**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Методические указания

к практическим работам

Для направлений обучения

АРХа, Меб, ТППб, ТМб, ГИб, ТБПб

**Составители: А. А. Бигулаев, М. Ю. Кодзаев**

**Владикавказ 2013**

Министерство образования и науки рф

Северо-Кавказский горно-металлургический институт

(государственный технологический университет)

Кафедра «Сопротивление материалов и строительная механика»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания

к практически работам

Для направлений обучения

АРХа, Меб, ТППб, ТМб, ГИб, ТБПб

Составители: А. А. Бигулаев, М. Ю. Кодзаев

Допущено редакционно-издательским советом   
Северо-Кавказского горно-металлургического  
института (государственного технологического

университета). Протокол № 24 от 02.07.2013 г.

Владикавказ 2013

УДК 539

ББК 22.1

Б 59

Рецензент:

**Б 59 Сопротивление материалов:** Методические указания к практи­ческим работам / Сост. А. А. Бигулаев, М. Ю. Кодзаев; Северо-Кавказский горно-метал­лур­гический инсти­тут (государственный технологический универси­тет). – Вла­дикавказ: Северо-Кавказ­ский горно-ме­таллур­гический институт (государственный техноло­гический универ­ситет). Изд-во «Терек», 2013. – 77 с.

**УДК 539**

**ББК 22.1**

Редактор: *Иванченко Н. К.*

Компьютерная верстка: *Цишук Т. С.*

© Составление. Северо-Кавказский

горно-металлургический институт

(государственный технологический университет), 2013

© Бигулаев А. А., Кодзаев М. Ю., составление, 2013

Подписано в печать 6.08.2013. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Печать на ризографе. Усл. п.л. 4,48. Тираж 30 экз. Заказ № .

Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет). Издательство «Терек».

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии СКГМИ (ГТУ).

362021, г. Владикавказ, ул. Николаева, 44.

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| Общие указания к выполнению контрольных работ. . . . . . . . . . . .  Рекомендуемая литература. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задачи, входящие в контрольные работы. . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 2. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи №2. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 3. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 3. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 6. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 6. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 7. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 7. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 8. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 8. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Задача № 9. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  Пример решения задачи № 9. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3  5  6  6  7  11  13  18  20  24  27  32  36  49  51  56  57  65  67  71  73 |

**Общие указания к выполнению практических работ**

Настоящее пособие составлено для студентов СКГМИ (ГТУ), совмещающих учебу с работой и изучающих курс "Сопротивление материалов", целью которого является овладение методами и приемами расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Занятия по курсу обязательно должны сопровождаться решением задач, так как только при самостоятельном выполнении расчетов можно выработать необходимые навыки анализа расчетных схем элементов машин, зданий и сооружений. Учебными планами для студентов заочной формы обучения предусмотрено выполнение от одной до трех контрольных работ, выполнение которых требует освоения основных разделов изучаемого курса.

В задачах, предлагаемых студентам для самостоятельного решения и входящих в данное пособие, рассматриваются типовые расчеты элементов инженерных сооружений, машин и механизмов.

1. Каждый студент выполняет контрольные работы, предусмотренные учебным графиком. Количество работ, перечень задач, входящих в ту или иную контрольную работу, сообщаются студентам на первом установочном занятии.

2. Контрольные работы выполняются в обычных тетрадях, имеющих поле 4 см для замечаний преподавателя. На обложке тетради следует четко написать номер контрольной работы, номер варианта задания, название дисциплины, фамилию, имя и отчество студента, шифр учебной группы.

3. Исходные данные для выполнения контрольных работ должны быть выбраны из таблиц в соответствии с индивидуальным шифром студента. Для этого следует записать номер группы из шести цифр и добавить в конце номер своего варианта – получится строка из шести цифр (если номер однозначный, например, 2, следует поставить перед этой цифрой 0 и записать 02).

Под выписанными цифрами ставятся первые буквы русского алфавита:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **0** | **3** | **4** | **5** | **7** |
| **а** | **б** | **в** | **г** | **д** | **е** |

Из каждого вертикального столбца таблицы выбирается число, стоящее в строке, номер которой соответствует номеру соответствующей буквы. Например, для приведенного выше примера для решения задачи № 1 из таблицы 1 выписываем следующие исходные данные: *номер схемы – 4*, *Р*1*= 30* кН, *Р*2*= 90*кН, *Р*3 *= 110* кН, *a = 0,3* м*, b = 0*,*5* м*, c = 0,5* м*, F*1*= 6* см2,*F*2 *= 10* см2.

4. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, числовые данные, составить в масштабе аккуратный чертеж и указать на нем все величины, необходимые для расчета.

5. Решение задач должно сопровождаться краткими объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины следует указать в числах, соответствующих выданному варианту. При использовании в рас­четах формул следует подставить в них числовые значения и, не приводя промежуточных вычислений, записать ответ с указанием размерностей оп­­ределяемых величин.

6. Если неправильно выполненная работа возвращена студенту для ис­правления, то эти исправления следует выполнить на отдельных листах, вклеить их в незачтенную работу и сдать повторно на проверку. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

7. При сдаче экзамена или зачета студент должен представить все вы­пол­ненные и зачтенные контрольные работы.

**Рекомендуемая литература**

***Основная***

1. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

2. Сопротивление материалов / Под ред. А. Ф. Смирнова М.: Высш. школа, 1975. 480 с.

3. *Беляев Н. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.

***Дополнительная***

1. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В. К. Качу­рина. М.: Наука, 1984. 432 c.

*2. Миролюбов И. Н. и др.* Пособие к решению задач по сопротивлению ма­те­риалов. М.: Высш. школа, 1985. 399 с.

3. *Рудицын М. Н. и др.* Справочное пособие по сопротивлению материа­лов. Минск: Высш. школа, 1970. 410 с.

**Задачи, входящие в практические работы**

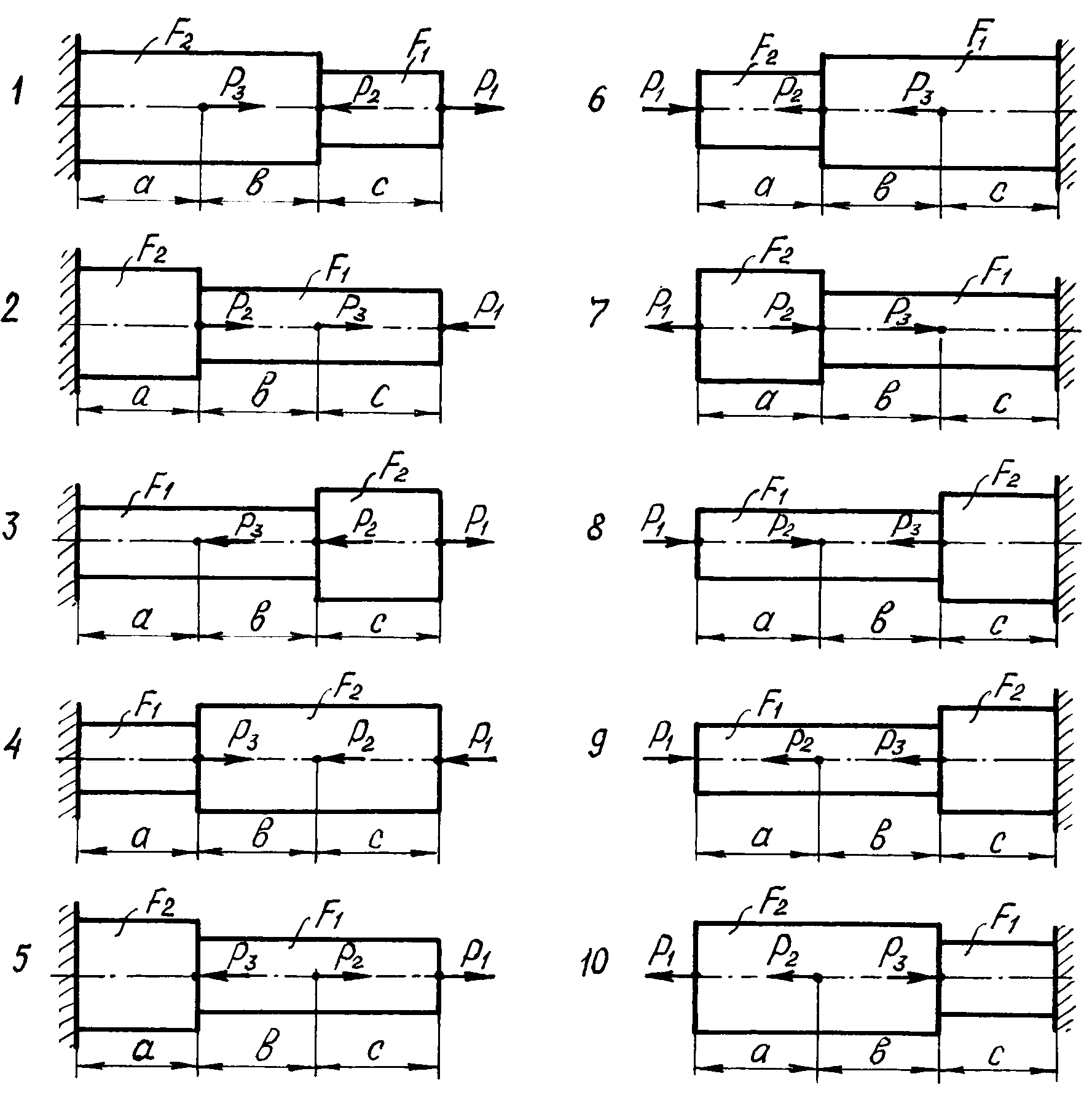
**ЗАДАЧА № 1**

Ступенчатый брус нагружен силами  и , направленными вдоль его оси. Заданы длины участков *a*, *b*, *c* и площади их поперечных сечений  и . Модуль упругости материала МПа, предел текучести МПа и запас прочности по отношению к пределу текучести . Требуется:

1) построить эпюры продольных сил , напряжений  и продольных перемещений Δ;

2) проверить, выполняется ли условие прочности.

Расчетные схемы выбираются по рис. 1, числовые данные берутся из табл. 1.



*Рис. 1.* Расчетные схемы к задаче № 1.

Таблица 1

**Числовые данные к задаче № 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  схемы по  рис. 1 | Сила, кН | | | Длина участков, м | | | Площадь поперечного сечения, см2 | |
|  |  |  | *а* | *b* | *с* |  |  |
| 1 | 1 | 40 | 90 | 100 | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 5 | 10 |
| 2 | 2 | 45 | 80 | 120 | 0,3 | 0.5 | 0,5 | 4 | 12 |
| 3 | 3 | 50 | 85 | 110 | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 6 | 14 |
| 4 | 4 | 35 | 70 | 115 | 0,4 | 0,6 | 0,6 | 4 | 10 |
| 5 | 5 | 40 | 75 | 100 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 5 | 15 |
| 6 | 6 | 50 | 80 | 95 | 0,5 | 0,4 | 0,4 | 6 | 18 |
| 7 | 7 | 60 | 70 | 120 | 0,3 | 0,2 | 0,5 | 4 | 12 |
| 8 | 8 | 45 | 60 | 115 | 0,4 | 0,3 | 0,6 | 7 | 10 |
| 9 | 9 | 35 | 65 | 110 | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 8 | 14 |
| 0 | 10 | 30 | 90 | 95 | 0,5 | 0,5 | 0,3 | 6 | 16 |
|  | е | в | г | д | е | д | г | д | в |

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1**

Ступенчатый брус нагружен силами *Р*1, *Р*2, *Р*3, (рис. 2, *а*).

Требуется построить эпюры продольных сил *N*, нормальных напряжений σ, продольных перемещений Δ и проверить, выполняется ли условие прочности.

Числовые данные к задаче выбираются по табл. 1.

Например:  кН,  кН,  кН, м,  м; .

Для всех вариантов принимается: ; .

1. *Построение эпюры N*. На брус действуют три силы, следовательно, продольная сила по его длине будет изменяться. Разбиваем брус на участки, в пределах которых продольная сила будет постоянной. В данном случае границами участков являются сечения, в которых приложены силы. Обозначим сечения буквами *А, В, С, D,* начиная со свободного конца, в данном случае правого.

Для определения продольной силы на каждом участке рассматриваем произвольное поперечное сечение, сила в котором определяется по правилу, приведенному ранее. Чтобы не определять предварительно реакцию в заделке *D*, начинаем расчеты со свободного конца бруса *А*.

Участок *АВ*, сечение *1–1*. Справа от сечения действует растягивающая сила  (рис. 2, *а*). В соответствии с упомянутым ранее правилом, получаем

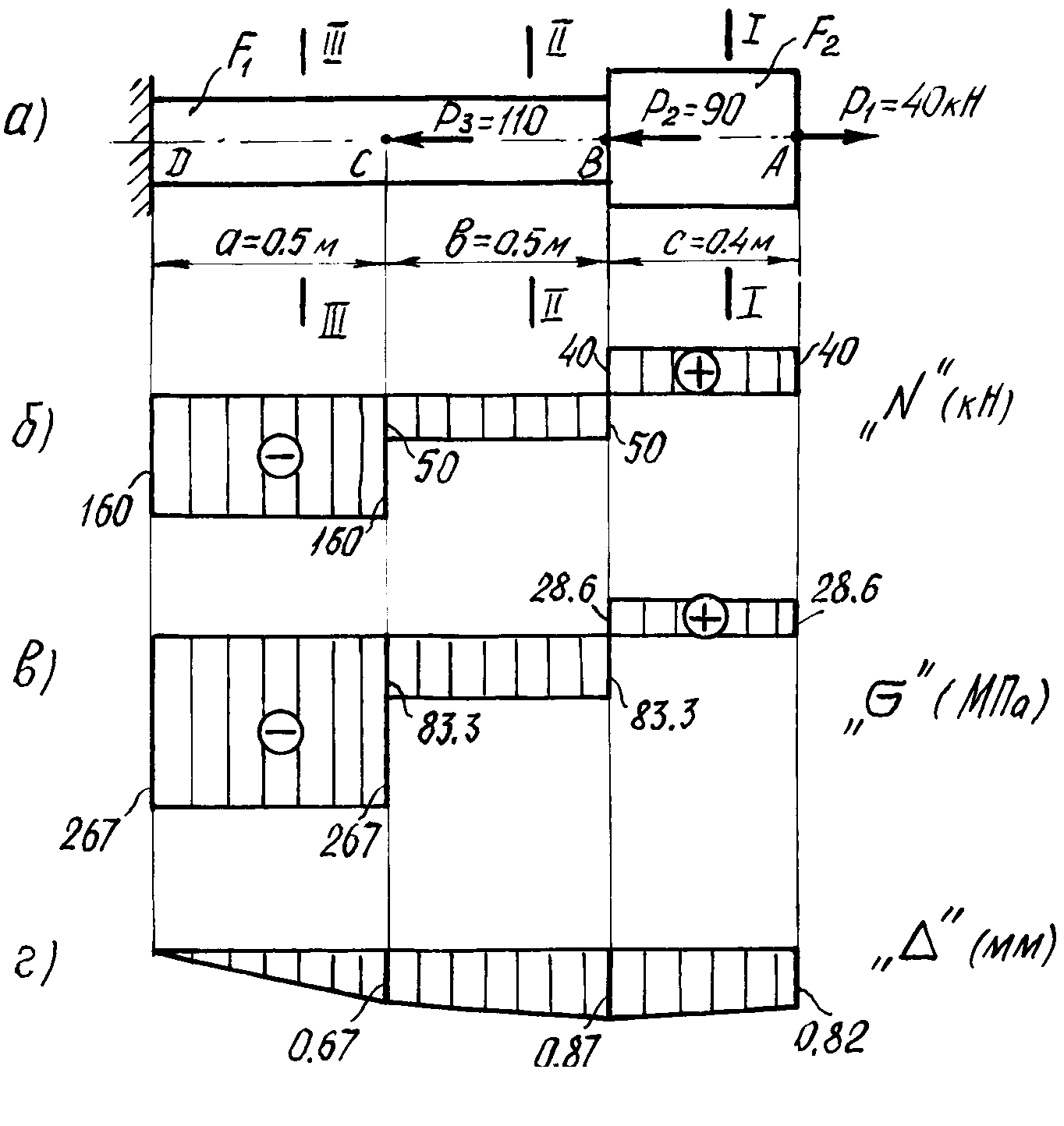


Участок *ВС*, сечение *2–2*. Справа от него расположены две силы, направленные в разные стороны. С учетом правила знаков, получим



Участок *СD*, сечение 3–3: аналогично получаем



****

*Рис. 2.* Расчетная схема бруса и эпюры: *а* ‑ расчетная схема;

*б* ‑ эпюра продольных сил; *в* ‑ эпюра напряжений;

*г* ‑ эпюра продольных перемещений.

По найденным значениям *N* в выбранном масштабе строим эпюру, учи­тывая, что в пределах каждого участка продольная сила постоянна.

Положительные значения *N* откладываем вверх от оси эпюры, отри­ца­тель­ные – вниз.

2. *Построение эпюры напряжений* σ. По формуле (1.1) вычисляем напряжения в поперечном сечении для ка­ждого участка бруса:

,

,

.

При вычислении нормальных напряжений значения продольных сил *N* берутся по эпюре с учетом их знаков. Знак плюс соответствует растя­же­нию, минус – сжатию. Эпюра напряжений показана на рис. 2, *в*.

3. *Построение эпюры продольных перемещений.* Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютные удли­нения отдельных участков бруса, используя закон Гука:



**;

*.*

Определяем перемещения сечений, начиная с неподвижного за­кре­плен­ного конца. Сечение *D* расположено в заделке, оно не может сме­щать­ся и его пере­мещение равно нулю:

**

Сечение *С* переместится в результате изменения длины участка *CD.* Пе­ремещение сечения *С* определяется по формуле

**.

При отрицательной (сжимающей) силе точка *С* сместится влево.

Пере­мещение сечения *В* является результатом изменения длин *DC* и *CB*. Скл­а­дывая их удлинения, получаем

*.*

Рассуждая аналогично, вычисляем перемещение сечения *А*:

**.

В выбранном масштабе откладываем от исходной оси значения вычис­лен­ных перемещений. Соединив полученные точки прямыми линиями, стр­о­­­им эпю­ру перемещений (рис. 2, *г*).

4. Проверка прочности бруса.

Условие прочности записывается в следующем виде:

.

Максимальное напряжение  находим по эпюре напряжений, выби­рая максимальное по абсолютной величине:



Это напряжение действует на участке *DC*, все сечения которого являются опасным.

Допускаемое напряжение вычисляем по формуле:

.

Сравнивая  и , видим, что условие прочности не выполняется, так как максимальное напряжение превышает допускаемое.

**ЗАДАЧА № 2**

Абсолютно жесткий брус *АВ* опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен с помощью шарниров к двум стальным стержням.

Требуется подобрать сечения стержней по условию их прочности, приняв запас прочности по отношению к пределу текучести .

Соотношение площадей поперечных сечений стержней указано на рас­четных схемах, модуль упругости стали для всех вариантов 

Студенты строительных специальностей дополнительно определяют допускаемую силу, используя расчет по предельной грузоподъемности, и сравнивают ее с заданной.

Числовые данные берутся из табл. 2, расчетные схемы – по рис. 3.

