МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ростовский государственный университет
путей сообщения

В. И. Колесников, В. П. Шехов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ

Методические указания

Ростов-на-Дону
2001

УДК 534.014
Колесников В.И., Шехов В.П.

Теоретическая механика для студентов-заочников: Методические указания. – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т путей сообщения, 2001. – 56 с.

Данные методические указания содержат: описание правил выбора и оформления контрольных работ; условия, таблицы и рисунки задач, входящих в контрольные работы; примеры решения всех типовых задач; краткую теорию по всем разделам теоретической механике, знание которой требуется при защите контрольных работ; список литературы, рекомендуемой для самостоятельного изучения при подготовке к сдаче экзаменов по теоретической механике.

Данные методические указания предназначены для студентов-заочников РГУПС всех специальностей.

Библиогр.: 9 назв.

Рецензенты: д-р физ. - мат. наук, проф. А.О. Ватульян (РГУ);
д-р техн. наук, проф. А.А. Зарифьян (РГУПС)

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Студенты-заочники специальностей: С, СМ, В, ЛТ, ЛЭ, МО изучают теоретическую механику, делая три заезда.

В первом заезде проводятся лекционные и практические занятия по разделам статика и кинематика, по этим разделам выдаётся задание для контрольных работ №1 и №2, которые выполняются до второго заезда.

Во втором заезде контрольные работы №1 и №2 защищаются, и сдаётся экзамен по разделам статика и кинематика. Кроме того, проводятся лекционные и практические занятия по разделу динамика. По этому разделу выдаётся задание для контрольной работы №3, которая выполняется до третьего заезда.

В третьем заезде контрольная работа №3 защищается, и сдаётся экзамен по разделу динамика.

В **контрольную работу № 1** входят следующие задачи:

С1. Определение реакций связей плоского тела.

С4. Определение реакций связей с учетом сил трения.

С5. Определение реакций связей пространственного тела.

В **контрольную работу № 2** входят следующие задачи:

К1. Определение кинематических характеристик точки при координатном способе задания её движения.

К2. Определение кинематических характеристик точек вращающегося тела.

К3. Кинематический расчет плоского механизма.

В **контрольную работу № 3** входят следующие задачи:

D1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.

D3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения механической системы.

D5. Применение обобщенного уравнения динамики при исследовании движения механической системы.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же буквенно-числовым номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т. д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней. Например, если шифр оканчивается числом 48, то берутся рис. 4 и условия №8 из таблицы.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указывается название дисциплины, номер контрольной работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет и специальность. Студенты – заочники указывают также адрес для переписки.

На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи желательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж и записывается, что в задаче дано и что требуется найти (текст задачи можно или вовсе не переписывать, или приводить перед решением задачи на нечетной странице). Рисунок выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, размеры, действующие силы и кинематические характеристики должны соответствовать этим условиям.

Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (смотри приведенные далее примеры) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, переделанной для повторной проверки (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

При подготовке к экзаменам студенты-заочники пользуются литературой, список которой приведен в конце этих методических указаний.

Для облегчения подготовки в этих методических указаниях после решения типовых задач каждой контрольной работы приведены определения основных понятий и формулировки основных теорем и принципов соответствующего раздела теоретической механики.

Особое внимание при подготовке к зачетам и экзамену по различным разделам теоретической механики следует уделить следующим вопросам.

СТАТИКА

1. Как направлены силы реакции различных видов связи?

2. Как определить проекцию силы на ось, момент силы относительно точки и момент силы относительно оси?

3. Сколько уравнений содержат аналитические условия равновесия различных систем сил?

КИНЕМАТИКА

1. Как изобразить вектор ускорения движущейся точки?

2. Как определить скорость точки тела, если оно вращается или движется плоско параллельно? Как найти МЦС?

3. Что такое ускорение Кориолиса? Как найти его величину и направление?

ДИНАМИКА

1. Как составить дифференциальное уравнение движения точки? Что такое начальные условия движения?

2. Какие общие теоремы используются при решении задач динамики? Что такое - количество движения, кинетическая энергия и кинетический момент? Как определить импульс и работу силы?

3. Что такое сила инерции? Каким условиям должно удовлетворять возможное перемещение? Что определяется при решении уравнений Лагранжа 2-го рода?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ЗАДАЧА К1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЁ ДВИЖЕНИЯ

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ К1: Материальная точка М движется в плоскости, на которой введена прямоугольная декартовая система координат Оху. Движение точки задано координатным способом: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Координаты точки: x и y, – измеряются в метрах, а аргумент t – в секундах.

На рисунках к задаче К1 приведены уравнения движения точки и показана форма её траектории. В таблице К1 даны значения коэффициентов D_1, D_2, D_3 и D_4, определяющих уравнение движения точки, и параметр T, через который выражается момент времени t_1.

Определить в заданный момент времени t_1 все кинематические характеристики движущейся точки: уравнение траектории, координаты точки, скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории и закон движения точки по траектории. Изобразить на рисунке полученные результаты.

