Задачи по теории игр

Александр Цыплаков

21 июля 2008 г.

Глава 1

Теория принятия решений (индивидуальный рациональный выбор)

Задача 1 Пусть множество альтернатив имеет вид $\{a, b, c, d\}$. Предпочтения индивидуума на этом множестве удовлетворяют следующим свойствам: $a \succcurlyeq a$, $b \succcurlyeq b$, $c \succcurlyeq c$, $d \succcurlyeq d$, $a \succcurlyeq d$, $b \succcurlyeq d$, $d \succcurlyeq c$, $b \succcurlyeq a$, $a \succcurlyeq c$, $b \succcurlyeq c$. Других пар, связанных отношением $\succcurlyeq$, нет. Возможно ли построить функцию полезности, представляющую данные предпочтения? Если нет, то почему? Если да, то постройте ее.

Задача 2 Пусть $W > 0$ — общее богатство некоторого человека, выраженное в рублях. Его функция полезности зависит от W как $u(W) = -1/W$. Имеет ли смысл такая (принимающая отрицательные значения) функция полезности? Объясните. Предложите какие-нибудь другие функции полезности, которые соответствуют тем же предпочтениям, что и $u(W) = -1/W$.

Задача 3 Для каждой из частей Таблицы 1.1 рассмотрите изображенные предпочтения. Ответьте на вопрос предыдущей задачи.

Задача 4 Когда индивидууму предложили альтернативы A, B, C и D, он заявил, что для него C лучше остальных трех. Когда ему же предложили альтернативы B, C, E и F, он заявил, что для него F лучше

Таблица 1.1. Данные для Задачи 3

	a	b	c
a	$\sim$	$\succ$	$\prec$
b	$\prec$	$\sim$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$

	a	b	c	d
a	$\sim$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$
d	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$

остальных трех. А когда индивидууму предложили альтернативы A, D, E и F, он заявил, что для него альтернатива A лучше остальных трех. Какому свойству не удовлетворяют предпочтения этого индивидуума? Почему?

Задача 5 [3] Бизнесмен А. Коняшев пошел в воскресенье на бега. Он решает, поставить ли в последнем заезде на лошадь своего приятеля, бизнесмена Б. Удачина, или нет. Б. Удачин знает свою лошадь и знает кое-что о других лошадях, участвующих в заезде. Он сообщил А. Коняшеву, что шансы его лошади выиграть заезд составляют 1 к 9 (т. е. вероятность выигрыша равна 0,1). У Коняшева с собой M руб. Он может поставить на лошадь приятеля c руб. ($c < M$). Если лошадь выиграет, то он получит z руб., а если не выиграет, то ничего.

1. Изобразите данную ситуацию при помощи дерева решений.
2. Найдите оптимальное решение — ставить или не ставить — в зависимости от параметров M, c, z в предположении, что А. Коняшев нейтрален к риску.
3. Охарактеризуйте оптимальное решение в предположении, что полезность А. Коняшева зависит от общей денежной суммы x, которою он будет иметь в результате (например, если он поставит на лошадь и проиграет, то $x = M - c$), и его функция полезности имеет вид $u(x) = -1/x$.

Задача 6 Готовясь к экзамену, студент успел выучить только 15 билетов из 20. Он решает, взять билет первым или же вторым. Изобразите эту ситуацию принятия решений в виде дерева. Это должно быть полное и развернутое дерево, на котором следует, в частности, указать исходы и случайные ходы природы с соответствующими вероятностями. Как на этом дереве будет изображен ход другого студента, который возьмет билет первым, если рассматриваемый студент решит взять билет вторым? Как сложную лотерею, которая возникает, если рассматриваемый студент решит взять билет вторым, преобразовать в простую лотерею? Проанализируйте эту ситуацию посредством сворачивания дерева принятия решений. Какое решение будет оптимальным? Зависит ли ответ на этот вопрос от элементарной функции полезности?

Задача 7 [19] Имеется возможность произвести инвестиции, которые позволяют получить 2 млн руб. с вероятностью 0,6 и потерять 1,2 млн руб. с вероятностью 0,4. Индивидуум A соглашается на эти инвестиции, а индивидуум B — нет. Имеется следующая информация: предпочтения одного из них задаются функцией $\ln x$ (x измеряется в млн руб.), а предпочтения другого — функцией $\sqrt{x}$, один из них имеет 1,5 млн руб. и другой — 3 млн руб. Неизвестно, однако, к кому конкретно какая функция и какой капитал относится. Укажите для каждого индивидуума его функцию полезности и величину капитала.

Задача 8 [12] Инвестор с богатством 100 имеет возможность заключить пари, которое удвоит его богатство с вероятностью p и сделает его богатство вполовину меньшим с вероятностью $1-p$. Его функция выигрыша $u(x)=\ln x$.

1. При каких значениях p он согласится на пари?
2. Предположим вместо этого, что он нейтрален к риску (т. е. $u(x)=x$). При каких p он согласится на пари?

Задача 9 Проект требует в первый период инвестиций в размере 300 млн руб. Во второй и третий период он приносит чистый доход 200 млн руб. Вычислите чистую приведенную стоимость проекта при дисконтирующем множителе 0,5.

Задача 10 Проект A требует в первый год инвестиций в размере 200 млн руб. На второй и третий год он приносит чистый доход 125 млн руб. Проект B требует в первые два года ежегодных инвестиций в размере 100 млн руб. В последующие три года он приносит чистый доход 90 млн руб. Определите, какой проект более выгоден, если денежные потоки дисконтируются по ставке 11% годовых (т. е. дисконтирующий множитель равен 1/1.11).

Задача 11 Инвестор принимает решение о вложении своего капитала величиной 100 млн руб. на два года. На первый год он имеет три возможных варианта вложения своего капитала:

- положить деньги на два года в банк и получить в конце 140 млн руб. (вариант P);

- вложить деньги на два года в рискованное предприятие, которое за первый год принесет доход 50 млн руб. или 130 млн руб. с равной вероятностью, а за второй год гарантированно принесет доход 60 млн руб. (вариант Q);
- хранить деньги дома под подушкой (вариант R).

(Можно вложить только целиком весь капитал в один из трех вариантов.) На второй год, если был выбран вариант R, у инвестора будет два возможных варианта вложения капитала:

- вложить деньги на один год в рискованное предприятие, на котором может потерять все свои деньги с вероятностью 0,6 или утроить вложенное с вероятностью 0,4 (вариант S);
- продолжать хранить деньги дома под подушкой (вариант T).

(Опять же можно вложить только целиком весь капитал в один из двух вариантов.)

1. Нарисуйте дерево решений.
2. Для каждой из конечных вершин рассчитайте чистую приведенную стоимость (NPV), считая, что дисконтирующий множитель инвестора равен 0,9.
3. Сворачиванием дерева решений найдите оптимальную стратегию в предположении, что инвестор нейтрален к риску.

Задача 12 Пусть есть одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен \$9. Существует лотерейный билет, который может выиграть \$0 с вероятностью 0,5 (если выпадет «орел») и \$7 с вероятностью 0,5 («решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации.

1. За какую сумму x потребитель купил бы такой билет?
2. За какую сумму y потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из 9 билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «орел», и 9 по \$1, выигрывающих в состоянии мира «решка»)?
3. Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму z он бы его продал?

Задача 13 Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег).

1. Лотерея 70 руб., 20 руб. и 100 руб. с вероятностями 1/3, 1/2 и 1/6 и безрисковый доход величиной 60 руб. для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум рискофоб? нейтрален к риску? рискофил?
2. Пусть вместо этого известно, что лотерея $3 и $5 с вероятностями 1/2 и 1/2 и лотерея $3 и $9 с вероятностями 2/3 и 1/3 для индивидуума эквивалентны. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 14 [19]

1. Узнав о ваших выдающихся успехах в изучении теории игр, с вами связались советники в области безопасности известного своей коррумпированностью диктатора Мавала Баррани. Вот что они сказали: «Президент Баррани сейчас сосредоточил войска на границе и мы должны решить, вторгнуться ли в соседнюю богатую нефтью страну Шеллабас. Если мы осуществим вторжение, то для обсуждения этого вопроса будет собран Совет безопасности ООН, и мы оцениваем, что с вероятностью 60% он решит нас наказать. Если он этого не сделает, то мы получим все нефтяные скважины Шеллабаса и доходы от них. Баррани рассчитывает, что в этом случае от сможет положить дополнительно $150 млрд на свои банковские счета. Если ООН атакует, то мы проиграем, а Баррани будет вынужден потратить $20 млрд тех нефтяных денег, которые он обычно кладет в свой карман, на восстановление армии. Может быть, лучше оставить все как есть, и сказать Баррани, чтобы он ограничился теми $600 млрд, которые у него уже есть (с учетом того, что он является нейтральным к риску)?».
2. Неожиданно другой эксперт, который до этого момента хранил молчание, сказал следующее: «О чем вы говорите? Как вы можете утверждать, что вероятность вмешательства ООН 60%? Я совершенно уверен, что вероятность этого не меньше 95%!» Должен ли Баррани напасть на Шеллабас в этом случае?
3. Еще один эксперт говорит «Думаю, что мой коллега прав. Однако, следует принять во внимание одно обстоятельство. Позиции президента Баррани на данный момент не очень крепкие. Если он не решиться вторгнуться в Шеллабас, то очень вероятно, что рассерженные военные его свергнут, а все деньги, которые у него есть, экспроприируют. Из докладов службы безопасности следует, что вероятность подобного мятежа 20%. Я думаю, что президент Баррани не имеет никакого другого выхода, кро-

ме как осуществить вторжение». Предположите, что эти факты верны. Правильный ли вариант действий предложил эксперт?

Задача 15 Пусть инвестор хочет вложить свой капитал K. Ему доступны два актива: один безрисковый и один рискованный. Доходность безрискового актива составляет 10%. Доходность рискованного актива равна 100% при благоприятном развитии событий и −50% при неблагоприятном. Вероятность благоприятного развития событий равна 50%. Найдите оптимальную структуру портфеля (т. е. доли двух активов в оптимальном портфеле).

Сделайте то же самое, считая, что доходность рискованного актива составит 200% или −50% с равными вероятностями. При этом предположите сначала, что доля каждого из активов не может быть отрицательной, а потом — что доля безрискового актива может быть отрицательный (т. е. инвестор может взять в банке кредит под безрисковую ставку).

Задача 16 Предприниматель планирует завтра получить от внешнеторговых операций 1000 песо. Это будет весь его капитал на завтрашний день. Сам он заинтересован в рублях и имеет некоторую элементарную функцию полезности $u(x)$, выраженную в рублях ($u'(x) > 0$, $u'(x)$ убывает). Он предполагает, что с вероятностью 2/3 завтрашний курс песо будет равен 15 руб., а с вероятностью 1/3 — 24 руб. Ему предлагают сегодня продать его завтрашние песо за завтрашние рубли по курсу p руб. Пусть $z \geq 0$ — сумма сделки в песо. (Предполагается, что можно выбрать $z > 1000$, а завтра докупить недостающие песо.)

1. При каком курсе p предприниматель выберет такую сумму сделки z, что полностью избавится от риска? Чему будет при этом равна z?
2. В какую сторону поменяется выбор z по сравнению с предыдущим пунктом, если $p = 16$ руб.? в каком случае предприниматель окажется в лучшем положении — при высоком или при низком курсе песо?
3. Ответьте на тот же вопрос для $p = 20$ руб.

Задача 17 [22] Начальник хочет понять, работает ли Смит энергично или нет. Он может посмотреть на Смита только один раз в течении дня. Он знает, что если Смит работает энергично, то он будет зевать с вероятностью 10%, а если нет, то с вероятностью 50%. До того как начальник посмотрит на Смита, он думает, что с вероятностью 80%

Смит работает энергично, но тут он замечает зевок. Какую оценку вероятности энергичной работы теперь должен иметь начальник?

Задача 18 Налоговая инспекция считает, что предприятия в среднем недоплачивают налог на прибыль в 80% случаев. Вероятность того, что в ходе проверки некоторого предприятия будет выявлено такое нарушение, равна 40% для предприятия, которое недоплачивает налог, и 10% для предприятия, которое полностью выплачивает налог (ошибочно). Вычислите апостериорную вероятность того, что данное предприятие недоплачивает налог на прибыль, если в ходе проверки не было выявлено нарушений.

Задача 19 Известно, что в 10% магазинов цена на фотоаппарат определенной марки не превышает 15000 руб., в 20% магазинов она от 15000 руб. до 17000 руб., в 40% магазинов она от 17000 руб. до 20000 руб. и в 30% магазинов она превышает 20000 руб. Покупатель не хочет покупать фотоаппарат по цене выше 20000 руб. Он зашел в наугад выбранный магазин и купил фотоаппарат. Какова вероятность того, что цена фотоаппарата была ниже 15000 руб.?

Задача 20 [15] Некий человек (P) предстал перед судом по обвинению в совершении тяжкого преступления. Судья априорно считает, что вероятность того, что P мог совершить это преступление равна 1/1000. Однако имеется свидетель A, который утверждает, что он видел, как P совершил это преступление. Свидетель A хорошо известен судье: вероятность, что этот свидетель ошибается, равна 1/10.

1. Учитывая свидетельство A, какова вероятность, что P совершил преступление?
2. Пусть выигрыш судьи в случае, если он осудил виновного равен w, если осудил невиновного, то $-x$, если оправдал виновного, то $-y$, а если оправдал невиновного, то z, где w, x, y, z — некоторые положительные числа. Каким будет вердикт судьи в зависимости от параметров w, x, y и z?

Задача 21 Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход $1000, но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на 20% меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в 0,1. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

Задача 22 [12] Рассмотрите задачу принятия решений с двумя состояниями (Q и R) и тремя действиями (a, b и c). Выигрыши $u(x,s)$ в зависимости от действий x и состояния s заданы Таблицей 1.2. Состояния Q и R случаются с вероятностями p и $1-p$ соответственно.

Таблица 1.2. Данные для Задачи 22

	$x=a$	$x=b$	$x=c$
$s=Q$	0	−10	−4
$s=R$	−8	0	−3

1. Найдите ожидаемый выигрыш $U(x,p)=pu(x,Q)+(1-p)u(x,R)$ для каждого из действий $x=a$, $x=b$, $x=c$ как функцию вероятности p. Нарисуйте эти функции на графике.

2. Для каждого из действий a, b и c определите, при каких условиях на p оно является оптимальным (выпишите неравенства, обеспечивающие оптимальность данного действия). Сопоставьте эти условия с графиком.

3. Пусть $V(p)$ — значение ожидаемой полезности в оптимальном решении, если принимающее решения лицо ожидает, что вероятность состояния Q равна p, т. е.

$$V(p)=\max\{U(a,p),U(b,p),U(c,p)\}.$$

   Найдите $V(p)$. Объясните, как эту функцию можно найти по графику.

4. Принимающий решение индивидуум не знает, чему равна вероятность $p=\mathbf{P}(Q)$. Его априорные представления по поводу p состоят в том, что p с одинаковой вероятностью, может быть равно 1/4 или 3/4. Какое действие (a, b или c) он выберет? Изобразите дерево решений и упростите его.

5. До принятия решения индивидууму говорят, что когда последний раз состояние было получено по распределению с вероятностью p, результатом было состояние s' (равное Q или R). Выбор состояний происходит независимо, а его априорные ожидания такие же, как в пункте 4. Что он выберет при $s'=Q$ и при $s'=R$? Представьте эту ситуацию в виде дерева решений и упростите это дерево.

Задача 23 Преподаватель считает, что 40% студентов знают предмет на 2, 30% — на 3 и 30% — на 4. (Он убежден, что на 5 предмет знает только он сам.) На экзамене студент может отвечать на билет ужасно, средне или бодро. В Таблице 1.3 приведены условные вероятности того, что студент отвечает ужасно, средне и бодро при том, что знает на 2, 3 и 4. (Например, если знает на 2, то в 70% случаев отвечает ужасно, в 20% случаев — средне, а в 10% случаев — бодро.) Выигрыш преподавателя имеет вид $u = -(x-y)^2$, где x — на какой балл студент реально знает предмет, а y — сколько ему поставил преподаватель ($y = 2$, 3 или 4).

Таблица 1.3. Данные для Задачи 23

		Отвечает		
		ужасно	средне	бодро
Знает	*2*	0,7	0,2	0,1
на...	*3*	0,3	0,6	0,1
	4	0,1	0,1	0,8

Преподаватель видит студента, который ужасно отвечает на билет. На какой балл студент реально знает предмет, он не имеет понятия.

1. Вычислите вероятности того, что $x = 2$, $x = 3$ и $x = 4$ с учетом имеющейся у преподавателя информации.
2. Вычислите соответствующие ожидаемые выигрыши при $y = 2$, $y = 3$ и $y = 4$. Какой балл следует поставить?

Глава 2

Введение в теорию игр

Задача 24 Предложите пример ситуации из реальной жизни, которая представляет собой стратегическое взаимодействие между несколькими лицами, и представьте эту ситуацию в терминах теории игр, т. е. опишите игроков, выигрыши, последовательность ходов, случайные ходы природы, информационные множества, стратегии и т. п.

Задача 25 (бесконфликтные игры) [7] Приведите несколько примеров игр в нормальной форме, в которых каждый игрок имеет два действия, и предпочтения игроков совпадают, так что конфликт интересов отсутствует.

Задача 26 Перед контрольной студент может спрятать шпаргалку в левый карман или же в правый. Во время контрольной преподаватель может расположиться слева или справа от студента. Учебная аудитория устроена таким образом, что если студент будет доставать шпаргалку из левого кармана и преподаватель будет от него слева, то вероятность погореть равна 0,3, а если преподаватель будет от него справа, то вероятность равна 0,2. Если студент будет доставать шпаргалку из правого кармана и преподаватель будет от него слева, то вероятность погореть равна 0,1, а если преподаватель будет от него справа, то вероятность равна 0,5. Если преподаватель заметит шпаргалку, то его выигрыш составит 20, а выигрыш студента составит −100. Если преподаватель не заметит шпаргалку, то его выигрыш составит 0, а выигрыш студента составит 30.