Таблица 2

**Числовые данные к задаче № 2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  расчет.  схемы по рис. 2 | Размер, м | | | Сила,  кН | Марка  стали | Предел  текучести,  МПа |
| ***а*** | ***b*** | ***с*** |
| 1 | 1 | 1,2 | 1,6 | 1,0 | 3 | 20 | 250 |
| 2 | 2 | 1,2 | 1,5 | 0,8 | 5 | 30 | 300 |
| 3 | 3 | 1,4 | 1,4 | 1,0 | 4 | 40 | 340 |
| 4 | 4 | 1,4 | 1,6 | 0,9 | 2 | 20 | 250 |
| 5 | 5 | 1,4 | 1,5 | 0,7 | 6 | 50 | 380 |
| 6 | 6 | 1,3 | 1,4 | 0,8 | 5 | 30 | 300 |
| 7 | 7 | 1,5 | 1,2 | 1,0 | 3 | 40Х | 800 |
| 8 | 8 | 1,5 | 1,1 | 0,9 | 4 | 20 | 250 |
| 9 | 9 | 1,2 | 1,5 | 1,0 | 6 | 40 | 340 |
| 0 | 10 | 1.2 | 1.6 | 1,0 | 4 | 40Х | 800 |
|  | е | в | г | д | в | г | д |

****

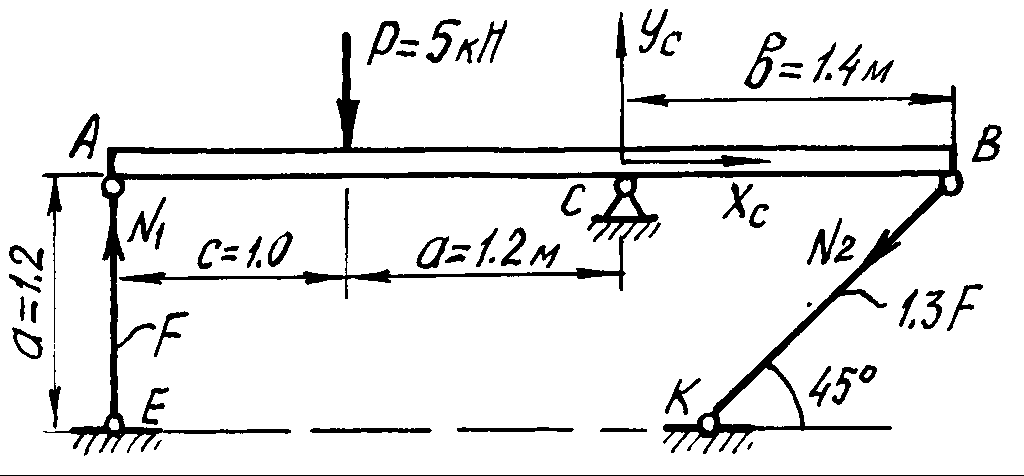
*Рис. 3.* Расчетные схемы к задаче № 2.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2**

Жесткий брус *АВ* закреплен, как показано на рис. 4, и нагружен силой ** *5*кН.

Требуется подобрать сечения сте­ржней из условия их прочности. Числовые данные к задаче берутся из табл. 2. Для данной задачи примем *а* = 1,2 м; *в* = 1,4 м; *с* = 1,0 м материал – сталь 40,  . Вычислим степень статической неопределимости.

Жесткий брус *АВ* закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры и поддерживается двумя деформируемыми стальными стержнями *АЕ* и *ВК*. На опоре *С* (рис. 4) – две составляющие реакции *XC* и *YC* , реакции в стержнях направлены вдоль их осей и приложены к брусу *АВ* в точках *А* и *В*. Направление этих реакций рекомендуется установить после анализа возможного деформированного состояния конструкции.



*Рис. 4.* Расчетная схема.

Для плоской системы сил в общем случае ее приложения к конструкции можно составить только три независимых уравнения равновесия. В рассматриваемой задаче к брусу *АВ* приложено четыре неизвестных усилия: две реакции в шарнире и два усилия в стержнях. Разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики показывает, что для определения этих неизвестных необходимо составить еще одно уравнение статики, в которое входили бы интересующие нас величины. Такое уравне­ние или несколько подобных уравнений можно получить из геометрических зависимостей между деформациями элементов заданной конструкции.

Рассмотрим конструкцию после деформации ее элементов (рис. 5). Под действием силы *Р* жесткий брус может повернуться вокруг точки *С*, при этом стержни *АЕ* и *ВК* будут деформированы. Точки *А* и *В* описывают при повороте бруса дуги окружностей, которые ввиду малости перемещений заменяются касательными, т.е. считается, что эти точки перемещаются по перпендикулярам к радиусам *АС* и *ВС* этих дуг. Точка *А* смещается вниз и занимает положение , точка *В* – вверх, занимая положение . Брус, как абсолютно жесткий элемент конструкции, – положение . Очевидно, что стержень *АЕ* сжат и стал короче на величину . Соединив точки *К* и , находим на чертеже положение стержня *ВК* после его деформации. Опустив перпенди­куляр из точки *В* на прямую , находим точку .



Отрезок – удлинение стержня *ВК*.

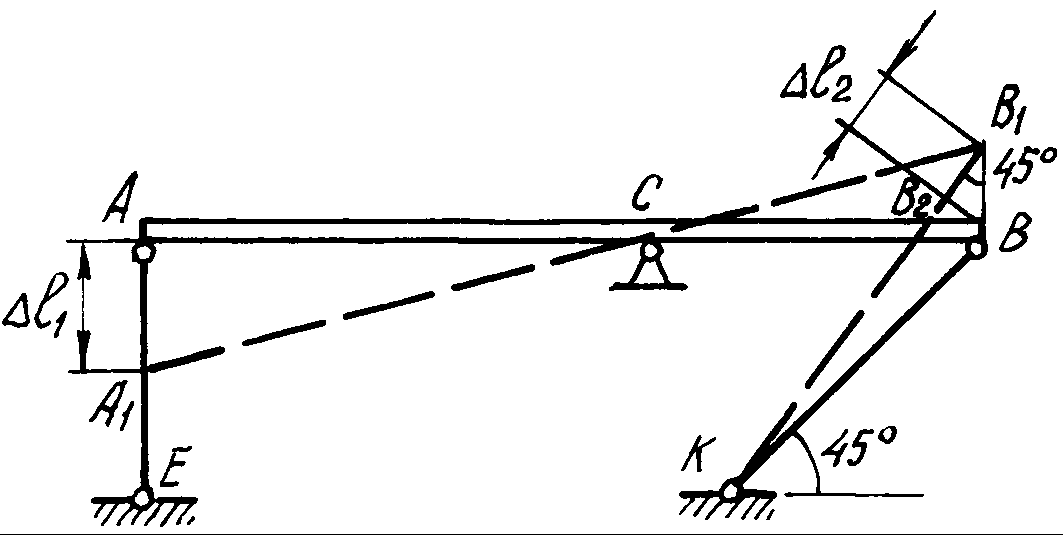
Действительно,  , так как *КВ = КВ*2, и стержень *КВ* растянут.

Выяснив направление усилий в стержнях, показываем векторы этих усилий на схеме недеформированного состояния конструкции (см. рис. 4) и составляем уравнение ее равновесия:

  (2.1)

Определения составляющих реакции шарнира  для решения данной задачи не требуется, и два других уравнения статики не составля­ются.

Для вычисления усилий в стержнях  необходимо иметь еще одно урав­нение, называемое уравнением совместности деформаций. Это уравне­ние получаем из геометрических соотношений между деформациями эле­мен­тов заданной конструкции. При этом ввиду малости деформаций изме­нением угла наклона стержня *ВК* пре­небрегаем, считая что ∠



*Рис. 5.* Схема конструкции после деформации ее элементов.

Тогда



Из подобия треугольников  и  находим соотношение между деформациями стержней – :



 (2.2)

Полученная зависимость (2.2) называется условием *совместности деформаций.*

Абсолютные удлинения стержней можно выразить через усилия, ис­пользуя формулу Гука:

 (2.3)

Подставив выражения (2.3) в условие совместности деформаций (2.2), получим



 (2.4)

Решая систему уравнений (2.1) и (2.4), определяем усилия в стержнях . Для этого подставим значение *N1* из (2.4) в уравнение (2.2):

;

.

Решив систему уравнений, получим



.

Определив усилия в стержнях, переходим к подбору площадей их поперечных сечений.

Для заданного материала по формуле (1.13) вычислим допускаемое на­пряжение



Определяем напряжения в стержнях и выбираем большее:

 Па;

 Па.

Площадь сечения *F* подбираем по условию прочности наиболее на­гру­жен­ного стержня. Так как  больше , используем условие проч­ности первого сте­р­жня:







Площади сечений стержней принимаем в соответствии с заданным со­от­ношением:



Определение допускаемой силы *Р* по условию задачи производится по предельной грузоподъемности конструкции.

Предельным состоянием конструкции называется такое состояние, при ко­то­ром она начинает деформироваться без увеличения нагрузки.

В данном примере это произойдет в том случае, когда напряжения во всех стерж­нях достигнут предела текучести



Усилия в стержнях будут определяться по формулам

 (2.5)

Нагрузка, соответствующая предельному состоянию, называется *предельной.* Ее величину можно найти из уравнения предельного равновесия, которое по­лучается из уравнения (2.1) после подстановки в него значений :





Допускаемая нагрузка с учетом заданного коэффициента запаса



Величина допускаемой нагрузки при расчете по предельной грузо­подъ­ем­ности получается большей, чем при расчете по допускаемым напряжениям:



Разница составляет 34 %, что является результатом разных предположений об опасном состоянии конструкции: при расчете по допускаемым напряжениям опасным считается состояние, при котором только в одном стержне напряжение дос­ти­га­ет предела текучести. Для статически неопределимых систем расчет по пре­дель­ной грузоподъемности дает более экономичное решение при назначении размеров сечения, и им широко пользуются в строительной практике.

**ЗАДАЧА № 3**

К стальному брусу круглого поперечного сечения приложены четыре крутящих момента , три из которых известны.

Требуется:

1) установить, при каком значении момента *Х* угол поворота правого кон­це­вого сечения равен нулю;

2) при найденном значении *Х* построить эпюру крутящих моментов;

3) при заданном значении допускаемого напряжения [τ] определить диа­метр вала из условия его прочности и округлить величину диаметра до бли­жай­шей большей стандартной величины, равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 80, 90, 100 мм;

4) проверить, выполняется ли условие жесткости бруса при выбранном диа­метре, если допускаемый угол закручивания 1 град/м;

5) построить эпюру углов закручивания.

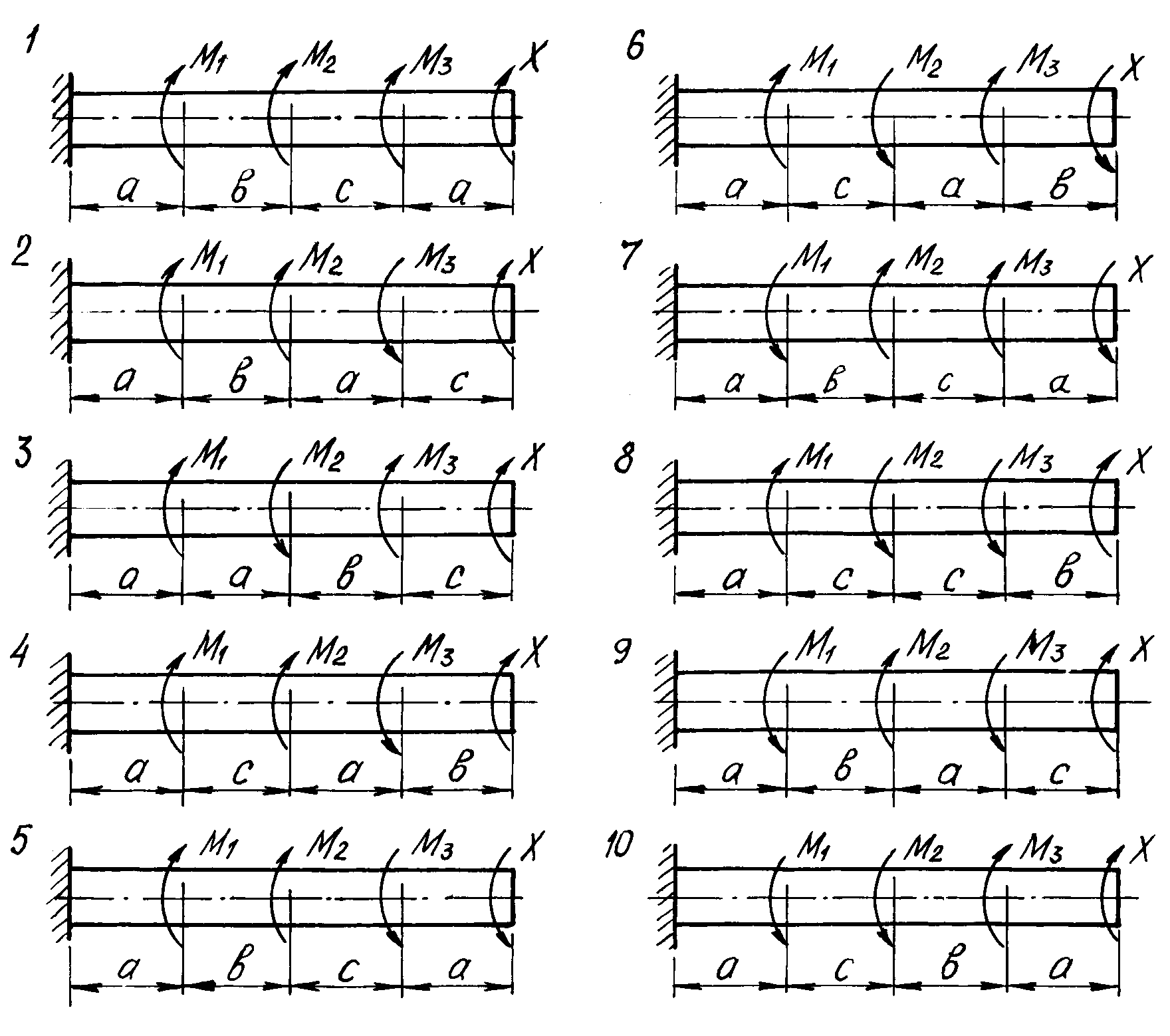
Для всех вариантов принять модуль сдвига для стали 

Числовые данные берутся из табл. 3, расчетные схемы – по рис. 6.

Таблица 3

**Числовые данные к задаче № 3**

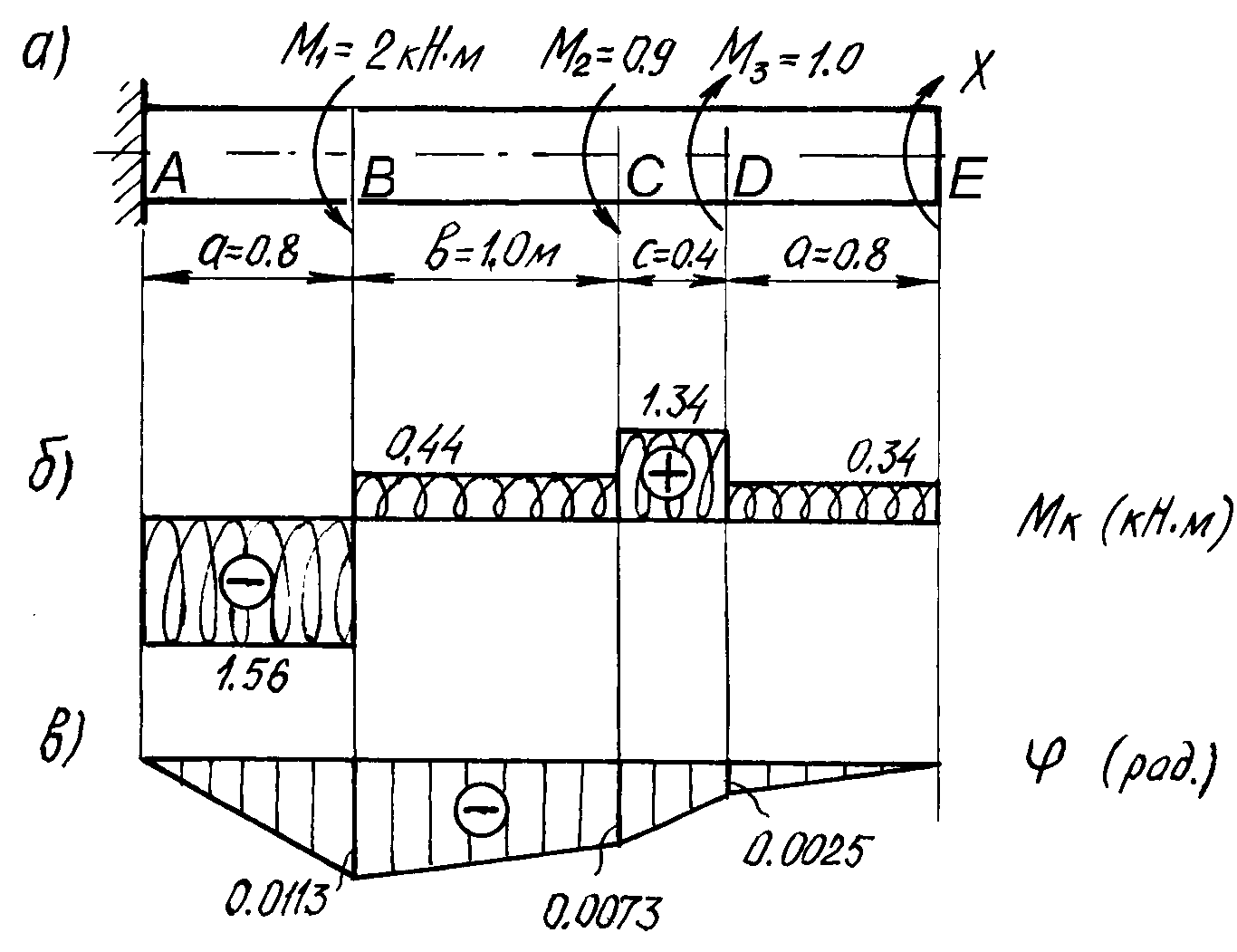
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  расч. схемы  по рис. 6 | Размер, м | | | Момент, кН⋅ м | | | [τ], МПа |
| ***а*** | ***B*** | ***с*** |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0,8 | 0,4 | 1,0 | 2,0 | 1,6 | 1,0 | 35 |
| 2 | 2 | 0,6 | 0,5 | 0,5 | 1,8 | 1,7 | 1,2 | 40 |
| 3 | 3 | 0,4 | 0,7 | 0,7 | 1,7 | 0,9 | 0,7 | 50 |
| 4 | 4 | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 1,5 | 0,8 | 1,5 | 45 |
| 5 | 5 | 0,5 | 0,8 | 0,4 | 1,3 | 2,0 | 1,4 | 60 |
| 6 | 6 | 0,7 | 1,0 | 0,8 | 1,0 | 1,7 | 2,0 | 40 |
| 7 | 7 | 1,0 | 0,7 | 1,0 | 1,6 | 1,5 | 1,6 | 35 |
| 8 | 8 | 0,4 | 0,6 | 0,5 | 1,4 | 1.6 | 1,8 | 70 |
| 9 | 9 | 0,7 | 0,4 | 0,6 | 1,5 | 0,8 | 0,9 | 80 |
| 0 | 10 | 0,5 | 0,5 | 0,4 | 0,9 | 1,0 | 1,5 | 60 |
|  | е | в | г | д | в | г | д | е |



*Рис. 6.* Расчетные схемы к задаче № 3.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3**

Для заданного бруса круглого сечения (рис. 7, *а*) определить величину момента *X*, при котором угол поворота свободного конца бруса равен нулю, построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания, подобрать диаметр сечения по условию прочности и произвести проверку бруса на жесткость.