Указания к решению задачи К1

При решении задачи К1 потребуется знание формул тригонометрии:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \bullet \cos\alpha, \quad tg\alpha \bullet ctg\alpha = 1,$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}},$$

а также умение определять производную от сложной функции:

$$[f_1(f_2(f_3(t)))]'_t = f_1'(f_2(f_3(t)))\bullet f_2'(f_3(t))\bullet f_3'(t),$$

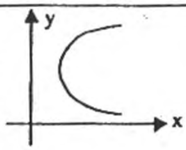
например:

$$\left[3\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)\right]' = 3\left[2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)\right]\bullet\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)\right]\bullet\left[\frac{\pi}{6}2t\right] = -\pi t\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right).$$

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РИСУНКИ ЗАДАЧИ К1

№	D_1 (м)	D_2 (м)	D_3 (м)	D_4 (м)	T
0	-1	1	3	2	8
1	-2	0	1	3	1
2	3	-4	2	-3	4
3	2	4	-1	0	4,5
4	1	0	3	-2	5
5	-1	-1	-2	1	1
6	-2	-2	1	3	1,5
7	-3	-3	2	2	2
8	2	3	-3	0	7
9	1	2	-2	1	7,5

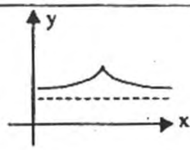
$$\begin{cases} x = D_1\cos(\frac{\pi}{3}t^2) + D_2 \\ y = D_3\sin(\frac{\pi}{6}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{T}$ *сек*

Рис. К1.0

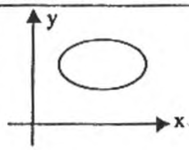
$$\begin{cases} x = D_1 tg(\frac{\pi}{6}t) + D_2 \\ y = D_3\cos(\frac{\pi}{6}t) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = T$ *сек*

Рис. К1.1

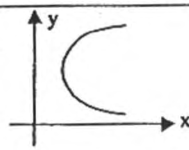
$$\begin{cases} x = D_1\cos(\frac{\pi}{6}t^2) + D_2 \\ y = D_3\sin(\frac{\pi}{6}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{T}$ *сек*

Рис. К1.2

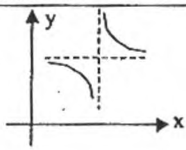
$$\begin{cases} x = D_1\sin^2(\frac{\pi}{6}t^2) + D_2 \\ y = D_3\cos(\frac{\pi}{6}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{T}$ *сек*

Рис. К1.3

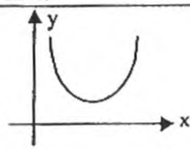
$$\begin{cases} x = D_1 ctg(\frac{\pi}{6}t) + D_2 \\ y = D_3 tg(\frac{\pi}{6}t) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = T$ *сек*

Рис. К1.4

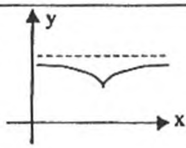
$$\begin{cases} x = D_1\cos(\frac{\pi}{6}t^2) + D_2 \\ y = D_3\cos(\frac{\pi}{3}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{T}$ *сек*

Рис. К1.5

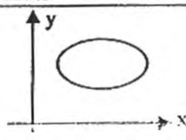
$$\begin{cases} x = D_1\sin(\frac{\pi}{6}t) + D_2 \\ y = D_3 tg(\frac{\pi}{6}t) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = T$ *сек*

Рис. К1.6

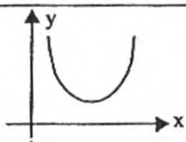
$$\begin{cases} x = D_1\sin(\frac{\pi}{3}t^2) + D_2 \\ y = D_3\cos(\frac{\pi}{3}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{0.5T}$ *сек*

Рис. К1.7

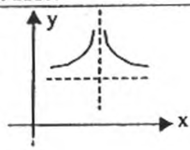
$$\begin{cases} x = D_1\sin(\frac{\pi}{6}t^2) + D_2 \\ y = D_3\cos^2(\frac{\pi}{6}t^2) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = \sqrt{T}$ *сек*

Рис. К1.8

$$\begin{cases} x = D_1\cos(\frac{\pi}{3}t) + D_2 \\ y = D_3 tg(\frac{\pi}{6}t) + D_4 \end{cases}$$



$t_1 = T$ *сек*

Рис. К1.9

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ К1

Дано: Точка движется по плоскости. Уравнения её движения заданны координатным способом. Значения коэффициентов $D_1=1$, $D_2=0$, $D_3=2$ и $D_4=-3$. Параметр $T=1$. Размерность коэффициентов D_1, D_2, D_3, D_4 и, следовательно, координат x и y движущейся точки задана в метрах, размерность параметра t - в секундах.

Определить: все кинематические характеристики движущейся точки в заданный момент времени t_1:

$$\begin{cases} x = D_1 ctg(\frac{\pi}{6}t) + D_2 \\ y = D_3\cos(\frac{\pi}{3}t) + D_4 \end{cases} \quad t_1 = Tc$$

Решение:

Подставим значения коэффициентов в уравнения движения точки. Уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} x = ctg\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ y = 2\cos(\frac{\pi}{3}t) - 3 \end{cases}$$

1. Определим уравнение траектории движущейся точки.

Так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} - 1$, то $\frac{y+3}{2} = \frac{2x^2}{1+x^2} - 1$ и $y = 1 - \frac{4}{1+x^2}$.

