

1.1 Решение задачи оптимизации схемы транспортировки строительных материалов на участки строительства

Если требуется решение вопросов о выборе схемы прикрепления поставщиков и потребителей строительной продукции, используются модели транспортного типа. Классическая транспортная задача заключается в планировании прикрепления поставщиков к потребителям продукции и формулируется следующим образом: однородный продукт, находящийся в m пунктах производства в количестве P_1, P_2, \dots, P_m , требуется доставить в n пунктов потребления. Потребность продукции в этих пунктах равна S_1, S_2, \dots, S_n .

Экономико-математическая модель задач транспортного типа может быть представлена следующим образом.

Целевая функция - затраты на перевозку продукта должны быть минимальными:

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \max. \quad (1)$$

Ограничения:

- вся продукция с предприятий поставщиков отправляется потребителям:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = P_i; \quad i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

- все потребители обеспечены продукцией:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = S_j; \quad j = \overline{1, n}; \quad (3)$$

- мощность поставщиков равна потребности в продукции (условие закрытости):

$$\sum_{j=1}^m P_i = \sum_{j=1}^n S_j. \quad (4)$$

Модификации транспортной задачи позволяют учитывать особенности различных хозяйственных условий, а именно:

1) *запрет каких-либо перевозок*

Если между поставщиками и потребителями продукции не существует маршрутов (связей) или ими нельзя пользоваться, можно задать стоимость перевозки c_{ij} , намного превышающую стоимость остальных перевозок (например, 99999);

2) *ограниченность пропускных способностей коммуникаций*

Это условие учитывается введением ограничений, лимитирующих наибольшее значение объема перевозки, по конкретному маршруту:

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (5)$$

где d_{ij} - пропускная способность транспортной линии;

3) *нарушение условия равенства производства и потребления (открытая транспортная задача)*

Если вся продукция не нужна потребителям, т.е. $\sum_i P_i > \sum_j S_j$, то ограничение на продукцию, отправляемую из пунктов производства, принимает вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq P_i; \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Транспортная задача сводится к классическому виду путем введения фиктивного потребителя S_{m+1} с потребностью

$$S_{m+1} = \sum_i P_i - \sum_j S_j. \quad (7)$$

В целевой функции должны учитываться затраты, связанные с хранением и с потерей излишней продукции в каждом пункте производства.

Если суммарный объем производства меньше суммарного объема потребления, необходимо учитывать не только транспортные расходы, но и ущерб от недопоставок.

В этой задаче

$$\sum_i P_i \leq \sum_j S_j \quad (8)$$

и ограничения на продукцию, поступающую в каждый пункт потребления, будут

$$\sum_i \alpha_{ij} \leq S_j; \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Этот случай также сводится к классической транспортной задаче путем введения фиктивного поставщика с объемом производства

$$P_m = \sum_j S_j - \sum_i P_i. \quad (10)$$

Задача по планированию перевозок формулируется следующим образом: необходимо составить план транспортирования строительных материалов, минимизирующий затраты на перевозки и издержки, связанные с тем, что часть продукции остается у поставщиков.

Исходные данные представлены в табл. 1.

Таблица 1. Исходные данные для расчета

| Потребители | Поставщики | | | Потребность в материалах |
|----------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|
| | база номер 1 | база номер 2 | база номер 3 | |
| Объект номер 1 | 10 | 12 | 8 | 100 |
| Объект номер 2 | 11 | 7 | 13 | 120 |
| Объект номер 3 | 15 | 13 | 9 | 200 |

| | | | | |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Объект номер 4 | 8 | 11 | 8 | 160 |
| Мощности поставщиков, т | 210 | 340 | 200 | |

В соответствующих клетках таблицы задана стоимость перевозок 1 т груза от поставщиков к потребителям - c_{ij} , тыс. р. за 1 т. Потери, связанные с хранением продукции у поставщиков составляют: 5, 7, и 4 тыс. р. за 1 т для базы номер 1, 2 и 3 соответственно.

Решение задачи с использованием симплекс-метода

Этап 1. Проверка условия равенства производства и потребления: совокупная потребность – 580 т, совокупная мощность – 750 т. Следовательно, задача является открытой. Для сведения ее к классическому (закрытому) виду необходимо ввести фиктивного потребителя (объект № 5), на который будет распределен остаток материалов на базах.

