

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4.
ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С МНОГОКРАТНЫМИ
НАБЛЮДЕНИЯМИ**

Задание для самостоятельной работы. Цифровым измерителем иммитанса Е7-14 проводились прямые многократные измерения сопротивления магазина сопротивлений марки Р33, номинальное значение которого равно 0,1 Ом. Измерения проводились в диапазоне рабочих температур измерителя иммитанса.

Получены результаты измерения R_x , мОм.

Проведенные измерения характеризуются неисключенной систематической погрешностью, задаваемой пределом допускаемого значения:

основной погрешности измерения измерителя Е7-14, определяемой по формуле (для диапазона измерения от 0,1 ... 1000 мОм)

$$\theta_{осн} = 10^{-3}(1 + Q)R + 3 \cdot 10^{-4} R_k,$$

где Q – добротность катушки сопротивления (для данного магазина сопротивлений добротность $Q = 0$); R_k – конечное значение диапазона, Ом;

дополнительной погрешности измерения в диапазоне рабочих температур, которая задана формулой

$$\theta_{доп} = k\theta_{осн}, \quad (4.1)$$

где k – множитель, определяемый по таблице 4.1.

Таблица 4.1

Значение множителя k для расчета дополнительной погрешности Е7-14

Вторая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Множитель k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,2

Для устранения влияния соединительных проводов и переходных сопротивлений контактов был проведен ряд измерений при нулевом значении магазина сопротивлений. Получены результаты измерения R_0 , мОм.

Требуется провести обработку результатов наблюдений:

- определить и исключить систематические погрешности;
- для исправленных результатов наблюдений вычислить среднее арифметическое значение, оценку СКО результатов наблюдений и оценку СКО среднего арифметического;
- проверить результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов;
- проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;
- вычислить доверительные (интервальные) границы случайной погрешности Δ результата измерения;
- вычислить границы неисключенной систематической погрешности θ ;

– вычислить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения и записать результат измерения.

Уровень значимости проверки гипотез принять по таблице 4.5, доверительные границы при расчете погрешностей $P_0 = 0,95$.

Исходные данные по вариантам приведены в таблицах 4.2 – 4.4.

Таблица 4.2

		Исходные данные									
		Первая цифра варианта									
Результаты измерения R_i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		145,36	145,37	145,38	145,38	145,36	145,37	145,36	145,37	145,36	145,37
2		145,38	145,37	145,38	145,39	145,37	145,38	145,37	145,38	145,36	145,38
3		145,39	145,38	145,39	145,39	145,38	145,39	145,38	145,39	145,37	145,39
4		145,39	145,40	145,40	145,40	145,39	145,40	145,38	145,40	145,38	145,39
5		145,39	145,41	145,41	145,40	145,40	145,40	145,39	145,40	145,39	145,39
6		145,40	145,42	145,41	145,41	145,40	145,41	145,40	145,41	145,40	145,40
7		145,41	145,42	145,42	145,41	145,41	145,42	145,41	145,42	145,41	145,41

Таблица 4.3

		Исходные данные									
		Вторая цифра варианта									
Результаты измерения		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7		145,43	145,44	145,45	145,43	145,44	145,45	145,43	145,44	145,45	145,43
8		145,43	145,44	145,45	145,44	145,45	145,46	145,44	145,46	145,46	145,45
9		145,44	145,45	145,46	145,45	145,46	145,46	145,45	145,47	145,46	145,45
10		145,45	145,46	145,46	145,46	145,46	145,47	145,46	145,47	145,47	145,46
11		145,46	145,47	145,47	145,47	145,47	145,48	145,47	145,48	145,48	145,47
12		145,46	145,48	145,47	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48	145,48
13		145,47	145,48	145,48	145,48	145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49
14		145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49
15		145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49
16		145,48	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49	145,49

Таблица 4.4

		Исходные данные									
		Вторая цифра варианта									
Результаты измерения R_{0i}		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		45,28	45,22	45,24	45,23	45,25	45,15	45,13	45,14	45,13	45,17
		45,30	45,28	45,28	45,26	45,28	45,18	45,16	45,18	45,19	45,11
		45,31	45,33	45,31	45,32	45,32	45,22	45,22	45,21	45,23	45,12
		45,32	45,34	45,33	45,36	45,35	45,25	45,26	45,23	45,24	45,14
		45,35	45,35	45,34	45,37	45,37	45,27	45,27	45,24	45,25	45,15