*Рис. 7.* Брус, работающий на кручение: *а* – расчетная схема;

*б* – эпюра крутящих моментов; *в* – эпюра углов закручивания.

Числовые данные к задаче: *а* = 0,8 м; *в* = 1,0 м; *с* = 0,4 м; *M*1*=*2 кН⋅ м; *M*2 *=* 0,9кН⋅м;  [τ] = 40 МПа; *G =* 8⋅104 МПа*.*

1. *Определение величины неизвестного крутящего момента Х.* Брус жестко заделан левым концом *А*, правый конец *Е* свободный. В сечениях *В, С,* и *D* при­ложены известные крутящие моменты. Для определения неизвестного момента *Х* используем условие равенства нулю угла поворота сечения *Е*.

Угол поворота сечения *Е* относительно сечения *А* определяется как сумма углов закручивания отдельных участков:

 (3.1)

Крутящие моменты , входящие в выражение (3.1), определяются по приведенному выше правилу.

Вычисления начинаем с незакрепленного конца:



 (3.2)

Сок­ра­щая на ** выражения, приводим уравнение (3.1) к виду

.

Подставляя значения *a, b, c* (рис. 7, *а*) и решая это уравнение, получаем *Х* = 0,34 кН⋅м.

*Примечание:* если значение *Х* получится со знаком минус, направление крутящего момента задано неправильно. В данном примере *X* положителен, следовательно, направление крутящего момента, показанное на рис. 7, правильно.

2. *Построение эпюры крутящих моментов.* Найденное значение *Х =* 0,34кН⋅м подставляем в выражения (3.2), вы­числяя таким образом величину крутящего момента на каждом участке:



По найденным значениям  строим эпюру крутящих моментов. Для это­го рассматриваем последовательно участки *ЕD, DC, CB* и *CA*. Крутящие мо­менты, действующие на этих участках, уже вычислены.

Величина крутящего момента на каждом участке не зависит от поло­же­ния се­че­ния в пределах участка (крутящий момент постоянен), поэтому эпю­ра кру­тя­щих моментов ограничена отрезками прямых (рис. 7, *б*). Построенная эпюра позволяет найти опасное сечение, т. е. такое, в котором действует мак­си­маль­ный (по модулю) крутящий момент.

В рассматриваемом примере опасными будут сечения в пределах учас­т­ка *АВ*; расчетное значение крутящего момента



3. *Подбор диаметра поперечного сечения бруса.* Используем условие прочности (3.4)

.

Учитывая, что , выразим диаметр из условия прочности



Подставляя 1,56 кН⋅м и , вычисляем диаметр по­пе­речного сечения, округляя его до стандартной величины:



4. *Проверка условия жесткости*. Условие жесткости записываем в форме:

.

По условию задачи [θ]= 1 град/м. Переводя значение угла из градусной меры в радианную, получаем



Вычисляем выражение, стоящее в левой части условия жесткости, опре­де­лив предварительно величину полярного момента инерции бруса:





Сравнение левой и правой частей условия жесткости показывает, что оно выполняется:



5. Построение эпюры углов закручивания.

Вычисляем углы закручивания по участкам, используя формулу (3.5):









Угол поворота каждого сечения равен сумме углов закручивания соот­ветствующих участков бруса. Суммирование углов начинаем с незакрепленного кон­ца А:

 так как сечение в заделке неподвижно;









По вычисленным углам поворота сечений построена эпюра углов закру­чивания (рис. 7, *в*).

Равенство  является проверкой решения, так как неизвестный крутящий момент *Х* определялся из условия равенства нулю угла поворота свободного конца бруса.

**ЗАДАЧА № 4**

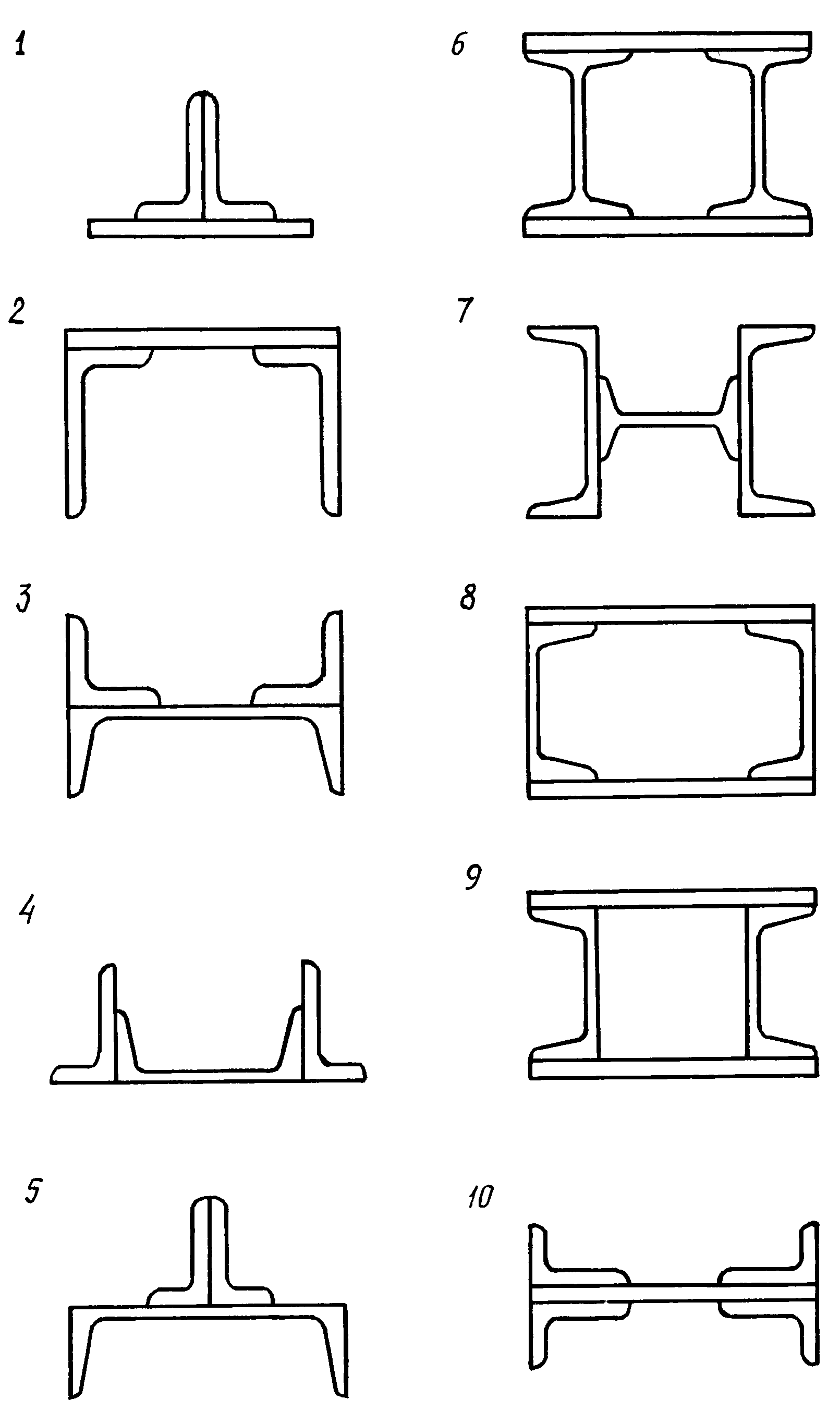
Для двух заданных сечений, состоящих из нескольких элементов или имеющих вырезы, определить положение главных центральных осей инерции и вычислить величины моментов инерции относительно этих осей.

Первое сечение для расчета выбирается по рис. 8, второе – по рис. 9. Размеры элементов сечений и номера прокатных профилей берутся из табл. 4. При расчете сечения, состоящего из прокатных профилей, уголок следует принимать в соответствии с заданными размерами; он может быть равнобоким или неравнобоким.

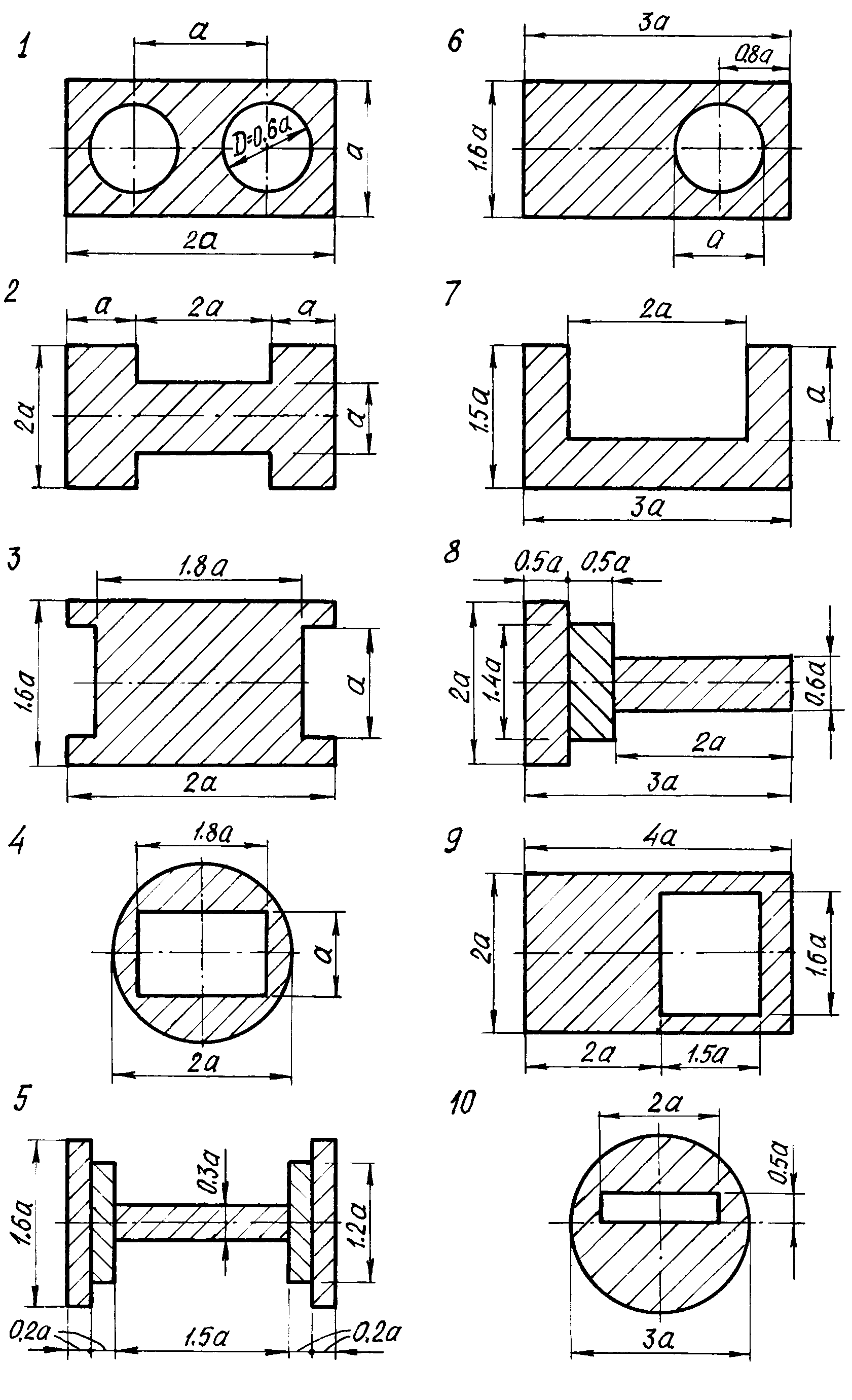
Таблица 4

**Числовые данные к задаче № 4**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  расчет.  схемы  (рис. 8, 9) | Размер | Прокатный профиль | | | |
| *а,* см | полоса | швеллер | двутавр | уголок |
| 1 | 1 | 10 | 160×10 | 10 | 12 | 75×75×8 |
| 2 | 2 | 20 | 180×10 | 12 | 14 | 75×50×6 |
| 3 | 3 | 12 | 180×6 | 14 | 10 | 90×90×6 |
| 4 | 4 | 14 | 200×10 | 14*а* | 16 | 80×50×6 |
| 5 | 5 | 22 | 200×6 | 16 | 12 | 80×80×8 |
| 6 | 6 | 15 | 160×8 | 16*а* | 18 | 70×45×5 |
| 7 | 7 | 18 | 210×8 | 14 | 14 | 75×75×6 |
| 8 | 8 | 16 | 220×10 | 12 | 16 | 80×50×6 |
| 9 | 9 | 20 | 220×8 | 14*а* | 10 | 70×70×6 |
| 0 | 10 | 25 | 180×8 | 10 | 12 | 63×40×6 |
|  | е | в | в | г | д | е |



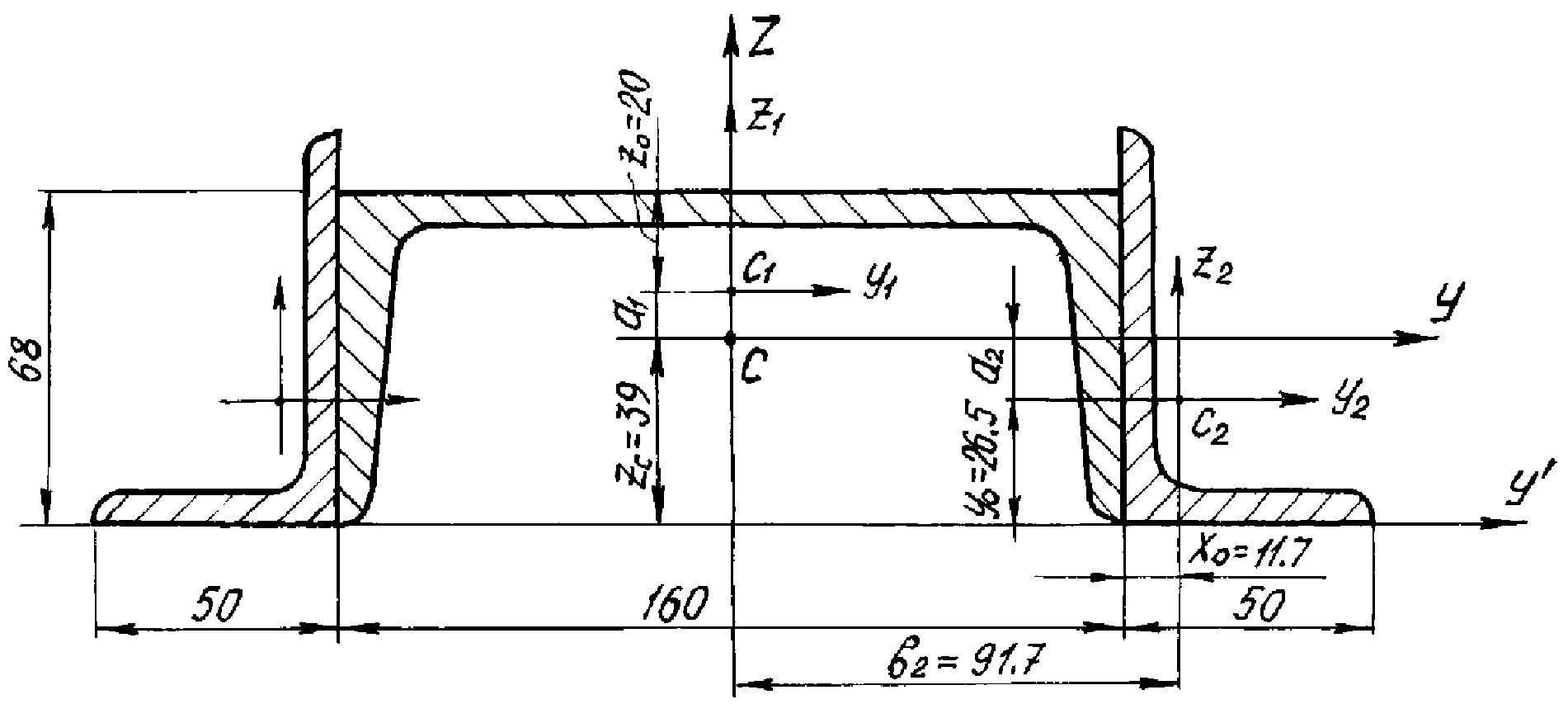
*Рис. 8.* Расчетные схемы к задаче № 4 (для первого сечения).



*Рис. 9.* Расчетные схемы к задаче № 4 (для второго сечения).

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4**

Задано сечение, составленное из прокатных профилей: швеллера № 16 *а* и двух неравнобоких уголков 80×50×6 (рис. 11). Требуется вычислить главные центральные моменты инерции.



I

II

*Рис. 11.* Расчетная схема первого сечения.

1. *Из таблиц сортамента выписываются геометрические характеристики прокатных профилей, составляющих заданное сечение*.

Швеллер № 16 *а*: размеры *h* = 160 мм, *b* = 68 мм, площадь сечения ; осевые моменты инерции  координата центра тяжести .

Неравнобокий уголок : площадь сечения  осевые моменты инерции  координаты центра тяжести .

*Примечание*. Если в состав сечения входит прямоугольник, то для него следует вычислить площадь и осевые моменты инерции



В соответствии с заданным вариантом сечения выполняется чертеж в масштабе 1:2 с указанием характерных размеров.

На чертеж наносятся центры тяжести швеллера и уголка  и проводятся их собственные центральные оси  и  (см. рис. 11).

2. *Определение положения центра тяжести заданного сечения*. Заданное сечение имеет одну ось симметрии, которая является главной цент­ральной осью. Выбираем исходную систему координат: ось абсцисс *y /* совмещаем c нижней границей сечения, а ось ординат *Z* – с осью симметрии. Координаты точек и легко опреде­ляются по чертежу.

Учитывая симметрию сечения, вычисляем ор­ди­нату его центра тяжести по формуле



где *F*1 – площадь швеллера, ,

 – ордината точки , ;

 – площадь одного уголка, 2;

– ордината точки –, .

После подстановки числовых значений получаем



Откладывая найденное значение  на оси *Z* вверх от оси *y/*, находим положение центра тяжести всего сечения *C* и проводим главные центральные оси  *Y , Z.*

*Примечание*. Если фигура имеет две оси симметрии, центр тяжести лежит на их пересечении, то вычислений для определения его положения про­из­во­дить не нужно.