Этап 2. Построение математической модели

Введем следующие обозначения:

x_{ij} – количество груза, перевозимого на i -ый объект с j -той базы;

$F(x)$ - совокупная стоимость доставки и хранения.

Тогда целевая функция задачи будет представлена формулой (11), ограничения к ней - формулами (12).

$$F(x) = 10x_{11} + 12x_{12} + 8x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 13x_{23} + 15x_{31} + 13x_{32} + 9x_{33} + 8x_{41} + 11x_{42} + 8x_{43} + 5x_{51} + 7x_{52} + 4x_{53} \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 210, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 340, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 210, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 120, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 160, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Этап 3. Построение симплекс-матрицы

Пример построения представлен в табл. 2.

Таблица 2. Симплекс-матрица транспортной задачи

| Номер строки | X ₁ ₁ | X ₁ ₂ | X ₁ ₃ | X ₂ ₁ | X ₂ ₂ | X ₂ ₃ | X ₃ ₁ | X ₃ ₂ | X ₃ ₃ | X ₄ ₁ | X ₄ ₂ | X ₄ ₃ | X ₅ ₁ | X ₅ ₂ | X ₅ ₃ | Вид связи | Правая часть ограничения |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------|--------------------------|
| F | 10 | 12 | 8 | 11 | 7 | 13 | 15 | 13 | 9 | 8 | 11 | 8 | 5 | 7 | 4 | → | min |
| 1 | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | = | 210 |
| 2 | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | = | 340 |
| 3 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | = | 200 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | = | 100 |
| 5 | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | = | 120 |
| 6 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | = | 200 |
| 7 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | = | 160 |

В Excel необходимо представить симплекс-матрицу в виде формул (рис.1).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
|----|---------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------|-------------|
| 1 | | x11 | x12 | x13 | x21 | x22 | x23 | x31 | x32 | x33 | x41 | x42 | x43 | x51 | x52 | x53 | Сумма | Вид связи | Ограничение |
| 2 | Решение | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Функция | =10*B2 | =12*C2 | =8*D2 | =11*E2 | =7*F2 | =13*G2 | =15*H2 | =13*I2 | =9*J2 | =8*K2 | =11*L2 | =8*M2 | =5*N2 | =7*O2 | =4*P2 | =СУММ(B3:P3) | → | min |
| 4 | 1 | =B2 | | | =E2 | | | =H2 | | | =K2 | | | =N2 | | | =СУММ(B4:P4) | = | 210 |
| 5 | 2 | | =C2 | | | =F2 | | | =I2 | | | =L2 | | | =O2 | | =СУММ(B5:P5) | = | 340 |
| 6 | 3 | | | =D2 | | | =G2 | | | =J2 | | | =M2 | | | =P2 | =СУММ(B6:P6) | = | 200 |
| 7 | 4 | =B2 | =C2 | =D2 | | | | | | | | | | | | | =СУММ(B7:P7) | = | 100 |
| 8 | 5 | | | | =E2 | =F2 | =G2 | | | | | | | | | | =СУММ(B8:P8) | = | 120 |
| 9 | 6 | | | | | | | =H2 | =I2 | =J2 | | | | | | | =СУММ(B9:P9) | = | 200 |
| 10 | 7 | | | | | | | | | =K2 | =L2 | =M2 | | | | | =СУММ(B10:P10) | = | 160 |

Рис. 1. Симплекс-матрица задачи в Excel

Решение задачи в системе электронных таблиц EXCEL осуществляется с помощью пункта меню «Сервис»-«Поиск решения» (рис.3). Для того, чтобы отразить ограничение неотрицательности, необходимо нажать кнопку «Параметры» и установить флажок «Неотрицательные значения».

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☒ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-
-
-

Рис.2. Диалоговое окно «Поиск решения»

При нажатии кнопки «Выполнить» появятся результаты решения, представленные в табл. 3.