Запишите эту игру в стратегической (нормальной) форме, указав ожидаемые выигрыши игроков.

Задача 27 [9] Армии генералов A и B разместились на двух противоположных холмах. Они должны решить, атаковать ли врага, который укрепился в долине между холмами. Чтобы атака была успешной, необходимо, чтобы генерал A вовремя получил подкрепление. Вероятность того, что подкрепление подойдет вовремя, равна 1/2 и зависит от погодных условий, неизвестных генералам. Они договорились, что если A получит подкрепление, он пошлет к генералу B гонца. Однако оба знают, что вероятность того, что гонец сможет пробраться через линию обороны врага, равна лишь 1/3.

Выигрыши задаются следующим образом. В случае победы выигрыш каждого генерала равен 50. Если оба не будут атаковать, то они получат нулевые выигрыши. Если один атакует, а другой нет, то атаковавший получит выигрыш −50, а не атаковавший — выигрыш −10. Наконец, если оба генерала атакуют, но терпят поражение (из-за того, что A не получил подкрепление), каждый из них получает −40.

1. Представьте эту игру в развернутой форме.
2. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал A может принять решение, послать ли гонца, как в случае прибытия подкрепления, так и при отсутствии подкрепления.
3. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал A всегда атакует, но посылает гонца только в случае получения подкрепления.
4. Сделайте то же самое для модифицированной игры, в которой генерал A всегда посылает гонца, но атакует только в случае получения подкрепления.
5. Попробуйте предсказать результат сражения в двух последних случаях (возможно, в вероятностных терминах).

Задача 28 [9] Имеется некоторая книга, которой первоначально владеет Олег, но которую он должен отдать Роману. Олег не имеет возможности отдать книгу непосредственно, но может передать ее через Павла. Олег может передать книгу или оставить ее себе. Павел (если получит книгу от Олега) тоже может передать книгу или оставить ее себе. Роман узнает только, получил он книгу или нет, но (если не получил) не может узнать, кто именно оставил себе книгу. На основе этой информации, он должен решить, наказать ли Олега, Павла или сразу обоих. Пусть для каждого игрока ценность книги равна 200 руб. в денежном выражении, а наказание для каждого (Олега и Павла) связано с потерями в 300 руб. (при этом наказание одного игрока никак не влияет на других игроков). Выигрыш равен разности ценности книги (если она досталась игроку) и ущерба от наказания (если игрок был наказан).

1. Смоделируйте ситуацию как игру трех лиц и представьте ее в развернутой форме.
2. Перечислите стратегии каждого из игроков и запишите игру в нормальной (стратегической) форме.

Задача 29 Рассмотрите экономику, состоящую из двух индивидуумов, Бима и Бома.

1. Предположите, что Бим любит только пряники, а Бом — только пирожки. Имеется фиксированный положительный запас пряников и пирожков. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.
2. Предположите теперь, что для Бима пряники и пирожки комплиментарны, так что он предпочитает потреблять пряники и пирожки в пропорции один к одному, а для Бома пряники и пирожки взаимозаменяемы, и пряник для него эквивалентен пирожку. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 30 Рассмотрите экономику, в которой предпочтения всех потребителей зависят от единственного блага (денег) и функции полезности строго возрастают по этому благу.

1. Предположите, что общий запас денег в экономике фиксирован. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.
2. Пусть существует технология, которая позволяет избавляться от денег. Ответьте на тот же вопрос.

Задача 31 Множество дележей для игры двух лиц состоит из всех точек, лежащих внутри круга с центром (0;0) и радиусом 10 и внутри прямоугольника со сторонами, параллельными осям (т. е. это объединение двух фигур). Найдите Парето-границу данной игры, взяв в качестве противоположных вершин прямоугольника одну из следующих пар точек:

1. (8;3), (13;8);
2. (1;9), (7;14);
3. (−8;8), (8;12);
4. (7;−8), (12;9);
5. (7;−11), (14;−4);
6. (−11;1), (−5;12);
7. (−13;−9), (−7;13);
8. (−11;−9), (14;−4);
9. (−11;−8), (9;8);
10. (−6;−9), (7;12);
11. (−9;−7), (13;6).

Решите ту же задачу, взяв вместо прямоугольника треугольник с вершинами в одной из следующих тройках точек:

1. (−14;−3), (−14;13), (−2;−3);
2. (−4;−11), (−4;3), (15;−11);
3. (−5;−11), (14;−11), (14;3);
4. (−11;−11), (−11;12), (7;12);
5. (−13;−2), (−6;−2), (−6;14);
6. (7;−13), (7;−4), (14;−4);
7. (8;−11), (8;9), (−8;9);
8. (−9;−11), (−9;8), (12;8);
9. (−12;−8), (9;−8), (9;12);
10. (7;3), (7;9), (13;3);
11. (−1;8), (8;8), (−1;14);
12. (2;4), (12;4), (12;9);
13. (4;3), (4;8), (14;8);

Задача 32 Трое подруг, Катя, Люба и Марина, хотят собраться вместе и решают, какой напиток они будут при этом пить. Выигрыши от каждого из возможных вариантов показаны в Таблице 32. Выигрыши рассчитываются по номерам букв имени, фамилии и отчества. (Например, $и_2$ — это номер второй буквы фамилии в алфавите.) Какие варианты являются Парето-оптимальными?

Таблица 2.1. Данные для Задачи 32

	чай	*кофе*	*кола*	*пиво*	*вино*	*водка*	*коньяк*
Катя	$ф_1$	$ф_2$	$ф_3$	$ф_4$	$ф_5$	$ф_6$	$ф_7$
Люба	$и_1$	$и_2$	$и_3$	$и_4$	$и_5$	$и_6$	$и_7$
Марина	$о_1$	$о_2$	$о_3$	$о_4$	$о_5$	$о_6$	$о_7$

Задача 33 Имеются два игрока. У них есть 5 левых и 5 правых ботинок, и они могут распределять их между собой. Пусть L_i — количество левых ботинков, доставшихся игроку i, а R_i — количество правых ботинков, доставшихся игроку i. Выигрыш каждого игрока i равен общему числу комплектных пар ботинок, которые ему достались, т. е. $\min\{L_i, R_i\}$.

1. Найдите для этой игры границу Парето.
2. Пусть исходно у игрока 1 имеется 2 левых и 4 правых ботинка, а у игрока 2 — 3 левых и 1 правый. Найдите кривую контрактов.

3. Опишите вид границы Парето в общем случае, когда у игроков в сумме имеется m левых ботинок и n правых.

Задача 34 [21] Два игрока должны достичь соглашения по поводу дележа содержимого бутылки вина. Если они достигнут соглашения (α, β), где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то поделят единицу блага соответствующим образом: долю α получит первый, а долю β — второй. Если же они не договорятся, то каждый получит ноль. Предпочтения игроков описываются функциями полезности $u_1(\alpha) = \alpha$ и $u_2(\beta) = \sqrt{\beta}$.

1. Является ли эта игра игрой с трансферабельной полезностью? Объясните.
2. Изобразите эту ситуацию торга на графике в координатах (u_1, u_2) (предполагая, что вино можно выливать).
3. Найдите решение Нэша этой игры.

Задача 35 Коммерческая фирма хочет осуществить инвестиционный проект в городе N-ске. Рассматривается пять вариантов. Городские власти оценивают выигрыш города от этих проектов следующим образом: A: 20, B: 0, C: 40, D: 10, E: 10. Фирма оценивает свой выигрыш от этих проектов следующим образом: A: 0, B: 10, C: 20, D: 30, E: 20.

1. Укажите Парето-оптимальные проекты, считая невозможными побочные платежи. Аргументируйте свой ответ. Приведите графическую иллюстрацию.
2. Укажите Парето-оптимальные проекты, считая побочные платежи возможными. Аргументируйте свой ответ. Приведите графическую иллюстрацию.
3. Пусть, если фирма и город не придут к согласию, то будет выбран проект B. Укажите ядро (по прежнему считая побочные платежи возможными). Приведите графическую иллюстрацию.

Задача 36 [6] Три города строят районную систему водоснабжения с целью использования имеющегося водохранилища. Все города должны быть соединены с водохранилищем водопроводной сетью. Издержки прокладки водопровода (в миллионах долларов) между каждой парой городов и между каждым городом и водохранилищем указаны в Таблице 2.2.

Самый дешевый способ построить полную систему водоснабжения — это соединить Город 1 с водохранилищем и Городами 2 и 3, так что общие издержки составят $18 + 15 + 12 = 45$ млн долларов. Задача состоит в том, чтобы распределить эти издержки между городами, рассматривая их как игроков в кооперативной игре.

Таблица 2.2. Издержки прокладки водопровода для Задачи 36, млн долл.

	Город 1	Город 2	Город 3
Водохранилище	18	21	27
Город 1		15	12
Город 2			24

1. Смоделируйте эту задачу как коалиционную игру трех лиц с трансферабельными выигрышами. В качестве выигрыша коалиции C возьмите минимальные издержки строительства системы водоснабжения для городов из этой коалиции со знаком минус. Например, $v(\{1,2,3\}) = -45$.
2. Было выдвинуто предложение, что каждый город должен заплатить только за строительство водопровода, который его снабжает водой, вне зависимости от того, пользуются ли этим водопроводом другие города. Это соответствует вектору выигрышей $(-18,-15,-12)$. (Все выигрыши отрицательны, поскольку они соответствуют оплаченным издержкам.) Принадлежит ли этот вектор ядру?

Задача 37 [21] Имеется три игрока. Каждый из Игроков 1 и 2 имеет по одной правой перчатке, а Игрок 3 имеет одну левую перчатку. Пара перчаток стоит 100 руб. Чтобы получить выгоду, игроки должны сотрудничать. Соответствующая кооперативная игра с трансферабельной полезностью полностью задана в Таблице 2.3.

Таблица 2.3. Выигрыши для Задачи 37

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	100	100	100

1. Продемонстрируйте, что ядро этой игры состоит ровно из одного вектора.
2. Путь теперь имеется $n = l + r$ игроков, l из которых владеет левыми перчатками, а r — правыми. Пара перчаток, как и раньше, стоит 1. Найдите общую формулу для $v(S)$ — выигрыша коалиции S, если под выигрышем коалиции подразумевается максимальная совокупная прибыль, которую могут получить члены коалиции благодаря сотрудничеству.

Задача 38 Игра трех лиц задана в характеристической форме в Таблице 2.4.

Таблица 2.4. Выигрыши для Задачи 38

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	1	2	3	10	6	9	15

1. Является ли данная игра игрой с трансферабельной полезностью? Объясните.
2. Опишите границу Парето этой игры.
3. Какой вид имеет здесь точка угрозы?
4. Опишите переговорное множество этой игры.
5. Для каждого из перечисленных дележей определите, принадлежит ли он ядру, и если нет, то по какой причине:
   $(3;7;3)$, $(5;8;2)$, $(6;7;3)$, $(5;4;6)$.
6. Опишите ядро этой игры и изобразите его графически.

Задача 39 [21] Мистер Адамс (A), миссис Бенсон (B) и мистер Купер (C) договорились с зубным врачом на понедельник, вторник и среду соответственно. Это расписание может не соответствовать их предпочтениям из-за разной степени безотлагательности лечения и из-за других факторов. Их предпочтения, выраженные числами, приведены в Таблице 2.5. Эта ситуация порождает игру, в которой могут образовываться коалиции с целью поменяться днем визита к врачу. Например, Адамс и Бенсон могут поменяться и получить совокупный выигрыш 14 вместо 7.

Таблица 2.5. Предпочтения для Задачи 39

	пн	вт	ср
A	2	4	8
B	10	5	2
C	10	6	4

1. Рассмотрите эту ситуацию как кооперативную игру с трансферабельной полезностью. Найдите выигрыши всех возможных коалиций.

2. Покажите, что ядро представляет собой многогранник с вершинами в точках $(15,5,4)$, $(14,6,4)$, $(8,6,10)$ и $(9,5,10)$.

Задача 40 У Игрока 1 имеется один ананас (A), у Игрока 2 — один банан (B), а у Игрока 3 — один кокос (C). Ценность фруктов для игроков указана в Таблице 2.6. Игроки могут объединяться в коалиции. Члены коалиции могут передавать друг другу имеющиеся у них фрукты. Также возможны побочные платежи. Выигрыш игрока складывается из ценности для него фруктов, которыми он владеет (плюс побочные платежи).

Таблица 2.6. Данные для Задачи 40

Игрок 1			Игрок 2			Игрок 3		
A	B	C	A	B	C	A	B	C
10	40	5	30	20	10	0	50	30

1. Запишите данную игру в характеристической форме.
2. Опишите границу Парето этой игры.
3. Проверьте условия существования ядра.
4. Для каждого из указанных дележей проверьте, принадлежит ли он ядру. Если нет, то укажите причину.
   $(20;40;50)$, $(25;50;35)$, $(35;50;30)$, $(30;60;20)$, $(20;55;30)$.
5. Найдите ядро. Укажите множество вершин. Дайте графическую иллюстрацию.

Задача 41 Рассмотрите коалиционную игру четырех лиц $(\{1,2,3,4\},v)$ с трансферабельными выигрышами. Для каждого i из $\{1,2,3,4\}$ выполнено $v(\{i\})=0$. Для остальных коалиций

$$\begin{aligned}
v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,4\})=v(\{3,4\})&=1,\\
v(\{1,4\})=v(\{2,3\})&=0,\\
v(\{2,3,4\})=v(\{1,3,4\})=v(\{1,2,4\})&=1,\\
v(\{1,2,3\})=v(\{1,2,3,4\})&=2.
\end{aligned}$$

(Заметьте, что выигрыш каждой коалиции за исключением $\{1,2,3\}$ равен максимальному количеству пар, не имеющих общих элементов и состоящих из одного игрока из $\{1,4\}$ и одного игрока из $\{2,3\}$, которые можно одновременно сформировать из участников коалиции.)

1. Покажите, что ядро этой игры состоит из единственного вектора выигрышей.
2. Пусть выигрыш коалиции $\{1,2,3\}$ стал равным $v(\{1,2,3\}) = 1$. Охарактеризуйте ядро новой игры и покажите, что все новые вектора выигрышей из ядра строго лучше для игрока 1, чем вектор выигрышей из ядра первоначальной игры.

Задача 42 Пусть есть группа из n старателей, которые обнаружили много больших слитков золота. Два старателя могут унести только один слиток, так что выигрыш коалиции S из k старателей равен

$$v(S) = \begin{cases} k/2, & \text{если } k \text{ четно,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Покажите, что если есть более двух старателей и старателей четное число, то ядро состоит из единственного распределения, согласно которому каждый из старателей получает 1/2, а если количество старателей нечетное, то ядро пусто.

Задача 43 [11] Вокруг озера расположены n фабрик. Сам забор воды бесплатный, но если озеро загрязнено, то может понадобится очистка воды, что связано с издержками. Если k фабрик загрязняют озеро, то издержки по очистке воды для отдельной фабрики равны kc. Сточная вода загрязнена, но фабрика может заплатить за очистку стоков, что связано с издержками b. Предположим, что

$$0 < c < b < nc.$$

Если образуется коалиция S из k фабрик, то все ее члены могут договориться загрязнять и получать выигрыш в размере $k\cdot(-nc)$. Или же все члены ее могут договориться очищать воду и получать выигрыш в размере $k\cdot(-(n-k)c) - kb$. Следовательно, для коалиции S из $k < n$ игроков выполняется

$$v(S) = \max\{\{k\cdot(-nc)\}, \{k\cdot(-(n-k)c) - kb\}\},$$

а для коалиции из всех игроков

$$v(I) = \max\{\{-n^2c\}, \{-nb\}\}.$$

Покажите, что ядро непусто и что дележ $\mathbf{x} = (-b, \ldots, -b)$ принадлежит ядру.

Глава 3

Статические игры с полной информацией

Задача 44 [3] Во время второй мировой войны японский ВМФ переправлял войска через море Бисмарка, а американские ВВС пытались разбомбить японские суда. Японский ВМФ выбирал между двумя маршрутами — северным и южным. Соответственно, американские ВВС выбирали, в направлении какого маршрута выслать самолеты. В случае, если американские самолеты неверно выбрали бы направление, они не смогли бы нанести достаточно большой урон японским войскам. Южный маршрут длиннее, поэтому при его выборе японскими судами американские самолеты имели возможность нанести больший урон. Матрица этой игры представлена Таблицей 3.1.

Таблица 3.1. Данные для Задачи 44

		Японский ВМФ	
		север	*юг*
Американские ВВС	*север*	2, −2	2, −2
	юг	1, −1	3, −3

1. Какая из сторон имела слабо доминируемую стратегию? Объяс-

ните.

2. Каков результат последовательного отбрасывания слабо доминируемых стратегий?

Задача 45 Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, то есть выбирают его координаты (x, y). Игрок 1 находится в точке (x_1, y_1), а игрок 2 — в точке (x_2, y_2). Игрок 1 выбирает координату x, а игрок 2 — координату y. Каждый стремится, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Продемонстрируйте, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

Задача 46 (двуполые рыбы) [7] Особи некоторой разновидности двуполых рыб при каждом спаривании выбирают играть ли им роль самца или самки. Каждая рыба имеет некоторую любимую роль, при которой она расходует наименьшее количество ресурсов, что позволяет осуществить большее количество спариваний в будущем. Рыба получает выигрыш H, если спаривается в своей любимой роли и L, если спаривается в другой роли, где $H > L$. (Выигрыши измеряются количеством потомства, которое рыба стремиться максимизировать.) Рассмотрите встречу двух рыб, чьи любимые роли совпадают. Каждая рыба имеет два возможных действия: спариваться в произвольной роли или же настоять на своей любимой роли. Если обе рыбы выбирают произвольные роли, то роли распределяются случайным образом, и выигрыш каждой рыбы составит $\frac{1}{2}(H+L)$ (среднее из H и L). Если каждая из рыб настаивает на своей любимой роли, то рыбы не спариваются, им приходится искать других партнеров, и каждая получает выигрыш S. Чем выше шанс встречи другого партнера, тем больше S.

Представьте эту ситуацию как стратегическую игру и определите для любых заданных значений H и L диапазон значений S, при которых настаивать на своей любимой роли является строго доминирующей стратегией рыбы, причем соответствующий исход не оптимален по Парето.

