ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ

для студентов заочной формы обучения

Раздел «Электромагнетизм»

Москва 2008

3.1. Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

Теоретический минимум

Закон Кулона: два точечных заряда q_1 и q_2 взаимодействуют в вакууме с силой, пропорциональной произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\cdot\mathbf{e}_{12}, \qquad (3.1.1)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на первый заряд со стороны второго, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц (в системе единиц СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{12}$ [Кл ^{2}/Н·м^2] — электрическая постоянная); $\mathbf{e}_{12}$ — единичный вектор, направленный от второго к первому заряду вдоль линии, соединяющей эти заряды; r — расстояние между зарядами (рис. 3.1). Сила $\mathbf{F}_{21}$ отличается от $\mathbf{F}_{12}$ только знаком: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. (*Замечание: здесь и далее в формулах* ***векторы*** *выделяются жирным шрифтом, а скаляры – курсивом).*

Рис. 3.1

Принцип суперпозиции для системы точечных зарядов: если рассматривается взаимодействие системы точечных зарядов $q_1,\dots q_0$ с некоторым точечным зарядом q_0, то сила, действующая на данный заряд со стороны всех остальных зарядов, определяется как сумма:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{0i},$$

где $\mathbf{F}_{0i}$ — кулоновская сила, действующая на заряд q_0 со стороны заряда q_i (3.1.1).

Принцип суперпозиции для непрерывно распределенного заряда: весь пространственно распределенный заряд Q разбивается на малые области, каждая из которых считается точечным зарядом величиной dq. Сила $\mathbf{F}_0$, действующая на заряд q_0 со стороны заряда $Q = \int dq$, рассчитывается суммированием сил кулоновского взаимодействия между каждой такой областью и зарядом q_0:

$$\mathbf{F}_0 = \int d\mathbf{F} = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 dq}{r^2}\cdot\mathbf{e}_r,$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от заряда dq к заряду q_0.

Примеры решения задач

Пример 1. Четыре одинаковых положительных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 =$ 1 нКл расположены в вершинах квадрата (рис. 3.2). Какой отрицательный заряд Q_5 нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Решение. Все четыре заряда, расположенных в вершинах квадрата, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре квадрата, чтобы один из трех зарядов, например Q_1, находился в равновесии.

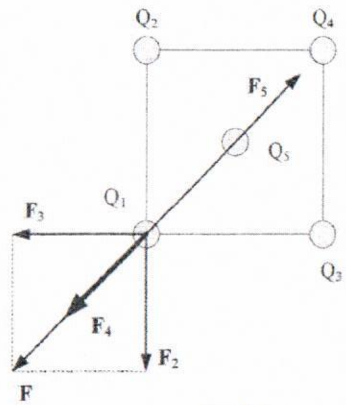

Рис. 3.2

В соответствии с принципом суперпозиции на заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = 0, \qquad (3.1.2)$$

где $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_5$ — силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3, Q_4 и Q_5; $\mathbf{F}$ — равнодействующая сил $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$.

Так как силы $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{F}_5$ направлены по одной прямой, то векторное равенство (3.1.2) можно заменить скалярной суммой:

$$F + F_4 - F_5 = 0.$$

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_5 = F_2\sqrt{2} + F_4.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_5}{(r/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\sqrt{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_4}{(r\sqrt{2})^2},$$

откуда

$$Q_5 = \frac{1}{2}Q_1\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}95\,нКл.$$

Отметим, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Пример 2. Тонкий стержень длиной $L = 30$ см (рис. 3.3) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $d = 20$ см от стержня находится заряд $q_0 = 10$ нКл, равноудаленный от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение. Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня. Однако если выделить на стержне малый участок длиной dl, то находящийся на нем заряд $dq = \tau dl$ можно рассматривать как точечный и тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_0 и dq:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau dl}{r^2}. \qquad (3.1.3)$$

где r — расстояние от выделенного элемента до заряда q_0.

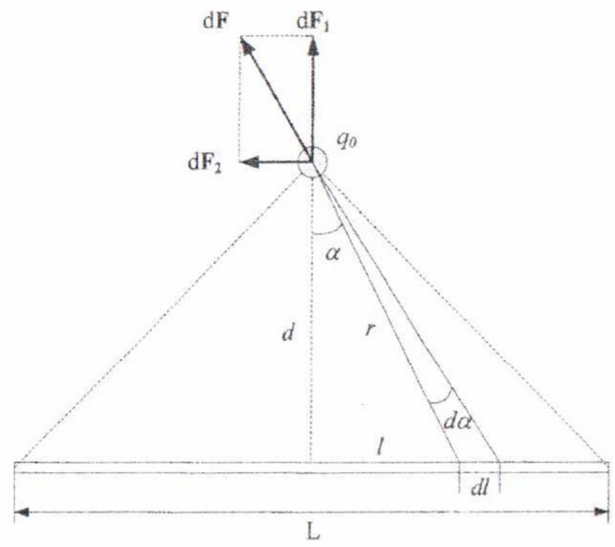

Рис. 3.3

Из чертежа (рис. 3.3) следует, что

$$r = \frac{d}{\cos\alpha};\quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

где d — расстояние от заряда q_0 до стержня. Подставив эти выражения r к dl в формулу (3.1.3), получим

$$dF = \frac{q_0\tau}{4\pi\varepsilon_0 d}d\alpha. \qquad (3.1.4)$$

Следует иметь в виду, что $d\mathbf{F}$ — вектор, поэтому, прежде чем интегрировать, разложим его на две составляющие: $d\mathbf{F}_1$, перпендикулярную стержню, и $d\mathbf{F}_2$, параллельную ему.

Из рис. 3.3 видно, что $dF_1 = dF\cos\alpha$, $dF_2 = dF\sin\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (3.1.4) в эти формулы, найдем:

$$dF_1 = \frac{q_0\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 d}d\alpha;\quad dF_2 = \frac{q_0\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 d}d\alpha. \qquad (3.1.5)$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_0 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 d} d\alpha = \frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\alpha d\alpha = \frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} |\sin\alpha|_{-\beta}^{+\beta} =$$
$$= \frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} |\sin\beta - \sin(-\beta)| = \frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} 2\sin\beta;$$

В силу симметрии расположения заряда q_0 относительно стержня интегрирования второго выражения в (3.1.5) дает нуль:

$$F_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} \sin\alpha d\alpha = -\frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d} |\cos\alpha|_{-\beta}^{+\beta} =$$
$$= -\frac{q_0 \tau}{4\pi\varepsilon_0 d_0} (\cos\beta - \cos\beta) = 0.$$

Таким образом, сила, действующая на заряд q_0,

$$F = F_1 = \frac{q_0 \tau}{2\pi\varepsilon_0 d} \sin\beta. \qquad (3.1.6)$$

Из рис. 3.3 следует, что

$$\sin\beta = \frac{l/2}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4d^2 + l^2}}$$

Подставив это выражение для $\sin\beta$ в формулу (3.1.6), получим

$$F = \frac{q_0 \tau}{2\pi\varepsilon_0 d} \frac{l}{\sqrt{4d^2 + l^2}}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \frac{0{,}3}{\sqrt{4 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3^2}} H = 5{,}4 \cdot 10^{-4} H = 0{,}54 мH.$$

Задачи

3.1.01. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a = 10 см расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ (Q = 0,1 мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

3.1.02. Два маленьких шарика массой m = 1 г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити L = 10 см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$?

3.1.03. С какой силой притягивается электрон водородного атома к ядру, если диаметр атома водорода $2 \cdot 10^{-8}$ см? Заряд ядра водорода равен элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3.1.04. Для одинаковых шарика радиусом r = 1 см и массой m = 9,81 г подвешены в одной точке на нитях длиной L = 19 см. Шарикам сообщены одинаковые по величине заряды. Как велик заряд каждого шарика, если нити разошлись так, что образовали угол $2\alpha = 90^\circ$?

3.1.05. Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Определить местоположение, величину и знак заряда q_3, чтобы все заряды находились в равновесии.

3.1.06. Тонкий стержень длиной l = 10 см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a = 20 см от ближайшего его конца находится точечный заряд Q = 100 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

3.1.07. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a = 20 см от его конца находится точечный заряд Q = 10 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

3.1.08. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восставленном из конца его, находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Расстояние a заряда от конца стержня равно 20 см. Найти силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

3.1.09. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд $Q = 20$ нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

3.1.10. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. В центре кольца находится заряд $Q = 0{,}4$ мкКл. Определить силу F, растягивающую кольцо. Взаимодействием зарядов кольца пренебречь.

3.2. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции полей.

Теоретический минимум

Напряженность электрического поля — это векторная физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный точечный заряд, помещённый в данную точку поля:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \qquad (3.2.1)$$

Такой заряд принято называть пробным.