Итак, уравнение линии, вдоль которой движется точка, представляет собой гиперболическую кривую.

В рассматриваемый интервал времени $t \in [0,\infty)$, значения координат движущейся точки имеют следующие ограничения:

$$-\infty < x = ctg(\frac{\pi}{6}t) < \infty, \quad -5 \le y = 2\cos(\frac{\pi}{3}t) - 3 \le -1.$$

Совокупность этих ограничений и уравнения линии, вдоль которой движется точка, и определяет уравнение траектории движущейся точки.

2. Определим координаты движущейся точки в заданный момент времени:

$$x_1 = ctg(\frac{\pi}{6}t_1) = \sqrt{3}, \quad y_1 = 2\cos(\frac{\pi}{3}t_1) - 3 = 2\cdot 0.5 - 3 = -2. \qquad (1)$$

3. Определим скорость движущейся точки.

Найдем прежде уравнения, описывающие изменение проекций скорости движущейся точки на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Определим значения проекций вектора скорости и его модуля в заданный момент времени $t_1 = 1$с:

$$v_{x1} = -\frac{2\pi}{3}, \quad v_{y1} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}, \quad v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{4+3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{7}. \qquad (2)$$

4. Определим (полное) ускорение движущейся точки.

Найдем прежде уравнения, описывающие изменение проекций ускорения движущейся точки на координатные оси:

11

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2 ctg\left(\frac{\pi}{6}t\right)}{18\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{2\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Определим значения проекций вектора ускорения и его модуля в заданный момент времени $t_1 = 1$с:

$$a_{x1} = \frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9},\ a_{y1} = -\frac{\pi^2}{9},\ a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{12+1} = \frac{\pi^2\sqrt{13}}{9}. \qquad (3)$$

5. Определим касательное ускорение движущейся точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2v_x a_x + 2v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}.$$

Найдем значение алгебраической величины касательного ускорения в заданный момент времени $t_1 = 1$с:

$$a_{\tau 1} = \frac{3}{\pi\sqrt{7}}\left(-\frac{2\pi}{3}\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\frac{\pi^2}{9}\right) = \frac{3}{\pi\sqrt{7}}\frac{\pi^3\sqrt{3}}{27}(-4+1) = -\frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}. \qquad (4)$$

6. Определим нормальное ускорение движущейся точки.

Так как $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, то $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Найдем значение величины нормального ускорения в заданный момент времени $t_1 = 1$с:

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{13 - \frac{27}{7}} = \frac{8\pi^2\sqrt{7}}{63}. \qquad (5)$$

7. Определим радиус кривизны траектории движущейся точки в том месте, в котором она находится в заданный момент времени:

Так как $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, то $\rho = \frac{v^2}{a_n}$. Найдем значение радиуса кривизны траектории в заданный момент времени $t_1 = 1$с:

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}} = \frac{7\pi^2}{9}\frac{63}{8\pi^2\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{8}. \qquad (6)$$

8. Запишем закон движения точки по траектории:

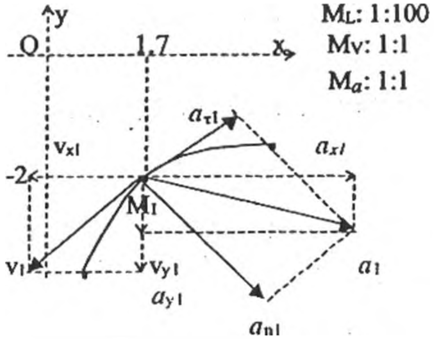
$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, dt = \frac{\pi}{6}\int_0^t \sqrt{\sin^{-4}\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 16\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)}\, dt.$$

Построение рисунка

Используем найденные кинематические характеристики (1-6) движущейся точки для построения рисунка. Для чего в таблице приведем значения этих характеристик, вычисленные с точностью до двух значащих цифр, так как при построении рисунка с помощью линейки большей точности не требуется.

м		м/с			м/с²					м
x_1	y_1	v_{x1}	v_{y1}	v_1	a_{x1}	a_{y1}	a_1	$a_{\tau 1}$	a_{n1}	ρ_1
1,7	-2,0	-2,1	-1,6	2,6	3,8	-1,1	4,0	-2,2	3,3	2,3

На рисунке введем плоскую прямоугольную декартову систему координат Оxy. Масштаб этой системы выберем из соображений наглядности рисунка: M_L: 1:100. Это означает, что в одном сантиметре рисунка содержится сто сантиметров траектории.



1. Построим линию траектории движущейся точки. На рисунке должна быть видна изогнутость траектории. Поэтому часто достаточно построить часть траектории по трем её точкам.

t	0.5	1.0	2.0
x	3.7	1.7	0.6
y	-1.3	-2.0	-4.0

Изобразим точкой M_1 положение движущейся точки на траектории.

2. Построим вектор скорости движущейся точки. Выберем скоростной масштаб M_V: 1:1. Это означает, что при изображении скоростных характеристик в одном сантиметре рисунка содержится один метр в секунду. В выбранном масштабе от точки M_1 отложим влево и вниз (соответственно знакам проекций) отрезки, равные v_{x1} и v_{y1} – проекциям скорости движущейся точки на координатные оси. Строим вектор v_1, как диагональ прямоугольника со сторонами v_{x1} и v_{y1}.