Задача 47 [21] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.2.

1. Найдите равновесия Нэша этой игры.
2. Примените итеративное отбрасывание слабо доминируемых стратегий к данной игре. Найдите равновесия Нэша получившейся игры (остатка).
3. Сделайте выводы о связи равновесия Нэша с итеративным отбрасыванием слабо доминируемых стратегий

Таблица 3.2. Данные для Задачи 47

		Игрок 2		
		X	*Y*	*Z*
Игрок 1	*A*	10 11	9 6	9 10
	B	6 11	6 6	6 9
	C	10 12	9 6	11 9

Задача 48 [21] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.3.

Таблица 3.3. Данные для Задачи 48

		Игрок 2		
		X	*Y*	*Z*
Игрок 1	*A*	1 1	0 0	0 2
	B	2 1	2 1	1 1
	C	0 0	1 1	1 1

1. Примените итеративное отбрасывание слабо доминируемых стратегий к данной игре. Продемонстрируйте, что различные последовательности отбрасывания приводят к различным остаткам.
2. Для каждого из получившихся остатков проверьте, соответствует ли он равновесию (равновесиям) Нэша.

Задача 49 [21] Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.4.

1. Найдите несколько возможных последовательностей отбрасывания строго доминируемых стратегий в этой игре. Приводят ли эти последовательности к одному и тому же результату?
2. Найдите все равновесия Нэша этой игры.

Задача 50 [8] Две фирмы, решают, производить ли им компьютеры с дисководами системы *UltraH* или системы *ExtraD*. Обе фирмы смогут продать больше компьютеров, если их дисководы будут совместимыми. Если обе фирмы выберут дисководы *UltraH*, то выигрыш каждой

Таблица 3.4. Данные для Задачи 49

		Игрок 2			
		W	*X*	*Y*	*Z*
Игрок 1	*A*	4 5	4 4	5 4	2 12
	B	7 3	7 8	8 5	6 10
	C	10 2	6 7	6 4	5 9
	D	4 4	9 5	10 4	9 10

будет равен 2. Если обе фирмы выберут дисководы *ExtraD*, то выигрыш каждой будет равен 1. Если же они выберут разные системы, то выигрыш каждой будет равен 0.5. Изобразите эту игру в виде матрицы и найдите множество равновесий Нэша. Есть ли среди равновесий оптимальные по Парето?

Задача 51 [8] Двух свиней, крупную и мелкую, посадили в помещение с рычагом в одном конце и кормушкой в другом конце. Когда свинья нажимает рычаг, теряя тем самым 2 единицы выигрыша, раздаточное устройство подает в кормушку 10 единиц пищи (каждая единица увеличивает выигрыш на единицу). Если крупная свинья доберется до кормушки первой, то мелкая получит только остатки пищи, эквивалентные 1 единице выигрыша. Если же мелкая свинья окажется около кормушки первой, она сможет съесть 4 единицы. Если обе свиньи окажутся у кормушки одновременно, маленькая свинья получит 3 единицы. В Таблице 3.5 показаны выигрыши для стратегий «Нажать рычаг» и «Ждать у кормушки».

Таблица 3.5. Данные для Задачи 51

		Мелкая свинья	
		рычаг	*кормушка*
Крупная свинья	*рычаг*	1 5	4 4
	кормушка	−1 9	0 0

Найдите в этой игре равновесия Нэша. Какие еще концепции решения здесь можно применить?

Задача 52 [21] Две фирмы продают одинаковые продукты. Размер рынка является фиксированным. Каждый дополнительный процент доли рынка, занимаемой фирмой, дает ей прирост выигрыша 1. Без рекламы каждая из фирм занимает 50% рынка. Издержки рекламы равны 10, но реклама дает 20%-й прирост доли фирмы за счет доли другой фирмы. Фирмы принимают решения об использовании рекламы одновременно и независимо.

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 53 (ястреб — голубь) [7] Два животных борются за некоторую добычу. Каждое может быть мирным или агрессивным. Каждое предпочитает быть агрессивным, если его противник мирный, и мирным, если его противник агрессивный; при данной собственной позиции, каждое животное предпочитает, чтобы его противник был мирным, а не агрессивным. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру и найдите в ней равновесия Нэша.

Задача 54 [10] Компании «ABC девелопмент» и «XYZ-строй» участвуют в конкурсе на постройку комплекса офисных зданий. Та компания, которая предложит построить комплекс за меньшую сумму, выиграет конкурс. В случае одинаковой стоимости, у каждой из компаний шансы выиграть конкурс будут 50%. Предположим, что заявки могут принимать только значения 225 млн руб. и 260 млн руб. Предскажите результат конкурса, если ожидается, что издержки ABC составят 200 млн руб., а XYZ — 220 млн руб. Обе компании интересует чистая ожидаемая прибыль.

Задача 55 Два игрока делят между собой 5 орехов. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 0$, 1, 2, 3 или 4. Если $x_1 + x_2 \leq 5$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего. Найдите все равновесия Нэша.

Задача 56 (третий лишний) Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орел» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю. Найдите равновесия Нэша.

Задача 57 Каждый из двух супругов может редко мыть посуду или часто. Каждый любит, когда в раковине не скапливается грязная посуда, но каждому мыть посуду не очень приятно. Их выигрыши в зависимости от выбранных действий показаны в Таблице 3.6.

Таблица 3.6. Данные для Задачи 57

		Муж	
		редко	*часто*
Жена	*редко*	0 0	−1 5
	часто	5 −1	2 2

1. Покажите, что в игре есть решение в доминирующих стратегиях, причем оно не оптимально по Парето.

2. Предположим, что на самом деле каждый заботится не только о себе, но и о другом супруге, так что выигрыш имеет вид $\tilde{u}_i = (1-\alpha)u_i + \alpha u_j$, где u_i — свой первоначальный выигрыш (из Таблицы 3.6), а u_j — первоначальный выигрыш другого супруга, $\alpha \in [0;1]$ — «параметр альтруистичности супругов». Например, если жена моет посуду редко, а муж часто, то при $\alpha = 1/3$ выигрыш жены будет равен

$$\tilde{u}_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot (-1) = 3,$$

а выигрыш мужа —

$$\tilde{u}_2 = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 5 = 1.$$

Изобразите эту новую игру в виде матрицы, в которой выигрыши представлены как функции параметра α.

3. При каких значениях α в игре имеется решение в доминирующих стратегиях, которое не оптимально по Парето?

4. При каких значениях α в игре имеется решение в доминирующих стратегиях, которое оптимально по Парето?

5. Для значений α, при которых в игре нет решений в доминирующих стратегиях, найдите множество равновесий Нэша.

Задача 58 [18] В американском городе имеются три телеканала, каждый из которых принадлежит одной из крупных компаний: ABC, CBS, и NBC. Каждый из каналов может на выбор передавать вечерний выпуск новостей своей компании в 6:30 вечера («вживую») или в 7:00 вечера (в записи).

Среди зрителей новостей 60% предпочитают смотреть новости в 6:30, а 40% — в 7:00, поскольку в 6:30 по независимому каналу идет сериал. Более того, при непосредственном сравнении программа новостей ABC самая популярная, CBS — на втором месте, а NBC — на последнем по популярности.

Процент зрителей вечерних новостей, приходящийся на каждый из трех каналов, в зависимости от времени выхода новостей в эфир показан в Таблице 3.7. Цель каждого из каналов — максимизировать приходящуюся на него долю зрительской аудитории, поскольку от этого зависит доход от рекламы, получаемый каналом.

Таблица 3.7. Данные к Задаче 58

ABC в 6:30

NBC \ CBS	*6:30*	*7:00*
6:30	42% 34% 24%	37% 40% 23%
7:00	34% 26% 40%	60% 22% 18%

ABC в 7:00

NBC \ CBS	*6:30*	*7:00*
6:30	40% 34% 26%	34% 26% 40%
7:00	24% 60% 16%	42% 34% 24%

1. Найдите все доминируемые стратегии. Объясните.
2. Исключите доминируемые стратегии, найденные в предыдущем пункте, и найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях полученной таким образом упрощенной игры. Объясните.

Задача 59 [7] Два человека входят в автобус. Два расположенных рядом тесных кресла свободны. Каждый человек должен решить, сидеть или стоять. Сидеть одному более удобно, чем сидеть рядом с другим человеком, а это, в свою очередь, более удобно, чем стоять.

1. Предположим, что каждый человек заботится только о своем собственном комфорте. Смоделируйте ситуацию как стратегическую игру. Есть ли в этой игре равновесие в доминирующих стратегиях? Найдите в ней равновесия Нэша.
2. Предположим, что каждый человек — альтруист. Чтобы не тесниться, он предпочитает стоять, если другой человек сидит, и из вежливости предпочитает стоять, если другой человек стоит.

Смоделируйте ситуацию как стратегическую игру. Ответьте на те же вопросы.

3. Сравните, насколько комфортно людям в равновесиях этих двух игр.

Задача 60 Девушка и парень решают, пойти ли им на концерт. Если кто-то из них не пойдет на концерт, то независимо от действий другого получает выигрыш 0. Если оба пойдут на концерт, то каждый из них получает выигрыш a ($a > 0$). Если кто-то из них пойдет на концерт, а другой — нет, то тот, кто пошел на концерт, получит выигрыш b ($b > 0$). Сформулируйте игру в нормальной форме, которая бы моделировала такую ситуацию. Изобразите игру в матричном виде. Проанализируйте данную игру, используя известные вам концепции (наилучший отклик, доминирование, равновесие Нэша). Зависит ли анализ от параметров?

Задача 61 [14] Рассмотрите статическую игру двух лиц, которая приведена в Таблице 3.8.

Таблица 3.8. Данные для Задачи 61

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1, 2	0, 1
	D	3, 0	x, 1

1. При каких значениях x существует равновесие Нэша, в котором Игрок 2 выбирает R с вероятностью единица? Дайте объяснения и опишите все возможные варианты подобных равновесий.

2. При каких значениях x (если такие есть) решение R Игрока 2 уцелеет при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий? Объясните.

Задача 62 [12] Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.9. Найдите все равновесия Нэша. Какие из них остаются после применения процедуры удаления слабо доминируемых стратегий?

Таблица 3.9. Данные к Задаче 62

		Игрок 2		
		L	*C*	*R*
Игрок 1	*T*	0, 0	3, 4	6, 0
	M	4, 3	0, 0	0, 0
	B	0, 6	0, 0	5, 5

Задача 63 [4] Две фирмы имеют по одной вакансии. Фирма i $(i = 1,2)$ предлагает зарплату w_i, где $0 < 1/2w_1 < w_2 < 2w_1$ и $w_1 \neq w_2$. Двое рабочих ищут работу, причем каждый из них может обратиться только в одну из фирм. Рабочие одновременно решают, обратиться в фирму 1 или фирму 2. Если только один из рабочих обращается в фирму, то этот рабочий получает данное место (а его выигрыш будет равен зарплате); если оба рабочих обращаются в одну и ту же фирму, то фирма случайным образом выбирает одного из них (с вероятностью 1/2), а другой рабочий остается без работы (и получает выигрыш ноль).

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 64 [21] Две политические партии, I и II, имеют каждая по три голоса, которые они могут распределить между тремя партийными кандидатами каждая. Избирается комитет, состоящий из трех членов. Из общего числа шести кандидатов те трое, кто наберет наибольшее количество голосов, будут избраны. В случае равного счета кандидаты, набравшие одинаковое количество голосов, будут выбраны с одинаковыми вероятностями. Выигрыш каждой политической партии равен ожидаемому количеству ее кандидатов, избранных в комитет.

1. Найдите нормальную форму описанной игры.
2. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Задача 65 Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: A, B или C. Альтернатива выбирается голосованием простым большинством голосов. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если ни одна из альтернатив не наберет большинство, то будет выбрана альтернатива A. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$$u_1(A)=2, \quad u_1(B)=1, \quad u_1(C)=0,$$
$$u_2(A)=0, \quad u_2(B)=2, \quad u_2(C)=1,$$
$$u_3(A)=1, \quad u_3(B)=0, \quad u_3(C)=2.$$

Найдите равновесия Нэша.

Задача 66 Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левая» (L), «правая» (R) и «экологическая» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов. Найдите равновесия Нэша.

Задача 67 Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a>0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b>0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c>0$. При каких соотношениях между a, b и c в игре сложатся равновесия Нэша вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают?

Задача 68 Каждый из двух игроков ($i=1,2$) имеет по 3 стратегии: a, b, c и x, y, z соответственно. Заполните выигрыши в игре, используя номера букв своих имени и фамилии (см. Таблицу 68). Номера букв в алфавите указаны в Таблицей 3.11. Если в имени или фамилии букв меньше, чем требуется, то повторите буквы (например, *левлевлев*).

1. Есть ли в Вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?
2. Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?
3. Найдите равновесия Нэша этой игры.

Таблица 3.10. Матрица для Задачи 68

Игрок 2

Игрок 1		x	y	x
	a	$и_1$ $ф_1$	$и_2$ $ф_4$	$и_3$ $ф_7$
	b	$и_4$ $ф_2$	$и_5$ $ф_5$	$и_6$ $ф_8$
	c	$и_7$ $ф_3$	$и_8$ $ф_6$	$и_9$ $ф_9$

Таблица 3.11. Номера букв русского алфавита

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0		а	б	в	г	д	е	ё	ж	з
1	и	й	к	л	м	н	о	п	р	с
2	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы
3	ь	э	ю	я						

Задача 69 Составьте по имени, фамилии и отчеству игру трех игроков, у каждого из которых по две стратегии (a и b, k и l, x и y соответственно), по тому же принципу, как и в Задаче 68 (см. Таблицу 69). Ответьте на те же вопросы.

Таблица 3.12. Матрица для Задачи 69

Игрок 3, x — Игрок 2

Игрок 1		k	l
	a	$о_1$ $ф_1$ $и_1$	$о_5$ $ф_3$ $и_2$
	b	$о_3$ $ф_2$ $и_3$	$о_7$ $ф_4$ $и_4$

Игрок 3, y — Игрок 2

Игрок 1		k	l
	a	$о_2$ $ф_5$ $и_5$	$о_6$ $ф_7$ $и_6$
	b	$о_4$ $ф_6$ $и_7$	$о_8$ $ф_8$ $и_8$

Задача 70 Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре...

(0) не было ни одного равновесия Нэша,
(1) было одно равновесие Нэша,
(2) было два равновесия Нэша,
(3) было три равновесия Нэша,
(4) было четыре равновесия Нэша.

	X	Y
A	? 1	2 ?
B	4 ?	? 0

Задача 71 Пусть в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия. Объясните, почему эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

Задача 72 Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях, и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

Задача 73 («Охота на оленя») [7] Группа охотников состоит из n человек. Каждый из охотников может охотиться на оленя или не зайца. Для поимки оленя требуются коллективные усилия не менее m охотников, где $2 \le m < n$. Имеется единственный олень. Олень делится поровну между охотниками, которые его добудут. Для поимки зайца достаточно одного охотника, и заяц достается охотнику, который его добудет. (Зайцев хватит на всех охотников.) Каждый охотник предпочитает долю оленя $1/n$ зайцу.

1. Сформулируйте стратегическую игру, которая моделирует эту ситуацию.
2. Запишите игру в матричном виде при $n = m = 2$. Найдите равновесия Нэша.
3. Опишите равновесия Нэша при произвольных n и m. Какие из равновесий Парето-оптимальны?
4. Пусть, каждый охотник предпочитает долю $1/k$ оленя зайцу, но предпочитает зайца любой меньшей доле оленя, где k — целое число, такое сто $m \le k \le n$. Опишите равновесия Нэша в этой модифицированной игре.

Задача 74 (вклад в общественное благо) [7] Каждый из n человек выбирает, внести ли вклад в обеспечение общественного блага. Благо производится только если по крайней мере k человек вносят вклад (где $2 \le k \le n$). Если благо не будет произведено, то сделанные вклады не возмещаются. Каждый человек следующим образом упорядочивает возможные исходы по уменьшению предпочтительности: (i) любой исход, при котором благо производится, и он не вносит вклад, (ii) любой исход, при котором благо производится, и он вносит вклад (iii) любой исход, при котором благо не производится, и он не вносит вклад, (iv) любой исход, при котором благо не производится, и он вносит вклад. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру, и найдите в ней равновесия Нэша. (Существует ли такое равновесие

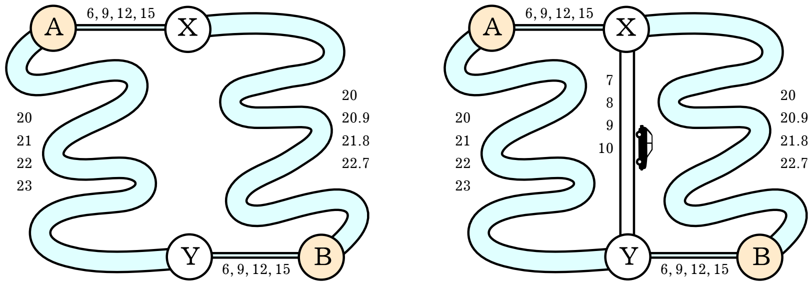
Нэша, в котором более k человек вносят вклад? Такое, в котором k человек вносят вклад? Такое, в котором менее k человек вносят вклад? Будьте внимательны!)

Задача 75 (угадывание двух третей среднего) [7] Каждый из трех человек называет целое число от 1 до K. Если эти три числа различны, человек, чье число оказалось ближе к $\frac{2}{3}$ от среднего этих трех чисел, выигрывает \$1. Если среди чисел есть совпавшие, то \$1 делится поровну между теми, чьи числа оказались ближе к $\frac{2}{3}$ среднего. Существует ли целое число k, такое что профиль действий (k,k,k), при котором все называют одно и то же число k, является равновесием Нэша? (Если $k \geq 2$, то что произойдет, если что-нибудь назовет меньшее число?) Будет ли равновесием Нэша любой другой профиль? (Какой выигрыш получит тот, чье число будет наибольшим из трех? Может он увеличить этот выигрыш, назвав какое-то другое число?)