Для поля, создаваемого точечным зарядом q вектор напряженности в любой точке пространства равен:

$$\mathbf{E} = k\frac{q}{r^2}\cdot\mathbf{e}_r, \qquad (3.2.2)$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный от заряда q к данной точке поля (рис. 3.4).

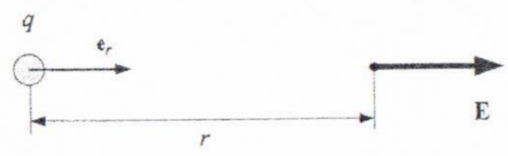

Рис. 3.4

Если поле в данной точке пространства создается несколькими точечными зарядами, то результирующий вектор напряженности определяется принципом суперпозиции полей:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i, \qquad (3.2.3)$$

где $\mathbf{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого i–м точечным зарядом в данной точке пространства (3.2.2), т. е.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\mathbf{e}_r. \qquad (3.2.4)$$

Если поле в данной точке пространства создается непрерывно распределенным зарядом, то для использования принципа суперпозиции полей весь объем V, занимаемый этим зарядом разбивается на бесконечно малые объемы dV. Каждый такой бесконечно малый объем dV содержит бесконечно малый точечный заряд dq. Напряженность поля в данной точке рассчитывается суммированием напряженностей полей, создаваемых каждым таким зарядом:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\cdot \mathbf{e}_r, \qquad (3.2.5)$$

где заряд dq может быть представлен через плотность пространственного распределения:

$dq = \rho dV$, где ρ – объёмная плотность зарядов;

$dq = \sigma dS$, где σ – поверхностная плотность зарядов;

$dq = \tau dL$, где τ – линейная плотность зарядов.

Примеры решения задач

Пример 3. Два точечных электрических заряда $q_1 = 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -2\cdot10^{-9}$ Кл (рис. 3.5) находятся в воздухе на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля, создаваемого этими зарядами в точке А, удаленной от заряда q_1 на $r_1 = 9$ см и от заряда q_2 на $r_2 = 7$ см.

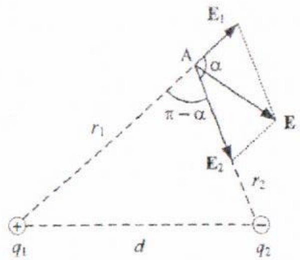

Рис. 3.5

Решение. Исходя из принципа суперпозиции (3.2.4), в точке А напряженность поля складывается из вектора напряженности поля $\mathbf{E}_1$, создаваемого зарядом q_1 и вектора напряженности $\mathbf{E}_2$, создаваемого зарядом q_2.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

где $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ и $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$. (3.2.6)

Величина результирующего вектора **E** определяется с помощью теоремы косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \qquad (3.2.7)$$

где α — угол между векторами $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Этот угол может быть определен тоже с помощью теоремы косинусов, примененной к треугольнику построенному на точке А и двух зарядах:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha,$$

то есть

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = -0{,}238. \qquad (3.2.8)$$

Теперь, подставляя (3.2.6) и (3.2.7) в (3.2.8), для напряженности электрического поля E получим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

Подставим числовые значения

$$E = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}}\sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0{,}09)^4} + \frac{(2\cdot10^{-9})^2}{(0{,}07)^4} + 2\frac{10^{-9}\cdot2\cdot10^{-9}}{(0{,}09)^2(0{,}07)^2}(-0{,}238)} =$$

$$= 3{,}58\cdot10^3\left[\frac{Н}{Кл}\right] = 3{,}58\left[\frac{кВ}{м}\right]$$

Задачи

3.2.01. Найти напряженность электрического поля в точке, лежащей посредине между точечными зарядами $q_1 = 8\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2 = -86\cdot10^{-9}$ Кл. Расстояние между зарядами равно $r = 10$ см.

3.2.02. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a помещаются точечные заряды одинаковой величины q. Найти напряженность поля E в центре шестиугольника при условии, что знак всех зарядов одинаков.

3.2.03. Два одинаковых заряда 10^{-7} Кл находятся в воздухе на расстоянии 8 см друг от друга. Определить напряженность E_0 поля в точке, расположенной на расстоянии 5 см от зарядов.

3.2.04. Два точечных заряда $q_1 = 2q$ и $q_2 = -q$ находятся на расстоянии d друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, напряженность E поля в которой равна нулю.

3.2.05. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 40$ нКл и $q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

3.2.06. Тонкое кольцо радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Какова напряженность E электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 10$ см? Построить график зависимости напряженности поля E в зависимости от расстояния до центра кольца.

3.2.07. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Найти напряженность E электрического поля в центре полусферы.

3.2.08. Прямой провод длиной $L = 1$ м несет заряд, равномерно распределенный по всей его длине. Найти величину этого заряда, если напряженность E поля на расстоянии $a = 0{,}5$ м, отложенном вдоль перпендикуляра к проводу от одного из его концов, равна 200 В/м.

3.2.09. Прямая проволока длиной $L = 1$ м несет заряд $q = 40$ мкКл, равномерно распределенный по всей ее длине. Найти величину напряженности поля E в точке, расположенной на продолжении проволоки на расстоянии $d = 1{,}5$ м от ее конца.

3.2.10. Провод длиной $L = 40$ см согнут пополам под прямым углом. По проводу равномерно распределен заряд $q = 10$ мкКл. Определить напряженность поля E в двух точках, расположенных на гипотенузе получившегося при сгибе провода угла, на расстоянии $d = 10$ см от вершины этого угла.

3.3. Теорема Гаусса.

Теоретический минимум

Для нахождения напряженности электростатического поля в данной точке пространства в некоторых случаях удобно пользоваться теоремой Гаусса, формулировка которой звучит следующим образом: поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность равен сумме электрических зарядов внутри этой поверхности деленной на электрическую постоянную ε_0.

$$\oiint_S (\mathbf{E}d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i, \qquad (3.3.1)$$

где $d\mathbf{S} = dS\cdot\mathbf{n}$. При этом dS — элемент гауссовой поверхности, а $\mathbf{n}$ — вектор нормали к элементу поверхности dS, $(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = E\cdot dS\cdot\cos\alpha$ — поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь элемент поверхности dS, α — угол между векторами $\mathbf{E}$ и dS, $\sum q_i$ — сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Если зарядов внутри поверхности нет, то поток равен нулю. Для случая непрерывного распределения зарядов можно записать:

$\sum_i q_i = \iiint_V \rho dV$, где ρ – объёмная плотность зарядов;

$\sum_i q_i = \iint_S \sigma dS$, где σ – поверхностная плотность зарядов;

$\sum_i q_i = \int_L \tau dL$, где τ – линейная плотность зарядов.

Ограничения, накладываемые на использование теоремы Гаусса, диктуются прежде всего возможностью вычисления интеграла в левой части равенства (3.3.1). Это зависит от изначального распределения заряда, создающего поле в данной точке пространства: не для всякого распределения можно подобрать поверхность, поток сквозь которую можно представить в аналитическом виде.

Наиболее просто поток вектора напряженности рассчитывается для симметричных распределений заряда — сферических, цилиндрических и на плоскости.

Примеры решения задач

Пример 4. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара радиуса R, заряженного с объемной плотностью ρ (рис. 3.6). Построить график зависимости напряженности поля E от расстояния до центра шара.

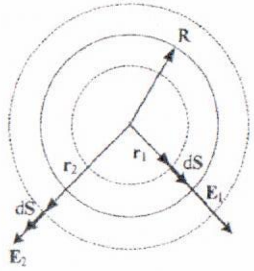

Рис. 3.6

Решение. Последовательно найдем напряженность поля E_1 – внутри шара на расстоянии r_1 от центра и напряженность поля E_2 – снаружи шара на расстоянии r_2 от центра.

Выберем форму Гауссовой поверхности. В любой точке выбранной нами поверхности для упрощения вычисления интеграла в правой части (3.3.1) должны соблюдаться следующие условия:

а. $|\mathbf{E}| = const$ в любой точке поверхности для тех ее частей, поток через которые не равен нулю;

б. $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ или $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$. Иными словами, угол в скалярном произведении в (3.3.1) должен быть либо $\alpha = 0°$, либо $\alpha = 180°$.

Из соображений симметрии ясно, что поверхность Гаусса в данном случае удобно выбрать в виде сферы радиуса r, концентрической с шаром R. При этом в любой точке поверхности выполняются изложенные выше условия: $|\mathbf{E}| = const$ и $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ в любой точке поверхности см. рис. 3.6.

