ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

федеральное образовательное учреждение высшего

профессионального образования

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

(МИИТ)

ОДОБРЕНО:
Кафедра «Высшая и
прикладная математика»

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ф-та ТСиЗ

«__» ______2011г.

Составители: Блистанова Л.Д., д.ф.-м.н., проф., Голечков Ю.И., д.ф.-м.н., доц., Захарова М.В., к.ф.-м.н., доц., Сперанский Д.В., д.т.н., проф.

МАТЕМАТИКА

Задания на контрольные работы № 1 – 3

для студентов 1 курса заочной формы обучения специальностей:

271501.65 – Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей, специализации – ЖД, ЖУ, ЖМ, ЖТ;

190109.65 – Наземные транспортно-технологические средства, специализация– НС.

Москва 2011г.

Методические указания по выполнению контрольных работ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из сборника задач, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 7, в контрольной работе №1 решает задачи 1.1.77, 2.1.27, 2.1.57, 2.2.7, 3.1.27; в контрольной работе №2 – 6.2.7, 6.3.17, 7.1.17, 7.1.47, 7.2.47; в контрольной работе №3 – 8.2.7, 8.2.27, 8.2.77, 9.1.7, 9.1.67.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

1.1.81–1.1.90. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$ и объем пирамиды. Сделать чертеж.

1.1.71. A_1 (4; 2; 5), A_2 (0; 7; 2), A_3 (0; 2; 7), A_4 (1; 5; 0) .
1.1.72. A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4) .
1.1.73. A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), A_3 (2; 10; 10), A_4 (7; 5; 9) .
1.1.74. A_1 (3; 5; 4), A_2 (8; 7; 4), A_3 (5; 10; 4), A_4 (4; 7; 8) .
1.1.75. A_1 (10; 6; 6), A_2 (-2; 8; 2), A_3 (6; 8; 9), A_4 (7; 10; 3) .
1.1.76. A_1 (1; 8; 2), A_2 (5; 2; 6), A_3 (5; 7; 4), A_4 (4; 10; 9) .
1.1.77. A_1 (6; 6; 5), A_2 (4; 9; 5), A_3 (4; 6; 11), A_4 (6; 9; 3) .
1.1.78. A_1 (7; 2; 2), A_2 (5; 7; 7), A_3 (5; 3; 1), A_4 (2; 3; 7) .
1.1.79. A_1 (8; 6; 4), A_2 (10; 5; 5), A_3 (5; 6; 8), A_4 (8; 10; 7) .
1.1.80. A_1 (7; 7; 3), A_2 (6; 5; 8), A_3 (3; 5; 8), A_4 (8; 4; 1) .

2.1.21. Составить уравнение перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB, если $A(1,3)$; $B(3,1)$. Сделать чертеж.

2.1.22. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(1,1)$ параллельно прямой $2x+y-8=0$. Сделать чертеж.

2.1.23. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(2,1)$ перпендикулярно прямой $y=3x-1$. Сделать чертеж.

2.1.24. Составить уравнение перпендикуляра, проходящей через середину отрезка AB, если $A(2;-3)$; $B(4;-5)$. Сделать чертеж.

2.1.25. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(3;1)$ и параллельной прямой $x+y+5=0$. Сделать чертеж.

2.1.26. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(1;8)$ и параллельной прямой $5x-y+4=0$. Сделать чертеж.

2.1.27. Составить уравнение перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB, если $A(-4;2)$; $B(2;4)$. Сделать чертеж.

2.1.28. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(1;2)$ и параллельной прямой $x-2y-14=0$. Сделать чертеж.

2.1.29. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $A(1;3)$ и перпендикулярной к прямой $x+2y-3=0$. Сделать чертеж.

2.1.30. Составить уравнение перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB, если $A(3;-2)$; $B(5;6)$. Сделать чертеж.

2.1.51. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(2;3;-1)$ и $M_2(3;1;4)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой:
а) $A(5;-3;14)$; б) $B(5;14;-3)$; в) $C(-3;5;14)$; г) $D(-3;14;5)$;
д) $E(14;-3;5)$. Сделать чертеж.

