем из них наибольшее и наименьшее: $y(2) = -16$, $y(0) = 0$, $y(5) = 65$.

Ответ: Наибольшее значение функции на отрезке [0, 5] равно 65, наименьшее значение равно –16.

10. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ и построить ее график.

Решение. а) Найдем область определения функции.

Областью определения этой функции является вся действительная ось, за исключением двух точек $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, в которых имеет место разрыв (знаменатель $x^2 - 4 = 0$). Т.о. область определения: $(-\infty; -2)\cup(-2; 2)\cup(2; +\infty)$

б) Исследуем функцию на четность-нечетность.

Функция четная, т.к. $y(-x) = \dfrac{(-x)^2+4}{(-x)^2-4} = \dfrac{x^2+4}{x^2-4} = y(x)$. Четность функции определяет симметрию ее графика относительно оси Oy.

в) Найдем вертикальные асимптоты графика функции.

Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на границе ее области определения. Точками разрыва являются $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Вычислим пределы функции в окрестностях этих точек.

Предел слева $\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$, предел справа $\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.

Аналогично $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = +\infty$.

Следовательно, прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами функции.

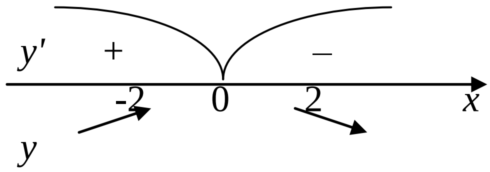
г) Найдем горизонтальные или наклонные асимптоты графика функции.

Для этого вычислим пределы: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)} = 0$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = 1$. Откуда (по формуле $y = kx + b$) заключаем, что уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид: $y = 0x + 1$, т.е. $y = 1$.

д) Найдем экстремумы и интервалы монотонности.

Производная заданной функции $y' = \dfrac{-16x}{(x^2-4)^2}$ равна нулю ($y' = 0$) при $x=0$ и не существует при $x = \pm2$. Но критической является только точка $x=0$ (т.к. значения $x = \pm2$ не входят в область определения функции). Поскольку при $x < 0$ $f'(x) > 0$, а при $x > 0$ $f'(x) < 0$, то $x=0$ – точка максимума функции и $f_{\max}(x)= \dfrac{0+4}{0-4} = -1$.

На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0)$ функция возрастает , на интервалах $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ –. убывает

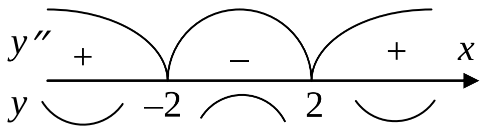


е) Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.

Для этого надо найти вторую производную функции $y'' = \dfrac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.

Видно, что уравнение $y''=0$ не имеет действительных корней, и это исключает существование у графика точек перегиба. Вместе с тем по корням знаменателя (–2 и 2) можно установить, что при переходе через эти значения x знаки y'' меняются.

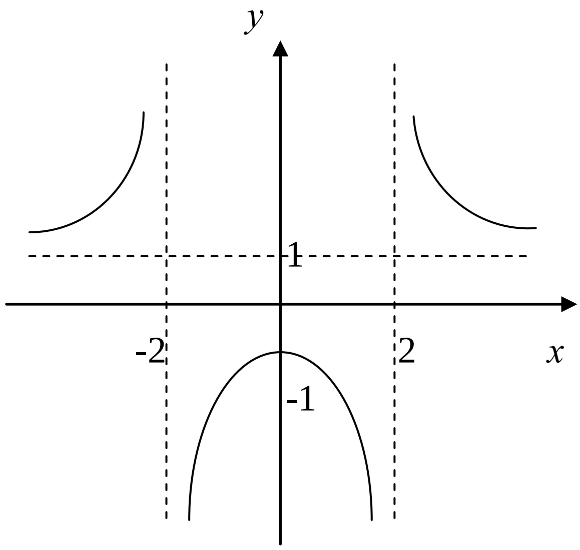
На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ функция выпукла вниз, на интервале $(-2; 2)$ – выпукла вверх.



ж) Найдем точки пересечения с осями координат.

$f(0) = \dfrac{0+4}{0-4} = -1$, т.е. точка пересечения с осью ординат (0; -1). Уравнение $f(x) = 0$, (т.е. $\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = 0$), решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

На основании полученных данных построим график заданной функции.



11. Вычислить приближенно, используя дифференциал функции $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 0{,}03\right)$.