Распишем отдельно левую и правую части теоремы Гаусса (3.3.1) для поверхности лежащей внутри и вне заряженного шара:

1. внутри шара $\displaystyle\oiint_{S_1}(\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}) = \oiint_{S_1} E_1 dS\cos 0° = E_1\oiint_{S_1} dS = E_1 4\pi r_1^2$. (3.3.2)

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_1}\rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\iiint_{V_1} dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3. \quad (3.3.3)$$

Приравняем полученный в (3.3.2) и (3.3.3) результат:

$$E_1 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3,$$

откуда после сокращения следует: $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}$. Видно, что напряженность внутри равномерно заряженного шара линейно возрастает от центра к периферии шара.

2. вне шара $\displaystyle\oiint_{S_2}(\mathbf{E}_2 d\mathbf{S}) = \oiint_{S_2} E_2 dS\cos 0° = E_2\oiint_{S_2} dS = E_2 4\pi r_2^2$. (3.3.4)

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_{шара}}\rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\iiint_{V_{шара}} dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3. \quad (3.3.5)$$

Аналогично п.1 приравнивая (3.3.4) и (3.3.5), получим: $E_2 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}$

Графически зависимость E(r) представлена на рис. 3.7.

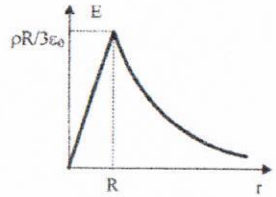

Рис. 3.7

Задачи

3.3.01. Используя теорему Гаусса, найти напряженность поля, созданного заряженной бесконечной нитью. Дана линейная плотность зарядов нити λ.

3.3.02. Найти напряженность поля внутри сферического конденсатора, заряженного зарядом q. Радиус внутренней обкладки r, а внешней — R.

3.3.03. Найти напряженность поля внутри и вне сферы радиуса R, заряженной с поверхностной плотностью σ. Построить график зависимости E от расстояния до центра сферы.

3.3.04. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара радиуса R, заряженного с объемной плотностью $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где r — расстояние от центра шара, а ρ_0 — плотность заряда в центре шара. Построить график зависимости E от расстояния до центра сферы.

3.3.05. Найти напряженность поля, созданного бесконечной пластиной, заряженной с поверхностной плотностью σ.

3.3.06. Найти напряженность поля внутри плоского конденсатора, пластины которого бесконечны и заряжены с поверхностной плотностью $\pm\sigma$.

3.3.07. Найти напряженность поля внутри и вне сплошного бесконечного цилиндра радиуса R, заряженного с объёмной плотностью ρ. Построить график зависимости E от расстояния до оси цилиндра.

3.3.08. Найти напряженность поля внутри и вне полого бесконечного цилиндра радиуса R, заряженного с поверхностной плотностью σ. Построить график зависимости E от расстояния до оси цилиндра.

3.3.09. Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\tau_1 = 1$ нКл/м и $\tau_2 = -0{,}5$ нКл/м. Определить напряженность E поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 1$ см, $r_2 = 3$ см, $r_3 = 5$ см от оси трубок. Построить график зависимости E от r.

3.3.10. Большая плоская, пластина толщиной $d = 1$ см несет заряд, равномерно распределенный: по объему с объемной плотностью $\rho = 100$ нКл/м^3. Найти напряженность E электрического поля: вблизи центральной части пластины и вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

3.4. Потенциал. Работа поля.

Теоретический минимум

Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал:

$$\varphi = \frac{W}{q}, \qquad (3.4.1)$$

здесь W – энергия, которой в данной точке поля обладает заряд q.

Потенциал поля системы точечных зарядов q_i:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}. \qquad (3.4.2)$$

Работа электрического поля по перенесению заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \qquad (3.4.3)$$

здесь $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов.

Одно из уравнений Максвелла для постоянного электрического поля есть критерий его потенциальности. Потенциальность электростатического поля заключается в том, что работа, произведенная полем над зарядом на замкнутом пути, равна нулю:

$$\oint_L E_\ell dl = 0. \qquad (3.4.5)$$

Здесь C = $\oint E_\ell dl$ — циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру. Данное уравнение в дальнейшем будем называть вторым уравнением Максвелла для электростатического поля (первое — теорема Гаусса).

Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля даётся соотношением:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi, \qquad (3.4.6)$$

где

$$\mathbf{grad}\varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}. \qquad (3.4.7)$$

Если на расстоянии r от заряда q напряженность равна E, то разность потенциалов поля можно найти следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r)dr. \qquad (3.4.8)$$

Примеры решения задач

Пример 5. Кольцо радиуса R заряжено зарядом q. Определить потенциал во всех точках на оси кольца перпендикулярно его плоскости. Определить напряженность поля во всех точках этой оси. Найти точку на оси, где напряженность максимальна.

Решение. Исходя из принципа суперпозиции полей разобьем весь заряженный круговой провод на маленькие отрезки, каждый из которых будет нести на себе малый заряд dq. Из соображений симметрии ясно (рис. 3.8), что напряженность поля, создаваемая зарядами dq, лежащими на концах некоторого диаметра, в точке на оси кольца направлена вдоль оси. Все составляющие dE_y взаимно уничтожаются.

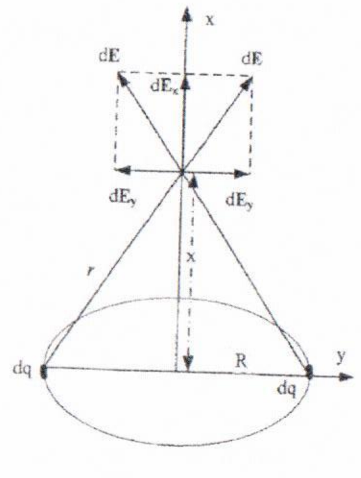

Рис. 3.8

Потенциал точечного заряда dq, исходя из (3.4.2), может быть записан:

$d\varphi = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где $r = \sqrt{R^2 + x^2}$,

тогда потенциал всего заряженного провода представляется в виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Так как связь между **E** и φ дается выражением (3.4.6), можно написать, что в нашем случае:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right).$$

После подсчета производной получаем значение напряженности поля на оси:

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \qquad (3.4.9)$$

Чтобы найти точку на оси, где напряженность максимальна, надо найти производную от (4.3.9) и приравнять ее нулю:

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q\left(R^2 + x^2\right) - 3qx^2}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} \right] = 0.$$

Откуда следует, что

$$x^2 + R^2 - 3x^2 = 0.$$

или окончательно

$$x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Подставив это x в формулу (4.3.9), получим:

$$E_{\max} = \frac{q}{3\sqrt{6}\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Задачи

3.4.01. Диск радиуса R равномерно заряжен с поверхностной плотностью зарядов σ. Найти напряженность и потенциал на оси диска.

3.4.02. Определить потенциал в центре кольца с внешним диаметром $D = 0{,}6$ м и внутренним диаметром $d = 0{,}4$ м, если на нём равномерно распределён заряд $q = 6{\cdot}10^{-7}$ Кл.

3.4.03. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длиной заряженной нити находится точечный заряд $q = 2$ мкКл. Под действием поля заряд перемещается до расстояния $r_2 = 2$ см. при этом совершается работа $A = 10$ кэВ. Найти линейную плотность заряда нити.

3.4.04. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд $q = 22$ нКл. Под действием поля заряд перемещается по силовой линии на расстояние $\Delta r = 2$ см, при этом совершается работа A = 50 эВ. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости.

3.4.05. Шарик, заряженный до потенциала 792 В, имеет поверхностную плотность заряда, равную $3{,}33{\cdot}10^{-7}$ Кл/м^2. Чему равен радиус шарика?

3.4.06. Воздушный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра $r = 1{,}5$ см и радиус внешнего цилиндра $R = 3{,}5$ см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов $U_0 = 2300$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля этого конденсатора, двигаясь с расстояния $\ell_1 = 2{,}5$ см до расстояния $\ell_2 = 2$ см от оси цилиндра.

3.4.07. Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора $R_1 =$ 1 см, радиус внешнего шара $R_2 = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U_0 = 3000$ В. Найти напряженность поля на расстоянии $r = 3$ см от центра шаров.

3.4.08. Электрическое поле создано бесконечно длинным цилиндром радиуса $R_1 = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\lambda = 2{\cdot}10^{-8}$ Кл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $r_1 = 0{,}5$ см и $r_2 = 2$ см от поверхности цилиндра.

3.4.09. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от неё на расстояние $r = 10$ см.

3.4.10. Заряд $q = 2{\cdot}10^{-6}$ Кл распределен равномерно по объему сферы радиуса $R = 40$ мм. Найти потенциал φ внутри заряженной сферы как функцию расстояния r от центра сферы. Вычислить φ для $r = 20$ мм.

3.5. Электростатика диэлектриков и проводников. Конденсаторы.