3. *Вычисление главных центральных моментов инерции сечения отно­си­тельно осей Y и Z.* Расстояния между осями определяются по чертежу:





 так как оси *Z* и  совпадают;



Главные центральные моменты инерции составного сечения  и  вычис­ляются по формулам:



После подстановки числовых значений в эти формулы, получаем:

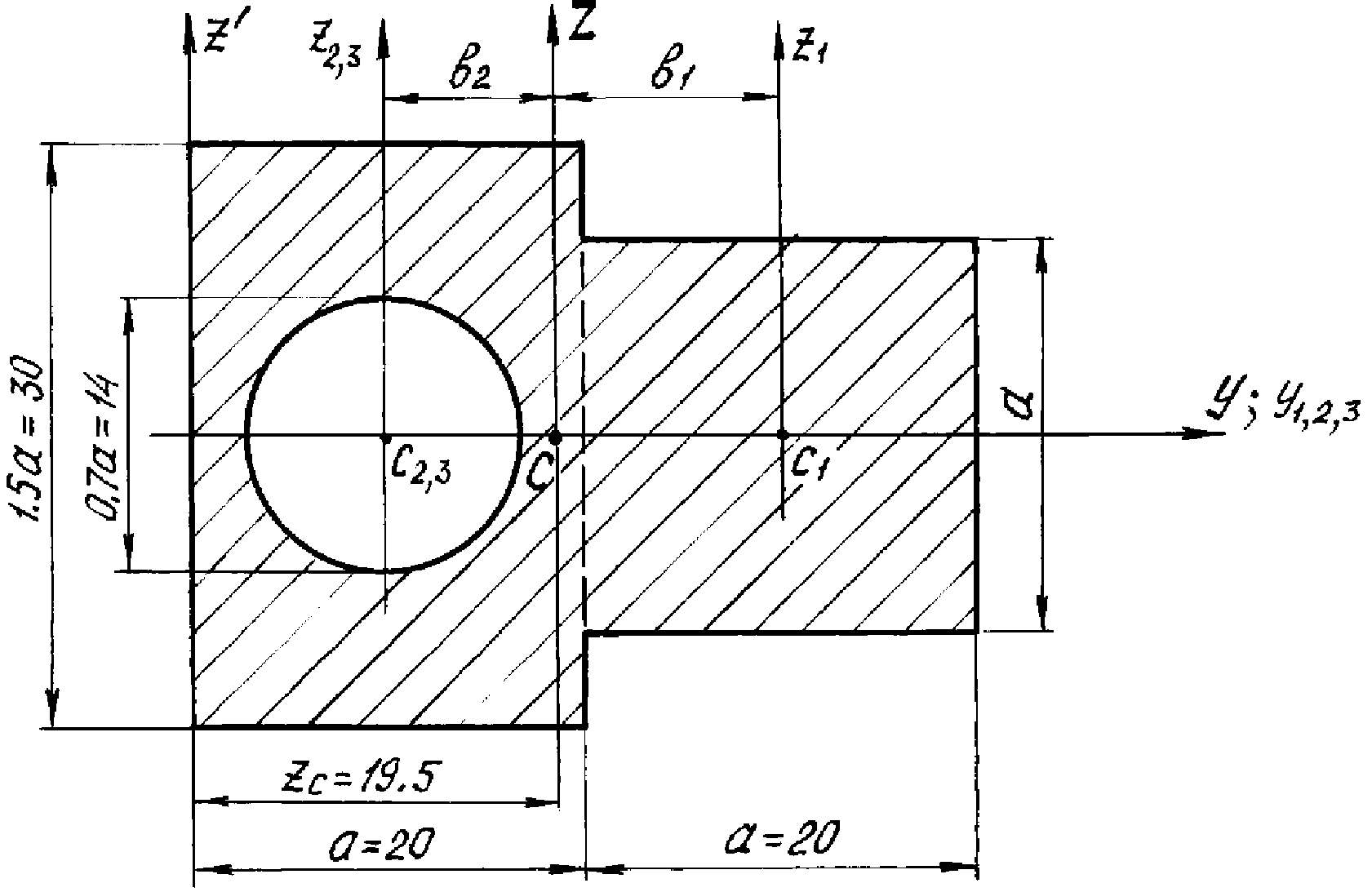




**ВТОРОЙ ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №4**

Задано сечение (рис. 12). Размеры сечения заданы в сантиметрах.

II



III

*Рис. 12.* Расчетная схема второго сечения.

Требуется определить главные центральные моменты инерции этого сечения.

1. *Заданное сечение* вычерчивается в масштабе 1:2 и разбивается на про­стейшие фигуры: квадрат (1), прямоугольник (2) и круговое отверстие (3). На чертеже по­казываются центры тяжести составляющих фигур (точки  и ) и про­водятся их главные центральные оси ;  и  (см. рис. 12). Площади и моменты инерции составляющих фигур отно­сит­ель­но их централь­ных осей вычисляются по известным формулам.

Для квадрата

;



Для прямоугольника







Для круга





2. *Определение положения центра тяжести составного сечения.* Центр тяжести составной фигуры лежит на ее оси симметрии *Y*. Вспо­мо­га­­тельная ось z/ совмещается с левой границей сечения. Коор­дината це­н­тра тя­же­с­ти всего сечения  в системе *Yoz/* определяется по фор­­муле:



По чертежу определяются абсциссы точек  и :





Площадь круга подставляется в формулу (4.2) со знаком минус, так как площадь отверстия принято считать отрицательной величиной.

Подставляя числовые значения, получаем



Откладывая на оси *Y* отрезок *ОС* = 19,5 см, находим точку *С* – центр тя­жес­ти составного сечения и проводим главную центральную ось *Z*, парал­лельную оси z / (см. рис. 12).

3. Вычисление моментов инерции относительно главных центральных осей *Y*, *Z*.

Используем формулы, как и в предыдущем примере. Перед послед­ним слагаемым в скобках ставится знак минус, так как моменты инерции отвер­стия считаются отрицательными:



Моменты инерции составляющих фигур относительно собственных гла­в­­ных центральных осей вычислены ранее. Оси  и  совпадают с гла­в­ной центральной осью *Y* всей фигуры, поэтому расстояния между эти­ми ося­ми и осью *Y* равны нулю:



По чертежу находим расстояние между осями *Z*  и 

 см.

и расстояние между осями *Z* и 

 см*.*

Определяем моменты инерции.

Подставляя числовые значения, вычисляем главные центральные моменты инерции составного сечения:





**ЗАДАЧА № 5**

Для заданных схем балок требуется:

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;

подобрать поперечные сечения балок по следующим вариантам:

а) для стальной балки (рис. 13, *а*) – двутавровое; прямоугольное высотой *h* и основанием *b* при соотношении сторон *h/b* = 2; круглое – диаметром *d*;

б) для чугунной балки (рис. 13, *б*) – форму сечения выбрать по рис. 14, определить размеры сечения из условия прочности по допускаемым напряжениям;

в) для стальной балки (рис. 13, *в*) – сечение, состоящее из двух швеллеров.

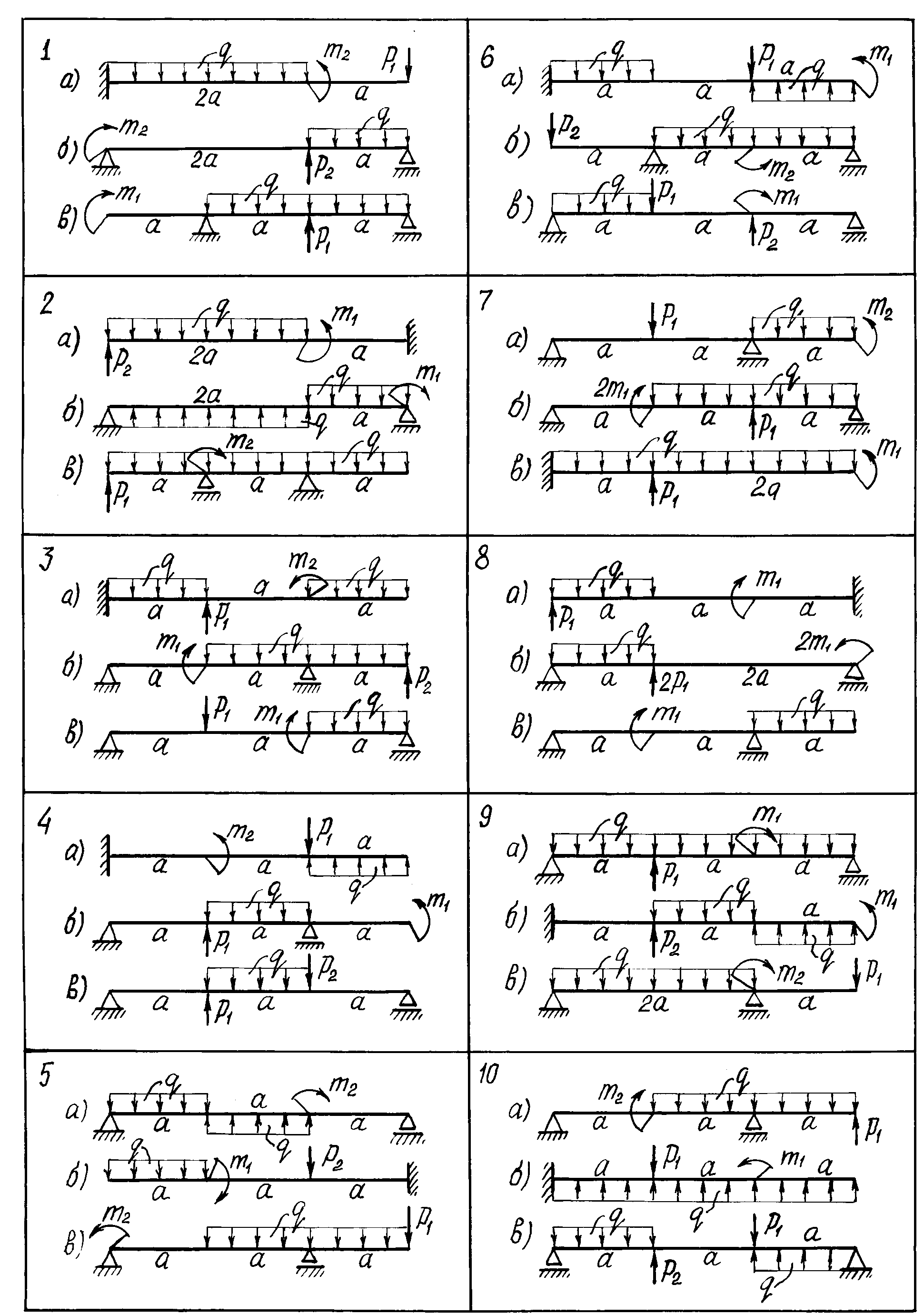
Для стальной двутавровой балки (вариант а) и чугунной балки (вариант б) пос­троить эпюры распределения нормальных напряжений по высоте сечения.

Числовые данные берут из табл. 5, расчетные схемы находим по рис. 13.

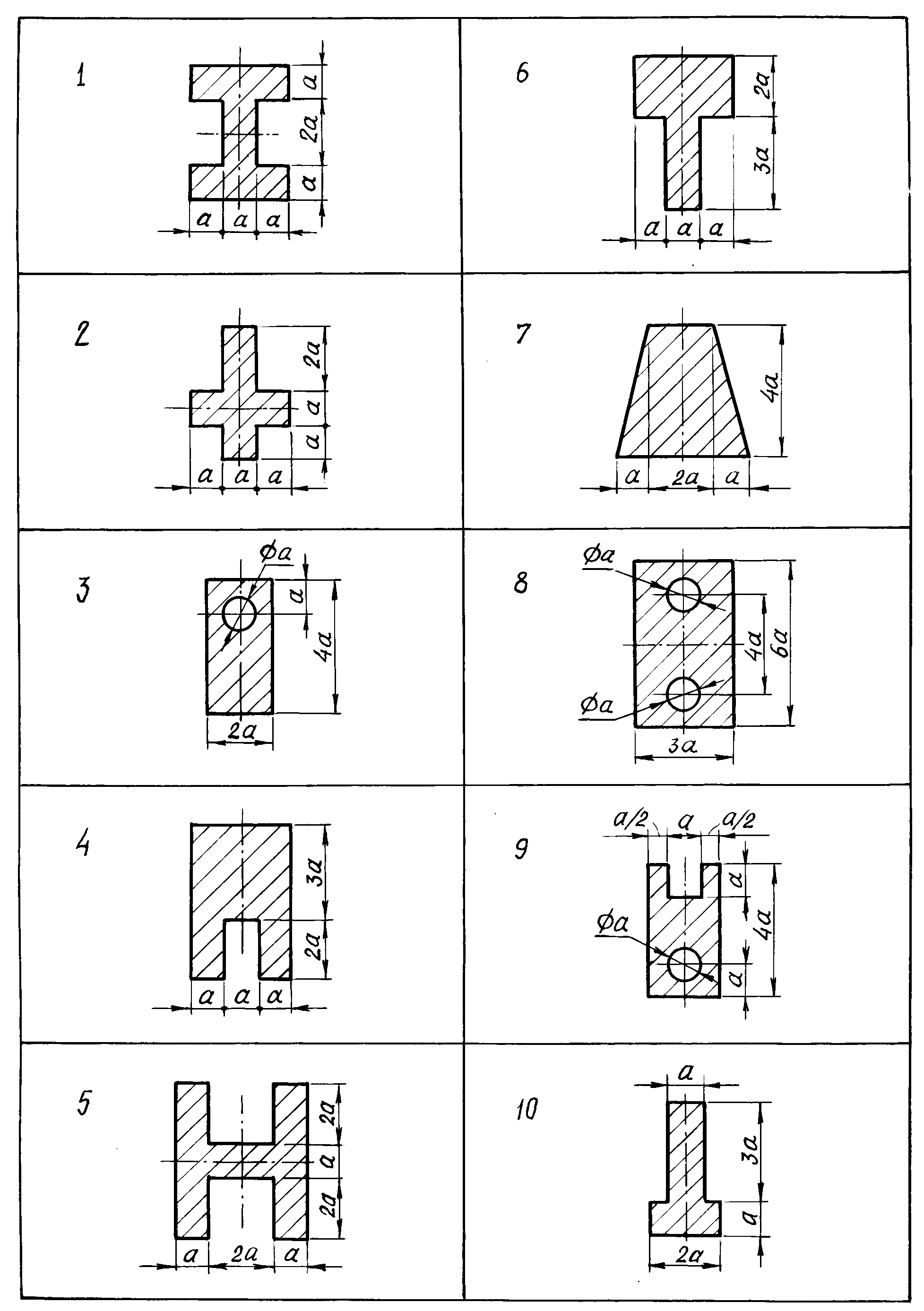
Таблица 5

**Числовые данные к задаче № 5**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  расч.  схемы  (рис. 13,14) | Сила | | Момент | | Длина  участка | Интенсивность  распределенной  нагрузки *q*,  кН/м | Допускаемое  напряжение,  , МПа | | |
| *P*1  кН | *P*2  кН | *m*1  кН⋅м | *m*2  кН⋅м | *а,*  м | Сталь | Чугун | |
|  |  |
| 1 | 1 | 40 | 90 | 10 | 10 | 1 | 10 | 200 | 600 | 120 |
| 2 | 2 | 45 | 80 | 12 | 10 | 1,5 | 15 | 160 | 700 | 150 |
| 3 | 3 | 50 | 85 | 15 | 14 | 2 | 20 | 180 | 500 | 100 |
| 4 | 4 | 35 | 70 | 12 | 12 | 1 | 10 | 250 | 800 | 150 |
| 5 | 5 | 50 | 80 | 10 | 15 | 2 | 10 | 160 | 600 | 120 |
| 6 | 6 | 60 | 70 | 10 | 12 | 1 | 15 | 180 | 700 | 150 |
| 7 | 7 | 45 | 60 | 12 | 10 | 1,5 | 20 | 180 | 500 | 100 |
| 8 | 8 | 35 | 65 | 10 | 10 | 1 | 10 | 160 | 800 | 150 |
| 9 | 9 | 40 | 75 | 13 | 10 | 1 | 10 | 160 | 650 | 130 |
| 0 | 10 | 30 | 90 | 18 | 12 | 2 | 15 | 220 | 750 | 200 |
|  | е | в | г | д | е | г | д | е | в | г |

****

*Рис. 13.* Расчетные схемы балок к задаче № 5.

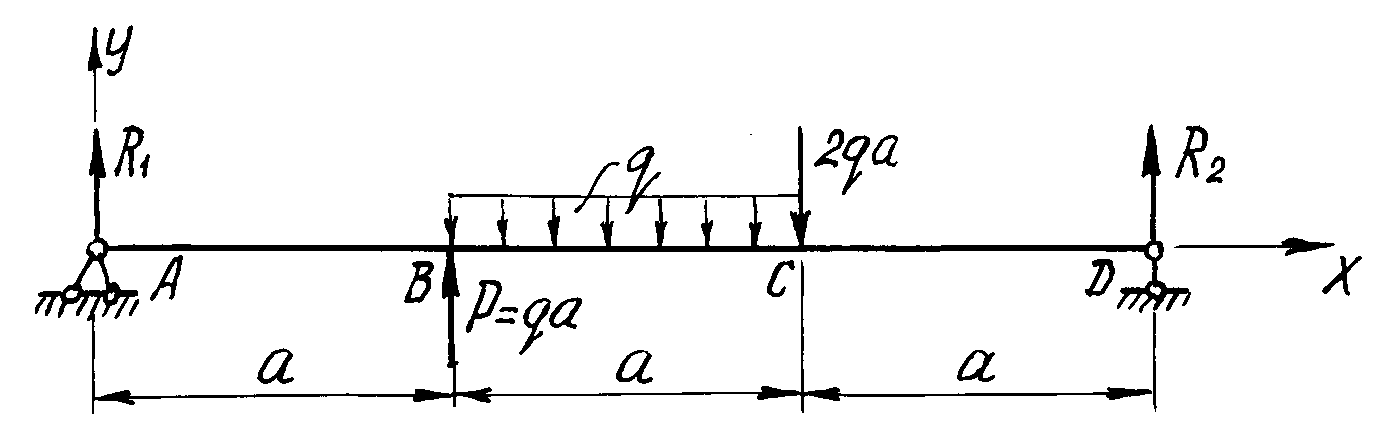


*Рис. 14.* Формы сечений чугунных балок к задаче № 5.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 5**

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать раз­меры поперечного сечения стальной балки (рис. 17) для различных форм сечения: двутавровой балки, балки прямоугольного сечения со сторонами *h* и *b* при *h/b* = 2 и круглого поперечного сечения. Балка выполнена из ста­ли с допускаемым напряжением [σ] = 190МПа;

*а* = 1 м*; q* = 10кН/м*.*



=1.5qa

**=**0.5qa

H

*Рис. 17.* Расчетная схема балки.

1. *Определение опорных реакций.*

На схеме показываем опорные реакции *R*1, *H*, *R*2. Вертикальные реакции направляем вверх и записываем уравнения равновесия:



Проверим правильность вычислений, составив еще одно уравнение равновесия:

**

Условие равновесия удовлетворяется, реакции определены правильно.

2. *Построение эпюры Q.*

Мысленно разбиваем балку на участки. Границами участков являются сечения, в которых к балке приложены сосредоточенные силы или пары сил, начинаются или заканчиваются распределенные нагрузки, имеются промежуточные шарниры. В рассматриваемой балке граничными сече­ниями будут сечения *A, B, C* и *D*. Для каждого из трех участков запишем аналитическое выражение *Q(x).*

**Участок *AB*,** *0<x<a*.Рассмотрим произвольно выбранное сечение с абсциссой *x.* Рассекая балку в этом сечении на две части и отбросив правую часть, вычисляем алгебраическую сумму проекций на ось *y* всех сил, действующих на оставшуюся часть:

**

Поперечная сила не зависит от переменной *x* на протяжении всего участка, следовательно, эпюра *Q* ограничена прямой, параллельной оси абсцисс. Отло­жив от оси эпюры вверх в выбранном масштабе *0,5qa* (рис. 18), строим эпю­ру на этом участке.