Задача 76 (участие избирателя в голосовании) [7] На выборах конкурируют между собой два кандидата (A и B). Из n граждан k поддерживают кандидата A, а m $(= n-k)$ — кандидата B. Каждый гражданин решает, голосовать или нет за того кандидата, которого он поддерживает, или же не участвовать в голосовании, с учетом того, что участие в голосовании связано для него с издержками. Гражданин, не участвовавший в голосовании, получает выигрыш 2, если кандидат, которого он поддерживает, победит, 1 если кандидаты наберут одинаковое количество голосов, и 0 если этот его кандидат проиграет. Гражданин, который участвовал в голосовании, получит в этих трех случаях выигрыши $2-c$, $1-c$ и $-c$, где $0 < c < 1$.

1. Проанализируйте игру при $k = m = 1$.
2. При $k = m$ найдите множество равновесий Нэша. (Является ли профиль действий, в котором каждый голосует, равновесием? Существует ли равновесие Нэша, в котором кандидаты набирают одинаковое количество голосов, причем не все граждане голосуют? Существует ли равновесие Нэша, в котором одни из кандидатов побеждает с преимуществом в один голос? Существует ли равновесие Нэша, в котором одни из кандидатов побеждает с преимуществом в два или более голоса?)
3. Каково множество равновесий Нэша при $k < m$?

Задача 77 (выбор маршрута) [7] Четыре человека должны выехать из A в B в одно и то же время. Доступны два маршрута: один через X, другой через Y. (См. левую часть Рис. 3.1.) Дороги из A в X и из Y в B обе короткие и узкие; на каждой из них один автомобиль теряет 6 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 3 минуты в расчете на один автомобиль. (Например, если два автомобиля едут из A в X, то каждый автомобиль потеряет 9 минут.) Дороги из A в Y и из X в B длинные и широкие. На дороге из A в Y один автомобиль теряет 20 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 1 минуту в расчете на один автомобиль. На дороге из X в B один автомобиль теряет 20 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 0.9 минут в расчете на один автомобиль. Представьте эту ситуацию как стратегическую игру, и найдите в ней равновесие Нэша. (Если все четыре человека выберут один и тот же маршрут, то, может быть, любой из них добьется большего успеха, выбрав другой маршрут? Что если трое выберут один и тот же маршрут, а один выберет другой маршрут? Что если каждый из маршрутов выберут двое?)



Первоначальная дорожная сеть | Дорожная сеть с новой дорогой из X в Y

Рис. 3.1. Путь из A в B: дорожные сети из Задачи 77. Числа около каждой из дорог показывают время путешествия одного автомобиля, если по этой дороге едут 1, 2, 3 или 4 автомобиля

Пусть теперь между X и Y построена относительно короткая, широкая дорога, что дает каждому человеку четыре варианта путешествия из A в B: A–X–B, A–Y–B, A–X–Y–B, и A–Y–X–B. Предположите, что человек, выбравший путь A–X–Y–B едет по отрезку A–X в то же самое время как и тот, кто выбрал A–X–B, а по отрезку Y–B — в то же самое время как и тот, кто выбрал A–Y–B. (Можно представить это так, что транспортные потоки стабильны.) На дороге между X и Y один автомобиль теряет 7 минут, а каждый дополнительный автомобиль увеличивает время путешествия на 1 минуту в расчете на один автомобиль. Найдите равновесие Нэша в этой новой ситуации. Сравните время, затрачиваемое отдельным человеком со тем временем, которое он затрачивал в равновесии, существовавшем до строительства дороги из X в Y.

Задача 78 [12] Рассмотрите игру двух лиц в стратегической форме, в которой $I = 1,2$ — множество игроков, $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ — множества допустимых действий этих игроков, а

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 - x_1^2 \quad \text{и} \quad u_2(x_1, x_2) = 8x_2 - x_1 x_2^2 \text{ —}$$

их функции выигрыша. Найдите равновесия Нэша или покажите, что равновесий нет.

Задача 79 Два охотника ($i = 1,2$) охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой i-м охотником (u_i), зависит от его усилий (x_i) и общего количества дичи в лесу (y) как $u_i = x_i y$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $y = 6 - x_1 - x_2$. Охотники стремятся добыть как можно больше дичи. Сравните равновесие Нэша и оптимум Парето. Изобразите ситуацию на графике в координатах (x_1, x_2).

Задача 80 Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании (y_i) зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает (x_i), составляя $x_i/(1 + x_1 + x_2)$ долю от общих запасов нефти в месторождении (1000 баррелей). Рыночная цена нефти — 15 песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3 + x_i)$ песо. Каков будет результат «эгоистичной погони за прибылью»? Покажите, что месторождение будет эксплуатироваться слишком интенсивно.

Задача 81 Робинзон и Пятница договорились, что Робинзон будет заниматься сбором кокосов, а Пятница — ловлей рыбы. Выигрыш Робинзона (первого игрока) равен

$$u_1 = \min\{x_1, y_1\} - X^2/4,$$

а выигрыш Пятницы (второго игрока) равен

$$u_2 = y_2 \sqrt{x_2} - Y^2/8,$$

где x_i — количество кокосов, доставшееся i-му игроку, y_i — количество рыбы, доставшееся i-му игроку, $X = x_1 + x_2$ — общее количество собранных кокосов, $Y = y_1 + y_2$ — общее количество выловленной рыбы. (Выигрыш каждого равен удовольствию от потребленных продуктов минус тягость усилий.) Робинзон выбирает количество собранных кокосов X, а Пятница — количество выловленной рыбы Y.

1. Предположим, что добычу они будут делить пополам. Найдите оптимальный отклик каждого из игроков и равновесие Нэша. Изобразите ситуацию на графике в координатах (X, Y).

2. Предположим, что доля α добычи остается игроку, который ее добыл, а доля $1-\alpha$ — другому игроку. Найдите равновесия Нэша в зависимости от параметра α.

Задача 82 Пусть доход X артели есть простая сумма результатов $x_i \geq 0$, создаваемых усилиями отдельных участников $i = 1, \ldots, n$. Доход распределяется поровну. Функция полезности $u_i(w_i, x_i)$ каждого участника возрастает по его доходу $w_i = X/n$ и убывает по его усилиям x_i.

1. Найдите равновесие Нэша при $u_i(w_i, x_i) = w_i - x_i^2$. Покажите, что равновесие не оптимально по Парето, подобрав Парето-улучшение. (Подсказка: Парето улучшение можно искать среди симметричных исходов, в которых все участники делают одинаковые усилия.)

2. Решите ту же задачу при $u_i(w_i, x_i) = w_i(1 - x_i)$, где $x_i \in [0;1]$.

3. Для произвольной дифференцируемой функции $u_i(w_i, x_i)$ покажите, что если хотя бы один участник i в равновесии Нэша осуществляет усилия ($x_i > 0$), то оно не Парето-оптимально. Предложите Парето-улучшение.

Задача 83 [4] Рассмотрите избирателей, равномерно распределенных по «идеологическому спектру» от левой ($x = 0$) до правой ($x = 1$) ориентации. Каждый из кандидатов на некоторую должность одновременно выбирает платформу для своей избирательной кампании, то есть точку x на отрезке $[0;1]$. Избиратели наблюдают выбор кандидатов, а затем каждый из избирателей голосует за того кандидата, чья платформа оказывается ближе к позиции избирателя в рамках идеологического спектра. Например, если есть два кандидата, и они выбрали платформы $x_1 = 0.3$ и $x_2 = 0.6$ соответственно, то все избиратели левее $x = 0.45$ проголосуют за первого кандидата, а все избиратели правее $x = 0.45$ — за второго, так что второй кандидат выиграет выборы, набрав 55% голосов. Предположим, что кандидаты стремятся только к тому, чтобы их выбрали и им нет дела до своих политических платформ! (Предположим, что те кандидаты, которые предложили одинаковые платформы, поровну делят голоса избирателей, и что при равенстве голосов победитель на выборах определяется жребием с равными вероятностями.)

1. Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях в случае двух кандидатов.
2. Опишите равновесие Нэша в чистых стратегиях в случае трех кандидатов.

Задача 84 «Орел или решка». Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль. Покажите, что в этой игре нет равновесий Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 85 [8] Игра моделирует ситуацию, когда правительство хочет помочь безработному, если он ищет работу, и не хочет в противном случае. В свою очередь безработный будет искать работу только если он не получает государственное пособие, причем он может не найти работу, даже если будет искать. Выигрыши равны (3;2) (для правительства и безработного соответственно), если правительство платит пособие, а безработный пытается искать работу, (−1;1), если правительство не платит пособие, а безработный пытается искать работу, (−1;3) если правительство платит пособие, а безработный не пытается искать работу, и (0;0) в оставшемся случае.

1. Изобразите игру в виде матрицы.
2. Есть ли в этой игре равновесия Нэша в чистых стратегиях?
3. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 86 [21] Рассмотрите игру, заданную Таблицей 3.13.

1. Какая чистая стратегия Игрока 1 или Игрока 2 строго доминируется другой чистой стратегией?
2. Опишите все смеси стратегий W и Y Игрока 2, которые строго доминируют стратегию X.
3. Найдите для этой игры все равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Таблица 3.13. Данные для Задачи 86

		Игрок 2: W	X	Y	Z
Игрок 1	T	6, 6	4, 4	1, 2	8, 5
	B	4, 5	6, 6	2, 8	4, 4

4. Пусть Игрок 1 выбирает T с вероятностью p и B с вероятностью $1-p$, а Игрок 2 выбирает W с вероятностью q и Y с вероятностью $1-q$. Найдите значение q (q^*), такое что стратегии T и B дают Игроку 1 один и тот же ожидаемый выигрыш. Найдите значение p (p^*), такое что стратегии W и Y дают Игроку 2 один и тот же ожидаемый выигрыш. Покажите, что при $q = q^*$ стратегии X и Z дают Игроку 2 меньший ожидаемый выигрыш, чем стратегии W и Y. Объясните, почему вероятности p^*, q^* соответствуют равновесию Нэша в смешанных стратегиях.

5. Покажите, что других равновесий Нэша в смешанных стратегиях (кроме упоминавшихся выше) не существует.

Задача 87 [12]

1. Рассмотрите игру, изображенную в Таблице 3.14 слева. Для каждого z из промежутка от -1 до 1 изобразите множество всех точек p, таких что p — это вероятность выбора U первым игроком в некотором равновесии Нэша этой игры. (Например, для $z = 2$ — что находится за пределами того промежутка, который требуется проанализировать — имеется три равновесия Нэша, с вероятностями $p = 1$, $p = 0$ и $p = 2/3$ соответственно. Значит, для $z = 2$ требовалось бы нарисовать точки (2;0), (2;2/3) и (2;1).)

Таблица 3.14. Данные к Задаче 87

		Игрок 2: L	R
Игрок 1	U	1, 1	0, 0
	D	0, 0	z, z

		Игрок 2: L	R
Игрок 1	U	1, 1	0, 0
	D	0, 0	z, 2

2. Проделайте то же упражнение для игры, изображенной в Таблице 3.14 справа.

Задача 88 [12] Начальник отдела планирует повысить в должности одного из трех своих подчиненных. Для того чтобы решить, кто это будет, она устроила между ними соревнование. Она будет наблюдать их работу в течении месяца и выберет того, кто трудится наиболее усердно. В случае ничьей, она выберет одного из победителей случайным образом (с равными вероятностями). Каждый из подчиненных может выбрать либо нормальные усилия (N), либо повышенные (E). Повышение приносит полезность 10, а отсутствие повышения — полезность 0. Издержки повышенных усилий равны 5, а обычных — 0. Выигрыш равен полезности за вычетом издержек.

1. Опишите данную ситуацию как игру в нормальной форме.
2. Найти все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найти все симметричные равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 89 Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, побеждает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, побеждает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, побеждает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает 1, проигравший получает -1. Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает 0. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 90 Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат выигрыш 1, а красные — -2. Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 91 [12] Агентство по защите окружающей среды знает, что фирма собирается осуществить выброс загрязнителя в реку в один из n дней. Чтобы фирма была признана виновной, требуется, чтобы на реке находился инспектор агентства и наблюдал факт загрязнения. К сожалению, ресурсы агентства ограничены, и оно может позволить себе наличие инспектора на реке только в течении одного из n дней. Агентство принимает решение, не зная точно выбора фирмы (в какой из n дней она будет загрязнять реку). Выигрыш фирмы равен -1, если ее уличат и 1, если не уличат. Выигрыши агентства при тех же исходах равны 1 и -1.

1. Каким будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях при $n = 2$?
2. Догадайтесь, каким будет равновесие при произвольном n. Убедитесь, что это действительно будет равновесие. Как равновесные выигрыши фирмы и агентства меняются в зависимости от n?

Глава 4

Динамические игры с полной и совершенной информацией

Задача 92 [3] В игре, изображенной на Рис. 4.1, профсоюз ведет переговоры с фирмой по поводу повышения заработной платы работникам фирмы. Профсоюз должен решить, потребовать ли большого или небольшого повышения заработной платы. Известно, что фирма точно согласится на небольшое повышение, но в случае требования большого повышения может отказаться. Если фирма не согласиться, то за этим последует забастовка, которая связана с потерями для обеих сторон (общий выигрыш ниже, чем мог бы быть). Результирующие выигрыши указаны на Рис. 4.1 (сначала выигрыш профсоюза, а затем — фирмы).

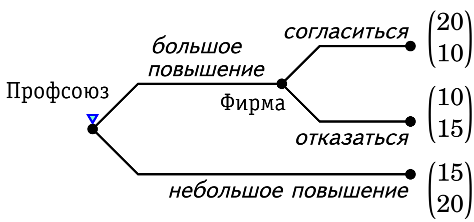


Рис. 4.1. Дерево игры для Задачи 92

1. Запишите игру в нормальной (стратегической) форме и найдите равновесие Нэша.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие Нэша.
3. Если выигрыш фирмы при отказе от большого повышения будет равен 5, а не 15, то поменяется ли совершенное в подыграх равновесие Нэша?

Задача 93 Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы в Таблице 4.1, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

Таблица 4.1. Данные к Задаче 93

		Жена	
		дома	*у друзей*
Муж	*дома*	b a	c 0
	у друзей	0 d	c d

Задача 94 [21] Традиционным вопросом теории отраслевых рынков является вопрос о том, может ли действующий в отрасли монополист сохранить свою позицию, угрожая начать ценовую войну с конкурирующей фирмой, которая войдет на этот рынок. Чтобы проанализировать этот вопрос, рассмотрите следующую ситуацию. Имеется два игрока, конкурент и действующий монополист. Конкурент решает, войти или не в входить. Если конкурент входит, что монополист может либо вступить в сговор с конкурентом (при этом цена остается монопольной), либо бороться, установив очень низкую цену. Прибыль при монопольной цене равна 100, а в условиях ценовой войны нулевая. Издержки входа в отрасль для конкурента равны 10. При сговоре прибыль делится поровну между фирмами.

1. Изобразите описанную игру в виде дерева.
2. Найдите равновесия Нэша (в чистых стратегиях). Какие из них получаются при помощи обратной индукции? Какие из них являются совершенными в подыграх? Объясните, в каком смысле другое равновесие представляет собой «не заслуживающую доверия угрозу».

Задача 95 Мать просит своего непослушного ребенка вести себя хорошо. Она обещает, что в случае хорошего поведения даст ребенку конфету. Однако мать мягкосердечна и даже если ребенок вел себя плохо, она предпочитает дать ему конфету.

1. Исходя из того, что ребенок достаточно разумен и может мыслить стратегически, задайте некоторые подходящие выигрыши и запишите игру в развернутой форме.
2. Найдите равновесие по обратной индукции.
3. Запишите игру в нормальной форме и найдите в ней все равновесия Нэша. Какие из равновесий являются совершенными в подыграх.
4. Пусть ситуация повторяется несколько (конечное число) раз. Продолжая исходить из того, что ребенок достаточно разумен, найдите решение с помощью обратной индукции. Появляется ли у матери стимул не давать ребенку конфету, чтобы в следующий раз он вел себя хорошо?

Задача 96 [18] Рассмотрите конкуренцию между компаниями Airbus и Boeing, в связи с разработкой нового коммерческого реактивного самолета. Предположите, что компания Airbus отстала от Boeing и решает, войти ли на данный рынок.

Если компания Airbus решит не входить, то она заработает нулевую прибыль, а Boeing будет монополистом и заработает 1 млрд долл. прибыли. Если Airbus решит войти на рынок и разработать конкурирующий самолет, то компания Boeing должна решить, примириться ли с этим решением Airbus или начать ценовую войну. В случае мирной конкуренции каждая из фирм заработает 300 млн долл. прибыли. В случае ценовой войны, однако, каждую из фирм ждут убытки в размере 100 млн долл., поскольку цены упадут так сильно, что ни одна из фирм не сможет покрыть свои издержки на разработку самолета.

1. Изобразите эту игру в виде дерева. Используйте обратную индукцию, чтобы найти равновесие.
2. Будет ли компания Boeing не будет удовлетворена равновесным исходом? Какой бы исход она предпочла? Если Boeing будет угрожать, что в случае входа она начнет ценовую войну, то будет ли эта угроза заслуживать доверия? Объясните.
3. Что если Boeing делает первый ход? Будет ли в этом случае существовать проблема не заслуживающей доверия угрозы? Объясните.

Задача 97 Дополните дерево, изображенное на Рис. 4.2 выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. Задачу 68 на с. 28).

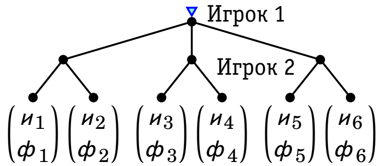


Рис. 4.2. Дерево игры для Задачи 97

1. Запишите в получившуюся игру в нормальной форме и найдите все равновесия Нэша.
2. Найдите все совершенные в подыграх равновесия.

Задача 98 Путешественник пытается попасть из пункта ***a*** в пункт ***e*** (см. Рис. 4.3). Ему пытается помешать злой волшебник. За один раунд игры волшебник может заблокировать одну из дорог. Если дорога заблокирована, то она остается заблокированной до конца игры. В каждом раунде волшебник ходит первым. После хода волшебника путешественник может проехать из одного города в другой по одной из доступных дорог. Игра заканчивается, когда путешественник достигнет пункта ***e*** или же когда путешественник окажется в тупике.