При правильно выполненном построении этот вектор должен быть направлен по касательной к траектории движущейся точки.

3. Построим вектор ускорения движущейся точки. Выберем масштаб для ускорения M_a: 1:1. Это означает, что при изображении характеристик ускорения в одном сантиметре рисунка содержится один метр в секунду в квадрате. В выбранном масштабе от точки M_1 отложим вправо и вниз (соответственно знакам проекций) отрезки, равные a_{x1} и a_{y1} – проекциям ускорения движущейся точки на координатные оси. Строим вектор a_1, как диагональ прямоугольника со сторонами a_{x1} и a_{y1}.

Построим вектор касательного ускорения движущейся точки $a_{\tau 1}$. На рисунке отложим в масштабе ускорения отрезок, равный величине $a_{\tau 1}$, по линии направления вектора v_1 в обратную ему сторону (соответственно знаку $a_{\tau 1}$ в таблице).

Построим вектор нормального ускорения движущейся точки a_{n1}. На рисунке отложим в масштабе ускорения отрезок, равный величине a_{n1}, перпендикулярно линии направления вектора v_1 *в сторону вогнутости траектории* движущейся точки.

При правильно выполненном построении вектор a_1, построенный как диагональ прямоугольника со сторонами $a_{\tau 1}$ и a_{n1}, должен совпасть с вектором a_1, построенным ранее, как диагональ прямоугольника со сторонами a_{x1} и a_{y1}.

12

ЗАДАЧА К2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ К2: Механизм состоит из двух ступенчатых колес и груза D. Колеса между собой находятся в зацеплении или связаны нерастяжимой ременной передачей. Груз D подвешен к концу нерастяжимой нити, намотанной на один из ободов ступенчатого колеса 1.

Как именно соединены между собой ступенчатые колеса, показано на рисунках. Кроме того, на рисунках дано соотношение радиусов внешнего и внутреннего ободов ступенчатого колеса 1.

Закон движения груза D (вниз по вертикальной траектории) задан в таблице: x=x(t). В таблице также приведены значения параметров: t_1, μ, H и V. t_1 – заданный момент времени. μ – угол между вектором ускорения точки A (колеса 1) и прямой, соединяющей эту точку с осью вращения, в заданный момент времени. $H=R_2-r_2$ – разница радиусов внешнего и внутреннего ободов ступенчатого колеса 2. V – параметр, определяющий на рисунках величину скорости точки B (колеса 2) в заданный момент времени.

Определить величину ускорения точки B (колеса 2) в заданный момент времени и найти, какой угол α составляют эти векторы между собой.

Указания к решению задачи К2

Если два колеса находятся в зацеплении, то скорости всех точек, лежащих на соответствующих ободах этих колес равны. Если два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек, лежащих на соответствующих ободах этих колес, и скорости всех точек ремня равны.

В обоих этих случаях отношение угловых скоростей и угловых ускорений связанных колес обратно пропорциональны отношению их радиусов:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{R_2}{R_1};$$

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РИСУНКИ ЗАДАЧИ К2

№	x=x(t) м	t_1 сек	μ град.	$H=R_2-r_2$ м	V м/с
0	$0.8(t^3-4t)$	$\sqrt{3}/3$	30°	0.3	2.4
1	$0.9(t^3-11t)$	$\sqrt{3}$	60°	0.1	1.8
2	t^3-12t	$\sqrt{3}$	30°	0.2	3
3	$0.06(t^3-6t)$	$\sqrt{3}/3$	60°	0.3	0.3
4	t^3-15t	2	45°	0.2	3
5	$0.1(t^3-7t)$	$\sqrt{3}/3$	30°	0.1	0.6
6	$0.4(t^3-12t)$	$\sqrt{3}$	60°	0.2	1.2
7	$0.5(t^3-15t)$	$\sqrt{3}$	30°	0.3	3
8	$0.375(t^3-3t)$	$\sqrt{3}/3$	60°	0.3	0.75
9	$24(t^3-t)$	0.5	45°	0.2	6