**Участок *BC*,** *a<x*<2*a*.Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось *y* слева от сечения с абсциссой *x*

**.

Полученное выражение является уравнением наклонной прямой, которая может быть построена по двум лежащим на ней точкам. Для ее построения най­дем значения поперечной силы на границах участков балки



Участок *CD,* 2*a*<*x*<3*a*. Поперечная сила на расстоянии *x* от начала координат



Так как поперечная сила не зависит от переменной *x*, на последнем участке эпюра *Q* ограничена прямой, параллельной оси бал­ки (см. рис 18).

3. *Построение эпюры M*z.

Аналитическое выражение для вычисления изгибающего момента в сечении *x* необходимо записать для каждого участка балки.

***Участок AB*:**

**.

На этом участке балки изгибающий момент возрастает по линейному закону и эпюра *M*z ограничена наклонной прямой. Вычисляя его значения в сечениях на границах участка, строим в масштабе (рис. 18) эпю­ру *M*z на сжатом во­ло­кне



**Участок *BC*:**



Полученное уравнение является уравнением квадратной параболы и, поскольку поперечная сила *Q* на участке *BC* не изменяет знак, экстремума на эпюре *M*z не будет.

Определим изгибающий момент на границах участка:





Отложив вверх от оси балки найденные значения, проводим квадрат­ную па­­­­ра­­болу выпуклостью вверх (навстречу вектору усилия равномерно распределенной нагрузки).

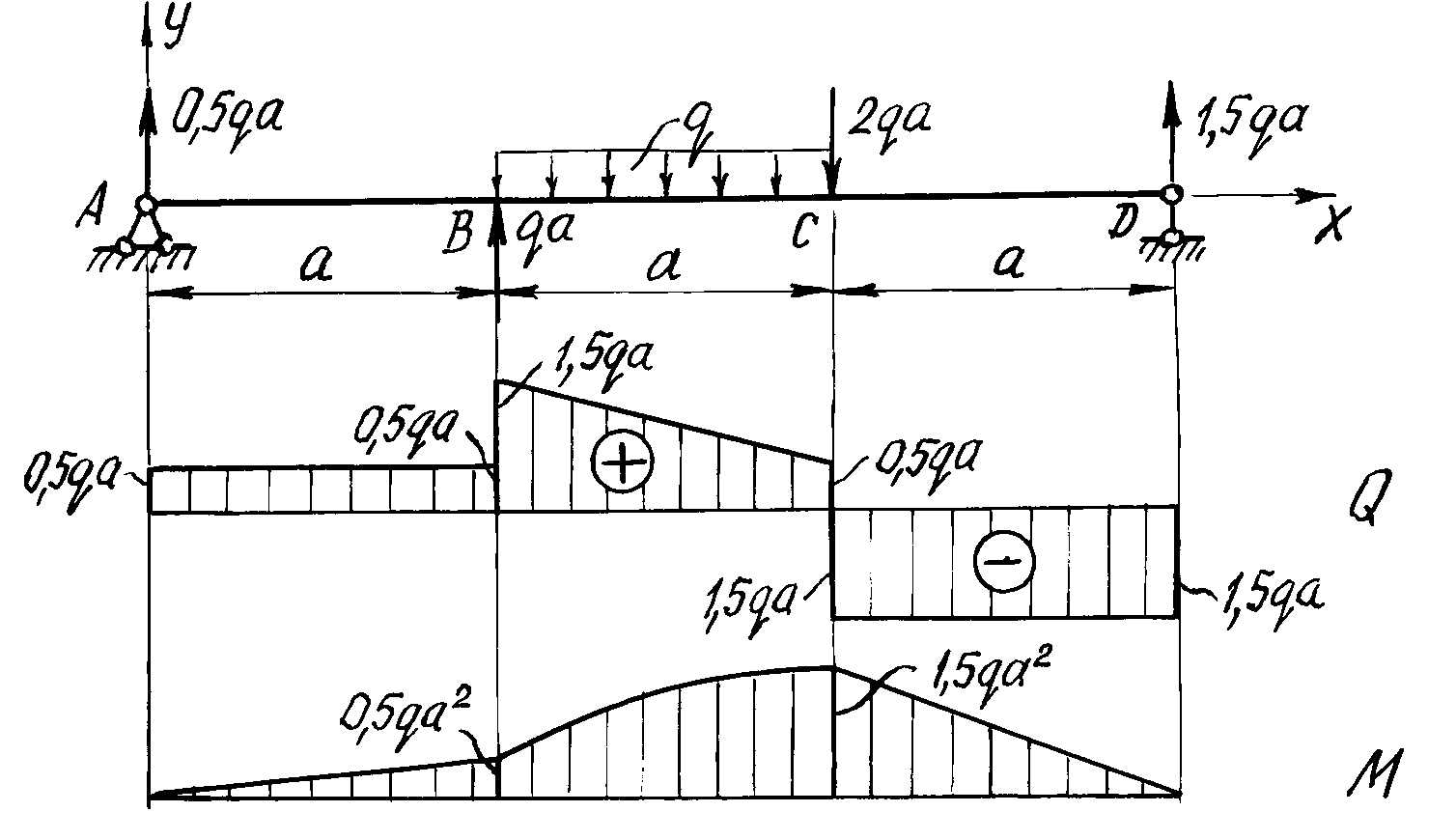
**Участок *CD*:**

.

В пределах последнего участка балки *(*2*a<x<*3*a)*  изгибающий момент линейно зависит от абсциссы *x*, и эпюра ограничена прямой линией.

При при 

Эпюры *Q* и *M*z показаны на рис. 18.



*z*

*Рис. 18.* Расчетная схема балки. Эпюры поперечных сил

и изгибающих моментов.

По эпюре *M*z находим опасное сечение балки – сечение, в котором изгибающий момент максимален по абсолютной величине. Для заданной балки изгибающий момент в опасном сечении ** = *M*z*(2a)=1,5qa2* или после подстановки числовых значений **15кН⋅м.

Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления сечения



Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления *W*z, используя таблицы сортамента прокатной стали.

*Внимание!* В таблицах сортамента прокатной стали (см. приложение) оси *z* соответствует ось *x* , это означает, что .

Наиболее близок к требуемому момент сопротивления двутавра № 14, равный *W*x=81,7см3. Выбрав это сечение, определяем нормальные напряжения в поперечном сечении балки:



Подбираем прямоугольное сечение, момент сопротивления которого определяется с учетом того, что :



Отсюда



Круглое поперечное сечение имеет момент сопротивления



Диаметр круга



Рассмотрим *второй метод построения эпюр* внутренних усилий, действующих в сечениях балки. Он состоит в том, что поперечные силы и изгибающие моменты вычисляются на границах участков без записи уравнений, а соответствующие эпюры строятся на основании дифференциальных зависимостей между *Q*, *M*, *q*:

. (5.3)

Зависимости (5.3) позволяют установить следующие характерные особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1) На участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра *Q* ограничена прямыми, параллельными оси балки, а эпюра *M* – наклонными прямыми.

2) На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью *q*, эпюра *Q* ограничена наклонными прямыми, а эпюра *M* – квадратными параболами, выпуклость которых направлена навстречу вектору равномерно распределенной нагрузки.

3) На участках, где *Q >*0*,* изгибающий момент возрастает; если *Q<*0 – изгибающий момент убывает.

4) В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре *Q* будут скачки на величину приложенных сил, а на эпюре *M* – переломы, острие которых направлено против действия этих сил.

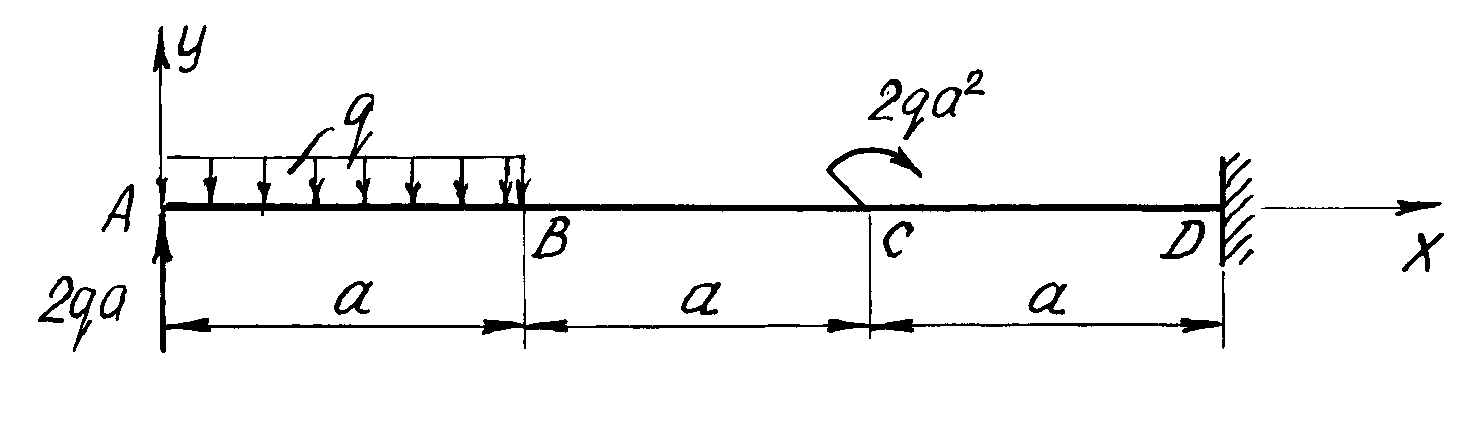
5) В сечениях, где к балке приложены пары сил (сосредоточенные моменты), на эпюре *M* будут скачки на величину этих моментов.

6) Если на участке балки имеется равномерно распределенная нагрузка и эпюра *Q* в пределах участка изменяет знак, то в сечении, где *Q =* 0, на эпюре *M*z будет экстремум.

Примеры использования дифференциальных зависимостей при расчете балок приводятся ниже.

*Рассмотрим задачу подбора сечения балки, изготовленной из хрупкого материала. Балка (рис. 19) изготавливается из чугуна и имеет сечение, показанное на рис. 21.*

Требуется определить из расчета на прочность по допускаемым напряжениям размеры поперечного сечения, если материал балки – чугун с допускаемым напряжением на сжатие [σ]сж *=* 700МПа и на растяжение[σ]р *=* 140МПа*;* 1м*; * 10кН/м*.*



*Рис. 19.* Расчетная схема чугунной балки.

Для нахождения опасного сечения строим эпюры *M* и *Q*. Очевидно, что дан­ная балка имеет три участка:

*AB* (*0*)*, BC* (*a*)*, CD* (*2a*)*.*

Для того чтобы не вычислять опорные реакции, рассмотрим балку, начиная с участка *AB*. Найдем поперечную силу и изгибающий момент в начале этого участка. Мысленно рассечем балку в сечении *A* на две части и отбросим правую ее часть. Слева на оставшуюся часть действует только сосредоточенная сила, равная *2qa.* Проектируя эту силу на нормаль к оси балки, получаем

*Q*(0) *= 2qa.*

Рассекая балку в сечении B и поступая аналогично, находим величину поперечной силы в этом сечении – она равна алгебраической сумме про­екций сил, действующих на оставшуюся левую часть балки, на нормаль к ее оси:

*Q*(*a*) *= 2qa – qa qa,*

где *2qa* – проекция сосредоточенной силы на нормаль к оси балки;

*qa* – проекция равнодействующей распределенной нагрузки.

Изгибающий момент в начале первого участкаM (0) *=* 0; в конце участ­ка он равен алгебраической сумме моментов относительно точки *B* от сосредоточенной си­лы *2qa* и распределенной нагрузки:

.

Строим эпюры *Q* и *M*z для первого участка балки.

Выбрав масштаб, откладываем вверх от оси эпюр (*Q* и *M*z положительны!) найденные значения поперечных сил и изгибающих моментов. На эпюре *Q* соединяем прямой линией точки с координатами (0*, 2qa*) и (*a, qa),* а на эпюре *M*z проводим квадратную параболу выпуклостью вверх через точки (0, 0) и(*a, 1,5 qa2*)*.*

Поступая аналогично, вычисляем поперечные силы и изгибающие моменты в начале и конце участков *BC* и *CD*.

**Участок *BC*:** **;

*Q* (*a*) * qa*, *Q* (*2a*)*qa*;

*M* (*a*)1,5 *qa2*, *M* (*2a*)2,5 *qa2.*

Отложив вверх вычисленные значения *Q* и *M*, строим эпюры внутренних усилий на втором участке балки. Как следует из дифференциальных зависимостей, эти эпюры ог­ра­ничены прямыми линиями.

**Участок *CD*:** **;

*Q* (*2a*)*qa, Q* (*3a*)*qa*;

*M* (*2a*) =4,5 *qa2*, *M* (*3a*)*=*5,5 *qa2.*

В начале последнего участка к балке приложена пара сил, что вызывает появление скачка на эпюре изгибающих моментов. На участке *CD* распределенной нагрузки нет, поэтому эпюры *Q*, *M*z ограничены прямыми линиями (рис. 20).

Окончательный вид эпюр *Q, M*z  показан на том же рисунке.

Опасное сечение находится в заделке и расчетный изгибающий момент *=* 5,5*qa2 =* Н⋅м *=* Н⋅м = 55 кН⋅м.

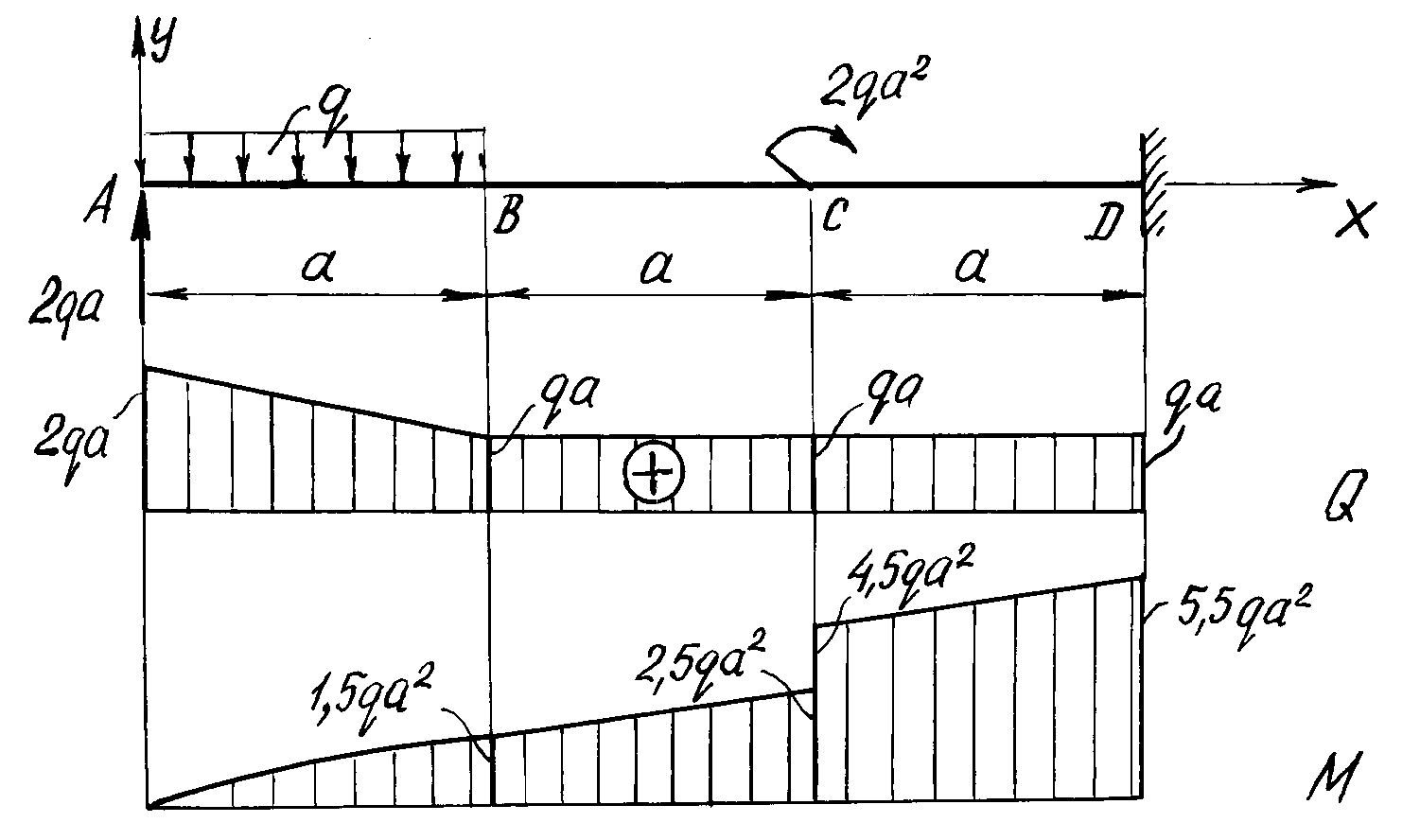
Для определения размеров поперечного сечения необходимо найти из условия прочности балки осевой момент сопротивления относительно его нейтральной оси.

Заданное сечение (рис. 21) имеет ось симметрии, и для определения положения его центра тяжести достаточно вычислить только одну его координату- ординату *у*с.

Разобьем заданную фигуру на две простые части: прямоугольник (1) и полукруг (2). В качестве исходных осей принимаем главные центральные оси прямоугольника *y*1, *z*1*.* Тогда ордината центра тяжести всей фигуры определится по формуле



Определив положение центра тяжести, проводим главные центральные оси  составной фигуры.