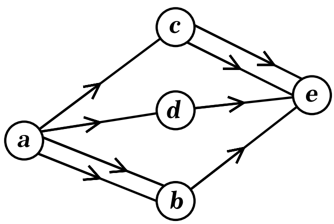


Рис. 4.3. Дорожная сеть для Задачи 98

1. Изобразите эту игру в виде дерева и найдите решение с помощью обратной индукции. Кто выиграет, путешественник или волшебник?

2. Решите ту же задачу в случае, если из пункта $\boldsymbol{c}$ в пункт $\boldsymbol{e}$ ведет только одна дорога.

Задача 99 [21] Четыре предмета, K, L, M и N, по-разному ценятся игроками 1 и 2. Ценность предметов для игроков показана в Таблице 4.2.

Таблица 4.2. Ценность разных предметов для двух игроков в Задаче 99

	K	L	M	N
Игрок 1:	1	2	3	4
Игрок 2:	2	3	4	1

Игрок 1 начинает, выбирая некоторый предмет. После этого игрок 2 выбирает предмет, потом игрок 1 берет еще один предмет, и, наконец, игрок 2 получает оставшийся предмет.

1. Нарисуйте дерево этой игры.
2. Подсчитайте, сколько стратегий имеет каждый из игроков.
3. Найдите совершенные в подыграх равновесия этой игры (в чистых стратегиях).
4. Найдите Парето-границу в этой игре. Какие из равновесий Парето-оптимальны?

Задача 100 [14] Вы и ваш однокурсник (оба нейтральные к риску и максимизирующие свою ожидаемую полезность) нашли на тротуаре две купюры по 100 руб. Ваш преподаватель сказал, что вы можете оставить деньги себе, если сможете договориться о том, как их поделить. Имеется три способа дележа: 200 руб. вам, 0 руб. однокурснику, 100 руб. каждому или же 0 руб. вам, 200 руб. однокурснику. Ваш преподаватель просит вас предложить дележ. Ваш однокурсник, зная, что вы предложили, должен сказать «да» или «нет». Если однокурсник скажет «да», то деньги будут поделены так, как вы предложили, если же он скажет «нет», то вы оба ничего не получите.

1. Изобразите дерево для этой игры, обозначив на нем игроков, ходы и выигрыши.
2. Найдите в этой игре решение с помощью обратной индукции.
3. Изобразите матрицу выигрышей для нормальной формы этой игры.

4. Примените к игре последовательное отбрасывание слабо доминируемых стратегий и найдите остаток.
5. Укажите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
6. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях.
7. Пусть в той же ситуации ваш преподаватель просит вас и однокурсника одновременно назвать свой вариант дележа. Если вы в сумме запросите не более 200 руб., то каждый получит сколько просил, в противном случае вы оба ничего не получите. Ответьте на те же вопросы.

Задача 101 [17] Для игры, дерево которой показано на Рис. 4.4, найдите

1. нормальную форму;
2. все равновесия в доминирующих стратегиях;
3. результат итеративного исключения слабо доминируемых стратегий;
4. все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях;
5. все совершенные в подыграх равновесия.

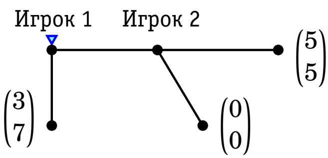


Рис. 4.4. Дерево игры для Задачи 101

Задача 102 [17] Рассмотрите развернутую форму игры, изображенной на Рис. 4.5.

1. Найдите все совершенные в подыграх равновесия.
2. Найдите нормальную форму (Игрок 1 выбирает матрицы, Игрок 2— строки, Игрок 3 — столбцы).
3. Примените последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий.
4. Найдите все равновесия Нэша, в том числе в смешанных стратегиях.

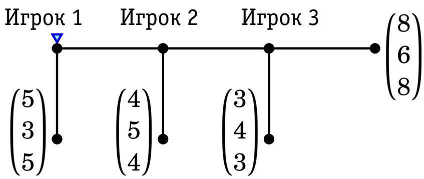


Рис. 4.5. Дерево игры для Задачи 102

Задача 103 Три выборщика, Ольга, Петр и Раиса, должны выбрать одного из четырёх кандидатов в депутаты: w, x, y или z. Правила выбора следующие. Ольга первой берет бюллетень и вычёркивает любого из кандидатов, затем последовательно Петр и Раиса делают то же самое по отношению к ещё не вычеркнутым. Кандидаты имеют для выборщиков численную оценку полезности, заданную в Таблице 4.3.

Таблица 4.3. Данные для Игры 103

	Ольга	Петр	Раиса
w	5	1	4
x	3	4	0
y	2	2	5
z	0	3	2

1. Представьте игру в виде дерева. Предлагается использовать обозначение w для стратегии «вычеркнуть w» и т. д.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие.

Задача 104 Два игрока по очереди называют число от 1 до 10. Каждый раз все названные с начала игры числа складываются. Выигрывает тот, кто получит в сумме 100. Найдите решение с помощью обратной индукции.

Задача 105 [21] В игре «Многоножка» два игрока ходят по очереди. На каждом ходе игрок может либо остановиться (S), либо продолжить (C). На каждом ходе игроку более выгоднее остановиться, чем продолжить, если другой игрок остановится сразу после этого, но менее выгодно остановиться, чем продолжить, если другой игрок продолжит, вне зависимости от того, какие действия будут выбраны впоследствии. Игра заканчивается после конечного числа периодов. Пример подобной игры показан на Рис. 4.6.

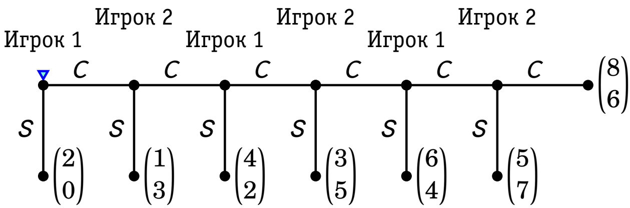


Рис. 4.6. Дерево игры «Многоножка» для Задачи 105

1. Найдите совершенное в подыграх равновесие этой игры. Каким будет исход игры?
2. Какие исходы игры доминируют по Парето исход, соответствующий совершенному в подыграх равновесию? Найдите Парето-границу множества исходов.
3. Покажите, что в игре есть другие равновесия Нэша, но все они приводят к тому же исходу, что и совершенное в подыграх равновесие.

Задача 106 [17] Имеется 5 руб. Игрок 1 предлагает вариант дележа этих денег. Дележ возможен только в целых числах, причем Игрок 1 не вправе предложить 5 руб. себе или 0 руб. себе, но может предложить любую промежуточную сумму. Игрок 2 может принять или отклонить предложенный дележ. Если он примет дележ, то деньги будут поделены именно таким образом, а если отклонит, то никто из игроков ничего не получит. Пусть m_i — это денежный выигрыш игрока i и пусть полезность игрока i равна $m_i - cm_{-i}$, где $0 \leq c < 1$ — параметр, а m_{-i} — денежный выигрыш другого игрока.

1. Изобразите развернутую форму этой игры.
2. Найдите совершенные в подыграх равновесия в зависимости от параметра c. Как зависит решение от c?

Задача 107 [12] Рассмотрите следующую двухпериодную политическую игру. Есть два игрока, рабочий класс и элита. В первый период элита решает, произвести ли перераспределение богатства или нет.

Затем рабочие решают, организовать ли революцию. Выигрыши следующие. В случае революции рабочие получают 15, а элита получает 0, и на этом игра кончается. Если революция не происходит, но происходит перераспределение, то рабочие получают 10, а элита 15. Если ни революция, ни перераспределение не происходят, рабочие получают 0 а элита 25. В двух последних случаях начинается второй этап игры.

В начале второго этапа природа решает, будут ли рабочие иметь возможность устроить революцию. Вероятность того, что революция осуществима, равна q. Все видят результат хода природы. После этого элита снова решает, провести ли перераспределение. В случае, когда революция не происходит, элита получает дополнительный выигрыш 25, если она не осуществляет перераспределение, а рабочие ничего не получают. Если происходит перераспределение, то рабочие дополнительно получают 10, а элита дополнительно получает 15. Революция во втором периоде приносит рабочим дополнительный выигрыш 15, а элите — 0. Революция во втором периоде возможна только если природа дала рабочим возможность ее осуществить.

1. Нарисуйте дерево игры.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие.
3. Почему высокое значение q позволяет предотвратить революцию?

Задача 108 (трудовое соглашение) Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной платы ($w \geq 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы. Фирма в течении срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($L \geq 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w,L) = wL - 2L^2,$$

где $2L^2$ — издержки работы для членов профсоюза. Фирма максимизирует свою прибыль

$$\pi(w,L) = 2\sqrt{L} - wL.$$

Найдите решение с помощью обратной индукции.

Задача 109 (справедливый дележ пирога) В игре участвуют n игроков. Нужно разделить пирог между игроками, то есть выбрать вектор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером 1 режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается 1-му игроку.

1. Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

Задача 110 [12] Предположим, что действия ребенка a влияют как на его собственный доход $c(a)$, так и на доход матери $p(a)$. Эгоистичный ребенок заботится только о своем собственном доходе, в то время как альтруистичная мать заботится как о собственном доходе, так и о доходе ребенка. Предположим, что $c(a) \leq p(a)$ при всех a. Мать может передавать свои деньги ребенку. Ее выигрыш — это наименьший из двух доходов после передачи денег. Предположим, что сначала ребенок выбирает свои действия, а затем мать решает, сколько денег дать ребенку.

1. Предположите, что a может принимать значения из промежутка $[0;1]$, $p(a) = 10 - a^2$ и $c(a) = a$. Каким будет совершенное в подыграх равновесие?
2. Какими свойствами будет обладать совершенное в подыграх равновесие в общем случае? Если требуется, придумайте несколько примеров с различными подходящими функциями.
3. Сравните равновесный исход с границей Парето.

Задача 111 [12] Игрок 1 выбирает любое действительное число a между 0 и 1, а игрок 2 говорит «да» или «нет». Если игрок 2 скажет «да», выигрыши в рублях будут равны $x_1 = a$ and $x_2 = 1 - a$. Если он скажет «нет», то выигрыши в рублях будут равны $x_1 = x_2 = 0$.

1. Предположите, что функция выигрыша каждого игрока зависит только от его собственного выигрыша в рублях. Опишите все равновесия Нэша в этой игре.
2. Опишите все совершенные в подыграх равновесия.
3. Пусть теперь функция выигрыша игрока i имеет вид $u_i = x_i - \beta x_j$, где x_i — его собственный выигрыш в рублях, x_j — выигрыш другого игрока, а β — положительный параметр. (Можно интерпретировать такие функции как следствие обоюдной зависти.) Опишите все совершенные в подыграх равновесия.

Глава 5

Динамические игры с несовершенной информацией

Задача 112 (раз-два-три) Каждый из двух игроков одновременно называет одно из трех чисел: 1, 2 или 3. При совпадении второй игрок дает первому названное и совпавшее число (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которые они оценивают в 1/2. Какую сумму z первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

Задача 113 Рассмотрите игру в нормальной форме, заданную Таблицей 5.1. Покажите, что этой игре могут соответствовать разные игры в развернутой форме, приведя соответствующие примеры. Изобразите эти примеры в виде дерева.

Таблица 5.1. Данные для Задачи 113

		Игрок 2		
		X	Y	Z
Игрок 1	U	1, 2	1, 2	1, 2
	D	2, 1	4, 3	6, 5

Задача 114 [14] Две фирмы, TopDog и HotDog одновременно решают, начать ли производство на новом рынке. Выигрыши показаны в Таблице 5.2. *«In»* означает «начать производство», *«Out»* — «не начинать».

Таблица 5.2. Данные для Задачи 57

		HotDog *In*	HotDog *Out*
TopDog	*In*	1, 2	5, 3
	Out	3, 6	3, 3

Предположите сначала, что до того, как фирмы принимают свои решения, фирма TopDog (только она) должна объявить о своих намерениях «начать производство» или «не начинать» (объявить *«i»* или *«o»*). TopDog может не сдержать обещание, но если она это сделает, то понесет издержки в размере c. (Издержки вычитаются из указанных выигрышей.)

1. Изобразите дерево этой игры.
2. Опишите и перечислите возможные стратегии обоих игроков.
3. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в случае, когда $c = 4$.
4. Укажите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в случае, когда $c = 1$.
5. Опишите все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях в зависимости от параметра $c > 0$ ($c \neq 2$).

Задача 115 [17] Игрок 1 ходит первым. Он может сразу закончить игру, что даст всем игрокам выигрыш 4. Или же он может принять участие в игре 2×2 с Игроком 2, выигрыши которой указаны в Таблице 5.3.

1. Найдите единственное совершенное в подыграх равновесие этой игры.
2. Совпадает ли это равновесие с результатом последовательного отбрасывания слабо доминируемых стратегий?

Задача 116 В игре участвуют два игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они

Таблица 5.3. Данные для Задачи 115

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	A	6, 6	3, 0
	B	0, 0	2, 2

участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит \$1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся \$2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой оба игрока оценивают выше, чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих — отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. 5.1. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

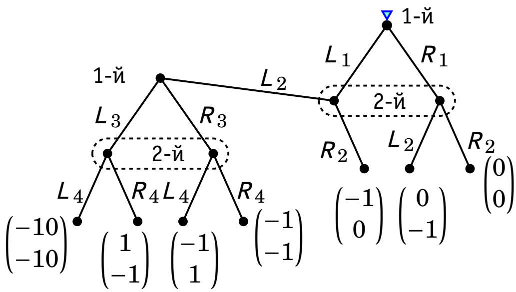


Рис. 5.1. Дерево для игры для Задачи 116

Задача 117 [14] Государство хочет побудить двух парней, Андрея (для краткости A) и Бориса (B), пройти службу в армии. Оно может преследовать по суду того, кто уклоняется от воинской повинности, однако имеющихся ресурсов недостаточно, чтобы наказать сразу обоих. Пусть выигрыш каждого из парней составит 3, если он отслужит в армии, 4, если он не будет служить в армии и не понесет ответственности, и 0, если он не будет служить в армии и понесет ответственность.

Предположите сначала, что государство проверяет сначала A, а затем уже B, и преследует по суду только первого из обнаруженных уклоняющихся от армии. Структура игры общеизвестна. Считая игроками только A и B (но не государство), запишите развернутую форму игры (дерево игры), запишите нормальную форму (матрицу выигрышей, A выбирает строки), укажите в явном виде стратегии игроков и найдите все равновесия Нэша и совершенные в подыграх равновесия Нэша в следующих случаях:

1. когда сначала A должен решить, служить ли в армии, и B имеет возможность наблюдать решение A до того, как сам примет решение;
2. когда A и B одновременно принимают решение, служить ли в армии.
3. Пусть теперь государство проверяет A и B в случайном порядке, того и другого с одинаковой вероятностью, а все остальное такое же, как и выше. Ответьте на те же вопросы для предположений пункта 1.
4. Ответьте на те же вопросы для предположений пункта 2.

Задача 118 1. Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 5.2a. Представьте ее в нормальной форме и найдите все равновесия Нэша (в чистых стратегиях).

2. Объясните, почему множество равновесий Нэша для этой игры совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.
3. Для игры, изображенной на Рис. 5.2b, найдите все совершенные в подыграх равновесия. Объясните, почему множество совершенных в подыграх равновесий в ней не совпадает с множеством равновесий Нэша.
4. Объясните, почему две рассматриваемые игры естественно считать в определенном смысле эквивалентными.
5. Объясните, почему множества совершенных в подыграх равновесий в двух играх не совпадают. Сделайте вывод о недостатках этой концепции равновесия.

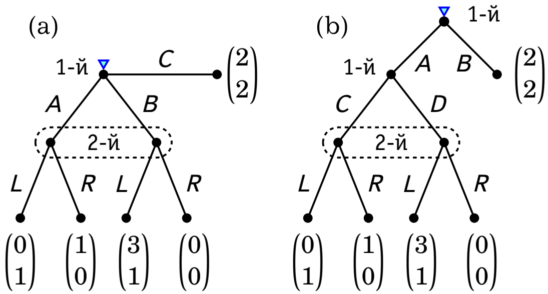


Рис. 5.2. Две игры, данные для Задачи 118

Задача 119 [23] Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 5.3.

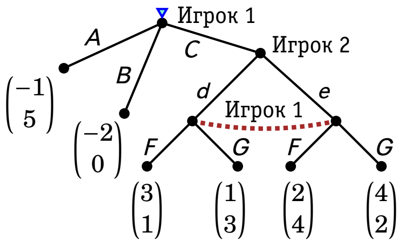


Рис. 5.3. Дерево игры для Задачи 119

1. Перечислите стратегии каждого из игроков.
2. Запишите игру в стратегической форме.
3. Какие из стратегий Игрока 1 являются строго доминируемыми? Какие из стратегий Игрока 2 являются строго доминируемыми?
4. Какие в этой игре есть равновесия Нэша в чистых стратегиях?
5. В подыгре, начинающейся в информационном множестве Игрока 2, найдите все равновесия Нэша.
6. Для подыгры, начинающейся в информационном множестве Игрока 2, вычислите ожидаемую полезность Игрока 1 в равновесии Нэша в смешанных стратегиях.
7. Найдите совершенное в подыграх равновесие игры в целом.

Задача 120 [2] Игра, дерево которой изображено на Рис. 5.4, начинается с центральной вершины, в которой ход делает природа. Каждый из трех игроков имеет одно информационное множество с двумя вершинами, в котором он делает ход, выбирая из двух возможных действий (a и b для Игрока 1, c и d для Игрока 2, e и f для Игрока 3).

Вычислите ожидаемые выигрыши в зависимости от выбора игроков и постройте нормальную форму игры. Найдите все равновесия Нэша.