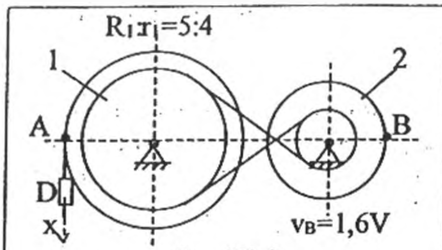


Рис. К2.0

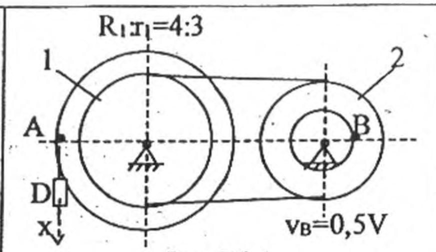


Рис. К2.1

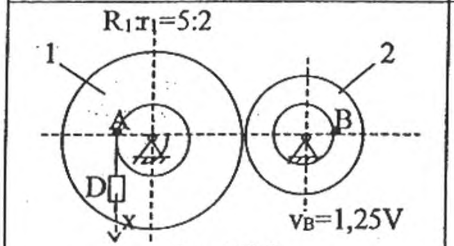


Рис. К2.2

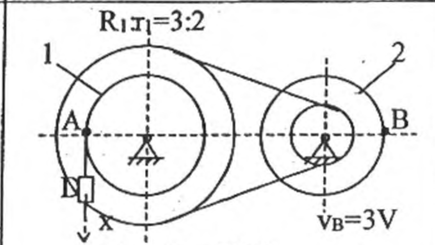


Рис. К2.3

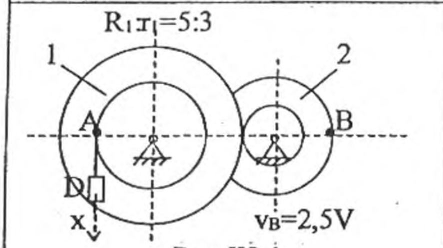


Рис. К2.4

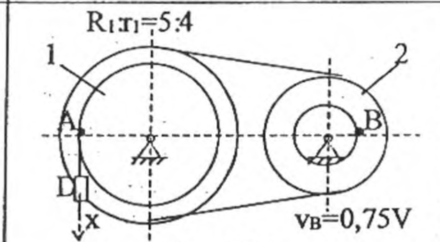


Рис. К2.5

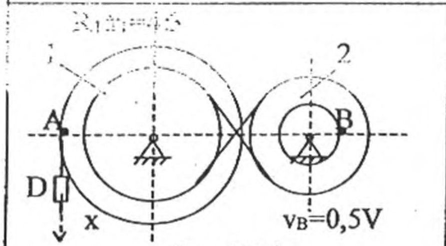


Рис. К2.6

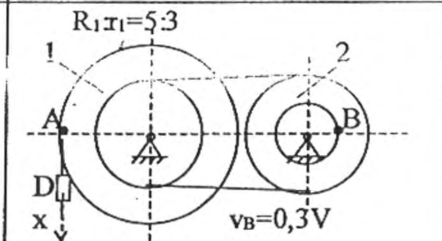


Рис. К2.7

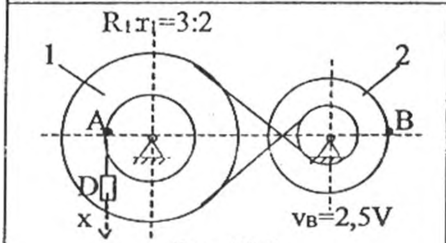


Рис. К2.8

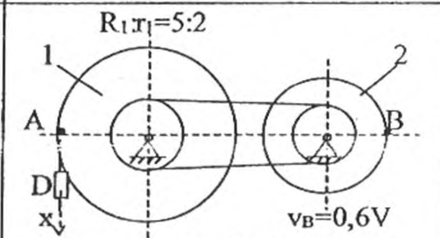
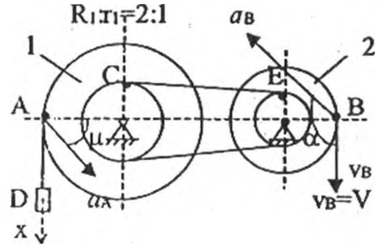


Рис. К2.9

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ К2



Дано: Уравнение движения груза D: $x=(t^3-9t)/6$ м. Заданный момент времени $t_1 = 1$ сек. Угол $\mu = 45°$. Соотношение радиусов ступенчатого колеса 1: $r_1:R_1 = 1:2$. Разница радиусов ступенчатого колеса 2: $R_2-r_2=0{,}2$ м. Параметр, определяющий скорость точки B: $V=1$ м/с.

Определить: величину вектора ускорения точки B (колеса 2) в заданный момент времени и угол между векторами её скорости и ускорения.

Решение:

1. Определение размеров ступенчатого колеса 1.

Зная уравнение движения груза D, находим скорость и касательное ускорение точки A:

$$v_A = \frac{dx}{dt} = \frac{t^2-3}{2},\ a_A^\tau = \frac{d^2x}{dt^2} = t.$$

В заданный момент времени: $v_{A1} = -1$м/с, $a_{A1}{}^\tau = 1$м/с^2.

Зная угол μ, находим нормальное ускорение точки A:

$$a_{A1}{}^n = a_{A1}{}^\tau\,\mathrm{ctg}\,\mu = 1\text{м/с}^2.$$

Теперь, зная скорость и нормальное ускорение точки A, определим расстояние от точки A до оси вращения:

$$R_1 = v_{A1}{}^2/a_{A1}{}^n = 1\text{м. Тогда } r_1 = R_1/2 = 0{,}5\text{м.}$$

2. Определение размеров ступенчатого колеса 2.

Так как ступенчатые колеса связаны между собой нерастяжимой ременной передачей, то скорости точек C и E равны: $v_C = v_E$.