2.1.52. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(1;1;-1)$ и $M_2(2;-1;3)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой:
а) $A(4;-5;11)$; б) $B(4;11;-5)$; в) $C(-5;4;11)$; г) $D(-5;11;4)$;
д) $E(11;-5;4)$. Сделать чертеж.

2.1.53. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(0;1;-1)$ и $M_2(1;2;-3)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой:
а) $A(3;4;-7)$; б) $B(3;-7;4)$; в) $C(4;3;-7)$; г) $D(4;-7;3)$;
д) $E(-7;4;3)$. Сделать чертеж.

2.1.54. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(2;0;-1)$ и $M_2(3;-1;2)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой:
а) $A(5;-3;8)$; б) $B(5;8;-3)$; в) $C(-3;5;8)$; г) $D(-3;8;5)$;
д) $E(8;-3;5)$. Сделать чертеж.

2.1.55. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(-1;0;4)$ и $M_2(1;1;1)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой
а) $A(5;3;-5)$; б) $B(5;-5;3)$; в) $C(3;5;-5)$; г) $D(3;-5;5)$;
д) $E(-5;5;3)$. Сделать чертеж.

2.1.56. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(0;-2;3)$ и $M_2(1;-1;2)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой
а) $A(3;1;0)$; б) $B(3;0;1)$; в) $C(1;3;0)$; г) $D(1;0;3)$;
д) $E(0;3;1)$. Сделать чертеж.

2.1.57. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(0;-2;3)$ и $M_2(1;-1;2)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой
а) $A(-1;-3;4)$; б) $B(-1;5;-3)$; в) $C(-3;-1;5)$; г) $D(-1;5;-3)$;
д) $E(5;-1;-3)$. Сделать чертеж.

2.1.58. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(1;1;1)$ и $M_2(-3;2;0)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой
а) $A(-11;4;-2)$; б) $B(-11;-2;4)$; в) $C(4;-11;-2)$; г) $D(-2;-11;4)$;
д) $E(-2;4;-11)$. Сделать чертеж.

2.1.59. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(2;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой
а) $A(5;7;-5)$; б) $B(5;-5;4)$; в) $C(4;5;-5)$; г) $D(4;-5;5)$;
д) $E(-5;5;4)$. Сделать чертеж.

2.1.60. Составить уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(2;-1;1)$ и $M_2(1;2;-1)$ и указать какая из т. A,B,C,D,E лежит на этой прямой а) $A(-1;8;-5)$; б) $B(-1;-5;8)$; в) $C(8;-1;-5)$; г) $D(8;-5;-1)$; д) $E(-5;-1;8)$. Сделать чертеж.

2.2.1. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5;\ 0)$ относятся как 2:1. Сделать чертеж.

2.2.2. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1;\ 0)$ вдвое меньше расстояния ее от прямой $x=-4$. Сделать чертеж.

2.2.3. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;\ 0)$ и от прямой $5x+8=0$ относятся, как 5:4. Сделать чертеж.

2.2.4. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4;\ 0)$, чем от точки $B(1;\ 0)$. Сделать чертеж.

2.2.5. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки $A(2;\ 0)$ и от прямой $2x+5=0$ относятся, как 4:5. Сделать чертеж.

2.2.6. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(3;\ 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26;\ 0)$. Сделать чертеж.

2.2.7. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;\ 2)$ и от прямой $y-4=0$. Сделать чертеж.

2.2.8. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноотстоит от оси ординат и от окружности $x^2+y^2=4x$. Сделать чертеж.

Замечание. Напомним, что за расстояние от точки A до фигуры Ф принимается наименьшее из расстояний между точкой A и точками фигуры Ф.

2.2.9. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2;\ 6)$ и от прямой $y+2=0$. Сделать чертеж.

2.2.10. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4;\ 0)$ втрое дальше, чем от начала координат. Сделать чертеж.

3.1.21–3.1.30. Систему линейных уравнений решить матричным методом и методом Гаусса (методом исключения неизвестных). Сделать проверку.

3.1.21. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$

3.1.22. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

3.1.23. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

3.1.24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

3.1.25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

3.1.26. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.1.27. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

3.1.28. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

3.1.29. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

3.1.30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Введение в математический анализ.
Производная и ее приложения.