Таблица 3. Результаты решения

| Номер строки | X ₁₁ | X ₁₂ | X ₁₃ | X ₂₁ | X ₂₂ | X ₂₃ | X ₃₁ | X ₃₂ | X ₃₃ | X ₄₁ | X ₄₂ | X ₄₃ | X ₅₁ | X ₅₂ | X ₅₃ | Правая часть ограничения |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------------|
| Решение | 0 | 5 | 95 | 0 | 120 | 0 | 0 | 95 | 105 | 160 | 0 | 0 | 50 | 120 | 0 | |
| F | 0 | 61 | 759 | 0 | 840 | 0 | 0 | 1234 | 946 | 1280 | 0 | 0 | 250 | 840 | 0 | 6210 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 210 |
| 2 | 0 | 5 | 0 | 0 | 120 | 0 | 0 | 95 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 120 | 0 | 340 |
| 3 | 0 | 0 | 95 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 105 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 200 |
| 4 | 0 | 5 | 95 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 120 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 95 | 105 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 200 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 160 |

По результатам расчета можно сделать следующие выводы. Поскольку $x_{51}=50$, $x_{52}=120$ - на базе № 1 остается 50 ед. продукции, на базе № 2 - 120 ед. С учетом того, что потери, связанные с хранением нереализованной продукции учтены в целевой функции, оптимальная стоимость перевозок составит:

$$6210 - 50 \times 5 - 120 \times 7 = 5120 \text{ тыс.р.}$$

При этом на объект № 1 продукция доставляется с базы № 2 в объеме 5

и с базы № 3 в объеме 95; на объект № 2 - с базы № 2 в объеме 120; на объект № 3 - с базы № 2 в объеме 95 и с базы № 3 в объеме 105; на объект № 4 - с базы № 1 в объеме 160.

1.2 Выбор варианта строительства автозаправочной станции с применением элементов теории массового обслуживания

Обоснование эффективности вариантов строительства объекта можно производить различными методами, исходя из критерия эффективности. В курсовой работе предлагается выбрать наиболее эффективный вариант строительства автозаправочной станции по критерию максимальной эффективности обслуживания клиентов. Для решения такой задачи целесообразно рассмотреть автозаправочную станцию как систему массового обслуживания.

Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой *обслуживающей системы*, которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в систему *заявок*. Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в очередях в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки.

Таким образом, система массового обслуживания состоит из *блока обслуживания, потока заявок и очереди* в ожидании обслуживания.

Блоки обслуживания в различных системах различаются между собой по многим показателям.

Вторая составляющая систем массового обслуживания входной поток заявок. Обычно предполагают, что входной поток подчиняется некоторому вероятностному закону для длительности интервалов между двумя последовательно поступающими заявками, причем закон распределения считается не изменяющимся в течение некоторого достаточно продолжительного времени. Источник заявок неограничен.

Третья составляющая — дисциплина очереди. Эта характеристика описывает порядок обслуживания заявок, поступающих на вход системы. Чаще

всего применяется порядок обслуживания: «первым пришел — первым обслужен». Но возможны и другие порядки: «первым пришел — последним обслужен», случайный порядок обслуживания, обслуживание с приоритетами.

В качестве примера применения системы массового обслуживания рассмотрим задачу проектирования автозаправочной станции (АЗС). Пусть необходимо выбрать один из нескольких вариантов строительства АЗС. Автомобили прибывают на станцию случайным образом и, если не могут быть обслужены сразу, становятся в очередь. Дисциплина очереди — «первым пришел — первым обслужен». Предположим, что для простоты во всех вариантах рассматривается только одна бензоколонка, а вариант от варианта отличается лишь мощностью.

Предположим, статистические наблюдения позволили получить величину среднего количества клиентов μ , обслуживаемых в единицу времени. Обратная величина $1/\mu$ определяет среднее время обслуживания одного клиента.

Величина λ интерпретируется как среднее число клиентов, появляющихся в АЗС за единицу времени, а обратная ей величина $1/\lambda$ — как среднее время появления одного клиента. Отметим, что в отличие от среднего количества автомобилей, прибывающих в единицу времени на АЗС, т. е. величины λ , величина μ зависит от выбранного нами варианта строительства АЗС. Поэтому имеет смысл рассматривать те проекты АЗС, для которых среднее время обслуживания $1/\mu$ меньше среднего промежутка времени $1/\lambda$ между прибытием клиентов, ибо в противном случае очередь будет постоянно расти. В том же случае, когда $1/\mu < 1/\lambda$, через некоторое время после начала работы система перейдет в *стационарный режим*, т. е. ее показатели не будут зависеть от времени.