Теоретический минимум

При помещении диэлектрика в электрическое поле на нём возникают поляризационные заряды q_p, поле которых направлено против поля свободных зарядов, создающих электрическое поле. Диэлектрик можно представить как совокупность большого числа диполей с дипольным электрическим моментом

$$\mathbf{p}_i = q_i\mathbf{l} \qquad (3.5.1)$$

где q_i — абсолютная величина заряда диполя, **l** — вектор, направленный от отрицательного заряда диполя к положительному и равный по величине расстоянию между этими зарядами.

Поляризацию диэлектрика характеризуют вектором поляризации **P**, который равен объёмной плотности дипольного момента диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i}{V}; \quad P_n = \sigma,$$

где σ — поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов на диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле, а P_n — нормальная составляющая вектора поляризации.

Для диэлектрика справедливо соотношение, утверждающее, что поток вектора поляризации через произвольную замкнутую поверхность равен сумме поляризационных зарядов внутри этой поверхности:

$$\oiint_S (\mathbf{P}d\mathbf{S}) = -q_p. \qquad (3.5.2)$$

Фундаментальные уравнения электростатики в диэлектрике получают обобщением уравнений электростатики в вакууме с учетом влияния диэлектрика через поляризационные заряды.

Второе уравнение Максвелла для диэлектрика совпадает с соответствующим

уравнением для вакуума:

$$\oint_L E_\ell dl = 0. \qquad (3.5.3)$$

Первое уравнение Максвелла для диэлектрика несколько видоизменяется:

$$\oiint_S (\mathbf{E}d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_p), \qquad (3.5.4)$$

или с учетом (3.5.3)

$$\oiint_S (\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})d\mathbf{S} = q, \qquad (3.5.5)$$

здесь $\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} = \mathbf{D}$ – вектор электрической индукции.

Учитывая, что для изотропного диэлектрика $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$, где χ – диэлектрическая восприимчивость, получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\chi+1)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E},$$

$\varepsilon = \chi + 1$ – диэлектрическая проницаемость.

Таким образом, I-е уравнение Максвелла для диэлектрика (3.5.4) должно быть записано в виде:

$$\oiint_S (\mathbf{D}d\mathbf{S}) = q, \qquad (3.5.6)$$

где q — суммарный свободный заряд в диэлектрике. Для непрерывного распределения зарядов I-е уравнение Максвелла запишется в виде:

$$\oiint_S (\mathbf{D}d\mathbf{S}) = \iiint_V \rho dV. \qquad (3.5.7)$$

На границе раздела двух диэлектриков для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля справедливы следующие граничные условия:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \qquad (3.5.8)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \qquad (3.5.9)$$

Если проводник поместить в электрическое поле, то на поверхности (и только на поверхности) проводника появятся поляризационные заряды, которые своим полем всегда полностью компенсируют внешнее электрическое по-

ле, поэтому внутри проводника поле отсутствует. Свойство зарядов проводника распределяться по всей его поверхности позволяет использовать проводники в качестве накопителей, емкостей зарядов.

Величина электроёмкости проводника определяется формулой

$$C = \frac{q}{\varphi}, \qquad (3.5.10)$$

где q и φ — заряд и потенциал проводника.

Электроёмкость конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \qquad (3.5.11)$$

где q – абсолютная величина заряда на обкладках конденсатора, а $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов.

Для системы параллельно соединенных конденсаторов имеем:

$$C_{общ} = C_1 + C_2 + \ldots \qquad (3.5.12)$$

Для системы последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C_{общ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \qquad (3.5.13)$$

Энергия, запасённая в конденсаторе, равна

$$W = \frac{CU^2}{2}. \qquad (3.5.14)$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (3.5.15)$$

Примеры решения задач

Пример 6. Плоский конденсатор подключен к электрической батарее, поддерживающей на её обкладках разность потенциалов U_0. В пространство между обкладками задвигается пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε так, что это пространство полностью заполняется диэлектриком. До заполнения диэлектриком конденсатора заряд пластин был q_0.

1. Определить работу, которая совершается электрической батареей.

2. Какую работу совершают механические силы?

Решение. Внутренняя энергия конденсатора с учетом (3.5.10) и (3.5.14) записывается следующим образом

$$W = \frac{q^2}{2C}. \qquad (3.5.16)$$

где q — заряд на пластинах.

В нашей задаче механические силы втягивают диэлектрик, изменяя емкость конденсатора, а батарея совершает работу по изменению зарядов на dq. Изменение внутренней энергии конденсатора можно найти следующим образом (продифференцируем уравнение (3.5.16)):

$$dW = \frac{q}{C}dq - \frac{q^2}{2C^2}dC.$$

Здесь $dA_1 = \frac{q}{C}dq$ — работа, совершенная электрической батареей по изменению заряда; $dA_2 = \frac{q^2}{2C^2}dC$ — работа механических сил.

Так как разность потенциалов на пластинах поддерживается одной и той же $U_0 = \frac{q}{C}$, то можно записать:

$$dA_1 = U_0 dq;$$

$$dA_2 = -\frac{U_0^2}{2}dC.$$

Работу A_1 можно подсчитать, зная, что в начальном состоянии заряд на пластинах был q_0, а в конечном — $q = \varepsilon q_0$:

$$A_1 = \int_{q_0}^{\varepsilon q_0} U_0 dq = U_0 q_0 (\varepsilon - 1).$$

Работу A_2 найдём, зная, что ёмкость в начальном состоянии $C_0 = \frac{q_0}{U_0}$, а в конечном $C = \frac{\varepsilon q_0}{U_0}$:

$$A_2 = \int_{q_0/v_0}^{\varepsilon q_0/v_0} \frac{U_0^2}{2} dC = -\frac{U_0 q_0}{2}(\varepsilon - 1).$$

Знак минус в значении для A_2 означает, что работа совершалась над диэлектриком.

Задачи

3.5.01. Найти ёмкость конденсатора, образованного двумя концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2, заряженными зарядами q. Между обкладками этого сферического конденсатора находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

3.5.02. Внутри шара из однородного диэлектрика с $\varepsilon = 5$ создано однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов.

3.5.03. Стеклянная пластинка внесена в однородное электрическое поле напряженностью $E_1 = 10$ В/м и расположена так, что угол α_1 между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен 30°. Найти напряженность поля E_2 в пластинке и плотность связанных зарядов, возникших на поверхности пластинки. Диэлектрическая проницаемость среды вне пластинки $\varepsilon_1 = 1$.

3.5.04. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух пластин, расположенных на расстоянии 4 мм друг от друга, общей площадью 100 см^2. Конденсатор заряжают от батареи в 200 В и отключают от нее. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками в два раза? Решить задачу при условии, когда конденсатор не отключают от батареи.

3.5.05. Площадь каждой пластины плоского конденсатора 314 см^2. расстояние между пластинами 2 мм. Пластины находятся в воздухе и напряженность поля между пластинами 600 В/см. Какую работу нужно затратить, чтобы вдвинуть между пластинами плоского конденсатора стеклянную пластинку, если пластинка полностью заполняет конденсатор и конденсатор после заряжения отключён полностью от батареи ($\varepsilon = 6$)?

3.5.06. Точечный заряд $q = 3 \cdot 10^{-6}$ помещается в центре шарового слоя из однородного изотропного диэлектрика с $\varepsilon = 3$. Внутренний радиус слоя $r = 25$см, внешний $R = 50$ см. Найти энергию, заключённую в диэлектрике.

3.5.07. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно 8 мм. Площадь пластин 62,8 см^2. Какую работу нужно затратить, чтобы вдвинуть между пластинами конденсатора пластинку из стекла той же площади и толщиной 6 мм, если пластины конденсатора присоединены к источнику напряжения 600 В.

3.5.08. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом равна $2 \cdot 10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, равна $7 \cdot 10^{-5}$ Дж. Найти диэлектрическую проницаемость.

3.5.09. Вычислить ёмкость цилиндрического конденсатора, обкладки которого имеют радиусы R_1 и R_2 и заряжены зарядом q. Длина обкладок ℓ. Между обкладками находится диэлектрик с ε.

3.5.10. Найти ёмкость конденсатора, образованного двумя одинаковыми шариками радиуса a, находящимися в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между центрами шариков b, причем $b >> a$ (можно считать, что заряд равномерно распределяется по поверхности).

Контрольная работа № 3

Студен должен решить 5 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра своей зачетной книжки.