Скорость точки C нетрудно определить:

$$v_C = v_A\,r_1/R_1 = 0{,}5 \text{ м/с.}$$

Зная скорости двух точек ступенчатого колеса 2 и расстояние между ними, найдем размеры колеса:

$$\begin{cases} v_E = \omega_2 r_2 \\ v_B = \omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_B - v_E}{R_2 - r_2} \Rightarrow R_2 = \frac{v_B}{v_B - v_E}(R_2 - r_2) = 0{,}4 \text{ м},\ r_2 = 0{,}2 \text{ м}.$$

3. Определение закона изменения угловой скорости ступенчатого колеса 2.

Найдем прежде, как изменяется угловая скорость ступенчатого колеса 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R} = \frac{t^2-3}{2}.$$

Так как ступенчатые колеса связаны между собой нерастяжимой ременной передачей, соединяющей внутренние обода колес, то отношение угловых скоростей обратно пропорционально размерам этих ободов, то есть:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{4}\left(t^2-3\right).$$

4. Определение угла α между векторами скорости и ускорения точки В.

Найдем закон изменения углового ускорения ступенчатого колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{5}{2}t.$$

Найдем теперь составляющие вектора ускорения точки В:

$$a_B^\tau = \varepsilon_2 R_2 = \frac{5}{2}t * 0.4 = t, \quad a_B^n = \omega_2^2 R_2 = \frac{5}{8}(t^2-3)^2.$$

Определим угол μ между вектором ускорения точки В и прямой, соединяющей её с осью вращения, в заданный момент времени:

$$tg\mu = \frac{a_{B1}^\tau}{a_{B1}^n} = \frac{2}{5}, \Rightarrow \mu = arctg\frac{2}{5} \approx 22^\circ.$$

Так как знаки алгебраических величин скорости и касательного ускорения точки В в заданный момент времени различны ($v_{B1} = R_2\omega_2 = -1$ м/с, $a_{B1}^\tau = R_2\varepsilon_2 = 1$ м/с^2), то точка В движется замедленно и, следовательно, угол α между векторами скорости и ускорения этой точки будет равен:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \mu \approx 112^\circ.$$

5. Определение ускорения точки В.

Величина полного ускорения любой точки вращающегося тела равна корню квадратному из суммы квадратов его касательного и нормального ускорений: $a_{B1} = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = R_2\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 2{,}69$ м/с^2.

ЗАДАЧА К3
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

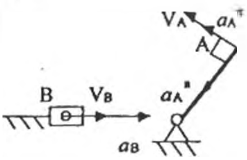
УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ К3: Плоский механизм состоит из четырех звеньев и колеса, которое катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Размеры первых двух звеньев и колеса одинаковы во всех вариантах: L_1=0,4 м; **L_2=1 м и R=0,2 м.** Размеры остальных звеньев заданы в таблице. Части механизма соединены между собой шарнирами. Одно из звеньев соединено с центром колеса, другое – с его ободом. Иногда (рис. К3.2, 3, 7, 9) одно из звеньев соединено с серединой другого звена (точка Н).

Положение частей плоского механизма определяется углами α, β, γ, φ, ψ, заданными в таблице К3. Каждый угол определяет положение соответствующего звена. Все углы откладываются от горизонтального луча, проведенного вправо из соответствующего узла. В заданном положении механизма угловая скорость первого звена направлена против часовой стрелки и задана ω_1=4рад/с.

Для заданного положения механизма во всех вариантах определить:

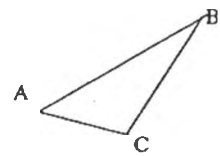
1) положение МЦС всех звеньев механизма, движущихся плоско параллельно;
2) скорости всех узлов механизма (точек А, В, С и т. д.);
3) угловые скорости всех звеньев механизма и колеса.

Указания к решению задачи К3



При решении задачи К3 требуется знать, что скорость и ускорение узлов, совпадающих с ползунами, направлена по направляющим этих ползунов; скорость узлов, принадлежащих вращающимся звеньям, направлены перпендикулярно этим звеньям, а ускорение имеет касательную a_A^τ и нормальную a_A^n составляющие.

При построении мгновенных центров скоростей (МЦС) для звеньев, двигающихся плоско параллельно, и определении расстояний от узлов до МЦС удобно пользоваться теоремой синусов: отношение синусов углов любого треугольника к длинам сторон, лежащих против этих углов, одинаково для всех сторон и углов:



$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB}.$$

В таблице приведены значения синусов некоторых углов, которые могут потребоваться при выполнении задачи К3.

α	7,5°	15°	22,5°	30°	45°	60°	67,5°	75°	82,5°
sinα	0,131	0,259	0,383	0,5	0,707	0,866	0,924	0,966	0,991

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РИСУНКИ ЗАДАЧИ К3

№	α(град.)	β(град.)	γ(град.)	φ(град.)	ψ(град.)	L_3(м)	L_4(м)
0	210	315	180(90)	30	150(120)	0,6	0,6
1	225	330	0	30	120	0,8	1,2
2	30	225	0(90)	30	135	0,6	1,0
3	45	210	180	60	120	0,8	0,6
4	60	180	210	60	150	0,6	1,4
5	60	150	240	30	135	0,8	1,4
6	120	135	0(270)	30	120	0,6	0,8
7	135	240	180	45	150	1,2	1,0
8	150	225	120	60	135	0,6	1,2
9	180	300	135	60	120	0,8	0,8

В таблице (в скобках) приведены дополнительные значения углов. Эти значения следует использовать в тех случаях, когда происходит заклинивание механизма, а именно, когда мгновенный центр скоростей попадает в точку, скорость которой заведомо не равна нулю. Например, в варианте 51 при γ=0° МЦС звена 2 попадает в точку А, а её скорость, равная произведению угловой скорости звена 1 на его длину, отлична от нуля. Поэтому здесь следует значение угла полагать равным дополнительному значению, а именно γ=90°.