Таблица 4.5

		Исходные данные									
Первая цифра варианта		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1		0,02	0,1	0,2	0,02	0,1	0,2	0,02	0,1	0,2	0,02
Вторая цифра варианта		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_2		0,02	0,01	0,05	0,02	0,01	0,05	0,02	0,01	0,05	0,02

Рассмотрим методику решение задачи на примере.

Исходные данные:

– результаты измерения R_i : 145,44; 145,36; 145,43; 145,38; 145,44; 145,42; 45,41; 145,39; 145,40; 145,41; 145,45; 145,43; 145,46; 145,37; 145,48; 145,48 мОм.

– результаты измерения R_{0i} : 45,30; 45,29; 45,28; 45,31 45,26 мОм.

Решение:

1. **Определение систематической погрешности.** Систематическая погрешность измерения сопротивления состоит из трех составляющих, обусловленных:

ненулевым значением сопротивления соединительных проводов и переходных контактов зажимов используемых средств измерений;

основной и дополнительной погрешностями измерителя иммитанса Е7–14.

Первая из них может быть оценена исходя из данных измерений нулевого сопротивления магазина. Полученный ряд данных характеризуется средним арифметическим значением и оценкой его СКО:

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{0i}; \quad (4.2)$$

$$S_{R_0} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{0i} - \bar{R}_0)^2}, \quad (4.3)$$

где n – количество измерений; \bar{R}_0 – среднее арифметическое значение нулевого сопротивления магазина, мОм; S_{R_0} – оценка СКО нулевого сопротивления магазина, мОм.

Для удобства расчетов составим таблицу 4.6.

Таблица 4.6

Расчет среднего арифметического значения и оценки СКО ненулевого сопротивления соединительных проводов и переходных контактов зажимов используемых средств измерений

R_{0i}	$R_{0i} - \bar{R}_0$	$(R_{0i} - \bar{R}_0)^2$
45,26	-0,028	0,000784
45,28	-0,008	0,000064
45,29	0,002	0,000004
45,30	0,012	0,000144
45,31	0,022	0,000484
$\Sigma R_{0i} = 226,44$		$\Sigma (R_{0i} - \bar{R}_0)^2 = 0,0148$

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 R_{0i} = 45,288 \text{ мОм};$$

$$S_{R_0} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \sum_{i=1}^5 (R_{0i} - 45,288)^2} = 0,0344 \text{ мОм}.$$

Сопротивление проводов постоянно присутствует в результатах измерений и по своей сути является систематической погрешностью, которая может быть исключена из результатов измерений путем введения поправки, равной $\theta = -45,288$ мОм.

После введения поправки получается исправленный ряд значений сопротивления R_{ui} : 100,072; 100,082; 100,092; 100,102; 100,112; 100,122; 100,122; 100,132; 100,142; 100,142; 100,152; 100,152; 100,162; 100,172; 100,192; 100,192 мОм.

2. **Определение среднего арифметического и оценки СКО исправленных результатов и среднего арифметического.** Среднее арифметическое значение сопротивления и его оценку его СКО определяем по формуле

$$\bar{R}_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{ui}; \quad (4.4)$$

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{ui} - \bar{R}_u)^2}. \quad (4.5)$$

где R_{ui} – значений сопротивления исправленного ряда, мОм; S_{R_u} – оценка СКО среднего арифметического значения сопротивления, мОм.

Для удобства расчетов составим таблицу 4.7.