Вариант	Номер задачи				
1	3.1.01	3.2.02	3.3.04	3.4.05	3.5.07
2	3.1.02	3.2.03	3.3.05	3.4.06	3.5.08
3	3.1.03	3.2.04	3.3.06	3.4.07	3.5.09
4	3.1.04	3.2.05	3.3.07	3.4.08	3.5.10
5	3.1.05	3.2.06	3.3.08	3.4.09	3.5.01
6	3.1.06	3.2.07	3.3.09	3.4.10	3.5.02
7	3.1.07	3.2.08	3.3.10	3.4.01	3.5.03
8	3.1.08	3.2.09	3.3.01	3.4.02	3.5.04
9	3.1.09	3.2.10	3.3.02	3.4.03	3.5.05
10	3.1.10	3.2.01	3.3.03	3.4.04	3.5.06

ЧАСТЬ IV

4.1. Законы постоянного тока.

Теоретический минимум

Сила тока численно равна заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$J = \frac{dq}{dt}. \qquad (4.1.1)$$

Плотность тока – это вектор, численно равный отношению величины силы тока к площади сечения, через которое он протекает. Вектор плотности тока направлен перпендикулярно данному сечению.

$$\mathbf{j} = \frac{dJ}{dS}\mathbf{n} \text{ или } J = \int_S (\mathbf{j}d\mathbf{S}). \qquad (4.1.2)$$

Дифференциальный закон Ома устанавливает связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \qquad (4.1.3)$$

где σ — электропроводность вещества.

Для поддержания тока в цепи должны существовать сторонние силы (источники тока), тогда

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{стор}\right). \qquad (4.1.4)$$

Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда есть ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{A_{стор}}{q}. \qquad (4.1.5)$$

Уравнение непрерывности для постоянного тока:

$$\oint_S (\mathbf{j}d\mathbf{S}) = 0. \qquad (4.1.6)$$

Применяя его к узлу токов, получим 1–е правило Кирхгофа:

$$\sum_i J_i = 0, \qquad (4.1.7)$$

т. е. сумма втекающих в узел и вытекающих из узла токов всегда равна нулю.

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$U = JR. \qquad (4.1.8)$$

Для замкнутой разветвлённой цепи 2–е правило Кирхгофа:

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum J_i R_i. \qquad (4.1.9)$$

При прохождении по проводнику тока выделяется тепло, определяемое законом Джоуля–Ленца:

$$Q = RJ^2 t. \qquad (4.1.10)$$

Если ток меняется со временем, то

$$Q = \int_0^t RJ^2 dt. \qquad (4.1.11)$$

Полная мощность, выделяемая в цепи

$$P = \varepsilon J. \qquad (4.1.12)$$

Коэффициент полезного действия источника тока можно найти так:

$$\eta = \frac{R}{r+R}, \qquad (4.1.13)$$

где R – сопротивление внешней цепи, r – сопротивление источника тока.

Примеры решения задач

Пример 7. Найти токи, протекающие в каждой ветви электрической цепи (Рис. 4.1), если $\varepsilon_1 = 130$ В, $\varepsilon_2 = 117$ В, $R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 0{,}3$ Ом, $R_3 = 12$ Ом. Внутреннее сопротивление источников не учитывать.

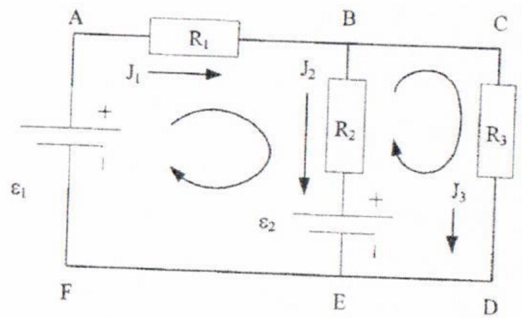

Рис. 4.1

Решение. По условию задачи дана разветвлённая цепь. При этом необходимо пользоваться правилами Кирхгофа. Для составления уравнений в соответствие с этими правилами необходимо следующее:

1. Обозначить на схеме контуры буквами.
2. Произвольно выбрать направление токов в каждом контуре.
3. При записи I–го правила считать положительными токи, входящие в узел, и отрицательными – выходящие из узла.
4. Выбрать произвольное направление обхода контуров.
5. ЭДС считать положительной, если направление от положительного полюса к отрицательному совпадает с направлением обхода.
6. Считать падение напряжения положительным, если направление тока на этом участке совпадает с направлением обхода.

Число уравнений составленных по I–му правилу, должно быть на 1 меньше, чем количество узлов в цепи. Число уравнений, составленных по 2–му правилу, определяется так: m – n , где m – число токов во всех участках разветвленной цепи, n – число число уравнений составленных по I–му правилу.

В цепи, приведённой на рис. 4.1, два узла. Значит, нам нужно составить одно уравнение I–го правила Кирхгофа (для т. B):

$$J_1 - J_2 - J_3 = 0 \qquad (4.1.14)$$

Число уравнений, составленных по 2–му правилу Кирхгофа, будет: 3 – 1 = 2 (так как у нас 3 тока: J_1, J_2 и J_3).

Выбираем контуры ABEF и BCDE и записываем уравнения 2–го правила Кирхгофа:

$$J_1R_1 + J_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \qquad (4.1.15)$$

$$-J_2R_2 + J_3R_3 = \varepsilon_2. \qquad (4.1.16)$$

Дальше из уравнений (4.1.14), (4.1.15), (4.1.16) нужно найти токи J_1, J_2 и J_3. Для этого сложим (4.1.15) и (4.1.16), получим:

$$J_1R_1 + J_3R_3 = \varepsilon_1 \qquad (4.1.17)$$

Подставим J_1 из уравнения (4.1.14) в уравнение (4.1.17):

$$J_2 + J_3 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - J_3\frac{R_3}{R_1} \qquad (4.1.18)$$

$$J_2 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - J_3\frac{R_3}{R_1} - J_3.$$

J_2 найдем из уравнения (4.1.16) и подставим в (4.1.18):

$$J_2 = J_3\frac{R_3}{R_2} - \frac{\varepsilon_2}{R_2},$$

т.е. $J_3\frac{R_3}{R_2} - \frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - J_3\frac{R_3}{R_1} - J_3$.

Значит,

$$J_3 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} + \frac{\varepsilon_2}{R_2} \Big/ \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} + 1.$$

Подставляем числовые значения:

$$J_3 = \frac{(260+390)}{(40+1+24)} = \frac{650}{65} = 10 \text{ A}.$$

Зная J_3, из уравнения (4.1.17) найдем J_1:

$$J_1 = \frac{130}{0,5} - 10\cdot\frac{12}{0,5} = 260 - 240 = 20 \text{ A}.$$

Из уравнения (4.1.14) теперь несложно получить ток J_2:

$$J_2 = 20 - 10 = 10 \text{ A}.$$

Если в ответе получается отрицательное значение тока, это означает, что выбрано противоположное истинному направление тока в контуре.

Задачи

4.1.01. В цепи, приведенной на рис. 4.2, ε_1 = 2,5 В; ε_2 = 2 В; ε_3 = 1,5 В; R_1 = 2,30 Ом; R_2 = 0,80 Ом. Определить токи в сопротивлениях.

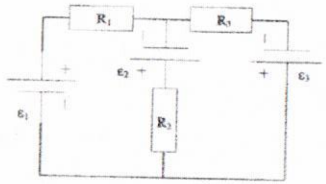

Рис. 4.2

4.1.02. В схеме, изображенной на рис. 4.3, ε = 5 В; R_1 = 1 Ом; R_2 = 2 Ом. R_3 = 3 Ом. Сопротивление источника R_0 = 0,1 Ом. Найти силы токов J_1 и J_2.

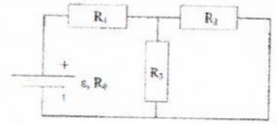

Рис. 4.3

4.1.03. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью ε = 7 и удельным сопротивлением ρ =100 ГОм·м. Ёмкость конденсатора С = 3000 пФ. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения U = 2000 В.

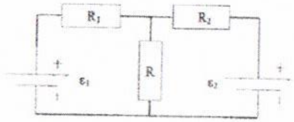

Рис. 4.4

4.1.04. В цепи, приведённой на рис. 4.4, ε_1 = 1,5 В; ε_2 = 1 В; R = 100 Ом; R_1 = 500 Ом; R_2 = 800 Ом. Найти силу тока, идущего через сопротивление R.

4.1.05. В цепи, изображённой на рис. 4.5, известны все сопротивления и сила тока J_4 через сопротивление R_u. Найти ЭДС батареи.

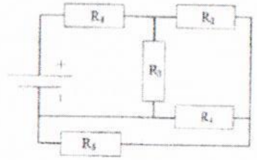

Рис. 4.5

4.1.06. Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением r = 3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_1 = 2 В до U_2 = 4 В в течение t = 20 с.