Обозначив отношение λ/μ через p , можно показать, что стационарный режим устанавливается при $p < 1$. Величину p называют *нагрузкой системы*. Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по следующим формулам:

- ♦ *коэффициент простоя системы*

$$E_1 = 1 - p \quad (13)$$

- ♦ *среднее число клиентов в системе*

$$E_2 = \frac{p}{1 - p} \quad (14)$$

- ♦ *средняя длина очереди*

$$E_3 = \frac{p^2}{1 - p} \quad (15)$$

- ♦ *среднее время пребывания клиента в системе*

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (16)$$

- ♦ *время пребывания клиента в очереди*

$$E_5 = \frac{P}{\mu - \lambda} \quad (17)$$

На основе анализа значений приведенной системы показателей, характеризующих систему массового обслуживания, делается вывод о целесообразности выбора варианта строительства АЗС.

Например, для общих условий постановки задачи по проектированию АЗС известно, что средний интервал между прибытиями автомобилей составляет 4 мин. Варианты строительства АЗС имеют следующие средние времена обслуживания автомобилей: 5 мин; 3,5 мин; 2 мин; 1 мин; 0,5 мин. Результаты расчетов по исследованию различных вариантов строительства АЗС сведены в табл. 4

Таблица 4. Результаты расчетов по исследованию вариантов строительства

| Характеристики СМО | Вариант1 | Вариант2 | Вариант3 | Вариант 4 | Вариант 5 |
|---|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| Исходные данные | | | | | |
| Среднее время появления одного клиента, $1/\lambda$ | 4 ,000 | 4 ,000 | 4 ,000 | 4 ,000 | 4 ,000 |
| Среднее время обслуживания одного клиента, $1/\mu$ | 5,000 | 3,500 | 2 ,000 | 1,000 | 0,500 |
| Расчетные показатели | | | | | |
| Среднее число клиентов, появляющееся в единицу времени , λ | 0,250 | 0,250 | 0,250 | 0,250 | 0,250 |
| Среднее количество клиентов, обслуживаемых в единицу времени, μ | 0,200 | 0,286 | 0,500 | 1,000 | 2,000 |
| Нагрузка системы, ρ | 1,250 | 0,875 | 0,500 | 0,250 | 0,125 |
| Коэффициент простоя системы, E_1 | -0,250 | 0,125 | 0,500 | 0,750 | 0,875 |
| Среднее число клиентов в системе , E_2 | -5,000 | 7,000 | 1,000 | 0,333 | 0,143 |
| Средняя длина очереди , E_3 | -6,250 | 6,125 | 0,500 | 0,083 | 0,018 |
| Среднее время пребывания клиента в системе, E_4 | -20,000 | 27,477 | 4,000 | 1,333 | 0,571 |
| Время пребывания клиента в очереди , E_5 | -25,000 | 24,305 | 2,000 | 0,333 | 0,071 |

По результатам произведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

- первый вариант строительства АЗС не годен из-за того, что очередь в этом случае будет расти до бесконечности;

- второй вариант хорош по показателю загруженности оборудования $\rho = 0,875$ и, следовательно, малой средней доли простоя оборудования $E_1 = 0,125$, но при этом варианте возникают большие очереди и, следовательно, большие средние времена простоя автомобилей $E_4 = 27 \text{ мин } 48 \text{ с}$;

- третий вариант приводит к тому, что оборудование простаивает в среднем половину времени, но среднее число автомобилей в системе равно только 1, а средние потери времени равны 4 мин. при среднем времени обслуживания 2 мин;

- в остальных вариантах очереди практически нет, но большую часть времени оборудование простаивает, поэтому эти варианты целесообразно отбросить как неэффективные.

Окончательный выбор варианта проекта АЗС, очевидно, принадлежит лицу, принимающему решение (ЛПР), но предварительная рекомендация по результатам анализа может состоять в предложении третьего варианта, если исходить из того, что в стране наблюдается постоянная тенденция роста автомобильного парка в стране.