Таблица 4.7

Расчет среднего арифметического значения и оценки СКО сопротивления магазина сопротивлений (по исправленному ряду значений)

R_{ui}	$R_{ui} - \bar{R}_u$	$(R_{ui} - \bar{R}_u)^2$
100,072	-0,058	0,003364
100,082	-0,048	0,002304
100,092	-0,038	0,001444
100,102	-0,028	0,000784
100,112	-0,018	0,000324
100,122	-0,008	0,000064
100,122	-0,008	0,000064
100,132	0,002	0,000004
100,142	0,012	0,000144
100,142	0,012	0,000144
100,152	0,022	0,000484
100,152	0,022	0,000484
100,162	0,032	0,001024
100,172	0,042	0,001764
100,192	0,062	0,003844
100,192	0,062	0,003844
$\Sigma R_{ui} = 1602,14$		$\Sigma (R_{ui} - \bar{R}_u)^2 = 0,02008$

$$\bar{R}_u = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} R_{ui} = 100,1339 \text{ мОм};$$

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{16 \cdot (16-1)} \sum_{i=1}^{16} (R_{ui} - 100,1339)^2} = 0,009148 \text{ мОм}.$$

Оценка СКО результатов измерений определяем по формуле

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_{ui} - \bar{R}_u)^2}; \quad (4.6)$$

$$S_{R_u} = \sqrt{\frac{1}{16-1} \sum_{i=1}^{16} (R_{ui} - 100,1339)^2} = 0,03543 \text{ мОм}.$$

3. **Проверка результатов измерений на наличие грубых погрешностей.** Для проверки результатов измерений на наличие грубых погрешностей используем критерий Романовского.

Вычисляем отношение

$$\left| \frac{\bar{R}_u - R_{ui}}{S_{R_u}} \right| = \beta \quad (4.7)$$

и полученное значение β сравниваем с теоретическим β_r при заданном уровне значимости q (см. табл. 4.8).

Таблица 4.8

Уровень значимости q	Число измерений, n						
	4	5	8	10	12	15	20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,45	2,62

Если полученное значение $\beta \geq \beta_r$, результат измерения исключают и проверяют следующий и т.д. По новой выборке заново проводят все расчеты.

Для нашего примера при уровне значимости $q = 1 - P = 0,01$ и $n = 16$, табличный коэффициент $\beta_r = 2,64$.

Проверим крайние значения результатов измерения R_{max} и R_{min}

$$\frac{|100,1339 - 100,072|}{0,03543} = 1,75 < 2,64;$$

$$\frac{|100,1339 - 100,192|}{0,03543} = 1,64 < 2,64,$$

т.е. все результаты измерений приняты.

4. Проверка гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению. Для проверки гипотезы используем составной критерий, т.к. число измерений $n = 16$.

Определяем статистику по формуле

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |R_{ii} - \bar{R}_u|}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (R_{ii} - \bar{R}_u)^2}}, \quad (4.8)$$

квантили (квантиль – абсцисса, соответствующая определенной вероятности) распределения которых приведены в табл. 4.9.

Таблица 4.9

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,1}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6905
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256

51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291
----	--------	--------	--------	--------	--------	--------

$$d = \frac{0,474}{\sqrt{16 \cdot 0,02008}} = 0,8362$$

Если при данном числе измерений n и выбранном уровне значимости q_1 соблюдается условие

$$d_{1-0,5q_1} < d \leq d_{0,5q_1}, \quad (4.9)$$

то гипотеза о нормальности распределения на основании первого критерия принимается, если – нет, то отвергается.

Гипотеза по второму критерию принимается, если не более m разностей $|R_{ii} - \bar{R}_u|$ измерений превышают уровень

$$t_p \cdot S_{R_u}, \quad (4.10)$$

t_p – квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения, определяемая по табл. 1 или 2 (см. Приложение). Величина P находится при заданном уровне значимости q_2 по данным табл. 4.10

Таблица 4.10

n	m	P при уровне значимости q , равном		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11 – 14	1	0,99	0,98	0,97
15 – 20	1	0,99	0,99	0,98
21 – 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
23 – 27	2	0,98	0,98	0,97
28 – 32	2	0,99	0,98	0,97
33 – 35	2	0,99	0,98	0,98
36 – 49	2	0,99	0,99	0,98

Для того, что бы обеспечить уровень значимости не ниже $q = 0,05$, принимаем $q_1 = 0,02$. Из табл. 4.10 для $n = 16$ находим квантили $d_{0,01} = 0,9137$ и $d_{0,99} = 0,6829$.