4.1.07. Два источника тока с различными ЭДС ε_1 и ε_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 включены параллельно с сопротивлением R (рис. 4.6). Чему равен ток через это сопротивление?

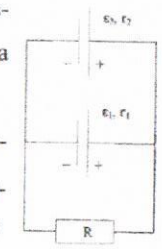

Рис. 4.6

4.1.08. В схеме, приведённой приведенной на рис. 4.7 ε = 120 В, R_3 = 30 Ом, R_2 = 60 Ом. Амперметр вает 2 А. Найти мощность, выделяющуюся в сопротивлении R_1.

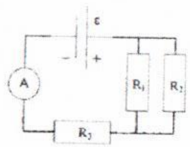

Рис. 4.7

4.1.09. В схеме представленной на рис. 4.8 ε = 120 В. R_1 = 25 Ом, R_2 = R_2 = 100 Ом. Найти мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1.

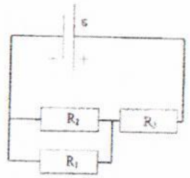

Рис. 4.8

4.1.10. Найти показание амперметра в схеме представленной на рис. 4.9, если ε = 100 В; её внутреннее сопротивление r = 2 Ом, R_3 = 780 Ом, R_1 = 25 Ом. Мощность, выделяющаяся на сопротивлении R_1, равна P_1 = 16 Вт.

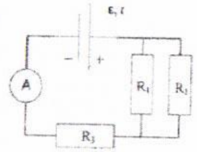

Рис. 4.9

4.2. Магнетизм в вакууме.

Теоретический минимум

Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции, который для элементарного тока определяется законом Био–Савара–Лапласа:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J\left[\mathbf{dl}\times\mathbf{r}\right]}{r^3}. \qquad (4.2.1)$$

Здесь J – сила тока в проводнике, dl – длина элементарного тока; при этом вектор $\mathbf{dl}$ направлен вдоль тока; μ_0 – магнитная постоянная; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mathbf{r}$ – радиус–вектор, проведённый от элементарного тока в точку поля.

Принцип суперпозиции для магнитных полей гласит, что магнитное поле тока произвольной конфигурации можно найти следующим образом: весь ток разбивается на одинаковые участки длиной dl. Произвольно выбранный участок создает в выбранной точке пространства поле величиной dB (4.2.1). Результирующее поле получается суммированием полей от каждого участка dl:

$$\mathbf{B} = \int \mathbf{dB} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J\left[\mathbf{dl}\times\mathbf{r}\right]}{r^3}. \qquad (4.2.2)$$

Если провод с током лежит в одной плоскости и точка в которой определяется величина вектора **B** принадлежит этой же плоскости, то все вектора **dB** коллинеарны и вычисление интеграла (4.2.2) существенно облегчается:

$$B = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Jdl\sin\alpha}{r^2}, \qquad (4.2.3)$$

где α — угол между векторами **dl** и **r**.

Уравнение Максвелла для постоянного магнитного поля записываются так:

$$\oint\!\!\!\oint_S (\mathbf{BdS}) = 0;$$

$$\oint_l (\mathbf{Bdl}) = \mu_0 \sum_i J_i.$$

Примеры решения задач

Пример 8. Вычислить магнитную индукцию, создаваемую отрезком AB (рис. 4.10) прямолинейного проводника с током в точке C, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии 5 см от него. По проводнику течёт ток 20 А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом 60^0.

Решение. Магнитную индукцию в точке C будем искать с помощью закона Био–Савара–Лапласа в виде (4.2.3):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J d\ell \sin\theta}{r^2}.$$

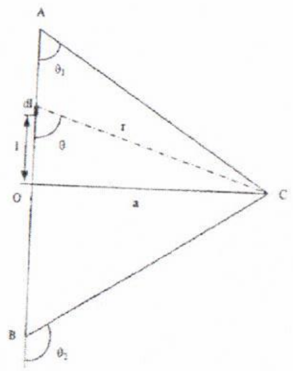

Рис. 4.10

Из ΔACD видно, что $\ell = a\cdot \mathrm{ctg}\theta$, $r = \frac{a}{\sin\theta}$.

Тогда $d\ell = \frac{a d\theta}{\sin^2\theta}$.

Следовательно,

$$B = \frac{-\mu_0 J a}{4\pi a^2}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\sin^3\theta d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\mu_0 J}{4\pi a}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 J}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \quad (4.2.4)$$

а) Для точки напротив конца полубесконечного проводника $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 0$ и тогда общий ответ в виде (4.2.4) упростится до вида:

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi a}.$$

б) Если магнитную индукцию ищем в точке, равноудаленной от концов провода, то $\cos\theta_2 = \cos(180 - \theta_1)$, т.е. окончательный ответ будет выглядеть как

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi a}\cos\theta_1.$$

Подставляя числовые значения в (4.2.4), получим окончательный ответ:

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20}{4\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}}\left(\cos 60^0 - \cos 120^0\right) = 31{,}8 \text{ Тл}.$$

Задачи

4.2.01. С помощью закона Био–Савара–Лапласа найти магнитную индукцию в центре витка радиуса $R = 100$ мм, по которому циркулирует ток силы $J = 1$ А.

4.2.02. По круговому витку радиуса $R = 100$ мм циркулирует ток силы $J = 1$ А. Найти магнитную индукцию на оси витка на расстоянии $b = 100$мм от его центра.

4.2.03. По круглому прямому проводу радиуса R течет ток постоянной плотности j. Найти выражение для магнитной индукции в точке, положение которой относительно оси провода определяется перпендикулярным к этой оси радиус–вектор **r**. Рассмотреть случаи, когда точка лежит внутри и вне провода.

4.2.04. Определить магнитную индукцию в центре проволочной квадратной рамки со стороной $a = 10$ см, если по рамке проходит ток $J = 2$ А.

4.2.05. По двум длинным параллельным проводникам текут в одинаковых направлениях токи, причем $J_1 = 2J_2$. Расстояние между ними равно a. Определить положение точек, в которых магнитное поле равно нулю.

4.2.06. Вдоль по стенке цилиндрической трубки идет постоянный ток силы J. Какова магнитная индукция внутри и вне трубы?

4.2.07. Найти магнитную индукцию в центре равностороннего треугольника со стороной a, обтекаемого током J.

4.2.08. Найти магнитную индукцию в точке, отстоящей на 2 см от бесконечно длинного проводника, по которому течет ток в 5 А. Получить общую формулу для B(r).

4.2.09. Для параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи $J = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$см друг от друга. Определить магнитную индукцию в точке, отстоящей от одного проводника на $r_1 = 5$ см, от другого – на $r_2 = 12$ см.

4.1.10. Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус каждого витка 2 см и токи, текущие по виткам, $J_1 = J_2 = 5$ А. Найти магнитную индукцию в центре этих витков.

4.3. Магнетизм в веществе.

Теоретический минимум

Причина намагничивания заключается в том, что во всех веществах существуют мельчайшие электрические токи (молекулярные токи). Магнитный момент кругового тока

$$\mathbf{p}_m = J\mathbf{S}. \qquad (4.3.1)$$

Здесь $\mathbf{S} = S \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости витка с током J, направление вектора **n** определяется правилом правого винта. S — площадь молекулярного тока.

Основная величина, характеризующая магнитное состояние вещества, называется намагниченностью и определяется как магнитный момент единицы объёма вещества:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_m}{V}.$$

Для токов намагничивания можно записать

$$J_m = \oint_\ell (\mathbf{M}d\mathbf{l}) \qquad (4.3.2)$$

Уравнения Максвелла для магнетика записываются так:

$$\oiint_S (\mathbf{B}d\mathbf{S}) = 0 \qquad (4.3.3)$$

$$\oint_\ell (\mathbf{B}d\mathbf{l}) = \mu_0 (J + J_m) \qquad (4.3.4)$$

Уравнение (4.3.4) можно записать, используя соотношение (4.3.2):

$$\oint_\ell \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right)d\mathbf{l} = J. \qquad (4.3.5)$$

Выражение в скобках (4.3.5) принято называть напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \qquad (4.3.6)$$

Теперь магнитную индукцию можно представить через напряженность:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

или, поскольку для изотропных магнетиков

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества, то

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}.$$

Здесь $1 + \chi = \mu$ – магнитная проницаемость вещества.

Сила взаимодействия двух элементов тока в магнетике определяется законом Ампера:

$$d\mathbf{F}_{12} = \mu_0 \mu \frac{J_1 J_2 \left[d\mathbf{l}_2 \left[d\mathbf{l}_1 \mathbf{r}_{12}\right]\right]}{r_{12}^3}.$$

Сила, действующая на ток в магнитном поле внутри магнетика

$$d\mathbf{F} = J[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$W = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu_0 \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Примеры решения задач

Пример 9. В соленоид длиной $\ell = 0{,}1$ м, имеющий $n = 300$ витков, введен магнитный сердечник. По соленоиду проходит ток $J = 1$ А. Найти намагниченность железа внутри соленоида, если его магнитные свойства выражаются графиком B = f(H). (рис. 4.11).