6.2.1–6.2.10. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

6.2.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$

6.2.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

6.2.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

6.2.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctgx}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$

6.2.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

6.2.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg 2x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$

6.2.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

6.2.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2(x/2)}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

6.2.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

6.2.10.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\,\mathrm{ctg}3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

6.3.11–6.3.20. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

6.3.11. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

6.3.12. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

6.3.13. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

6.3.14. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$

6.3.15. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

6.3.16. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

6.3.17. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$

6.3.18. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \pi/4; \\ 2, & x>\pi/4. \end{cases}$

6.3.19. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$

6.3.20. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ \sqrt{x}, & 0<x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$

7.1.11–7.1.20. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

7.1.11. а) $y=x^2\sin 3x$; б) $\begin{cases} y=t+arctg2t, \\ x=t^3-6arcctgt \end{cases}$ при $t=1$;

в) $y=\left(tgx^3\right)^{\ln 4x}$.

7.1.12. а) $y=x^3\ln 4x$; б) $\begin{cases} y=3t-arctgt^2, \\ x=t^4+arcctgt \end{cases}$ при $t=\frac{1}{2}$;

в) $y=(\cos 2x)^{\sin 3x}$.

7.1.13. а) $y=x^4 tg2x$; б) $\begin{cases} y=t^3+arctg3t, \\ x=\frac{1}{3}t-arcctg3t \end{cases}$ при $t=\frac{1}{3}$;

в) $y=\left(\cos x^5\right)^{\sin 3x}$.

7.1.14. а) $y=x^5e^{4x}$; б) $\begin{cases} y=t-65arctgt^3, \\ x=t^2+arcctgt \end{cases}$ при $t=\frac{1}{2}$;

в) $y=(\cos 2x)^{tg3x}$.

7.1.15. а) $y=x^4 ctg5x$; б) $\begin{cases} y=t^5+\ln 25t, \\ x=\frac{1}{4}t-\arccos 3t \end{cases}$ при $t=\frac{1}{5}$;

в) $y=\left(\sin x^7\right)^{\sin 4x}$.

7.1.16. а) $y=x^3\sin 5x$; б) $\begin{cases} y=t+arctg3t, \\ x=t^2-2arcctgt \end{cases}$ при $t=1$;

в) $y=(\cos 3x)^{\sin 2x}$.

7.1.17. а) $y=x^4\ln 7x$; б) $\begin{cases} y=7t-arctgt^3, \\ x=t^5+arcctgt \end{cases}$ при $t=2$;

в) $y=(\cos 5x)^{\sin 7x}$.

7.1.18. а) $y=x^5 tg4x$; б) $\begin{cases} y=t^5+arctg4t, \\ x=\frac{5}{16}t-arcctg4t \end{cases}$ при $t=\frac{1}{2}$;

в) $y=\left(\cos x^4\right)^{\sin 8x}$.

7.1.19. а) $y=x^6e^{5x}$; б) $\begin{cases} y=t-17arctgt^2, \\ x=\frac{1}{20}t^5+arcctgt \end{cases}$ при $t=2$;

в) $y=(\cos 4x)^{tg6x}$.

7.1.20. а) $y=x^7 ctg10x$; б) $\begin{cases} y=t^2-\arcsin 5t, \\ x=\frac{2}{25}t+\arccos 5t \end{cases}$ при $t=\frac{1}{25}$;

в) $y=\left(\sin x^2\right)^{\sin 7x}$.

7.1.41–7.1.50. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталя.

7.1.41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{1-\sqrt{3}tgx}$.

7.1.42. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{1-tgx}$.

7.1.43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\ln(1-2x)}$.

7.1.44. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\ln x}$.

7.1.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

7.1.46. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln x$.

7.1.47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

7.1.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

7.1.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{e^x-1}$.

7.1.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1-x)}$.

7.2.41–7.2.50. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

7.2.41. $f(x)=x^3-12x+7;\quad [0;3]$.

7.2.42. $f(x)=x^5-(5/3)x^3+2;\quad [0;2]$.

7.2.43. $f(x)=(\sqrt{3}/2)x+\cos x;\quad [0;\pi/2]$.

7.2.44. $f(x)=3x^4-16x^3+2;\quad [-3;1]$.

7.2.45. $f(x)=x^3-3x+1;\quad [1/2;2]$.