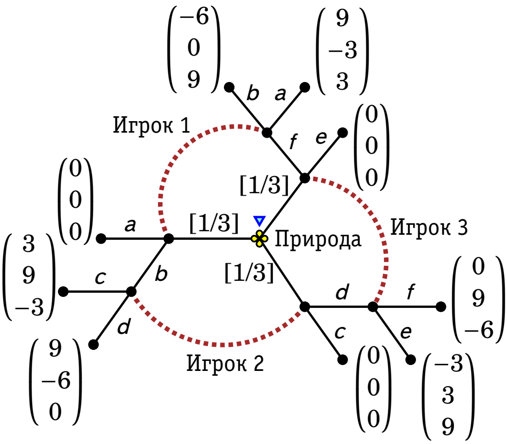


Рис. 5.4. Дерево Задачи 120

Задача 121 [2] Случайно выбирается целое число z с возможными значениями 1, 2, 3 (каждое имеет вероятность 1/3). Игрок 1, не зная результата этого хода, выбирает целое число x с возможными значениями 1, 2, 3. Игрок 2, не зная ни результата случайного хода, ни выбора Игрока 1, выбирает целое число y с возможными значениями 1, 2, 3. Выигрыши двух игроков определяются следующим образом:

$$u_1 = |y-z| - |x-z|, \quad u_2 = |x-z| - |y-z|,$$

т. е. целью является выбор числа, по возможности близкого к z.

1. Вычислите ожидаемые выигрыши в зависимости от выбора игроков и изобразите нормальную форму игры.
2. Изобразите развернутую форму игры.

Задача 122 Рассмотрите дерево решений для одного игрока, представленное на Рис. 5.5.

1. Пусть игрок использует смешанную стратегию, которая заключается в выборе с равными вероятностями 1/3 трех чистых стратегий: (B, W, Y), (T, W, Z) и (T, X, Z). Найдите соответствующую поведенческую стратегию.

2. Пусть теперь игрок использует смешанную стратегию, которая заключается в выборе с равными вероятностями 1/2 стратегий (T, W, Z) и (T, X, Z). Найдите соответствующую поведенческую стратегию.

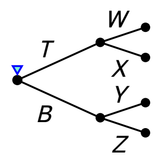


Рис. 5.5. Дерево решений для Задачи 122

Задача 123 Пусть в игре, дерево которой приведено на Рис. 5.6, Игрок 1 выбирает стратегии (A, F), (B, E) и (B, F) с одинаковыми вероятностями 1/3 (еще одну свою стратегию выбирает с вероятностью 0), а Игрок 2 выбирает стратегию C с вероятностью 2/5. Можно ли для данной смешанной стратегии Игрока 2 подобрать соответствующую ей поведенческую стратегию? Объясните полученный результат.

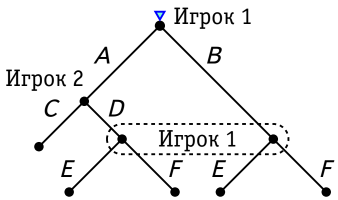


Рис. 5.6. Дерево игры для Задачи 123

Задача 124 Каждый из двух студентов, снимающих на двоих квартиру, может слушать свою любимую музыку часто (F) или редко (R). Выигрыши указаны в Таблице 5.4. Игра играется дважды, и после первого этапа игроки знают исход этого этапа.

Таблица 5.4. Данные для Задачи 124

		Игрок 2	
		F	R
Игрок 1	F	−1, −1	2, −2
	R	−2, 2	1, 1

1. Сколько стратегий у каждого из игроков в этой игре?
2. Найдите множество совершенных в подыграх равновесий этой игры.
3. Найдите множество равновесий Нэша этой игры.
4. Что будет, если игра повторяется несколько (конечное число) раз.

Задача 125 (нефтяной картель) [5] Предположим, что есть только две страны, производящие нефть, Иран и Ирак. Каждая из стран может выбрать добычу на уровне 2 или 4 миллионов баррелей в день. В зависимости от их решений общий объем производства на мировом рынке будет равен 4, 6 или 8 миллионов баррелей в день. Цена за баррель в этих трех случаях будет равна 25 долл., 15 долл., и 10 долл. соответственно. Издержки производства одного барреля равны 2 долл. для Ирана и 4 долл. для Ирака.

1. Изобразите матрицу нормальной формы этой игры и заполните ее выигрышами.
2. Покажите, что в единственном равновесии обе фирмы выбирают высокий уровень добычи и что это равновесие не оптимально по Парето.
3. Теперь предположите, что эта игра повторяется каждый день. Обе страны соглашаются сотрудничать (т. е. выбирать низкий уровень добычи). При этом каждая страна угрожает другой триггерной стратегией: «Если ты хотя бы раз выберешь высокий уровень добычи, то я буду всегда выбирать высокий уровень добычи». Покажите, что если процентная ставка достаточ-

но мала (дисконтирующий множитель достаточно близок к единице), то этот набор стратегий составляет равновесие Нэша.

Задача 126 [5] Многие виды рыб страдают от паразитов, которые прикрепляются к их жабрам. Часто такие рыбы формирует симбиозные отношения с рыбами другого вида, меньшего размера, для которых паразиты являются главным источником пищи. Однако такие отношения требуют взаимного доверия, так как большая рыба должна устоять перед искушением съесть меньшую рыбу, а меньшая рыба должна должна устоять перед искушением вынуть кусок пищи из большей рыбы, получая таким образом пищу с меньшими усилиями, чем если бы она выбирала крошечных паразитов.

Предположим, что Большая рыба и Маленькая рыба играют в игру, показанную в Таблице 5.5, многократно (бесконечное число раз). В таблице C означает «сотрудничать», а D — не сотрудничать. Выигрыш каждой рыбы — это сумма ее выигрышей за все периоды, взвешенных с дисконтирующим множителем δ, где $0 < \delta < 1$.

Таблица 5.5. Матрица выигрышей для Задачи 126

		Маленькая рыба: C	Маленькая рыба: D
Большая рыба	C	5, 5	−3, 8
	D	8, −3	0, 0

1. Покажите, что эффективный по Парето исход (C, C) может быть достигнут в каждом раунде бесконечно повторяющейся игры как совершенное в подыграх равновесие Нэша, если множитель δ достаточно близок к единице и каждый игрок использует триггерную стратегию, сотрудничая до тех пор, пока другой игрок сотрудничает, и отказываясь от сотрудничества до конца игры, как только другой игрок перестанет сотрудничать в некотором раунде. Найдите общие выигрыши игроков в таком равновесии.
2. Рассмотрите следующую триггерную стратегию Маленькой рыбы: чередовать C, D, C,... пока Большая рыба чередует D, C, D,.... Если Большая рыба отклонится от этой схемы, то до конца игры выбирать D. Пусть Большая рыба при этом использует дополнительную стратегию: чередовать D, C, D,... пока Ма-

ленькая рыба чередует C, D, C,.... Если же Маленькая рыба отклонится от этой схемы, то до конца игры выбирать D. Покажите, что эти две стратегии составляют совершенное в подыграх равновесие Нэша при δ достаточно близком к единице. Найдите общие выигрыши игроков в таком равновесии. Проверьте, что выигрыши обоих рыб в этом равновесии меньше, чем в равновесии, описанном в предыдущем пункте.

3. Предположим, что Маленькая рыба и Большая рыба используют триггерную стратегию следующего вида: они чередуют C, D, C,... до тех пор, пока другая рыба делает то же самое. Если одна из рыб отклонится от этой схемы, то другая рыба до конца игры выбирает D. Покажите, что эта пара стратегий составляет совершенное в подыграх равновесие Нэша при δ достаточно близком к единице.

4. Придумайте для рассматриваемой игры какие-нибудь другие интересные совершенные в подыграх равновесия Нэша.

Глава 6

Статические игры с неполной информацией (байесовские). Равновесие Нэша—Байеса

Задача 127 [15] Фирма SUN — монополист на рынке научных компьютерных рабочих станций. Однако SUN столкнулась с потенциальным конкурентом — фирмой MOON. SUN и MOON делают ходы одновременно: SUN выбирает одну из двух цен на свои компьютеры, высокую или низкую, а MOON выбирает, войти ли в рынок или не входить. Вход в отрасль связан для MOON с издержками. Если MOON не войдет, то SUN останется монополистом. Если MOON войдет, то они будут некоторое время конкурировать, но затем фирма с более высокими издержками вынуждена будет уйти из отрасли, а фирма с более низкими издержками останется монополистом. Известно, что с 50%-й вероятностью издержки SUN ниже чем издержки MOON. SUN знает свои издержки, когда устанавливает свою цену, а MOON не знает издержки SUN. Издержки MOON известны обеим фирмам.

В Таблице 6.1 показаны дисконтированные прибыли этих двух фирм в зависимости от выбранных действий и отношения между издержками.

1. Для каждой из фирм опишите множество чистых стратегий
2. Сконструируйте стратегическую форму этой игры и найдите все равновесия Байеса—Нэша в чистых стратегиях.

Таблица 6.1. Данные для Задачи 127

Издержки фирмы MOON ниже

MOON \ SUN	высокая	низкая
войти	100, 20	100, 5
не входить	0, 90	0, 30

Издержки фирмы SUN ниже

MOON \ SUN	высокая	низкая
войти	−20, 60	−20, 20
не входить	0, 120	0, 70

Задача 128 [21] Вычислите все равновесия Нэша—Байеса в чистых стратегиях в следующей статической игре с неполной информацией, построенной на основе двух игр, показанных в Таблице 6.2. Выигрыши в берутся из левой или из правой игры на основе жребия с равной вероятностью. Предполагается, что Игрок 1 знает, какая игра выбрана, а Игрок 2 — нет.

Таблица 6.2. Данные для Задачи 128

Игрок 1 \ Игрок 2	*L*	*R*
T	1, 1	0, 0
B	0, 0	0, 0

Игрок 1 \ Игрок 2	*L*	*R*
T	0, 0	0, 0
B	0, 0	2, 2

Задача 129 В игре участвуют два игрока — водитель и автоинспектор. Водитель может либо превышать скорость (+), либо не превышать (–). Автоинспектор может либо контролировать водителя (+), либо сачковать (–). Водители бывают двух типов — наглые (70%) и робкие (30%). Автоинспекторы тоже бывают двух типов — старательные (60%) и ленивые (40%). Каждый из двух игроков знает свой тип, но не знает тип другого игрока. Типы игроков независимы. Вы-

игрыши в зависимости от типов игроков и их действий представлены в Таблице 6.3. Найдите все равновесия Нэша—Байеса этой игры.

Таблица 6.3. Игра «Водитель — автоинспектор»

		Автоинспектор				
		Старательный		Ленивый		
Водитель		+	−	+	−	
Наглый	+	30 −10	0 20	10 −10	0 20	[0,7]
	−	−10 0	0 0	−40 0	0 0	
Робкий	+	30 −30	0 10	10 −30	0 10	[0,3]
	−	−10 0	0 0	−40 0	0 0	
		[0,6]		[0,4]		

Задача 130 Два партнера ($i = 1,2$) одновременно решают, инвестировать ли в проект или нет. Если оба инвестируют, то проект окажется успешным и каждый получит доход v_i. В противном случае проект провалится и каждый получит 0. Инвестиции (вне зависимости от успешности проекта) связаны для отдельного партнера с издержками c. Каждого из партнеров интересует чистый доход. В природе встречаются два типа партнеров. Партнеры типа H получают высокий доход от проекта, $v_i = 2$, и встречаются с вероятностью μ. Партнеры типа L получают низкий доход от проекта, $v_i = 1$, и встречаются с вероятностью $1-\mu$. Типы двух партнеров независимы.

1. При каких условиях на параметры μ, c будет существовать равновесие (Нэша—Байеса) в котором каждый из партнеров инвестирует, если и только если имеет тип H?
2. Найдите все возможные равновесия в зависимости от параметров μ, c.

Задача 131 [12] Рассмотрите следующую игру двух лиц с неполной информацией между друзьями A (он выбирает строчки) и B (выбирает столбцы), которые живут на большом расстоянии друг от друга. Они играют в игру по телефону. Каждый имеет по две стратегии, C и T. Прогноз погоды по радио верно предсказывает, что по крайней мере в одной из двух местностей будет дождь. Вероятности равны

$\mathbf{P}$(дождь у A) = 1/3, $\mathbf{P}$(дождь у B) = 1/3, $\mathbf{P}$(дождь у обоих) = 1/3. Каждый знает только погоду в своей местности. Матрица выигрышей не зависит от состояния природы и имеет вид, показанный в Таблице 6.4.

Таблица 6.4. Данные к Задаче 131

		Игрок B	
		C	T
Игрок A	C	5, 5	2, 6
	T	6, 2	1, 1

1. Предположите, что это игра с полной информацией. Найдите все равновесия Нэша.
2. Покажите, что когда каждый игрок играет C при дожде и T при ясной погоде, то это равновесие Байеса—Нэша.
3. Сравните выигрыши. Какова роль информации в этой игре?

Задача 132 Имеется два игрока — продавец единицы некоторого неделимого товара и покупатель. Продавец готов отдать свой товар не меньше, чем за c руб., а покупатель готов купить товар не больше, чем за v руб. Покупатель знает свою оценку v, но не знает оценку продавца c, только распределение вероятностей для нее. Аналогично продавец знает свою оценку c, но не знает оценку покупателя v, только распределение вероятностей для нее. Игроки одновременно объявляют, хотят ли они участвовать в сделке. Если хотя бы один откажется, то сделка не состоится и каждый получит выигрыш 0. Если оба согласятся, то сделка происходит по некоторой цене p. При этом выигрыш продавца будет равен $p-c$, а выигрыш покупателя — $v-p$.

Предположите, что распределение оценок независимо, оценка продавца c может принимать значения 1 или 3 с равными вероятностями, а оценка покупателя v — значения 2 или 4 с равными вероятностями.

1. Пусть цена известна заранее и равна $p=2{,}5$. Найдите все байесовские равновесия этой игры.
2. Пусть имеется посредник, который знает оценки обоих игроков и он устанавливает цену на уровне среднего, т. е. $p=(c+v)/2$. Найдите все байесовские равновесия этой игры.

Задача 133 [12] Рассмотрите следующую игру с двумя состояниями, A и B. Выигрыши указаны в Таблице 6.5. Состояния равновероятны.

Таблица 6.5. Данные к Задаче 133

A

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
U	6, 0	4, 1
M	0, 0	0, 1
D	5, 1	3, 0

B

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
U	0, 0	0, 1
M	6, 0	4, 1
D	5, 1	3, 0

1. Предположим, что ни один из игроков не знает, какое состояние реализовалось. Найдите (единственное) равновесие Байеса—Нэша.
2. Предположим теперь, что игрок 1 знает истинное состояние, а игрок 2 — нет. Что будет в этом случае?
3. Сравните равновесия. При каком информационном режиме игрок 1 находится в более выгодном положении?

Задача 134 [12] Рассмотрите пример интересного класса игр, называемых играми «отправитель — получатель». Игрок 1 обладает некоторой частной информацией, но не имеет возможности выбирать действия. Игрок 2 имеет возможность выбирать действия. Выигрыши каждого игрока зависят как от частной информации (типа игрока 1), так и от действий игрока 2. Игрок 1, однако, играет в этой игре не пассивную роль. Он может послать сообщение игроку 2, информируя его о своем типе.

Предположим, что игрок 2 имеет три варианта действий: x, y и z. Игрок 1 может быть типа A или типа B. Игрок 2 полагает, что оба типа одинаково вероятны. В Таблице 6.6 указаны выигрыши этих двух игроков в зависимости от типа игрока 1 и действий игрока 2. Игрок 1 может послать одно из двух сообщений: α или β. Стратегия игрока 1 — это выбор сообщения в зависимости от своего типа, а стратегия игрока 2 — это выбор действия в зависимости от сообщения, которое он получает. (Такого рода игры развивают понятие равновесия Байеса—Нэша, потому что игрок 2 должен спросить себя, какие представления относительно типа игрока 1 он имеет после получения от него сигнала.)

Таблица 6.6. Данные к Задаче 134

		Игрок 2		
		x	y	z
Природа (тип игрока 1)	A	2, 3	0, 2	−1, 0
	B	1, 0	2, 2	0, 3

1. Предположим, что у игроков есть исправно работающие телефоны. В случае, когда игрок 1 использует стратегию $A \to \alpha$, $B \to \beta$, какой вывод о типе игрока 1 сделает игрок 2, если он получит сигнал α? Тот же вопрос для стратегии $A \to \alpha$, $B \to \alpha$.
2. Покажите, что не существует равновесия Байеса—Нэша, в котором игрок 1 может сигнализировать свой тип. Покажите, что в единственном равновесии игрок 2 выбирает y вне зависимости от того, какой сигнал посылает игрок 1.
3. Предположим, что у игрока 1 есть голубь. Если он посылает голубя, тот добирается до игрока 2 с вероятностью 0,5. Когда игрок 1 использует стратегию $A \to$ голубь, $B \to$ ничего, какой вывод о типе игрока 1 сделает игрок 2, если он увидит голубя? Тот же вопрос для стратегий $A \to$ голубь, $B \to$ голубь и $A \to$ ничего, $B \to$ ничего.
4. Покажите, что существует равновесие, в котором игрок 1 посылает голубя, если он типа A, и не посылает, если он типа B, а игрок 2 выбирает x, если он получает голубя, и y, если не получает.
5. Что лучше для этих игроков — телефон или голубь?

Задача 135 [20] Богатство отца составляет 3 млн долл. с вероятностью 1/5, 6 млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot 4/5$, 12 млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^2$, и т. д. (то есть $3 \cdot 2^k$ млн долл. с вероятностью $1/5 \cdot (4/5)^k$ для каждого $k \geq 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln w$. (*Указание:* $3^9 > 2^{14}$.)

Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом, каждый из братьев говорит «Да» или «Нет» (одновременно). Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом тип каждого брата — это элемент множества $\{1,2,4,8,\ldots\}$.