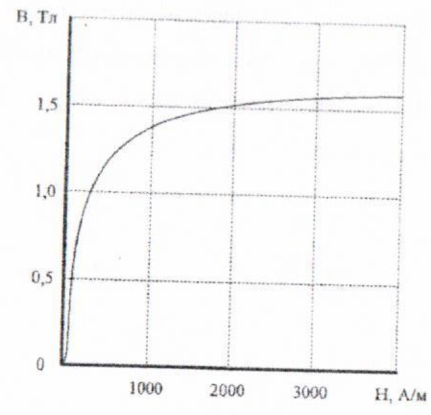

Рис. 4.11

Решение. Намагниченность вещества определяется как

$$M = \chi H. \qquad (4.3.6)$$

Напряженность H можно найти так:

$$H = J\frac{n}{\ell} = 3\cdot 10^3 A/м.$$

Зная значение H, по графику можно найти величину магнитной индукции B = 1,6 Тл. Теперь найдем $\chi = \mu - 1$. Так как $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$, то $\chi = \left(\frac{B}{\mu_0 H} - 1\right)$.

Подставляя это выражение для χ в формулу (4.3.6), получим окончательный ответ:

$$M = \left(\frac{B}{\mu_0 H} - 1\right)H = \left(\frac{1{,}6}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^3} - 1\right)\cdot 3\cdot 10^3 = 1{,}27\cdot 10^6 A/м.$$

Задачи

4.3.01. Замкнутый железный сердечник длиною 50 см имеет обмотку в 1000 витков. По обмотке течет ток силой 1 А. Какой ток надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

4.3.02. Определить магнитную индукцию в замкнутом железном сердечнике тороида длиной 20,9 см, если число витков обмотки тороида равно 1500. Найти магнитную проницаемость материала сердечника при этих условиях.

4.3.03. Сколько ампер–витков потребуется для того, чтобы внутри соленоида малого диаметра и длиной 30 см объёмная плотность энергии магнитного поля была равна 1,75 Дж/м^2.

4.3.04. Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле, индукция которого равна 1 Тл. По проводу длиною в 70 см, помещенному перпендикулярно силовым линиям, течёт ток 70 А. Найти силу, действующую на провод.

4.3.05. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на некотором расстоянии друг от друга. По проводникам текут токи, равные по величине и по направлению. Найти силу тока, текущего по каждому из проводников, если известно, что для того чтобы раздвинуть эти проводники на вдвое

большее расстояние, пришлось совершить работу (на единицу длины проводников), равную 5 мДж/см.

4.3.06. Индукция магнитного поля в железном стержне B = 1,7 Тл. Определить значение вектора намагниченности M в нем, если магнитные свойства его выражаются графиком (см. рис.).

4.3.07. По соленоиду течет ток I = 5 А. Длина соленоида 1 м, число витков N = 500, площадь поперечного сечения 50 см^2. В соленоид вставлен железный сердечник (график зависимости B от H дан на рис.). Найти энергию магнитного поля соленоида.

4.3.08. Однослойная обмотка тороида без сердечника выполнена из проволоки диаметром 0,6 мм. Длина тороида 60 см (считая по оси тороида), площадь поперечного сечения 15 см^2, по обмотке течет ток 2 А. За время $5\cdot 10^{-4}$ с в обмотке выделяется количество тепла, численно равное энергии магнитного поля внутри тороида. Найти напряжение, поданное на обмотку тороида.

4.3.09. Железный сердечник длиною 50,2 см с воздушным зазоров длиной 0,1 см имеет обмотку из 20 витков. Какой ток должен протекать по этой обмотке, чтобы в зазоре получить индукцию в 1,2 Тл?

4.3.10. На железном сердечнике в виде тора диаметром d = 500 мм имеется обмотка с общим числом витков N = 1000. В сердечнике сделан поперечный прорез, в результате чего образовался воздушный зазор шириной b = 1,0 мм. При токе в обмотке силой J = 0,85 А напряженность поля в зазоре $H = 6{,}0\cdot 10^5$ А/м. Определить магнитную проницаемость железа при этих условиях.

4.4. Электромагнитная индукция.

Теоретический минимум

Основной закон электромагнитной индукции гласит: ЭДС индукции, возникающая в контуре, равна скорости изменения магнитного потока, сцеплённого с этим контуром:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (4.4.1)$$

где N – число витков контура, dΦ – изменение магнитного потока через площадку dS:

$$d\Phi = (\mathbf{B}d\mathbf{S}) = BdS\cos\alpha. \qquad (4.4.2)$$

Изменение магнитного потока может быть обусловлено током, текущим в самом контуре (явление самоиндукции). Так как $N\cdot\Phi = L\cdot J$, то

$$\varepsilon_{си} = -L\frac{dJ}{dt}, \qquad (4.4.3)$$

где L – индуктивность контура.

Примеры решения задач

Пример 10. Пусть есть два длинных параллельных провода, по которым течет ток J в разных направлениях. Радиус каждого провода а, расстояние между осями d. Вычислить индуктивность такой двухпроводной линии, для отрезка линии l (рис. 4.12).

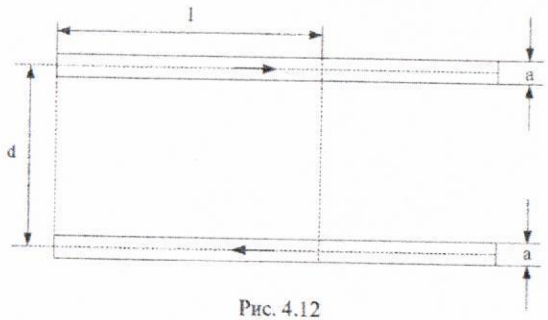

Рис. 4.12

Решение. Так как по определению $L = \Phi/J$, то необходимо сначала

рассчитать поток Φ, но из определения магнитного потока (4.4.2) следует $\Phi = \int(\mathbf{B}d\mathbf{S})$. Значит, для нахождения индуктивности L необходимо найти B.

Рассмотрим магнитное поле одного провода. **Внутри** провода (0 < x < a) магнитная индукция может быть найдена по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\oint_l(\mathbf{B}d\mathbf{l}) = \mu_0\iint_S(\mathbf{j}d\mathbf{S}).$$

Так как $j = \dfrac{J}{\pi a^2}$, то $B_i = \dfrac{\mu_0\pi x^2}{\pi a^2 2\pi x} = \dfrac{\mu_0 J}{2\pi a^2}x$.

Аналогично найдём магнитную индукцию B_ℓ вне провода (x > a) :

$$B_\ell = \frac{\mu_0 J}{2\pi x}.$$

Вычислим магнитный поток через площадь, ограниченную осями проводов, для отрезка линии длины ℓ:

$$\Phi_i = \frac{\mu_0 J\ell}{2\pi a^2}\int_0^a xdx = \frac{\mu_0}{4\pi}\ell J;$$

вне провода

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 J\ell}{2\pi}\int_0^d\frac{dx}{x} = \mu_0\frac{J\ell}{2\pi}\ell n\frac{d}{a}.$$

Так как токи в обоих проводах направлены противоположно, то направления полей, создаваемых обоими проводами между их осями, одинаковы. Поэтому полный поток Φ, создаваемый обоими проводами, будет в два раз больше потока от одного провода:

$$\Phi = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ell n\frac{d}{a}\right)\ell J.$$

Отсюда получаем $L = \dfrac{\Phi}{J}$, т.е. окончательный ответ представляется в виде:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ell n\frac{d}{a}\right)\ell.$$

Задачи

4.4.01. Рассчитать индуктивность соленоида длины ℓ, сечением S с числом витков N.

4.4.02. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит N = 1200 витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока J = 4 А магнитный поток Ф = 6 мкВб. Определить индуктивность соленоида и энергию магнитного поля соленоида.

4.4.03. Кольцо из проволоки сопротивлением R = 1 мОм находится в однородном магнитном поле (B = 0,4 Тл). Плоскость кольца составляет угол $\varphi = 90^0$ с линиями индукции. Определить заряд, который протечет по кольцу, если его выдернуть из поля. Площадь кольца S = 10 см^2.

4.4.04. Две длинные катушки намотаны на один сердечник. Коэффициенты самоиндукции этих катушек: L_1 = 0,9 Гн, L_2 = 0,1 Гн. Определить, во сколько раз число витков первой катушки больше, чем второй.