Сравнение статистики d с квантилями показывает, что $0,6829 < d = 0,8362 < 0,9137$. Это означает, что в соответствии с первым критерием (при уровне значимости 0,02) результаты измерений распределены по нормальному закону.

Для проверки нормальности распределения в соответствии со вторым критерием необходимо оценить допустимое число абсолютных разностей результатов измерений $|R_{ii} - \bar{R}_u|$ при заданном уровне значимости, превысившем уровень $t_p \cdot S_R$. При $q_2 = 0,02$, $n = 16$ находим по табл. 6.10 $P = 0,99$, $m = 1$. Находим значение квантили $\Phi(t_p) = 0,5 \cdot (1 + P)$, в нашем случае $\Phi(t_p) = 0,5 \cdot (1 + 0,99) = 0,995$, следовательно по табл. 2 (см. Приложение) $t_p = 2,575$ и значение произведения $t_p \cdot S_R = 2,575 \cdot 0,03543 = 0,09123$. Анализ результатов измерений, приведенных в таблице 4.7, показывает, что ни один из

результатов не превышает 0,09123; поэтому распределение результатов наблюдений можно считать близким к нормальному в соответствии со вторым критерием при уровне значимости 0,02.

Таким образом, оба критерия говорят о том, что распределение результатов измерений с уровнем значимости $q \leq q_1 + q_2 = 0,04$ можно признать нормальным.

5. Определение доверительных границ случайной погрешности.

Случайную составляющую погрешности измерений определяем по формуле

$$\Delta_{0,95}^0(\bar{R}_n) = t_p S_{R_n}; \quad (4.11)$$

где t_p – величина, определяемая по таблице 1 (см. приложение), для $P_d = 0,95$ и $k = 15$, это значение $t_p = 2,131$.

$$\Delta_{0,95}^0(\bar{R}_n) = 2,131 \cdot 0,009148 = 0,0195 \text{ мОм.}$$

Доверительный интервал погрешности измерения сопротивления проводов определяем по формуле

$$\Delta_{0,95}^0(\bar{R}_0) = t_p S_{R_0}, \quad (4.12)$$

где t_p – величина определяемая по таблице 1 (см. приложение), для $P_d = 0,95$ и $k = 4$, это значение $t_p = 2,776$.

$$\Delta_{0,95}^0(\bar{R}_0) = 2,776 \cdot 0,034409 = 0,095176 \text{ мОм.}$$

Эту погрешность можно рассматривать двояко: как неисключенную систематическую погрешность и как составляющую случайной погрешности.

Случайные погрешности измерений исследуемого сопротивления и сопротивления подводящих проводов можно считать некоррелированными, так как измерения проводились в разное время. Поэтому суммарную случайную погрешность определяем по формуле

$$\Delta_{\Sigma}^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta_i^0{}^2}, \quad (6.13)$$

где Δ_{Σ}^0 – суммарная случайная погрешность измерения, мОм; Δ_i^0 – границы i -й элементарной случайной погрешности, мОм.

$$\Delta_{0,95}^0 = \sqrt{0,0195^2 + 0,095176^2} = 0,097153 \text{ мОм.}$$

6. Определение доверительных границ систематической погрешности. Составляющую систематической погрешности, обусловленную основной погрешностью измерителя иммитанса Е7–14, рассчитываем по формуле

$$\theta_{осн} = \bar{R}_n \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}, \quad (4.14)$$

где \bar{R}_n – среднее арифметическое значений ряда неисправленных показаний измерителя иммитанса, Ом.