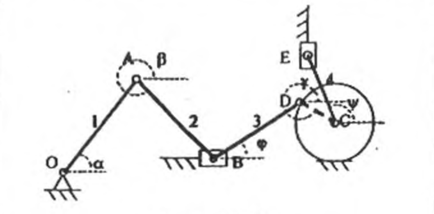


Рис. К3.0

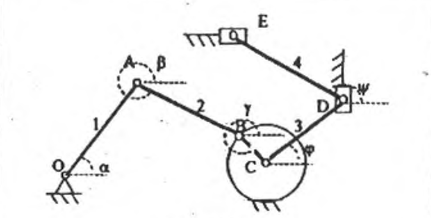


Рис. К3.1.

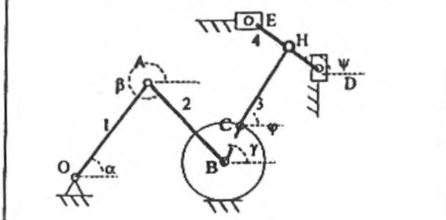


Рис. К3.2

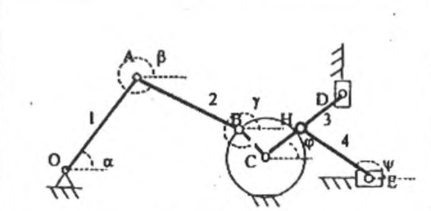


Рис. К3.3

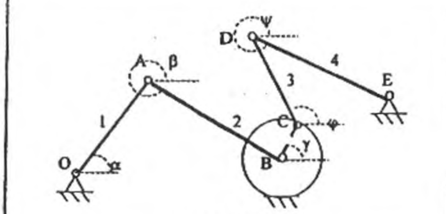


Рис. К3.4

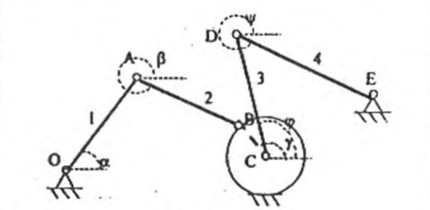


Рис. К3.5

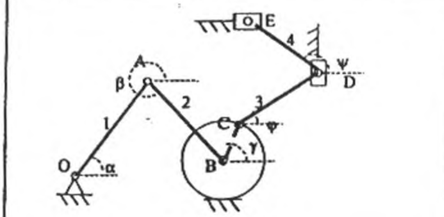


Рис. К3.6

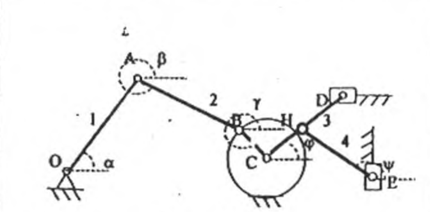


Рис. К3.7

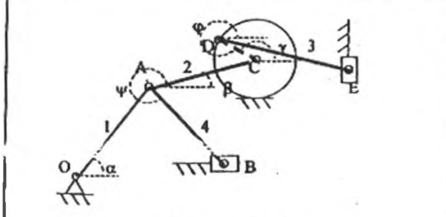


Рис. К3.8

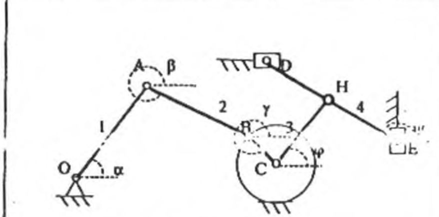
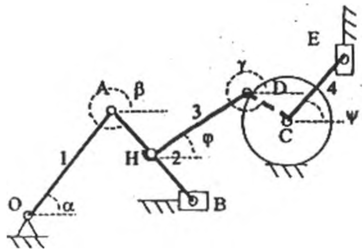


Рис. К3.9

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ К3



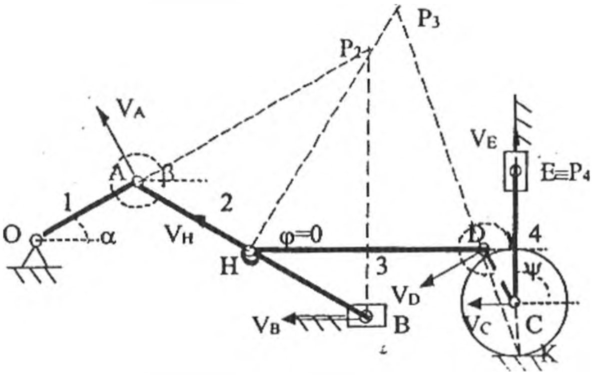
Дано: L_1=0,4м; L_2=1м; L_3=0,9м; L_4=0,5м; R=0,2м; α=30°; β=330°; γ=300°; φ =0°; ψ=90°; AH=BH.