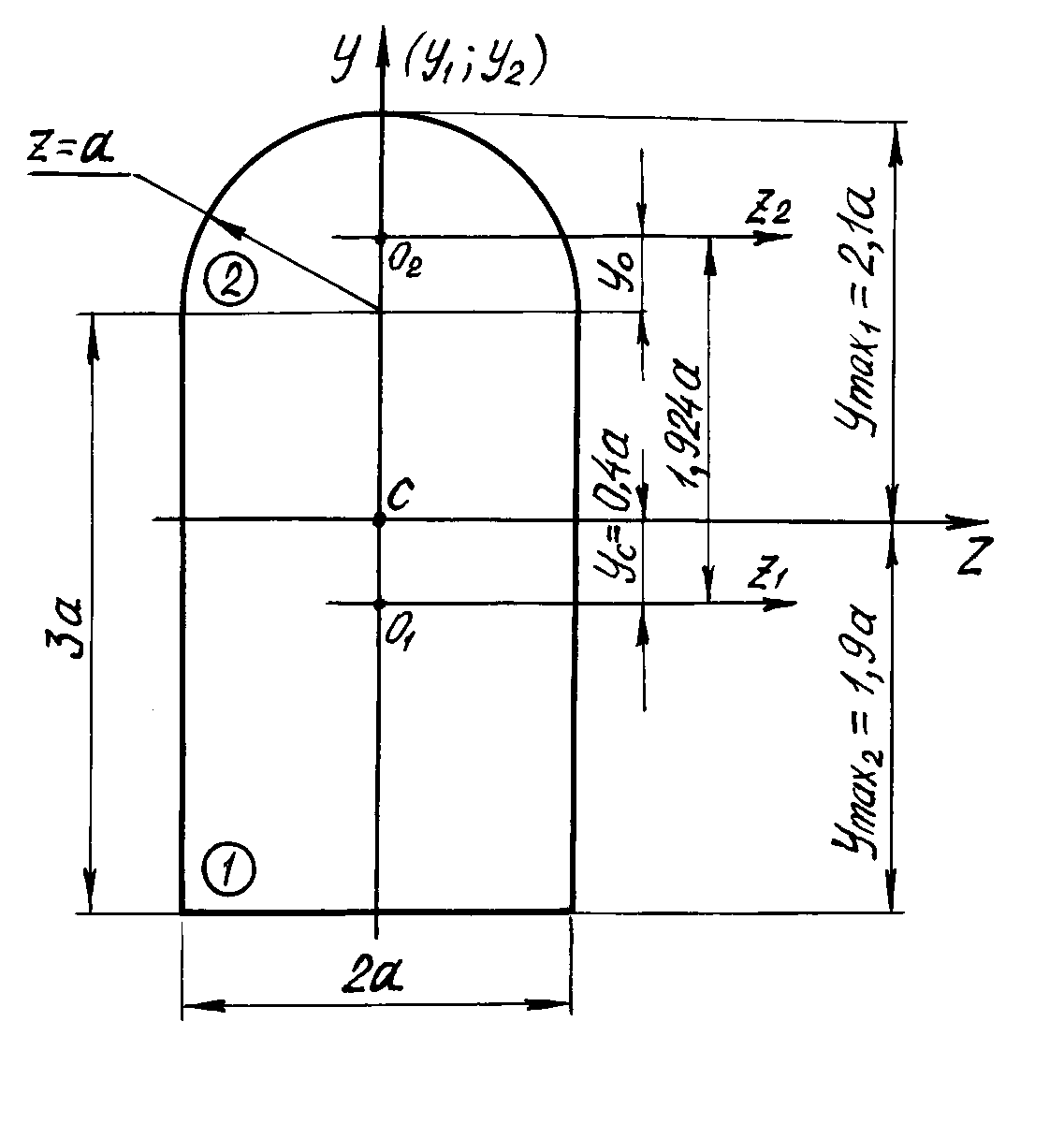
а)

б)

с)

*Рис. 20.* Расчетная схема балки. Эпюры поперечных сил

и изгибающих моментов.



*Рис. 21.* Поперечное сечение чугунной балки.

Вычисляем момент инерции заданного сечения относительно главной центральной оси *Z (При рассмотрении полукруга, главная центральная ось инерции которого z*2, *использованы приближенные значения )*:



При расчете на прочность балок, изготовленных из хрупких материалов, для сечений с одной осью симметрии необходимо вычислять два момента сопротивления относительно оси *Z*:



Из эпюры изгибающих моментов (рис. 20), построенной на сжатом волокне, следует, что в опасном сечении верхние волокна балки сжаты, а ниж­ние растянуты. Условие прочности для опасных точек в растянутой зоне сечения имеет вид



Отсюда *a =* 0,043м *=* 4,3 см*.*

Опасной точкой в сжатой зоне является точка, наиболее удаленная от оси *z* на расстояние. Условие прочности балки по допускаемым напряжениям на сжатие

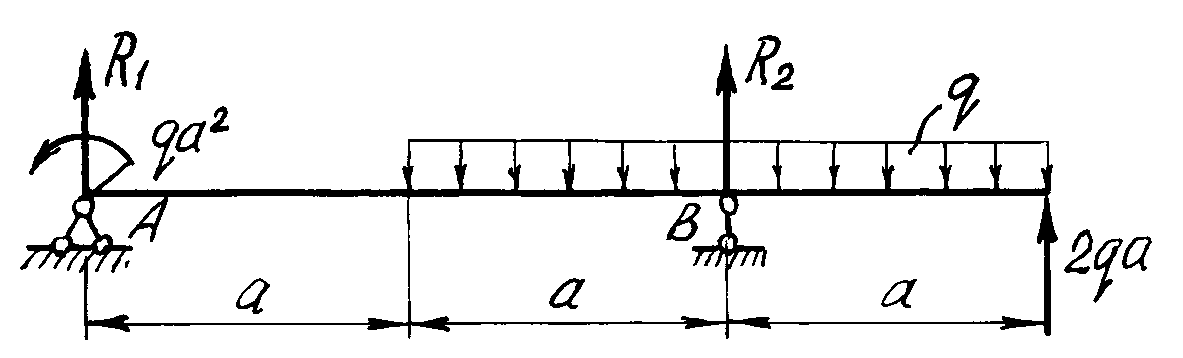


Отсюда *a* = 0,026м *=* 2,6см*.*

В расчете по нормальным напряжениям из двух найденных значений *a* принимаем большее (*a =* 4,3см), что обеспечивает прочность материала балки как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Рассмотрим пример подбора составного сечения стальной балки.

Для балки (рис. 22) подобрать сечение, состоящие из двух стальных швеллеров. Принять *а* = 1 м; *q* = 10кН/м;[σ] = 190МПа*.*

**

*Рис. 22.* Расчетная схема балки.

Определяем опорные реакции:





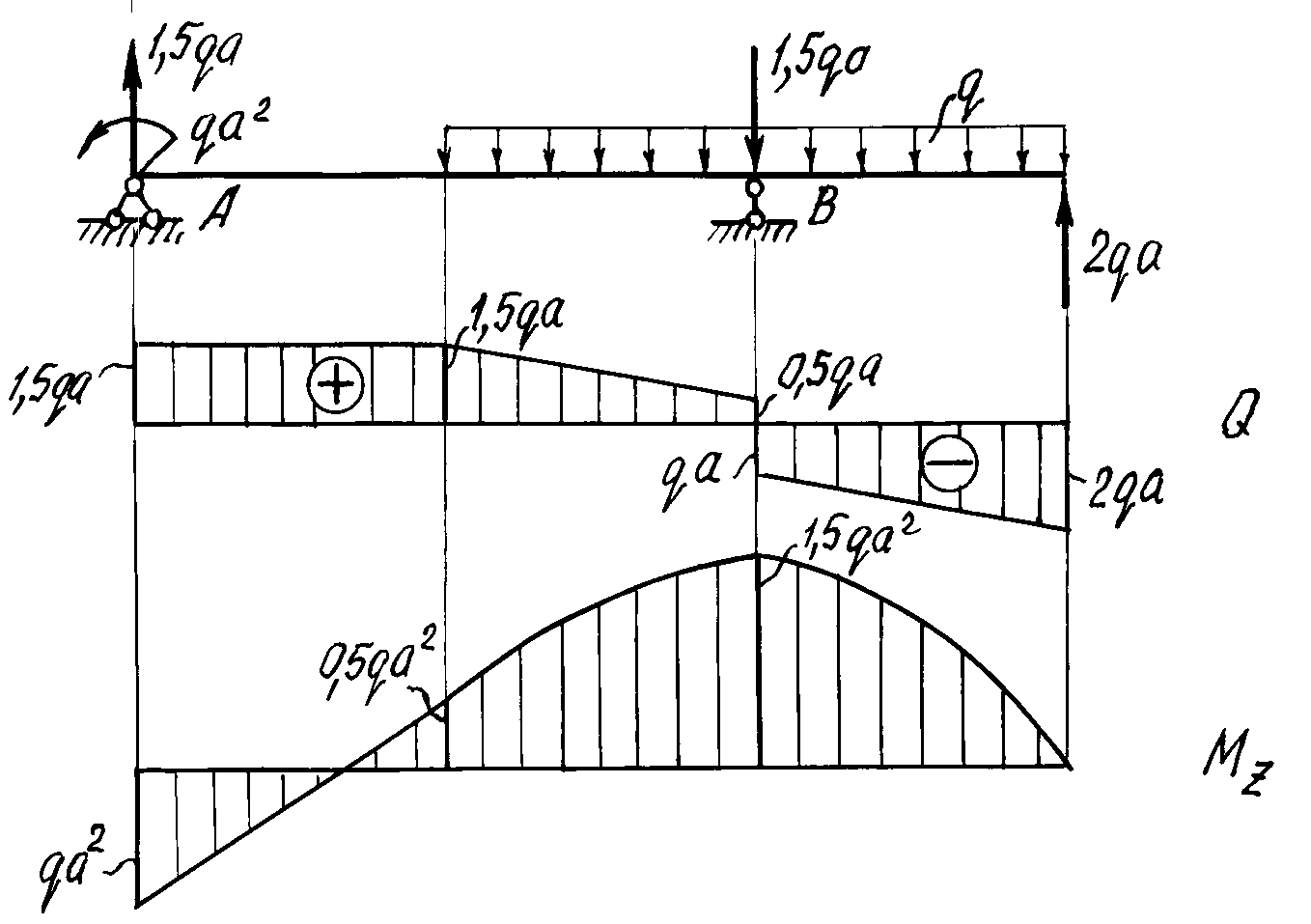
Отметим, что момент распределенной нагрузки относительно опоры *B* равен нулю, а реакция второй опоры направлена не вверх, как показано на рис. 22, а вниз.

Проверка правильности вычисления опорных реакций:



Реакции определены правильно.

Эпюры *Q*, *M*z строятся аналогично эпюрам предыдущего примера. Вид эпюр показан на рис. 23.



*Рис. 23.* Расчетная схема балки. Эпюры поперечных сил

и изгибающих моментов.

По эпюре *М*zнаходим величину изгибающего мо­мента, максимального по модулю



Сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе. Требуемый момент сопротивления сечения, состоящего из двух швеллеров



Осевой момент сопротивления одного швеллера будет в два раза мень­ше – 

По таблице сортамента прокатной стали находим, что ближайший подходящий момент сопротивления имеет швеллер № 12, для которого *W*x*=* 50,6см*3*. Швеллер № 10 с осевым моментом сопротивления принять нельзя, так как в этом случае момент со­про­тивления сечения, составленного из двух швеллеров, будет равен 69,6 см3 < 79 см3 и напряжения в балке превысят допускаемые на 13 %, что неприемлемо (в ра­счетах допускается перенапряжение ≤ 5 %) .

Рассмотрим пример решения второй части задачи № 5.

Построим эпюры распределения нормальных напряжений по высоте сечения для двух балок – двутавровой стальной и чугунной.

Нормальные напряжения в поперечном сечении балок при изгибе определяются по формуле (5.1).

По ширине сечения нормальные напряжения распределяются рав­но­мерно. Зав­исимость между σ и *у* линейная, нормальные напряжения прямо пропорциональны рас­стоянию слоя волокон от нейтральной оси, совпадающей с главной центральной осью инерции *Z*.

Вычислим максимальные нормальные напряжения в двутавровом сече­нии балки



Минимальные (сжимающие) напряжения в двутавровом сечении по абсолютной величине будут равны максимальным растягивающим напряжениям.

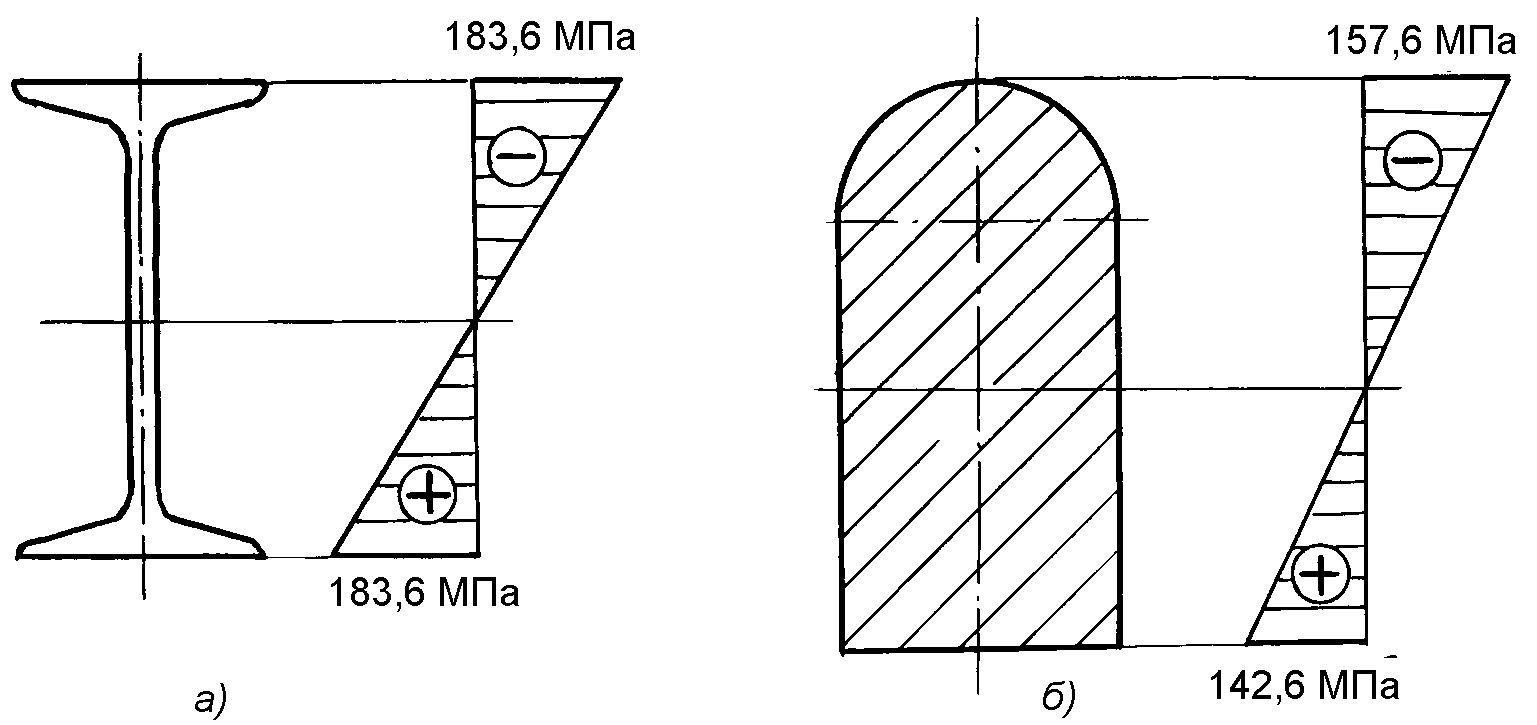
Для чугунной балки величина максимальных (растягивающих) напряжений



Минимальные (сжимающие) напряжения



Выбрав масштаб, строим эпюры распределения нормальных напряжений по высоте стальной (рис. 24, *а*) и чугунной (рис. 24, *б*) балок.



*Рис. 24.* Распределение нормальных напряжений по высоте балок.

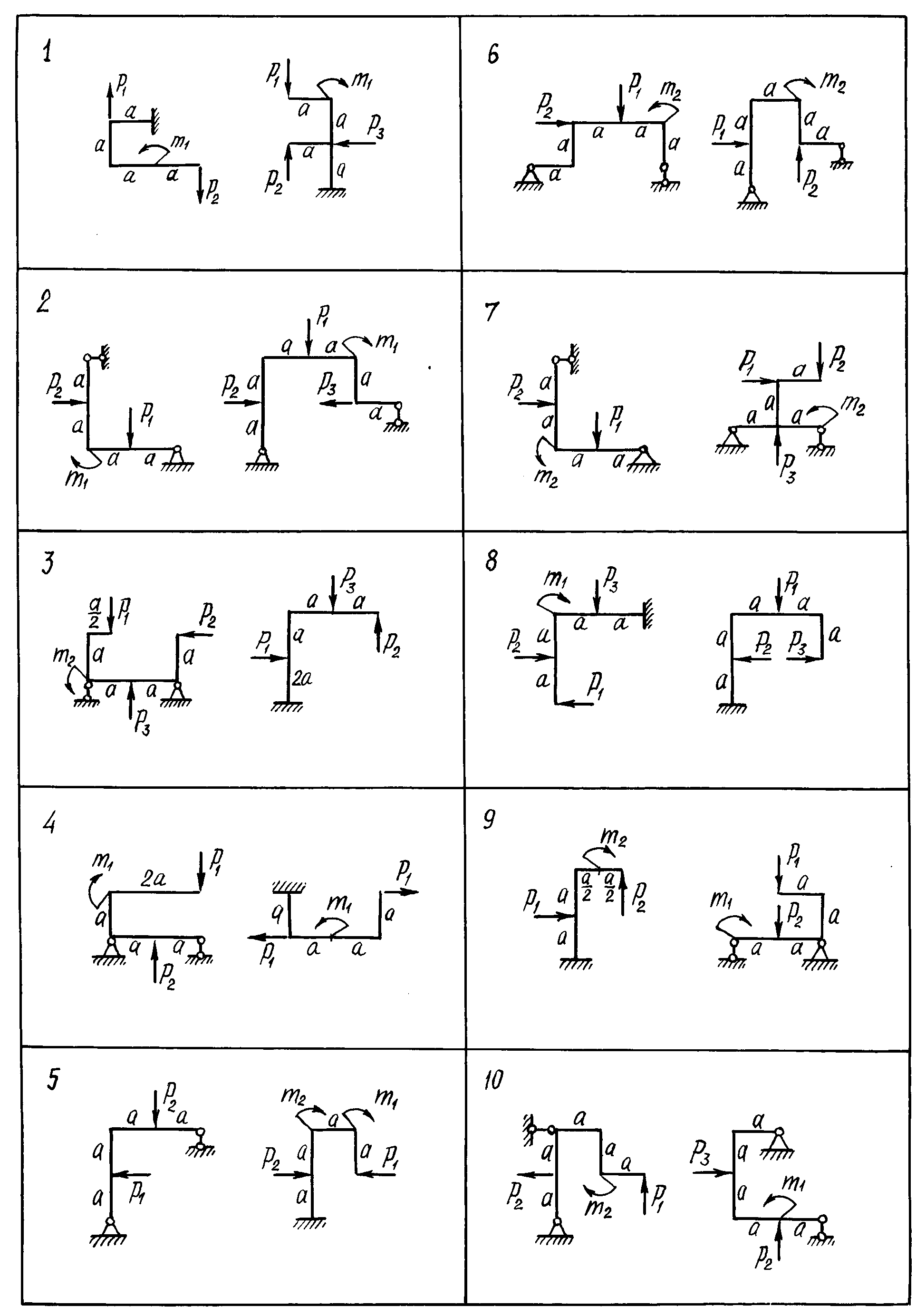
**ЗАДАЧА № 6**

Для двух заданных плоских рам построить эпюры изгибающих моментов. Схемы рам и числовые данные для решения задачи выбираются из табл. 6 и по рис. 25.