Решение. Для приближенных вычислений воспользуемся формулой:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Положим $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Найдем производную $f'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Тогда $\operatorname{ctg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{ctg} x - \dfrac{\Delta x}{\sin^2 x}$. Учитывая, что $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 0,03\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + (-0,03)\right)$, возьмем $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $\Delta x = -0,03$.

Тогда:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 0,03\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + (-0,03)\right) \approx \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{-0,03}{\sin^2 \dfrac{\pi}{4}} = 1 + \frac{0,03}{1/2} = 1,06$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 0,03\right) \approx 1,06$

12. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу в случае линейной зависимости величин ($y = ax + b$) для функции, заданной следующей таблицей:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,7	1,7	1,6	3,1	3,6	4,6

Изобразить на графике исходные значения и прямую.

Решение. Для нахождения прямой, наилучшим образом согласованной с опытными данными, достаточно решить *систему нормальных уравнений*, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

Где $\boldsymbol{n}$ – число пар наблюдений (x; y).

Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{x_i y_i}$	$\boldsymbol{x_i^2}$
0,5	0,7	0,35	0,25
1,0	1,7	1,70	1,00
1,5	1,6	2,40	2,25
2,0	3,1	6,20	4,00
2,5	3,6	9,00	6,25
3,0	4,6	13,80	9,00

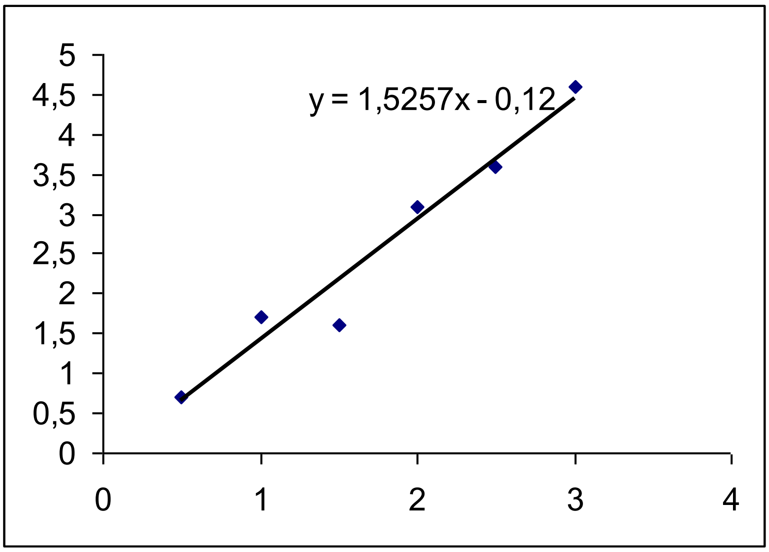
$\sum$ **10,5**	**15,3**	**33,45**	**22,75**

Составим и решим систему нормальных уравнений, которая будет иметь вид:

$$\begin{cases} 22,75a + 10,5b = 33,45; \\ 10,5a + 6b = 15,3. \end{cases}$$

Решение системы a = 1,5257, b = –0,12 дает искомую зависимость $y = 1,5257x - 0,12$.

Изобразим на графике эмпирические значения и регрессионную прямую (линию тренда):



Ответ: Эмпирическая формула для данной функции имеет вид
$y = 1,5257x - 0,12$.

13. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма цифр, выпавших на гранях кубика, будет четной и при этом хотя бы на одной из них появится цифра пять.

Решение. Каждый из шести исходов бросания одного кубика может сочетаться с каждым из шести исходов бросания другого кубика. Таким образом, общее число элементарных исходов испытания равно $6 \times 6 = 36$. Благоприятствующими интересующему нас событию являются следующие пять исходов: $(5;1), (1;5), (5;3), (3;5), (5;5)$. Следовательно, искомая вероятность равна $P = 5/36$.

14. Пользователь разыскивает нужную информацию в трех базах данных. Вероятности того, что информация содержится в $1-$й, $2-$й, $3-$й базе, соответственно равны: $0,7$; $0,8$; $0,9$. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, найти вероятность того, что информация содержится: а) только в одной базе; б) хотя бы в двух базах; в) только во 2-й и 3-й базах.

Решение

а). Введем обозначения: событие $A_i -$информация содержится в $i-$й базе; событие $\overline{A}_i -$информация не содержится в $i-$й базе; событие $B-$информация содержится только в одной базе; событие $C-$информация содержится хотя бы в двух базах; событие $D-$информация содержится только во 2-й и 3-й базах.

Вероятности событий $\overline{A}_i$ равны $P\left(\overline{A}_i\right)=1-P\left(A_i\right)$.