Определить: Положение МЦС всех звеньев механизма, движущихся плоско параллельно, скорости всех узлов, угловые скорости всех звеньев, если в данный момент времени ω_1=4 рад/с и направлена против часовой стрелки.

Решение:

Рисунок, заданный по условию, показывает лишь схему соединения частей плоского механизма.

Строим на рисунке рабочий чертеж в соответствии с заданными углами и размерами.



1. Звено 1 вращается, значит, скорость узла A равна:

$$V_A = \omega_1 L_1 = 1{,}6 \text{ м/с},$$

и направлена под прямым углом к звену 1 против часовой стрелки.

2. Звено 2 движется плоско параллельно. Вектор скорости узла B горизонтален, так как точка B принадлежит ползуну, направляющая которого горизонтальна. Строим МЦС (точку P_2) звена 2, восстанавливая перпендикуляры из узлов A и B к векторам скоростей этих точек.

Треугольник ABP_2 – равносторонний, так как

$$\angle AP_2B = 90°-\alpha = 60°,$$

$$\angle P_2AB = 360°+\alpha-\beta = 60°.$$

Значит, $AP_2 = BP_2 = AB = L_2 = 1$ м. $HP_2 = L_2 \cos 30° = 0{,}866$ м.

Известно, что $\dfrac{v_A}{AP_2} = \dfrac{v_B}{BP_2} = \dfrac{v_H}{HP_2} = \omega_2$. Откуда находим:

$$\omega_2 = V_A/AP_2 = 1{,}6 \text{ с}^{-1};$$

$$V_B = \omega_2\, BP_2 = 1{,}6 \text{ м/с};$$

$V_H = \omega_2\, HP_2 = 1{,}386$ м/с.

Вектор V_H направлен перпендикулярно прямой HP_2, то есть по прямой AB, так как медиана равностороннего треугольника является его высотой.

3. Звено 3 движется плоско параллельно. Вектор V_D направлен перпендикулярно прямой DK, так как точка K (точка контакта колеса с поверхностью) – МЦС колеса, а точка D принадлежит не только звену 3, но и колесу. Строим МЦС (точку P_3) звена 3, восстанавливая перпендикуляры из узлов H и D к векторам скоростей этих точек.

В треугольнике HDP_3:

$$\angle DHP_3 = \angle ABP_2 = 60°;$$

$$\angle HDP_3 = 90° - \angle CKD = 90° - (\gamma\text{-}270°)/2 = 75°.$$

$$\angle HP_3D = 180° - \angle DHP_3 - \angle HDP_3 = 45°.$$

По теореме синусов: $\dfrac{\sin 45°}{HD} = \dfrac{\sin 60°}{DP_3} = \dfrac{\sin 75°}{HP_3}$, находим

$$DP_3 = DH\sin 60°/\sin 45° = 0{,}9\bullet 0{,}866/0{,}707 = 1{,}10 \text{ м};$$

$$HP_3 = DH\sin 75°/\sin 45° = 0{,}9\bullet 0{,}966/0{,}707 = 1{,}23 \text{ м}.$$

Известно, что $\dfrac{v_H}{HP_3} = \dfrac{v_D}{DP_3} = \omega_3$. Откуда находим:

$$\omega_3 = V_H/HP_3 = 1{,}386/1{,}23 = 1{,}13\text{с}^{-1};$$

$$V_D = \omega_3\, DP_3 = 1{,}13\bullet 1{,}10 = 1{,}24 \text{ м/с}.$$

4. Колесо движется плоско параллельно. Точка K (точка контакта колеса с поверхностью) – МЦС колеса.

Из треугольника CKD: $DK = 2R\cos\angle CKD = 2\bullet 0{,}2\bullet 0{,}966 = 0{,}386$ м.

Известно, что $\dfrac{v_C}{CK} = \dfrac{v_D}{DK} = \omega_K$. Откуда находим:

$$\omega_K = V_D/DK = 1{,}24/0{,}386 = 3{,}21\text{с}^{-1};$$

$$V_C = \omega_K\, CK = 3{,}21\bullet 0{,}2 = 0{,}64 \text{ м/с}.$$

5. Звено 4 движется плоско параллельно. Вектор скорости узла E вертикален, так как точка E принадлежит ползуну, направляющая которого вертикальна. Строим МЦС (точку P_4) звена 4, восстанавливая перпендикуляры из узлов C и E к векторам скоростей этих точек.

Точка P_4 совпадает с узлом E, значит, $V_E=0$; $\omega_4 = V_C/L_4 = 0{,}64/0{,}5 = 1{,}28$ с$^{-1}$.

Полученные результаты удобней привести в виде таблицы 3, где значения этих характеристик вычислены с точностью до двух значащих цифр, так как при построении рисунка с помощью линейки большей точности не требуется:

Уз.	A	B	H	D	C	E	Зв.	1	2	3	4	K
V	1,6	1,6	1,4	1,2	0,6	0	ω	4,0	1,6	1,2	1,3	3,2