4.4.05. Квадратная рамка со стороной a = 20 см расположена в магнитном поле так, что нормаль в рамке образует угол $\alpha = 60^0$ с направлением поля. Магнитное поле изменяется с течением времени по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0{,}2$ Тл и ω = 314 с$^{-1}$. Определить ЭДС в рамке в момент времени t = 4 с.

4.4.06. Квадратная рамка со стороной a = 1 м движется с некоторой постоянной скоростью V в направлении, перпендикулярном к бесконечному длинному проводнику, лежащему в плоскости рамки параллельно одной из сторон. По проводнику проходит ток силой J = 10 А. В некоторый момент времени расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки x = 1 м. Какова должна быть скорость V, чтобы в этот момент в рамке индуцировалась ЭДС, равная 10^{-4} В?

4.4.07. Проволочная рамка расположена перпендикулярно магнитному полю, индукция которого изменяется по закону $B = B_0\cos(\omega t)$, где B_0 = 0,5 Тл, ω = 1 с$^{-1}$. Определить величину ЭДС, индуцируемую в контуре в момент времени t = 2,3 с. Площадь рамки $S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2.

4.4.08. Сколько витков имеет катушка, индуктивность которой L = 0,001 Гн, если при силе тока J = 1 А магнитный поток сквозь катушку Ф = 200 мВб?

4.4.09. Имеется соленоид с железным сердечником длиной 50 см, площадью поперечного сечения 10 см^2 и числом витков 1000. Найти индуктивность этого соленоида, если по обмотке соленоида течёт ток J = 0,1 А.

4.4.10. Между полюсами электромагнита помещена катушка так, что оси катушки и полюсных наконечников магнита совпадают. Площадь поперечного сечения катушки S = 3,0 мм^2, число витков N = 60. При повороте катушки на 180° через соединенный с ней баллистический гальванометр протекает заряд q = 4,5 мкКл. Определить напряженность поля Н между полюсами. Сопротивление катушки, гальванометра и соединительных проводов R = 40 Ом.

4.5. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях.

Теоретический минимум

Сила **F**, действующая на заряд q, движущийся со скоростью **V** в магнитном поле с индукцией **B** (сила Лоренца), выражается формулой

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{VB}], \qquad (4.5.1)$$

или в скалярной форме

$$F = qVB\sin\alpha, \qquad (4.5.2)$$

где α — угол, образованный вектором скорости **V** движущейся частицы и вектором **B** индукции магнитного поля.

Примеры решения задач

Пример 11. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 25$ мТл. Определить: 1) радиус R кривизны траектории протона; 2) частоту ω вращения протона в магнитном поле. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции.

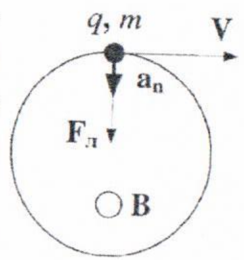

Рис. 4.13

Решение. Радиус кривизны траектории протона определим, исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле протон действует сила Лоренца $F_л$. Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, по второму закону Ньютона, сообщает протону нормальное ускорение a_n : $F_л = ma_n$ (рис. 4.13). Подставив сюда выражение для силы Лоренца (4.5.2) и для нормального ускорения, получим

$$eVB\sin\alpha = mV^2/R, \qquad (4.5.3)$$

где e, V, m — заряд, скорость, масса протона; B — индукция магнитного поля; R — радиус кривизны траектории; α — угол между направлениями векторов скорости **V** и индукции **B** (в нашем случае $\mathbf{V}\perp\mathbf{B}$ и $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$).

Из формулы (4.5.3) найдем

$$R = \frac{mV}{eB} \qquad (4.5.4)$$

Входящий в выражение (4.5.4) импульс mV выразим через кинетическую энергию E электрона:

$$mV = \sqrt{2mE} \qquad (4.5.5)$$

Но кинетическая энергия протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется равенством $E = eU$. Подставив это выражение в формулу (4.5.5), получим $mV = \sqrt{2meU}$.

Тогда выражение (4.5.4) для радиуса кривизны приобретает вид

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}. \qquad (4.5.6)$$

После вычисления по формуле (4.5.6) найдем $R = 0{,}18$ мм.

Для определения частоты вращения воспользуемся формулой связывающей частоту со скоростью и радиусом кривизны траектории,

$$\omega = \frac{V}{R}$$

Подставив R из выражения (4.5.4) в эту формулу, получим

$$\omega = \frac{eB}{m}$$

Произведя вычисления, найдем $\omega = 24 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.

Пример 12. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10$ кВ/м) и магнитное ($B = 0{,}1$ Тл) поля. Найти отношение заряда альфа-частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Решение. Для того чтобы найти отношение заряда q альфа-частицы к ее массе m, воспользуемся связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии частиц:

$$qU = \frac{mV^2}{2},$$

откуда

$$\frac{q}{m} = \frac{V^2}{2U}. \qquad (4.5.7)$$

Скорость V альфа-частицы найдем из следующих соображений. В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

а) сила Лоренца $\mathbf{F}_л = q[\mathbf{VB}]$, направленная перпендикулярно скорости $\mathbf{V}$ и вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$;

б) сила, действующая со стороны электрического поля $\mathbf{F_K} = q\mathbf{E}$, сонаправленная с вектором напряженности $\mathbf{E}$ электростатического поля ($q > 0$).

Альфа-частица не будет испытывать отклонения от прямолинейной траектории, если результирующая сила $\mathbf{F}_{рез} = \mathbf{F}_л + \mathbf{F}_k$, действующая на частицу, будет равна нулю. Это означает, что электростатическая сила и сила Лоренца равны по величине

$$qE = qVB,$$

откуда

$$V = \frac{E}{B}$$

Подставив это выражение скорости в формулу (4.5.7), получим

$$\frac{q}{m} = \frac{E^2}{2UB^2}. \qquad (4.5.8)$$

Вычисления по формуле (4.5.8) дают ответ: q/m = 48,1 МКл/кг.

Задачи

4.5.01 Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, созданное в среде. В результате взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны R траектории начала и конца пути?

4.5.02 Протон с кинетической энергией E = 500 кэВ влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции (B = 1 Тл). Какова должна быть минимальная протяженность l поля в направлении, по которому летел протон, чтобы оно изменило направление движения протона на противоположное?

4.5.03 Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл, стал двигаться по окружности радиусом R = 5 см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

4.5.04 Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом R_1 = 5 см, второй ион — по окружности радиусом R_2 = 2,5 см. Найти отношение m_1/m_2 масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

4.5.05 В однородном магнитном поле с индукцией B = 100 мкТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость V электрона, если шаг h винтовой линии равен 20 см, а радиус R = 5 см.

4.5.06 Электрон влетает в однородное магнитное поле индукцией B = 0,6 Тл со скоростью V = 8 Мм/с. Вектор скорости составляет угол α = 60° с направлением линий индукции. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

4.5.07 Перпендикулярно магнитному полю с индукцией B = 0,1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью E = 100 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

4.5.08 Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 800$ В, влетает в однородные, скрещенные под прямым углом магнитное ($B = 50$ мТл) и электрическое поля. Определить напряженность E электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно.

4.5.09 Заряженная частица движется по окружности радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Вычислить промежуток времени Δt, в течение которого должно действовать электрическое поле, для того чтобы кинетическая энергия частицы возросла вдвое.

4.5.10 Протон влетает со скоростью $V = 100$ км/с в область пространства, где имеются электрическое ($E = 210$ В/м) и магнитное ($B = 3,3$ мТл) поля. Напряженность **E** электрического поля и магнитная индукция **B** совпадают по направлению. Определить ускорение протона для начального момента движения в поле, если направление вектора его скорости V: 1) совпадает с общим направлением векторов **E** и **B**; 2) перпендикулярно этому направлению.

W

Контрольная работа № 4. 2

W

Студен должен решить 5 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра своей зачетной книжки.

Вариант	Номер задачи				
1	4.1.01	4.2.02	4.3.04	4.4.05	4.5.07
2	4.1.02	4.2.03	4.3.05	4.4.06	4.5.08
3	4.1.03	4.2.04	4.3.06	4.4.07	4.5.09
4	4.1.04	4.2.05	4.3.07	4.4.08	4.5.10
5	4.1.05	4.2.06	4.3.08	4.4.09	4.5.01
6	4.1.06	4.2.07	4.3.09	4.4.10	4.5.02
7	4.1.07	4.2.08	4.3.10	4.4.01	4.5.03
8	4.1.08	4.2.09	4.3.01	4.4.02	4.5.04
9	4.1.09	4.2.10	4.3.02	4.4.03	4.5.05
10	4.1.10	4.2.01	4.3.03	4.4.04	4.5.06