Среднее арифметическое значение ряда неисправленных показаний измерителя иммитанса определяем по формуле

$$\bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i. \quad (4.15)$$

$$\bar{R}_n = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{15} R_i = 145,4219 \text{ мОм.}$$

Следовательно, систематическая погрешность, обусловленная основной погрешностью Е7–14:

$$\theta_{осн} = 0,145422 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} = 0,0004454 \text{ Ом.}$$

Систематическую погрешность, обусловленную дополнительной погрешностью средства измерений определяем по формуле (4.1). В нашем случае принимаем $k = 2$, тогда

$$\theta_{оош} = 2\theta_{осн}; \quad (4.16)$$

$$\theta_{оош} = 2 \cdot 0,4454 = 0,8908 \text{ мОм.}$$

Суммарную систематическую погрешность определяем по формуле по формуле

$$\theta = \begin{cases} k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, & \text{если } k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, & \text{если } k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i}, \end{cases} \quad (4.17)$$

где θ_i – границы i -й элементарной случайной погрешности; k – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых m , их соотношения и доверительной вероятности. При $P < 0,99$ он мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями, приведенными в таблице 4.11.

Таблица 4.11

Зависимость коэффициент k от P и m

P	Значение k при m					Среднее значение
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,4

$$\theta_{\Sigma} = 1,10 \sqrt{(0,4454)^2 + (0,8908)^2} = 1,10 \sqrt{0,9919} = 1,0955 \text{ мОм.}$$

7. Определение доверительных границ суммарной погрешности результата измерения.

Вычисляются доверительные границы суммарной погрешности результата измерения:

если $\theta / S_{\bar{R}_{\Sigma}} < 0,8$, то границы погрешности результата измерения

принимаются равными случайной погрешности, $\Delta = \Delta^0$;

если $\theta / S_{R_{\Sigma}} > 8$, то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности, $\Delta = \theta$;

если $0,8 \leq \theta / S_{R_{\Sigma}} \leq 8$, то общую погрешность измерения определяют по формуле

$$\Delta = K S_{\Sigma}, \quad (4.18)$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения Δ и θ ; S_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений;

$$K = \frac{\Delta + \theta}{S_{R_{\Sigma}} + \sqrt{\theta^2/3}}; \quad (4.19)$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\theta^2/3 + S_{R_{\Sigma}}^2}. \quad (4.20)$$

Суммарное случайное среднеквадратическое отклонение (отклонение при измерении сопротивления проводов и отклонение при измерении сопротивления магазина сопротивлений) погрешности определяем по формуле

$$S_{R_{\Sigma}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m R_i^2}, \quad (4.21)$$

$$S_{R_{\Sigma}} = \sqrt{0,00344^2 + 0,009148^2} = 0,009773$$

В нашем случае

$$\theta / S_{R_{\Sigma}} = 1,095/0,009773 = 112 > 8.$$

Из полученных данных видно, что систематическая погрешность значительно больше случайной, поэтому, последнюю можно не учитывать.