Таблица 6

**Числовые данные к задаче № 6**

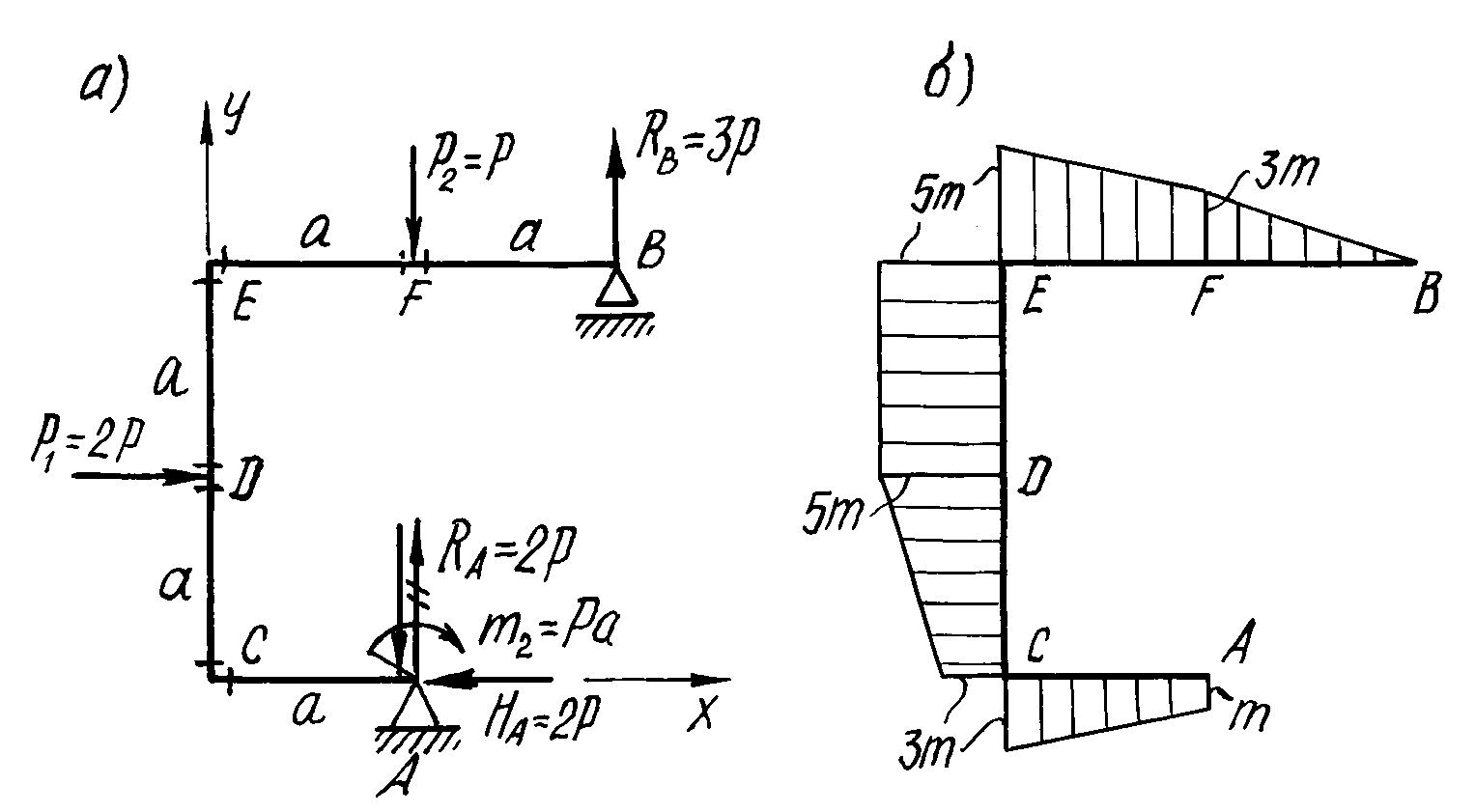
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер  расч.  схемы | Сила, кН | | | Момент, кН⋅м | | Размер  *а,* м |
|  | (рис. 25) |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 10 | 12 | 6 | 4 | 6 | 2 |
| 2 | 2 | 8 | 4 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 4 | 2 | 6 | 4 | 2 |
| 4 | 4 | 10 | 6 | 4 | 2 | 8 | 2 |
| 5 | 5 | 6 | 4 | 4 | 4 | 6 | 2 |
| 6 | 6 | 8 | 6 | 6 | 6 | 4 | 1 |
| 7 | 7 | 2 | 2 | 6 | 5 | 2 | 2 |
| 8 | 8 | 2 | 5 | 4 | 2 | 8 | 2 |
| 9 | 9 | 5 | 10 | 2 | 4 | 4 | 2 |
| 0 | 10 | 2 | 4 | 4 | 5 | 4 | 1 |
|  | е | в | г | д | в | г | д |



*Рис. 25.* Расчетные схемы рам к задаче № 6.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 6**

Для заданной рамы (рис. 26, *a*) построить эпюру изгибающих моментов при следующих исходных данных: *P*1*=* 2*P*, *P*2 *= P*, *M*2*= Pa*.



*Рис. 26* Расчетная схема рамы и эпюра изгибающих моментов.

Определяем опорные реакции рамы. На расчетной схеме (рис. 26, *a*) по­казываем векторы опорных реакций *RA* и *HA* шарнирно-неподвижной опоры ивектор *RB* на шарнирно-подвижной опоре *B*. Величины реакций определяются из уравнений равновесия рамы:









Реакция *RА* отрицательна, а это значит, что ее направление было выбрано неправильно и его надо изменить на противоположное. В дальнейших расчетах знак минус не учитывается.

Для проверки правильности вычисления опорных реакций подсчитывается сумма проекций сил, приложенных к раме, на вертикальную ось *Y*:



Равенство этой суммы нулю говорит о том, что реакции определены пра­вильно.

Разбиваем раму на участки, границы которых на рис. 26, *а* обозначены латинскими буквами. В граничных сечениях каждого участка находим величины изгибающих моментов и откладываем полученные значения со стороны сжатого волокна (*для удобства построений введем обозначение m = Pa*)*.*

С целью вычисления изгибающего момента рассекаем мысленно раму в исследуемом сечении на две части и отбрасываем одну из них, а затем подсчитываем алгебраическую сумму моментов всех сил, приложенных к оставшейся части, относительно рассма­триваемого сечения. Эта сумма равна величине изгибающего момента в данном сечении рамы.

Рассмотрим последовательно стержни рамы, начиная со стержня *AC*, который имеет лишь один участок. Мысленно рассекая стержень в начале участка (левее точки *A*) и отбрасывая левую часть рамы, вычисляем изгибающий момент в начале участка:

** (сжатые волокна при этом будут находиться снизу).

В конце участка (точка *C*) величина изгибающего момента равна алгебраической сумме моментов от действия пары сил *m2* и реакции *RA*. Пара сил изгибает стержень *AC* таким образом, что его сжатые волокна располагаются *снизу*. Будем считатьусловноизгибающий момент в сечении *С*, возникающий от действия пары сил, положительным. Тогда из­гибающий момент в том же сечении от действия реакции *RA* следует считать положительным, так как эта сила так же, как и пара сил *m2*, вызывает сжатие нижних волокон стержня.

Изгибающий момент в сечении *С*

.

Положительное значение изгибающего момента означает, что сжатые волокна стержня в сечении *С* по-прежнему остаются снизу. Откладывая в масштабе полученные значения изгибающих моментов перпендикулярно оси стержня *AC* вниз (со стороны сжатых волокон), строим на этом участке эпюру *M*, которая будет ограничена прямой линией, так как к раме не приложены распределенные нагрузки.

Переходим к следующему стержню – *CE*, который разбиваем на два участка – *CD* и *DE*.

**Участок *CD*.** Изгибающий момент в сечении *C*, которое принадлежит одновременно стержням *AC* и *CE* известен: *M*C*= 3Pa*.

Сжатые волокна стержня *CE* в сечении *C* находится слеваот его оси, следовательно, момент *MC = 3Pa* надо отложить влево. Изгибающий мо­мент в сечении *D*



Положительное значение изгибающего момента  означает, что сжа­тые во­­локна стержня, как и в сечении *C*, расположены слева.

**Участок *DE*.** Изгибающий момент в сечении *D*, которое принадлежит теперь рассматриваемому участку *DE*, *M*D = 5*Pa*. Находим изгибающий момент в сечении *E*:

.

Перед моментом от силы *P*1 поставлен знак минус, так как сила *P*1 сжимает волокна, располагающиеся справа от оси стержня. Положительное значение момента *ME* = 5*Pa* означает, что сжатые волокна в сечении рас­полагается слева.

Откладывая ординаты эпюры перпендикулярно оси стержня, как это де­ла­лось ранее, строим эпюру на участке *DE*.

Построение эпюры изгибающих моментов для стержня *BE* удобно произ­во­дить, перемещаясь от сечения *B* справа налево.

**Стержень *BE*.** Разбиваем его на два участка: *BF* и *FE*. Изгибающий момент в сечении *B* равен нулю. В сечении *F* участка *BF* стержня изги­бающий момент равен моменту от действия силы *RB* = *3P*, его величина

 (сжатые волокна находится сверху).

Участок *FE*. Изгибающий момент в сечении *F*, принадлежащем этому участку, известен: *M = 3Pa*. В конце участка (сечение *E*) изгибающий момент .

Первое слагаемое, представляющее момент от действия силы, вызывающей сжатие верхних волокон стержня, принято положительным. Перед вторым слагаемым поставлен знак минус, так как сжатые волокна от действия силы  расположены снизу. Положительное значение изгибающего момента в сечении *E* означает, что сжатые волокна стержня в этом сечении находятся сверху от его оси. Вычисленные ординаты откладываются на эпюре вверх от оси стержня – со стороны сжатых волокон (рис. 26, *б*).

Следует обратить внимание на то, что при переходе через узел изги­бающий момент по модулю не изменяется и эпюра располагается по одну сторону от контура рамы (внутри или снаружи). Это условие соблюдается, если в узле рамы не приложен сосредоточенный момент (пара сил).

Рассмотрим еще один пример построения эпюры *M* для рамы.

Требуется построить эпюру изгибающих моментов для рамы, пока­зан­ной на рис. 27, *a*.

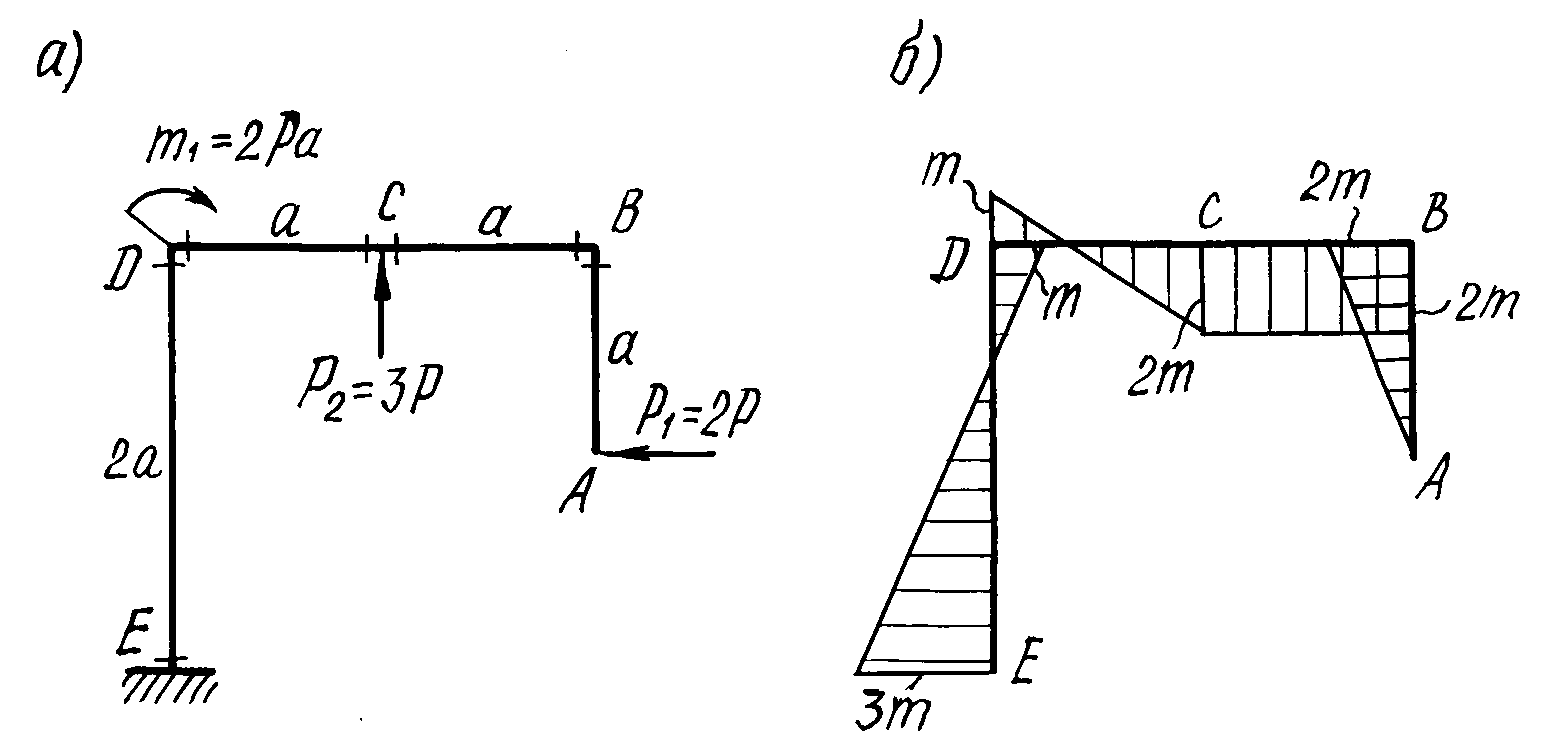
Исходные данные для расчета: *P*1= 2*P*; *P2* = 3*P*; *m*1 = 2*Pa*.

Для рамы, жестко защемленной одним концом, построение эпюры изги­бающих моментов реко­мендуется начинать с незакрепленного сечения (се­чение *A* на рис. 27, *а*), не определяя опор­ных реакций.

Стержень *AB* (рис. 27, а) имеет один участок, в начале и конце которого вычи­сля­ются изгибающие моменты:

*MA =* 0*, MB =  =* 2*Pa*.

Откладываем найденные значения слева от оси стержня со стороны его сжатых волокон (рис. 27, *б*) и соединяем полученные точки прямой линией (*равномерно распределенной нагрузки нет!*).



*Рис. 27.* Расчетная схема рамы и эпюра изгибающих моментов.

Стержень *BD* имеет два участка – *BC* и *СD*. Вычисляются изгибающие моменты в сечениях *B, C, D.*

В сечении *В* изгибающий момент *MB* = 2*Pa*, так как при переходе через узел величина изгибающего момен­та не изменяется, сжатые волокна стержня располагаются снизу.

В сечениях *С* и *D* изгибающие моменты



В последнем выражении момент, зависящий от силы *P1,* условно принят положительным. При этом сжатые волокна стержня *BD* располагается снизу от его оси. Момент от силы *P2* в этом случае отрицателен, так как от действия силы *P2* волокна, расположенные снизу, растягиваются. Отрицательное значение изгибающего момента в сечении *D*, означает, что сжатое волокно теперь располагается теперь не снизу, а сверху от оси стержня. Очевидно, что эпюра *М* на участке *BD* ограничена прямыми линиями.

Стержень *DE* имеет только один участок, в начале которого (сечение *D*) приложена пара сил с моментом *2Pa*. Изгибающий момент в сечении *D* стержня *DE*



Найденное значение откладываем справа от оси стержня *DE,* так как от действия силы *P1* сжатые волокна расположены справа, и перед первым слагаемым в выражении для вычисления изгибающего момента поставлен знак плюс, что означает сжатие волокон справа от действия всех внешних сил, при­ложенных к раме.

Изгибающий момент в сечении *E*



Здесь знак (плюс или минус) перед каждым слагаемым выбран в соответствии с введенным ранее правилом.

По найденным значениям изгибающих моментов для стержня *DE* построена эпюра *М*, ограниченная прямой линией.

Эпюра изгибающих моментов для всей рамы показана на рис. 27, *б*. *Здесь, как и раньше, использовано обозначение m = Pa.*

**ЗАДАЧА № 7**

Для заданной статически неопределимой балки требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость;

2) построить эпюру изгибающих моментов;

3) подобрать двутавровое сечение по условию прочности балки;

4) определить угол поворота сечения *L* и прогиб в сечении *К*.

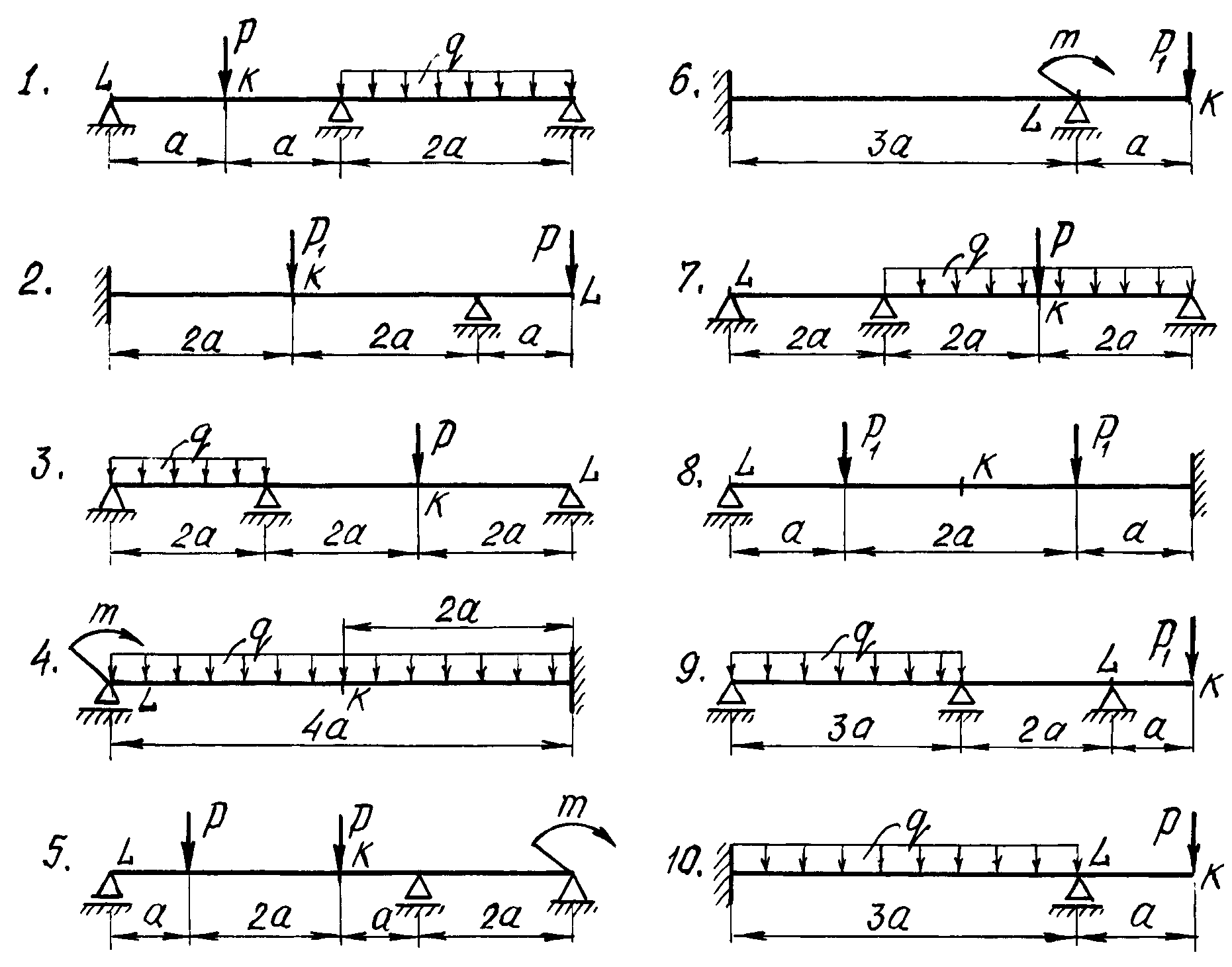
Для всех вариантов принять: допускаемое напряжение [σ] = 160 МПа, модуль упругости .