1. Каково распределение вероятностей по типам?
2. Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.
3. Опишите равновесие (Нэша—Байеса) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие.
4. Существует ли в этой игре другое равновесие?
5. Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $3\cdot 2^K$ млн долл. (для некоторого $K \geq 1$). Охарактеризуйте равновесия Нэша—Байеса в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

Задача 136 [21] Игрок 1 бывает двух типов: a и b. Игрок 2 тоже бывает двух типов: c и d. Условные вероятности для этих типов равны

$$\mathbf{P}(c \mid a) = 1, \quad \mathbf{P}(c \mid b) = 3/4, \quad \mathbf{P}(a \mid c) = 3/4, \quad \mathbf{P}(a \mid d) = 0.$$

1. Проверьте, что эти условные вероятности можно получить из совместного распределения типов двух игроков, найдя такое распределение (т. е. вероятности четырех возможных комбинаций типов).
2. Предположите как обычно, что каждый игрок знает свой собственный тип и условные вероятности, указанные выше. Игрок 1 выбирает T или B, а Игрок 2 L или R. Выигрыши в зависимости от типов и действий игроков указаны в Таблице 6.7 (кроме комбинации типов (a,d), имеющей нулевую вероятность).
3. Найдите для этой игры все равновесия Нэша—Байеса в чистых стратегиях.

Задача 137 [4] Рассмотрите дуополию Курно, действующую на рынке с обратной функцией спроса $P(Q) = a - Q$, где $Q = q_l + q_2$ — общий объем продаж на рынке. Обе фирмы имеют одинаковые функции общих

Таблица 6.7. Данные для Задачи 136

(a, c)

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2, 2	0, 0
B	3, 0	1, 1

(b, c)

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2, 2	0, 0
B	0, 0	1, 1

(b, d)

Игрок 1 \ Игрок 2	L	R
T	2, 2	0, 0
B	3, 0	1, 1

издержек $C_i(q_i) = cq_i$, но сталкиваются с неопределенным спросом. Спрос высокий ($a = a_H$) с вероятностью θ и низкий ($a = a_L$) с вероятностью $1-\theta$. Более того, информация асимметрична: фирма 1 знает, высокий или низкий спрос, а фирма 2 не знает. Остальные параметры ситуации общеизвестны. Две фирмы одновременно выбирают количества.

1. Каковы множества стратегий двух фирм?
2. Сделайте предположения относительно параметров a_H, a_L, θ и c. Каким будет равновесие Байеса—Нэша этой игры?

Глава 7

Динамические байесовские игры. Совершенное байесовское равновесие

Задача 138 Инвестор предлагает предпринимателю вложить деньги в его фирму в обмен на долю s в фирме, где $s \in [0;1]$. Инвестор не знает, какова прибыль П этой фирмы в настоящее время, но предполагает, что она может быть 10, 70 или 100 с равными вероятностями. Предприниматель может согласиться или отказаться.

Если предприниматель отказывается от предложения, выигрыш предпринимателя будет равен П, а выигрыш инвестора будет равен 60. Если инвестор примет предложение, то выигрыш предпринимателя будет равен $(1-s)(\Pi+80)$, а выигрыш инвестора будет равен $s(\Pi+80)$. Инвестор нейтрален к риску.

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Определите, как будет вести себя предприниматель каждого из типов в зависимости от доли s.
3. Найдите совершенное в подыграх равновесие. (Для этого надо найти оптимальную для инвестора долю s, в предположении, что предприниматель ведет себя благожелательно по отношению к инвестору, т. е. когда ему безразлично, принять или нет предложение инвестора, то он его принимает.)

Задача 139 [9]

1. Для игры, представленной на Рис. 7.1, перечислите стратегии игроков и найдите стратегическую (нормальную) форму.

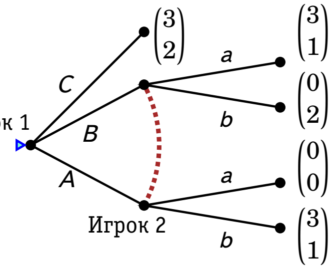


Рис. 7.1. Дерево игры для Задачи 139

2. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найдите все совершенные в подыграх равновесия Нэша в чистых стратегиях.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.

Задача 140 [17] Нейтральный к риску продавец имеет некоторый предмет, который для него ничего не стоит, и сталкивается с единственным покупателем. Продавец делает покупателю единственное предложение вида «не хочешь — не бери», назначая цену $p \geq 0$. Есть два типа покупателей (A и B), встречающиеся с одинаковой вероятностью. Если покупатель первого типа купит предмет по назначенной продавцом цене p, то он получит полезность $\ln(11-p)$. В той же ситуации покупатель второго получит полезность $4-p$. Покупатель любого типа получит нулевую полезность, если он не купит предмет.

1. Найдите оптимальное поведение покупателей обоих типов в зависимости от назначенной продавцом цены p.
2. Какова оптимальная для продавца цена p? (Предполагайте, что покупатель ведет себя благожелательно по отношению к продавцу, т. е. если ему безразлично, покупать или нет, то он покупает.)
3. Пусть на тех же условиях «не хочешь — не бери» продавец может предложить покупателю лотерею вместо фиксированной цены. Найдите какую-нибудь лотерею, которая обеспечивает продавцу более высокий доход, чем оптимальная фиксированная цена.

Задача 141 Школьнику дают домашнее задание по русскому языку с вероятностью 2/3. Если задание не дано, то он сообщает об этом матери. Если задание дано, то школьник может обмануть мать и сказать, что задания не давали, либо сказать правду и сесть делать уроки, вместо того, чтобы пойти гулять. Если школьник сказал правду и сел делать уроки, то и школьник, и его мать получают выигрыш 0. Если школьник сказал, что задание не дано, то мать может посмотреть в дневник и узнать, так ли это на самом деле, но такой контроль отрывает мать от просмотра сериала. Если задание на самом деле не было дано или если школьник обманул мать и его не проконтролировали, то он идет гулять и получает выигрыш 2 (он думает только о сегодняшнем дне и его не волнует будущая двойка за невыполненное задание). Если школьника уличили в обмане, то его наказывают и он получает выигрыш −3. Выигрыши матери следующие: −1, если она проверила дневник, вне зависимости от результата проверки, 0, если она не проверила дневник при том, что домашнее задание не было дано, и −2, если она не проверила дневник при том, что домашнее задание было дано. Найдите в этой игре все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 142 [21] Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 7.2.

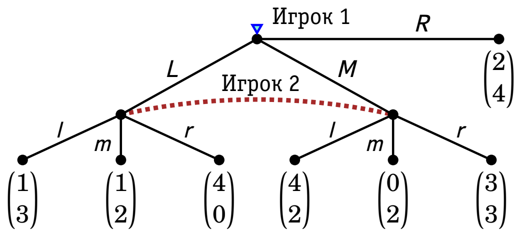


Рис. 7.2. Дерево игры для Задачи 142

1. Запишите игру в стратегической форме и рассчитайте все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
2. Рассчитайте все совершенные в подыграх равновесия в чистых стратегиях.
3. Пусть $(\mu, 1-\mu)$ — представления Игрока 2 в его информационном множестве для левой и правой вершины соответственно. Найдите оптимальные действия Игрока 2 в зависимости от этих представлений.

4. Пользуясь результатами предыдущих пунктов покажите, что в игре нет совершенных байесовских равновесий в чистых стратегиях.
5. Рассчитайте все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях. (Учтите, что у каждого из игроков есть действия, которые никогда не выгодно выбирать. Это упрощает расчеты.)

Задача 143 Страна 1 готовится напасть на Страну 2 и запустила проект по созданию некоторого мощного оружия. С вероятностью 2/3 создание оружия будет успешным, а с вероятностью 1/3 проект окончится неудачей. После завершения проекта Страна 1 будет решать, напасть ли на Страну 2 или нет. Если нападения не последует, то обе страны получат выигрыши 3. Если Страна 1 начнет войну, то Страна 2 не будет знать, обладает ли Страна 1 опасным оружием или нет. При этом Страна 2 должна решить, бороться ли с агрессором или сдаться. Если Страна 2 сдастся, то ее выигрыш будет равен -3, а выигрыш Страны 1 будет равен 6. Если Страна 2 решит бороться, то при наличии у агрессора оружия она будет разгромлена и получит выигрыш -9, а Страна 1 получит выигрыш 0. Если оружия нет, то агрессор будет побежден и получит выигрыш -12, а Страна 2 получит выигрыш 3.

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Найдите нормальную форму игры и вычислите все байесовские равновесия в чистых стратегиях.
3. Для каждого из найденных равновесий проверьте, существуют ли представления, которые бы его поддерживали как совершенное байесовское равновесие.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия в смешанных стратегиях.
5. Объясните, почему Стране 1 выгодно продемонстрировать, что она обладает оружием. Объясните, почему возможность демонстрации муляжа вместо несуществующего оружия подрывает эти стимулы.

Задача 144 (Карточный блеф) В начале игры игроки (1 и 2) вносят по 1 руб. После этого с равной вероятностью Игрок 1 получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее Игрок 1 может повысить ставку, добавив 2 руб. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает Игрок 2. Если Игрок 1 повышает, то делает ход Игрок 2. Он либо уравнивает, добавляя 2 руб., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает Игрок 1, если карта старшая, и Игрок 2, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает Игрок 1.

1. Нарисуйте дерево игры.
2. Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях.
3. Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто Игрок 1 будет блефовать, т. е. повышать, имея младшую карту? Как часто Игрок 2 будет уравнивать?
4. Для каждого из игроков определите, согласится ли он добровольно участвовать в такой игре. Каким должен быть возмещающий платеж одного другому, чтобы оба не отказались играть.

Задача 145 [21] Работник может иметь высокую (H) или низкую (L) производительность с равными вероятностями 1/2. Доход, который работник приносит фирме, зависит от его типа: $p_H = 10$ и $p_L = 8$ соответственно. Работник знает свою производительность, но фирма, которая хочет нанять работника, не знает.

Работник любого типа может получить дополнительное образование. Дополнительное образование не увеличивает доход от деятельности работника, но может служить сигналом для фирмы: работник типа H может получить образование без дополнительных издержек, тогда как для работника типа L издержки образования равны 3.

Фирма выбирает, какую заработную плату платить работнику — высокую $w_h = 6$ или низкую $w_l = 4$. При этом она может учитывать, получил ли работник дополнительное образование или нет. Выигрыш фирмы равен произведенному работником доходу за вычетом заработной платы. Выигрыш работника равен заработной плате за вычетом издержек образования. Однако работник может совсем отказаться от данной работы и связанного с ней обучения. В этом случае он получит свою резервную полезность, которая зависит от типа: $r_H = 3$ и $r_L = 2$, а фирма получит нулевой выигрыш.

1. Найдите развернутую форму этой игры.
2. Найдите стратегическую форму этой игры, и найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях.
3. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях. Являются ли найденные равновесия объединяющими? Удовлетворяют ли они интуитивному критерию?

Задача 146 [15] Имеется два игрока (1 и 2) и организатор игры. Организатор игры бросает монету, которая изготовлена таким образом, что в 80% случаев падает орлом вверх (и этот факт известен обоим игрокам). Результат подбрасывания монеты сообщается только Игроку 1. Игрок 1 сообщает Игроку 2 результат — «орел» или «решка» (не обязательно правдиво). Игрок 2, зная только то, что ему сообщил Игрок 1, должен угадать, как упала монета. На этом игра заканчивается.

Выигрыши определяются следующим образом. Игрок 2 просто получает 1 руб., если угадал, и 0 руб., если не угадал. Независимо от того, как упала монета, Игрок 1 получает 2 руб., если Игрок 2 сказал «орел», и 0 руб., если тот сказал «решка». Кроме того, Игрок 1 дополнительно получает 1 руб., если его сообщение было правдивым, и 0 руб., если оно было ложным.

1. Представьте игру в развернутой форме.
2. Найдите соответствующую нормальную форму.
3. Найдите все равновесия Нэша—Байеса в чистых стратегиях.
4. Найдите все совершенные байесовские равновесия.

Задача 147 [17] Рассмотрите игру «схвати доллар», которая играется в три раунда между двумя игроками. В начале игры на кону имеется один доллар и с каждым раундом количество денег удваивается.

Сначала Игрок 1 может схватить доллар. Если он этого не сделает, то Игрок 2 может схватить 2 доллара. Наконец, если Игрок 2 не сделает этого, то Игрок 1 выбирает, схватить ли 4 доллара или оставить 8 долларов Игроку 2. Игрок, который не взял деньги, получает ноль. Полезность игроков задается ожидаемым количеством полученных денег.

1. Нарисуйте развернутую форму.
2. Каково совершенное в подыграх равновесие этой игры?
3. Покажите, что в любом равновесии Нэша Игрок 1 должен сразу же схватить деньги.
4. Имеется ли равновесие Нэша, которое не является совершенным в подыграх?
5. Предположим, что это байесовская игра, в которой есть «нестандартный» альтруистический тип Игрока 1, полезность которого — сумма денежных выплат Игроку 2 и ему самому. Предположим, что вероятность нестандартного типа равна 30%. Опишите совершенное байесовское равновесие, в котором Игрок 1 стандартного типа на первом раунде всегда оставляет деньги.

6. Продолжая альтруистический случай, ответьте на вопрос о том, существует ли совершенное байесовское равновесие, в котором Игрок 1 стандартного типа на первом раунде применяет вполне смешанную стратегию. Если такое равновесие существует, то дайте его полное описание.

Задача 148 [17] Президенту США Берту К. Трею предстоит вскоре вести переговоры с премьер-министром Хапистана. Премьер-министр Хапистана считает, что президент Трей может быть одного из двух типов: разумный (R) или сумасшедший (C). Вероятность типа R равна p ($p \in (0;1)$). До переговоров президент Трей может разбомбить некую третью страну (B) или не бомбить (N). Издержки бомбардировки равны нулю для президента сумасшедшего типа и единице для президента разумного типа. После бомбардировки премьер-министр может предложить президенту или хорошую сделку (g), которая принесет президенту выигрыш $A > 0$, или плохую сделку (b), которая ничего не принесет президенту. Премьер-министр получает единицу, если предложит хорошую сделку президенту сумасшедшего типа, единицу, если предложит плохую сделку президенту разумного типа, и ноль в остальных случаях.

1. Изобразите развернутую форму игры.
2. Рассчитайте нормальную форму этой игры. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях при $p = 3/4$ и $A = 2$.
3. Рассмотрите (объединяющее) совершенное байесовское равновесие, при котором президенты обоих типов не используют бомбардировку (N, N), а премьер-министр в любом случае предлагает плохую сделку (b, b). При каких параметрах существует такое равновесие? Какими представления премьер-министра в его информационных множествах поддерживается такое равновесие?
4. Рассмотрите (разделяющее) совершенное байесовское равновесие, при котором разумный президент не используют бомбардировку, сумасшедший использует бомбардировку (N, B), премьер-министр предлагает хорошую сделку при бомбардировке и плохую без бомбардировки (g, b). При каких параметрах существует такое равновесие? Какими представления премьер-министра в его информационных множествах поддерживается такое равновесие?
5. Предположите, что $p = 3/4$ и $A = 2$. Рассмотрите (гибридное) совершенное байесовское равновесие, при котором разумный пре-

зидент использует вполне смешанную стратегию, сумасшедший всегда выбирает B, премьер-министр использует вполне смешанную стратегию при бомбардировке и всегда выбирает b без бомбардировки. Найдите вероятности для смешанных стратегий и представления премьер-министра в его информационных множествах. Объясните, почему найденные стратегии и ожидания составляют равновесие.

Задача 149 [13] Ответчик по судебному делу предстает перед судьей. Ответчик либо невиновен ($x = 0$), либо виновен ($x = 1$) в нанесении ущерба в размере 1 тыс. руб. Ответчик знает x и имеет документ, который позволяет однозначно подтвердить x. Судья не может непосредственно наблюдать x. Ее априорные представления состоят в том, что $x=1$ с вероятностью 1/2.

Судья и ответчик взаимодействуют следующим образом. Сначала, ответчик по своему желанию может предъявить документ или не предъявлять. Предъявление документа суду связано для ответчика с издержками размером ε тыс. руб. (небольшие затраты на снятие копии, например, $\varepsilon = 0{,}1$).

Если ответчик предъявит документ, то судья узнает x. Вне зависимости от того, предъявлен документ или нет, судья устанавливает сумму ущерба y (в тысячах руб.), которую должен будет возместить ответчик. Судья стремится вынести справедливое решение, то есть назначить y как можно ближе к x. Ее выигрыш равен $-(x-y)^2$. Ответчик стремится минимизировать свои издержки. Заметьте, что E означает «предъявить документ», а N — «не предъявлять документ».

1. Изобразите игру в виде дерева.
2. Найдите оптимальный выбор судьи (y_1) в случае, если из документа следует, что ответчик виновен ($x=1$).
3. Найдите оптимальный выбор судьи (y_0) в случае, если из документа следует, что ответчик невиновен ($x=0$).
4. Пусть p — вероятность, которую судья приписывает событию $x=1$, если ответчик не предъявил документ. Найдите $\tilde{y}=\tilde{y}(p)$ — оптимальный выбор судьи как функцию этой вероятности.
5. Найдите оптимальный выбор для виновного ответчика при данном $\tilde{y}$ и оптимальном (для судьи) y_1.
6. Найдите оптимальный выбор для невинного ответчика при данном $\tilde{y}$ и оптимальном (для судьи) y_0.

7. Используйте результаты предыдущих пунктов для того, чтобы найти совершенные байесовские равновесия этой игры. Перечислите все составляющие найденных вами равновесий.

Глава 8

Общие задачи

(В нижеследующих задачах не приводите примеры игр, которые встречались в курсе; постарайтесь сконструировать примеры самостоятельно.)

Задача 150 Приведите пример дерева решений не менее чем с пятью исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое стратегии, действия, исходы и выигрыши в ситуации принятия решений.

Задача 151 Приведите пример игры с природой не менее чем с пятью исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое случайный ход природы, лотерея, ожидаемый выигрыш.

Задача 152 Приведите пример использования формулы Байеса для принятия решений.

Задача 153 Приведите пример дерева решений не менее чем с пятью исходами, включающего ходы природы. Покажите на своем примере, как используется обратная индукция для принятия решений.

Задача 154 Приведите пример динамической игры двух лиц с пятью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое стратегии, действия, исходы и выигрыши в играх.