7.2.46. $f(x)=x^4+4x;\quad [-2;2]$.

7.2.47. $f(x)=(\sqrt{3}/2)x-\sin x;\quad [0;\pi/2]$.

7.2.48. $f(x)=81x-x^4;\quad [-1;4]$.

7.2.49. $f(x)=3-2x^2;\quad [-1;3]$.

7.2.50. $f(x)=x-\sin x;\quad [-\pi;\pi]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных.

8.2.1–8.2.10. Найти неопределенные интегралы. В п. а) и б) результаты проверить дифференцированием.

8.2.1. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

8.2.2. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$;

в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.

8.2.3. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

8.2.4. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$; б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

8.2.5. а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

8.2.6. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.

8.2.7. а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; б) $\int x\ln(x^2+1)dx$;

в) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

8.2.8. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$; б) $\int x\sin x\cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-81}$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.

8.2.9. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $x^2\sin 4x dx$;

в) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

8.2.10. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x\ln^2 x dx$;

в) $\int \frac{(x^2-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

8.2.21–8.2.30. Вычислить определенные интегралы.

8.2.21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$ 8.2.22. $\int_0^1 x arctgx dx.$

8.2.23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx.$ 8.2.24. $\int_0^1 \frac{5x+1}{x^2+2x+1}dx.$

8.2.25. $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos^2 x dx.$ 8.2.26. $\int_1^2 \sqrt{x}\ln x dx.$

8.2.27. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$ 8.2.28. $\int_0^1 x\ln(1+x)dx.$

8.2.29. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.$ 8.2.30. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

8.2.71–8.2.80. Решить указанные задачи с помощью определенного интеграла.

8.2.71. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

8.2.72. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и осью Ox.

8.2.73. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\varphi)$.

8.2.74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\varphi$.

8.2.75. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

8.2.76. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy.

8.2.77. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=2/(1+x^2)$ и $y=x^2$.

8.2.78. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$.

8.2.79. Вычислить длину кардиоиды $r=3(1-\cos\varphi)$.

8.2.80. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

9.1.1–9.1.10. Найти производные функции двух переменных.

9.1.1. $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = u\sin(uv)$, где $u = \frac{y}{x}$, $v = x - y$.

9.1.2. $\frac{dz}{dt}$, если $z = v\cos(\frac{v}{u})$, где $u = t^2$, $v = \sin t$.

9.1.3. $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $xy^2z^3 - z^2 + xz - y + x = 0$.

9.1.4. $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = u^2 v \ln v$, где $u = xy$, $v = x + y$.

9.1.5. $\frac{dz}{dt}$, если $z = uv^2 \ln u$, где $u = t^3$, $v = \cos t$.

9.1.6. $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $xy^2z^2 + z^2x + x - 2y + 3 = 0$.

9.1.7. $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = u\sqrt{u^2 - v^2}$, где $u = x + 2y$, $v = -x + y$.

9.1.8. $\frac{dz}{dt}$, если $z = v\sqrt{u - v}$, где $u = \sin 2t$, $v = t^3$.

9.1.9. $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{z^2} - xy^2z^3 + xz - x = 0$.

9.1.10. $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = u\sqrt{1-uv}$, где $u = xy$, $v = x + 2y$.

9.1.61–9.1.70. Вычислить двойной интеграл.

9.1.61. $\iint\limits_D 2xydxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{pmatrix}$.

9.1.62. $\iint\limits_D xydxdy$; где область D ограничена параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$.

9.1.63. $\iint\limits_D xydxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{pmatrix}$.

9.1.64. $\iint\limits_D xy^2dxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{pmatrix}$.

9.1.65. $\iint\limits_D x^2ydxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 4 \end{pmatrix}$.

9.1.66. $\iint\limits_D xy^3dxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \end{pmatrix}$.

9.1.67. $\iint\limits_D x^2ydxdy$; где область D ограничена параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$.

9.1.68. $\iint\limits_D xy^2dxdy$; где область D ограничена параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$.

9.1.69. $\iint\limits_D (x+1)ydxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{pmatrix}$.

9.1.70. $\iint\limits_D (x^2+1)y^2dxdy$; где область D – прямоугольник $\begin{pmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \end{pmatrix}$.