Результат измерения записываем в виде

$$R = (100,1 \pm 1,1) \text{ мОм при } P = 0,95, n = 16.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Таблица 1. Интегральная функция нормированного нормального распределения $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00023	0,00023
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00040	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
-2,9	0,00114	0,00119	0,00123	0,00127	0,00131	0,00135	0,00139	0,00143	0,00147	0,00151
-2,8	0,00129	0,00134	0,00139	0,00143	0,00147	0,00151	0,00155	0,00159	0,00163	0,00167
-2,7	0,00145	0,00150	0,00155	0,00160	0,00164	0,00168	0,00172	0,00176	0,00180	0,00184
-2,6	0,00161	0,00166	0,00171	0,00176	0,00180	0,00184	0,00188	0,00192	0,00196	0,00200
-2,5	0,00178	0,00183	0,00188	0,00192	0,00196	0,00200	0,00204	0,00208	0,00212	0,00216
-2,4	0,00195	0,00199	0,00204	0,00208	0,00212	0,00216	0,00220	0,00224	0,00228	0,00232
-2,3	0,00212	0,00216	0,00221	0,00225	0,00229	0,00233	0,00237	0,00241	0,00245	0,00249
-2,2	0,00229	0,00233	0,00237	0,00241	0,00245	0,00249	0,00253	0,00257	0,00261	0,00265
-2,1	0,00246	0,00250	0,00254	0,00258	0,00262	0,00266	0,00270	0,00274	0,00278	0,00282
-2,0	0,00264	0,00268	0,00272	0,00276	0,00280	0,00284	0,00288	0,00292	0,00296	0,00300
-1,9	0,00281	0,00285	0,00289	0,00293	0,00297	0,00301	0,00305	0,00309	0,00313	0,00317
-1,8	0,00299	0,00303	0,00307	0,00311	0,00315	0,00319	0,00323	0,00327	0,00331	0,00335
-1,7	0,00316	0,00320	0,00324	0,00328	0,00332	0,00336	0,00340	0,00344	0,00348	0,00352
-1,6	0,00334	0,00338	0,00342	0,00346	0,00350	0,00354	0,00358	0,00362	0,00366	0,00370
-1,5	0,00352	0,00356	0,00360	0,00364	0,00368	0,00372	0,00376	0,00380	0,00384	0,00388
-1,4	0,00370	0,00374	0,00378	0,00382	0,00386	0,00390	0,00394	0,00398	0,00402	0,00406
-1,3	0,00388	0,00392	0,00396	0,00400	0,00404	0,00408	0,00412	0,00416	0,00420	0,00424
-1,2	0,00406	0,00410	0,00414	0,00418	0,00422	0,00426	0,00430	0,00434	0,00438	0,00442
-1,1	0,00424	0,00428	0,00432	0,00436	0,00440	0,00444	0,00448	0,00452	0,00456	0,00460
-1,0	0,00442	0,00446	0,00450	0,00454	0,00458	0,00462	0,00466	0,00470	0,00474	0,00478
-0,9	0,00460	0,00464	0,00468	0,00472	0,00476	0,00480	0,00484	0,00488	0,00492	0,00496
-0,8	0,00478	0,00482	0,00486	0,00490	0,00494	0,00498	0,00502	0,00506	0,00510	0,00514
-0,7	0,00496	0,00500	0,00504	0,00508	0,00512	0,00516	0,00520	0,00524	0,00528	0,00532
-0,6	0,00514	0,00518	0,00522	0,00526	0,00530	0,00534	0,00538	0,00542	0,00546	0,00550
-0,5	0,00532	0,00536	0,00540	0,00544	0,00548	0,00552	0,00556	0,00560	0,00564	0,00568
-0,4	0,00550	0,00554	0,00558	0,00562	0,00566	0,00570	0,00574	0,00578	0,00582	0,00586
-0,3	0,00568	0,00572	0,00576	0,00580	0,00584	0,00588	0,00592	0,00596	0,00600	0,00604
-0,2	0,00586	0,00590	0,00594	0,00598	0,00602	0,00606	0,00610	0,00614	0,00618	0,00622
-0,1	0,00604	0,00608	0,00612	0,00616	0,00620	0,00624	0,00628	0,00632	0,00636	0,00640

-0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000
------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Продолжение таблицы 1

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Таблица 1. Матрица корреляции параметров...

Параметр	Среднее значение	Среднее квадратичное отклонение	Корреляция с параметром 1	Корреляция с параметром 2	Корреляция с параметром 3
1	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
26	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
27	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
28	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
29	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
40	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
41	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
42	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
43	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
44	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
45	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
46	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
47	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
48	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
49	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица 2. Интегральная функция нормированного нормального распределения.
Значение z для различных $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0,0005	-3,2905	0,50	+0,0000
0,005	-2,575	0,55	+0,1257
0,01	-2,3267	0,60	+0,2533
0,05	-1,6449	0,65	+0,3853
0,10	-1,2816	0,70	+0,5244
0,15	-1,0364	0,75	+0,6745
0,20	-0,8416	0,80	+0,8416
0,25	-0,6745	0,85	+1,0364
0,30	-0,5244	0,90	+1,2816
0,35	-0,3853	0,95	+1,6449
0,40	-0,2533	0,99	+2,3267
0,45	-0,1257	0,995	+2,5750
0,50	-0,0000	0,999	+3,2905

Таблица 3. Распределение Стьюдента.

Значения $P\{t < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$ для различных t_p

k	t_p			
	2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950
12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
13	0,9332	0,9737	0,9898	0,9960
14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995

Таблица 4. Распределение Стьюдента $P\{t < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,307	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,252	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,332	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,1256	0,2533	0,3853	0,52440	0,6744	0,8416	1,03643	1,2815	1,64485	1,9599	2,3263	2,5758