Задача 155 Приведите примеры игр с трансферабельными и нетрансферабельными выигрышами. Поясните на своих примерах различие между двумя типами игр.

Задача 156 Что такое торг? Приведите пример ситуации торга. Из каких элементов складывается ситуация торга?

Задача 157 Объясните понятия коалиции и блокирования на примере игры с нетрансферабельной полезностью.

Задача 158 Какого рода игры можно представить в характеристической форме? Приведите пример игры в характеристической форме. Какие дележи допустимы в игре в характеристической форме, а какие нет? Какие дележи оптимальны по Парето в игре в характеристической форме, а какие нет?

Задача 159 Дайте определение кооперативных и некооперативных игр. Сравните их на некотором подходящем примере, который бы высвечивал различия двух типов игр.

Задача 160 Приведите пример динамической игры двух лиц с совершенной информацией с пятью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое динамическая игра с совершенной информацией. Покажите на своем примере, как по развернутой форме игры получать ее нормальную форму.

Задача 161 Приведите пример динамической игры двух лиц с семью различными исходами. Объясните с помощью своего примера, что такое граница Парето. Изобразите границу Парето на графике.

Задача 162 Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в Задаче 68 на с. 28. Найдите в этой игре границу Парето. Изобразите ее графически. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

Задача 163 (повторение терминологии) [5] Вы должны уметь давать точные и однозначные определения всех терминов, используемых в теории игр.

1. Дайте определение игры в развернутой форме. Не забудьте включить в ваше определение также определения следующих терминов: дерево игры, траектория игры, вершина, начальная вершина, следующая/предшествующая вершина, конечная вершина, информационное множество, действие.

2. Дайте определение нормальной формы игры.

3. Любая игра в развернутой форме может быть естественным образом преобразована в игру в нормальной форме. Продемонстрируйте, как это делается, на каком-нибудь подходящем примере.
4. Что такое наилучший отклик в нормальной форме игры? Что такое равновесие Нэша?
5. Приведите условия того, что пара стратегий является равновесием Нэша в игре двух лиц в нормальной форме.

Задача 164 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы у каждого игрока одна из стратегий была строго доминируемой. Объясните на этом примере, в каком случае одна стратегия строго доминирует другую.

Задача 165 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы у каждого игрока была доминирующая стратегия. Объясните на этом примере, что такое доминирующая стратегия и что такое равновесие в доминирующих стратегиях.

Задача 166 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по три стратегии, такой чтобы последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий приводило к единственному исходу. Объясните на этом примере смысл процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Задача 167 Приведите пример игры, которая бы имела как Парето-оптимальные, так и не Парето-оптимальные равновесия Нэша.

Задача 168 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре было ровно три равновесия Нэша.

Задача 169 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре не существовало равновесия Нэша. Продемонстрируйте на этой игре нахождение равновесия в смешанных стратегиях.

Задача 170 [10] Предположим, что Игрок A угрожает возмездием, чтобы удержать Игрока B от некоторых действий, которые могут ему навредить (например, фирма A угрожает начать ценовую войну с фирмой B, если последняя начнет конкурировать с A на рынке, где ранее фирма A была монополистом). Является ли выполнение такого рода угрозы рациональным, если (i) Игрок A предпочел бы не принимать ответных мер, коль скоро B уже осуществил агрессивные действия и (ii) ситуация никогда больше не повторится (так, что мотив сдерживания будущей агрессии полностью отсутствует)? Если это рационально, то почему? Если это не рационально, то зачем вообще делаются угрозы в подобного рода ситуациях?

Задача 171 Приведите пример статической игры трех лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, и покажите на этом примере, как такую игру можно представить в виде дерева. Объясните смысл каждой из составляющих дерева игры.

Задача 172 Приведите пример игры, в которой имеются равновесия Нэша, не являющиеся совершенными в подыграх. Объясните на этом пример смысл понятия совершенного в подыграх равновесия Нэша.

Задача 173 Приведите пример дерева игры двух лиц, в которой первый из игроков имеет два типа, а второй игрок не знает тип перового игрока. Объясните смысл каждой из составляющих дерева игры.

Задача 174 Приведите пример динамической игры двух лиц, на котором можно продемонстрировать различие между смешанной и поведенческой стратегией.

Задача 175 Приведите пример статической игры двух лиц, в которой каждый игрок имеет по две стратегии, такой чтобы в этой игре существовало единственное равновесие Нэша. Предположите, что игра повторяется дважды и проведите анализ такой повторяющейся игры.

Задача 176 Приведите пример динамической байесовской игры и покажите на этом примере как ожидания (представления) в информационных множествах рассчитываются на основе стратегий игроков.

Задача 177 [1] Министерство желает построить один из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство — первый игрок — имеет две стратегии: строить 1-й объект, строить 2-й объект. Город — второй игрок — имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия (стратегии) они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно Таблице 8.1.

Таблица 8.1. Данные для Задачи 177

		Город	
		принять	*отказать*
Министерство	*1-й объект*	5 -10	-2 2
	2-й объект	-1 1	1 -1

Некоторые пояснения к элементам Таблицы 8.1 могут быть, например, такие: если игроки применяют свои первые стратегии, министерство решает строить первый объект, а городские власти разрешают его постройку, тогда город получает выигрыш 5 млн руб., а министерство теряет 10 млн. руб; аналогично объясняются остальные выигрыши.

1. Проверьте, что в этой игре нет равновесий Нэша в чистых стратегиях.
2. Найдите равновесия в смешанных стратегиях. Дайте графическую иллюстрацию.
3. Предположите, что министерство делает первый ход. Найдите соответствующее равновесие.

Задача 178 [12] Рассмотрите игру в развернутой форме, дерево которой изображено на Рис. 8.1.

1. Запишите игру в стратегической форме.

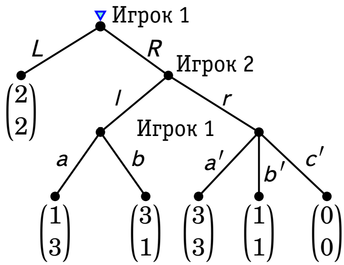


Рис. 8.1. Дерево игры для Задачи 178

2. Какие стратегии остаются после применения процедуры удаления слабо доминируемых стратегий в следующем порядке: сначала игрок 1, потом игрок 2, потом снова игрок 1 и т. д.?

Задача 179 Два человека делят 1 млн долл. по следующим правилам. Сначала первый предлагает свой вариант дележа — сумму x млн долл. ($x \in [0;1]$), которая достанется ему (второму при этом остается $(1-x)$ млн долл.). Второй может не согласиться с предложенным вариантом. При этом каждому достанется по 0,5 млн долл. Однако из-за промедления в этом случае с вероятностью 0,2 они могут потерять свой миллион (каждый получит 0). Выигрыши игроков измеряются не деньгами.(!) Выигрыши определяются элементарными функциями полезности $u_i = \sqrt{2x_i}$, где x_i — денежная сумма, которая досталась i-му игроку.

1. Изобразите игру в виде дерева. (В том числе изобразите на дереве выигрыши игроков.)
2. Найдите совершенное в подыграх равновесие. Опишите стратегии игроков в этом равновесии. Как будет поделен миллион?
3. Изобразите на графике множество всех возможных выигрышей (ожидаемых выигрышей) игроков в этой игре — все возможные точки (U_1, U_2). Пользуясь графиком, определите, является ли равновесие оптимальным по Парето. Аргументируйте свой ответ.
4. Считая ожидаемые выигрыши при несогласии второго с предложенным вариантом точкой угрозы, укажите кривую контрактов и ядро. Принадлежит ли равновесие ядру? Аргументируйте свой ответ.

Задача 180 Рассмотрите игру, изображенную на Рис. 8.2.

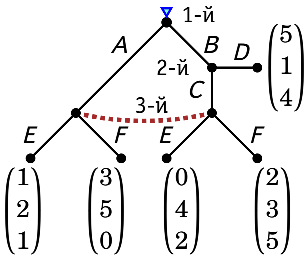


Рис. 8.2. Дерево игры для Задачи 180

1. Перечислите стратегии каждого из игроков.
2. Запишите игру в стратегической (нормальной) форме.

3. Какие равновесия Нэша в чистых стратегиях есть в этой игре?
4. Если первый игрок выбирает A с вероятностью 0,2, а второй игрок выбирает C с вероятностью 0,4, то какими должны быть представления третьего игрока в его информационном множестве?
5. Какие имеются совершенные в подыграх равновесия (в чистых стратегиях) игры в целом? Объясните.

Задача 181 [16] Рассмотрите игру двух лиц. Каждому игроку дают 6 красных фишек. После этого игроки тайно и одновременно выбирают, сколько фишек (от 0 до 6) поместить в волшебную шкатулку. Как только оба игрока сделали взнос в шкатулку, шкатулка открывается. Шкатулка является волшебной в следующем смысле. Если общее количество фишек, положенных в шкатулку не меньше 4, то шкатулка будет содержать точно 6 фишек. Если всего в шкатулку положено 3 или менее фишек, то шкатулка будет содержать 0 фишек. Игроки делят содержимое шкатулки поровну, так что каждый игрок получит из шкатулки либо 0, либо 3 фишки. Игроки, конечно, теряют все фишки, которые они первоначально положили в шкатулку. После того, как шкатулка открыта и фишки поделены между игроками, за каждую фишку игроки получают по \$20. Предположите, что игроки не знакомы друг с другом и не будут встречатся после того, как игра сыграна (поэтому оба игрока будут играть в игру с целью получить как можно больший собственный денежный выигрыш).

1. Запишите полную матрицу выигрышей для этой игры.
2. Какие в этой игре есть равновесия Нэша в чистых стратегиях?
3. Какие исходы в этой игре являются Парето-оптимальными?

   Рассмотрите следующие три модификации этой игры. В каждом случае не учитывайте все предыдущие модификации.
4. Предположим, что шкатулка содержит 0 фишек, если общий вклад был меньше 4, а в противном случае (по крайней мере 4 фишки) — все фишки, которые в нее положили плюс 2. Если бы, например, игрок 1 пожертвовал 2 фишки, а игрок 2 — 3 фишки, то шкатулка содержала бы 7 фишек. При этом если шкатулка содержит нечетное число фишек, последняя фишка делится пополам. Половина фишки стоит \$10. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.
5. Пусть выигрыши такие же, как первоначально, но игрок 1 кладет фишки в шкатулку первым, и его взнос видит игрок 2. По-

сле этого игрок 2 кладет фишки в шкатулку. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.

6. Предположим, что шкатулка вместо каждой пары положенных в нее фишек выдает 3 фишки. Непарная фишка остается нетронутой. То есть шкатулка следующим образом изменяет количество положенных в нее фишек:

$$0 \to 0, \quad 1 \to 1, \quad 2 \to 3, \quad 3 \to 4, \quad 4 \to 6 \quad \text{и т. д.}$$

   Предположим, как и ранее, что целые фишки и половинки фишек могут быть поровну разделены между игроками. Ответьте на вопросы пунктов 1–3.

Задача 182 [14] Рассмотрите игры двух лиц, в которых Игрок 1 выбирает действие T или B, а Игрок 2 — L или R. Выигрыши приведены в Таблице 8.2 (но ходы в игре не одновременные).

Таблица 8.2. Данные для Задачи 182

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	T	3, 2	1, 1
	B	7, 1	2, 2

1. Предположим, что Игрок 1 ходит первым, а Игрок 2 наблюдает действия Игрока 1 перед выбором своих собственных действий.

   Изобразите дерево игры и найдите совершенное в подыграх равновесие (или равновесия). Убедитесь, что описали стратегии игроков полностью, как на равновесной траектории, так вне нее.
2. Имеется ли какие-либо другие равновесия Нэша (не являющиеся совершенными в подыграх)?
3. Теперь предположите, что Игрок 1 ходит первым, но Игрок 2 не может наблюдать действия Игрока 1 перед выбором своих собственных действий.

   Изобразите дерево игры и найдите равновесия Нэша и совершенные в подыграх равновесия.
4. Теперь предположите, что Игрок 1 ходит первым, а Игрок 2 перед выбором своих собственных действий получает верную информацию о действиях Игрока 1 с вероятностью p $(0 < p < 1)$ и

неверную с вероятностью $1-p$. (Например, если Игрок 1 выбрал T, то Игрок 2 с вероятностью p наблюдает T, а с вероятностью $1-p$ наблюдает B.) Ни один из игроков не знает, верную ли информацию о действиях Игрока 1 получил Игрок 2, но вероятность p является общеизвестной.

Введите ход природы, который определяет, правильно ли наблюдает Игрок 2 ход Игрока 1, и изобразите дерево игры, включая выигрыши игроков в зависимости от их действий. (*Указание:* Обратите внимание, что Игрок 2 фактически не наблюдает ход Игрока 1; вместо этого он наблюдает некий сигнал, который коррелирован с ходом Игрока 1.)

5. Найдите совершенное байесовское равновесие в чистых стратегиях и покажите, что это единственное совершенное байесовское равновесие в чистых стратегиях. (Оно будет единственным совершенном байесовским равновесием также и в смешанных стратегиях, но этого не требуется доказывать.)

Задача 183 [14] Имеется два игрока, R и C, которые имеют возможность вести переговоры по поводу контракта следующим образом. R делает ход первым и может отказаться предлагать контракт (обозначим этот вариант через z), предложить контракт x или же предложить контракт y. Если R откажется предложить контракт, то игра заканчивается, и R и C оба получают нулевой выигрыш. Если R предлагает контракт (x или y), то C узна́ет, что какой-то контракт был предложен, но не будет знать, какой именно. C может либо согласиться на предложенный контракт (a), либо отказаться (r). Если C соглашается, и оказывается, что предложен контракт x, то выигрыш R будет равен 3, а выигрыш C будет равен 2. Если C соглашается, и оказывается, что предложен контракт y, то выигрыш R будет равен 1, а выигрыш C будет равен 3. Если C откажется, то оба получат нулевой выигрыш. Структура игры является общеизвестной.

1. Ясно указав для каждого игрока вершины, в которых он принимает решения, информационные множества и возможные решения, изобразите для этой игры развернутую форму («дерево игры»), а также нормальную форму («матрицу выигрышей»).

2. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях (как совершенные в подыграх, так и нет).

3. Найдите совершенные в подыграх равновесия Нэша в чистых стратегиях.

4. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.

5. Предположите теперь, что выигрыш R, если он отказывается (т. е. выбирает z), равен 2, а не 0, а все остальное остается без изменений. Найдите совершенные байесовские равновесия в чистых стратегиях.

Литература

[1] Крушевский, А.В. Теория игр. Вища школа, 1977.

[2] Оуэн, Г. Теория игр. Мир, 1971.

[3] Charmichael, F. A Guide to Game Theory. Pearson Education Limited, 2005.

[4] Gibbons, R. Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, 1992.

[5] Gintis, H. Game Theory Evolving (2nd ed.). Princeton University Press, 2008 (в печати).
`http://www-unix.oit.umass.edu/~gintis/gtevolve.html`

[6] Myerson, R. Game Theory: Analysis of Conflict. Harvard University Press, 1991.

[7] Osborne, M. An Introduction to Game Theory. Oxford University Press, 2004.

[8] Rasmusen, E. Games and Information: An Introduction to Game Theory (6th ed.). Blackwell, 2006.

[9] Vega-Redondo, F. Economics and the theory of games. Cambridge University Press, 2003.

[10] Bartha, P.
Курс «Philosophy 321, Probability and Decision», University of British Columbia, Department of Philosophy, осень 2001 г.
`http://www.philosophy.ubc.ca/faculty/bartha/p321f01/p321syll.htm`

[11] Bialas, W.
Курс «IE675, Game Theory», University at Buffalo, Department of

Industrial and Systems Engineering, 2005 г.
`http://www.acsu.buffalo.edu/~bialas/IE675.html`

[12] Blume, L.
Курс «Economics 368, Introduction to Game Theory», Cornell University, Department of Economics, 2006 г.
`http://instruct1.cit.cornell.edu/courses/econ368/`

[13] Carmona, G.
Курс «Information and Games», Universidade Nova de Lisboa, Department of Economics, весна 2008 г.
`http://docentes.fe.unl.pt/~gcarmona/info/index.html`

[14] Crawford, V.
Курс «Economics 200C, Games and Information», University of California, San Diego, Department of Economics, весна 2003 г.
`http://dss.ucsd.edu/~vcrawfor/econ200C.htm`

[15] Lee, W.
Курс «ECON 309, Game Theory», University of Massachusetts, Department of Economics, весна 2007 г.
`http://www.people.umass.edu/woojin/course.htm`

[16] Lemke, R. J.
Курс «Econ 310, Industrial Organization», Department of Economics and Business, Lake Forest College, осень 2006 г.
`http://campus.lakeforest.edu/~lemke/econ310/`

[17] Levine, D. K.
Курс «201B, Game Theory», Washington University in St. Louis, Department of Economics, 2006 г.
`http://www.dklevine.com/201.htm`

[18] Marks, R.
Курс «Strategic Game Theory for Managers», Australian Graduate School of Management, 2006 г.
`http://www.agsm.edu.au/~bobm/teaching/SGTM.html`

[19] Medina, L. F.
Курс «Political Science 217, Introduction to Game Theory» University of Chicago, Department of Political Science, зима 2001/2002 г.
`http://home.uchicago.edu/~lfmedina/teaching.htm`

[20] Morris, S.
Курс «Economics 703, Microeconomics II, Game Theory, Choice under Uncertainty and Information» University of Pennsylvania, Department of Economics, осень 1996 г.

[21] Peters, H.
Курс «Spieltheorie: Skript zur Vorlesung», Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Department of Quantitative Economics, 2006/2007 г.
`http://www.personeel.unimaas.nl/H.Peters/Spieltheorie.htm`

[22] Rasmusen, E.
Курс «G601, Industrial Organization I» Indiana University, Kelley School of Business, 2006 г.
`http://www.rasmusen.org/g601/0.g601.htm`

[23] Signorino, C.
Курс «PSC 272/472 Theories of International Relations», University of Rochester Political Science Department, весна 2001 г.
`http://www.rochester.edu/College/PSC/signorino/courses/272/`