Рассмотрим событие B. Информация содержится только в одной базе тогда, когда:

она содержится в первой и не содержится во второй и третьей

или

она содержится во второй и не содержится в первой и третьей,

или

она содержится в третьей и не содержится во первой и второй.

Тогда событие B можно представить так $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2\overline{A}_3$. Здесь первое слагаемое $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ – это произведение наступившего события A_1 и двух других, не наступивших событий $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$. Аналогично определяются второе и третье слагаемое.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим:

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1A_2\overline{A}_3)=$$

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=$$

$$=0,7\cdot 0,2\cdot 0,1+0,3\cdot 0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=0,092.$$

б) Событие C наступает тогда, когда не наступает одно из двух событий:

информация не содержится ни в одной из баз (событие $\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$);

информация содержится только в одной базе (событие B).

Тогда

$$P(C)=1-P\left(B\right)-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=1-0,092-0,3\cdot 0,2\cdot 0,1=0,902.$$

в) Событие легко выписывается через произведение вероятностей: $D=\overline{A}_1A_2A_3$, тогда

$$P\left(D\right)=P\left(\overline{A}_1A_2A_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(A_3\right)=0,3\cdot 0,8\cdot 0,9=0,216.$$

15. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что в 400 независимых испытаниях событие появится: а) точно 320 раз; б) не менее 320 раз и не более 336 раз.

Решение

а) По условию $n = 400,\ \ k = 320,\ \ p = 0{,}8,\ q = 1 - p = 0{,}2$. Используем локальную теорему Муавра-Лапласа: $P_n(k) = \phi(x)\big/\sqrt{npq}$, $x = (k - np)\big/\sqrt{npq}$. Найдем $x = (320 - 400 \cdot 0{,}8)\big/\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 0$. По таблице для функции Гаусса:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

определим значение $\phi(0) = 0{,}3989$. Искомая вероятность $P_{400}(70) = 0{,}3989/8 = 0{,}0499.$

б) По условию $n = 400,\ k_1 = 320,\ k_2 = 336,\ \ p = 0{,}8,\ q = 1 - p = 0{,}2$. Используем интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $a = (k_1 - np)\big/\sqrt{npq}$, $b = (k_2 - np)\big/\sqrt{npq}$, Φ – интеграл Лапласа.

В нашем случае $a = 0$ и $b = (336 - 400 \cdot 0{,}8)\big/\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 2.$ По таблице определим значение $\Phi(2) = 0{,}4772$ и $\Phi(0) = 0$. Следовательно, $P_{400}(320; 336) = 0{,}4772$.

16. Средний рост 1000 солдат равен $1{,}8\,м$. Предположим, что рост является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a = 1{,}8$, $\sigma = 0{,}05$. Определить число солдат в группе, рост которых: а) больше $1{,}9\,м$; б) между $1{,}75\,м$ и $1{,}85\,м$.

Решение.

а) Для решения воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 2;\ a = 1{,}8;\ \sigma = 0{,}05$, получаем:

$$P(X < 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 - 1{,}9}{0{,}05}\right) = 1 - \Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}9544$.

Следовательно, $P(X < 1{,}9) = 0{,}0456.$ Таким образом, доля солдат с ростом выше $1{,}9\,м$ равна 4,56%. То есть, среди 1000 солдат ожидаемое число солдат с ростом выше $1{,}9\,м$ будет равно $0{,}0456 \cdot 1000 \approx 46.$

б) Для решения воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 1,75;\ \beta = 1,85;\ a = 1,8;\ \sigma = 0,05$, получаем:

$$P(1,75 < X < 1,85) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1).$$

По таблице находим $\Phi(1) = 0,3413$.

Следовательно, $P(1,75 < X < 1,85) = 0,6826$. Таким образом, доля солдат с ростом от 1,75 до 1,85*м* равна 68,26%. Таким образом, среди 1000 солдат ожидаемое число солдат с интересующим нас ростом будет равно $0,6826 \cdot 1000 \approx 683$.

Литература

Основная

1. Павлюченко, Ю.В. Высшая математика для гуманитарных направлений : учеб. пособие для бакалавров / Ю.В. Павлюченко, Н.Ш. Хассан, В.И. Михеев ; Российский Университет Дружбы народов; под ред. Ю.В. Павлюченко. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2013. – 238 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 12-е изд. – М. : Юрайт, 2013. – 480с.

Дополнительная

1. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004 г. – 656 с.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: в 2-х частях. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 224с.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
4. Справочник по высшей математике / Под ред. М.Я.Выгодского. – М.: Наука, 1966 г.