Числовые данные берутся из табл. 7, расчетные схемы – по рис. 28.

Таблица 7

**Числовые данные к задаче № 7**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер расч. схемы по  рис. 28 | Нагрузка | | | | Размер  *a,* м |
| *q,* кН/м | *P,* кН | *P*1*,* кН | *m,* кН⋅м |
| 1 | 1 | 5 | 10 | 10 | 4 | 1,0 |
| 2 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 | 1,5 |
| 3 | 3 | 8 | 6 | 8 | 4 | 1,0 |
| 4 | 4 | 10 | 8 | 12 | 2 | 0,8 |
| 5 | 5 | 12 | 5 | 7 | 5 | 1,2 |
| 6 | 6 | 6 | 7 | 10 | 7 | 1,0 |
| 7 | 7 | 5 | 10 | 6 | 3 | 1,2 |
| 8 | 8 | 10 | 11 | 9 | 4 | 0,8 |
| 9 | 9 | 8 | 8 | 7 | 5 | 0,6 |
| 0 | 10 | 7 | 5 | 10 | 6 | 1,0 |
|  | е | в | г | д | в | г |



*Рис. 28.* Расчетные схемы статически неопределимых балок

к задаче № 7.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 7**

Для статически неопределимой балки (рис. 31, *а*) требуется:

1) раскрыть ее статическую неопределимость;

2) построить эпюру изгибающих моментов от действия внешних (про­летных) нагрузок;

3) подобрать двутавровое сечение балки из условия ее прочности;

4. определить угол поворота сечения *L* и прогиб балки в сечении *К*.

Числовые данные к задаче:

*q =* 6кН/м; *m =* 4кН⋅м; *а =* 1,2м; [σ] *=* 160МПа; *.*

1. *Вычисляем степень статической неопределимости балки.*

По условиям закрепления имеем четыре опорных реакции: две на опоре *А* и по одной на опорах *В* и *С*. Для плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия, поэтому степень статической неопределимости балки *n* = 4–3 = 1, т. е. система один раз статически неопределима.

2. *Выбираем основную систему.* Для этого разрезаем балку над средней опорой, тем самым, устраняя лишнюю связь, и вставляем над опорой про­межуточный шарнир. «Лишней» неизвестной в этом случае будет изгибающий момент в опоре *В*, который обозначаем *Х*1. На рис. 31*, б* показана основная система. Загружая основную систему пролетными нагрузками и лишней неизвестной, получаем эквивалентную систему (рис. 31, *в*). Достоинство принятой основной системы в том, что каждый пролет работает как самостоятельная балка и при построении эпюр может рассматриваться отдельно.

3. *Строим в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M*p.Рассмотрим участок *АВ*. Так как на этом участке нагрузок нет, для построения эпюры достаточно знать величины изгибающих моментов в сечениях *А* и *В*. На опоре *А* по условию *М* = *m =* 4кН⋅м; на опоре *В* изгибающий момент равен нулю (опорный момент *Х*1 не учитываем), эпюра моментов ограничена прямой линией.

Рассмотрим участок *ВС*.

Вследствие симметрии пролетной нагрузки реакции опор будут одина­ковыми:

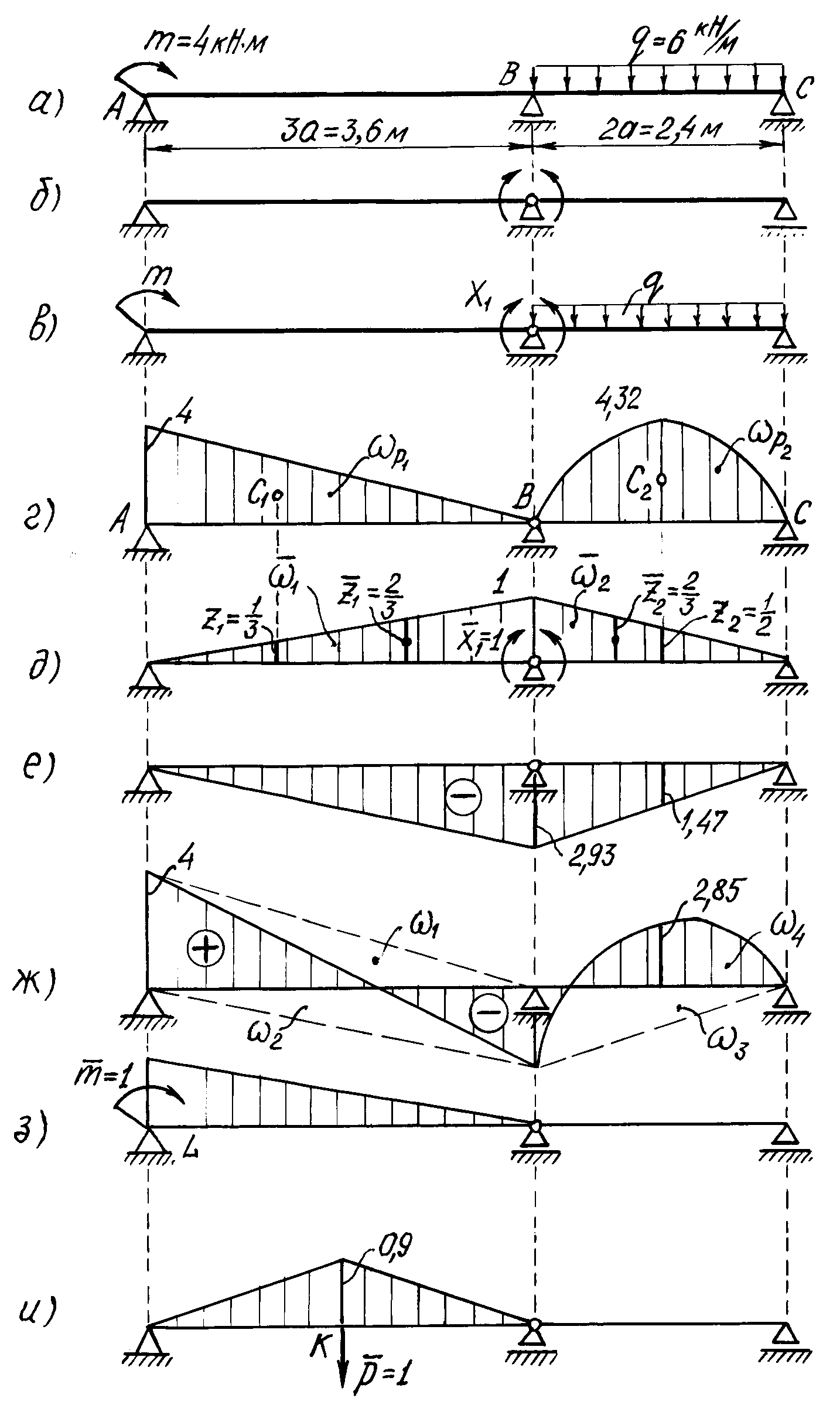
.

Изгибающий момент в произвольном сечении *x*



и эпюра изгибающего момента ограничена квадратной параболой.

Строим эту параболу по трем лежащим на ней точкам:



*B*

*A*

*C*

*Рис. 31.* Статически неопределимая балка: *а* – заданная система;

*б* – основная система; *в* – эквивалентная система; *г* – грузовая эпюра *M*p;

*д* – единичная эпюра ; е – эпюра; *ж* – окончательная эпюра *M*;

з – эпюра от единичного момента ; *и* – эпюра от единичной силы .



Эпюра *М*p показана на рис. 31*, г*.

4. *Строим эпюру  от единичного момента .* В сечениях *А* и *С* изгибающие моменты равны нулю, а в сечении *В* изгибающий момент равен единице. Эпюра ** линейна, ее вид показан на рис. 31*, д*.

5. *Составляем каноническое уравнение метода сил*



и вычисляем коэффициент  при неизвестном. Для этого эпюра ** умно­жается сама на себя. Чтобы упростить вычисления, разбиваем эпюру на два треугольника *ADB* и *BDC* и площадь каждого из них умножаем на ординату, расположенную в центре тяжести каждого из них (рис. 31*, д*):



После подстановки числовых значений имеем

.

Для определения Δ1р перемножаем эпюры *М*P и ** (рис. 31*, г, д*). Площадь параболического сегмента вычисляется по формуле



где *q* – интенсивность распределенной нагрузки;

*l* – длина участка балки под нагрузкой.

Вычисляем свободный член канонического уравнения Δ*1*р:



Произведя соответствующие вычисления, получаем



Тогда каноническое уравнение принимает вид



откуда находим

.

Отрицательное значение *X*1 говорит о том, что следует изменить направление момента *X*1  на обратное.

6. *Строим эпюру изгибающих моментов*. Считая момент *X*1 внешней нагрузкой, можно определить опорные ре­акции, рассматривая каждый пролет балки отдельно, а затем построить эпюру моментов обычным способом, как это выполнялось для статически определимой балки. В данном случае удобнее воспользоваться уже по­стро­енными эпюрами.

Эквивалентная система находится под действием заданных пролетных нагрузок и вычисленного момента *X*1. Следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов может быть представлена суммой двух эпюр

**

Первая эпюра уже построена (рис. 31, *г*), а вторая получается умножением ординат эпюры ** (рис. 31*, д*) на вычисленное значение *X*1. Эпюра ** показана на рис. 31, *е.* Геометрически складываем эпюры *М*p и ** (рис. 31*, г, е*), суммируя ординаты эпюр в характерных точках:



По найденным значениям *М* строим окончательно эпюру изги­баю­щих моментов (рис. 31, *ж*).

Для проверки правильности расчетов и построения эпюры изгибающих моментов можно использовать условие равенства нулю угла поворота смежных сечений балки над средней опорой (перемещение по нап­рав­лению от­бро­шенной связи). Этот угол вычисляется перемножением окон­чательной эпюры моментов (рис. 31*, ж*) на эпюру ** (рис. 31*, д*). При пе­рем­ножении эпюру *М* удобно представить в виде трех треугольников, по­ка­занных пунк­тирными линиями на рис. 31*, ж*, и параболического сегмента.

Угол поворота смежных сечений балки над средней опорой вычислим методом перемножения эпюр:

.

Площади эпюр и соответствующие ординаты под их центрами тяжести



определяются по соответствующим эпюрам (рис. 31*, ж*) и (рис. 31*, д*).

Итак,



Полученный результат свидетельствует о том, что эпюра изги­баю­щих мо­­ментов по­стро­ена правильно. Небольшая погрешность, не превышающая 5 % , возникла в ре­зуль­тате округлений.

7. *Подбираем сечение балки по условию прочности*. При изгибе условие прочности имеет вид



По эпюре *М* (рис. 31*, ж*) находим максимальный момент *=* 4 кН⋅м, а по условию задачи [σ] = 160МПа. Подставляя эти числа в последнюю фор­мулу, по­лучим величину требуемого момента сопротивления двутавра:



По таблицам сортамента прокатной стали подбираем номер двутавра и выписываем его геометрические характеристики:

двутавр № 10, *Wx=* 39,7cм*3, Jx =* 198см*4.*

(Момент сопротивления подобранного двутавра больше требуемого расчет­ного, но меньшего размера в таблице нет, поэтому принимаем двутавр № 10)*.*

8. *Определяем перемещения.* Определяем угол поворота сечения *L*.

Для этого приложим в сечении *L* ос­новной системы единичный момент  и построим эпюру моментов  (рис. 31, з). Угол поворота сечения *L* вычисляем, перемножая эпюры *М* и  (рис. 31, *ж, з*):

;







Определяем прогиб в сечении *К.*

Приложим в сечении *К* основной сис­темы единичную силу  и пост­ро­­им от нее эпюру моментов,(рис. *31, и*). Так как сила  приложена в середине пролета *AB*, опорные реакции будут равны:

*RA = RB =* 0,5.

Определяем моменты в характерных точках участка *АВ:*

*MA =* 0; *МK =* 0,5* =* 0,9м; *MB =* 0.

Прогиб в сечении *К* вычисляется перемножением эпюр *М* и  *(*рис. 31, *ж, и*). Площадь при этом берем с эпюры *М*, а соответствующая ор­ди­ната на эпюре  равна величине средней линии трапеции, то есть ал­ге­бра­­ической полусумме ее оснований:





Результат получен со знаком плюс, прогиб направлен в сторону при­ло­жен­ной единичной силы, то есть вниз.

**ЗАДАЧА № 8**

Короткий чугунный брус, поперечное сечение которого показано на рис. 32, сжимается силой *Р*, приложенной в точке *А, В* или *С*.

Требуется:

1) вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в его поперечном сечении, выразив их через величину сжимающей силы *Р*;

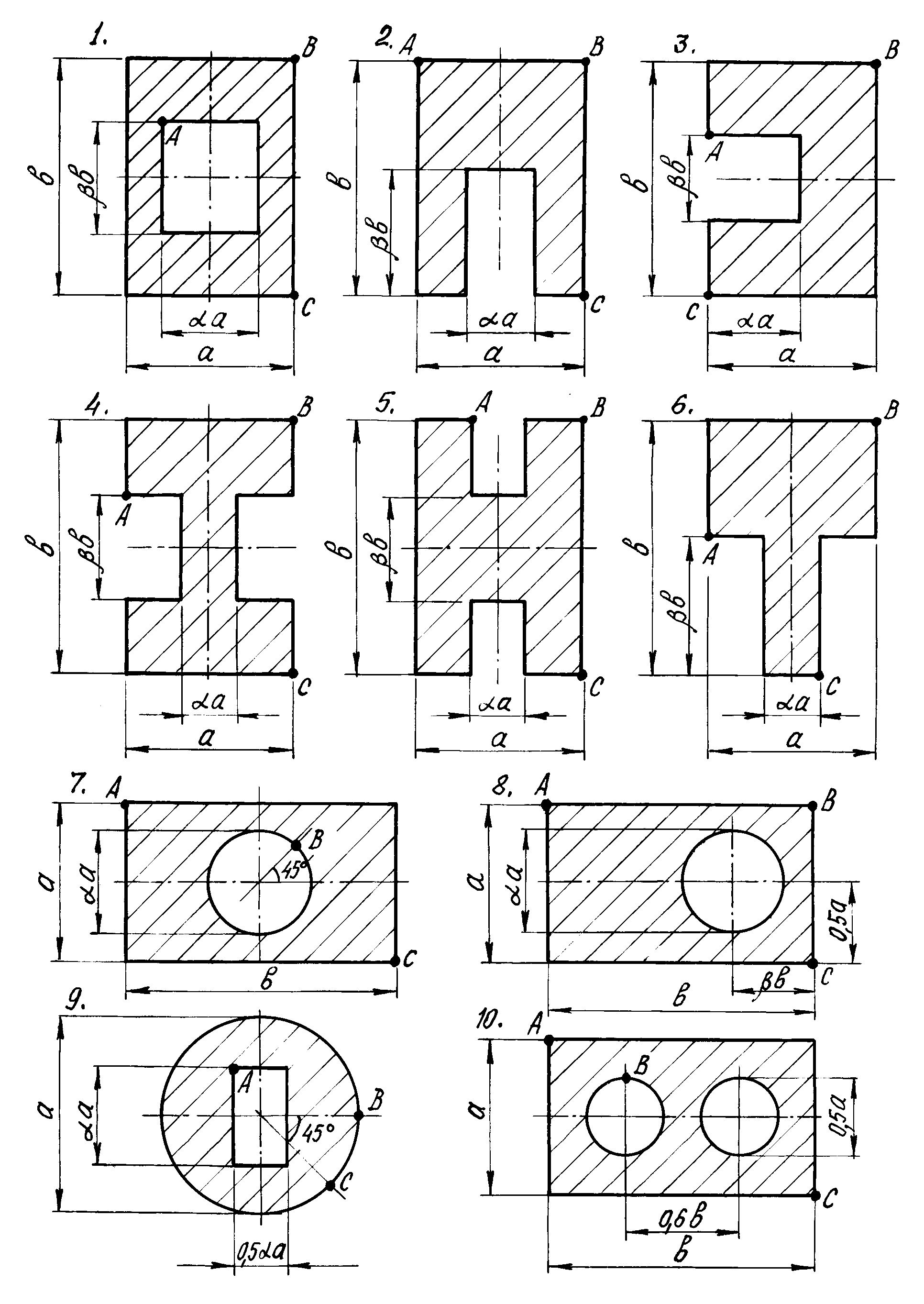
2) из условия прочности бруса найти допускаемую нагрузку *Р*д, если заданы пределы прочности для чугуна на растяжение σвр и сжатие σвс. Запас прочности принять *n = 1,5*.

Числовые данные берутся из табл. 8, схемы поперечных сечений бруса – по рис. 32.

Таблица 8

**Числовые данные к задаче № 8**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер расч. схем  по рис. 32 | Размер, м | | Коэффи­циент | | Точка приложения  силы | Предел проч­нос­ти, МПа | |
| *а* | *b* |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0,10 | 0,12 | 0,3 | 0,8 | A | 120 | 500 |
| 2 | 2 | 0,12 | 0,10 | 0,4 | 0,5 | B | 380 | 1400 |
| 3 | 3 | 0,06 | 0,14 | 0,5 | 0,6 | C | 380 | 1400 |
| 4 | 4 | 0,06 | 0,16 | 0,6 | 0,8 | A | 280 | 1000 |
| 5 | 5 | 0,08 | 0,10 | 0,3 | 0,5 | B | 280 | 1000 |
| 6 | 6 | 0,08 | 0,16 | 0,4 | 0,6 | C | 120 | 500 |
| 7 | 7 | 0,10 | 0,12 | 0,5 | 0,7 | A | 120 | 500 |
| 8 | 8 | 0,10 | 0,14 | 0,6 | 0,8 | B | 280 | 1000 |
| 9 | 9 | 0,12 | 0,16 | 0,3 | 0,6 | C | 380 | 1400 |
| 0 | 10 | 0,12 | 0,20 | 0,5 | 0,5 | A | 380 | 1400 |
|  | е | в | г | д | в | г | д | е |



*Рис. 32.* Схемы поперечных сечений бруса.

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 8**

Короткий чугунный брус с заданным поперечным сечением (рис. 34) сжимается силой *Р*, приложенной в точке *D*. Определить из условия прочности бруса допускаемое значение силы *Р*д.

Числовые данные к задаче: *a =* 0,08м; *b =* 0,12м;α *=* 0,5; пределы про­чности чугуна при растяжении σвр *=* 280МПа, при сжатииσвс*=* 1000 МПа; запас прочности принять *n =* 1,5*.*

1. *Определение геометрических характеристик поперечного сечения.* Заданное сечение (рис. 34) рассматриваем как сложное, состоящее из двух прямоугольников: большого сплошного со сторонами *a* и *b* и прямоугольного отверстия со сторонами *0,5 a* и 0,6 *b*.

За исходные координатные оси принимаем оси к z*1*и *y*. На рис. 34 в этой системе координат показаны положения центров тяжести прямоугольников (точки *С*1 и *С*2) и их главные центральные оси *y*1,, *z*1, *y*2, *z*2. Центр тяжести всего сечения обозначен через *O.* Он располагается на оси симметрии *у*, поэтому вычисляется только одна его координата *у*C:



где *F*1 и *F*2 – площади большого прямоугольника и отверстия;

*y*1 и *y*2 *–* координаты их центров тяжести.

Подсчитываем геометрические характеристики поперечного сечения бруса.

Площади составляющих фигур

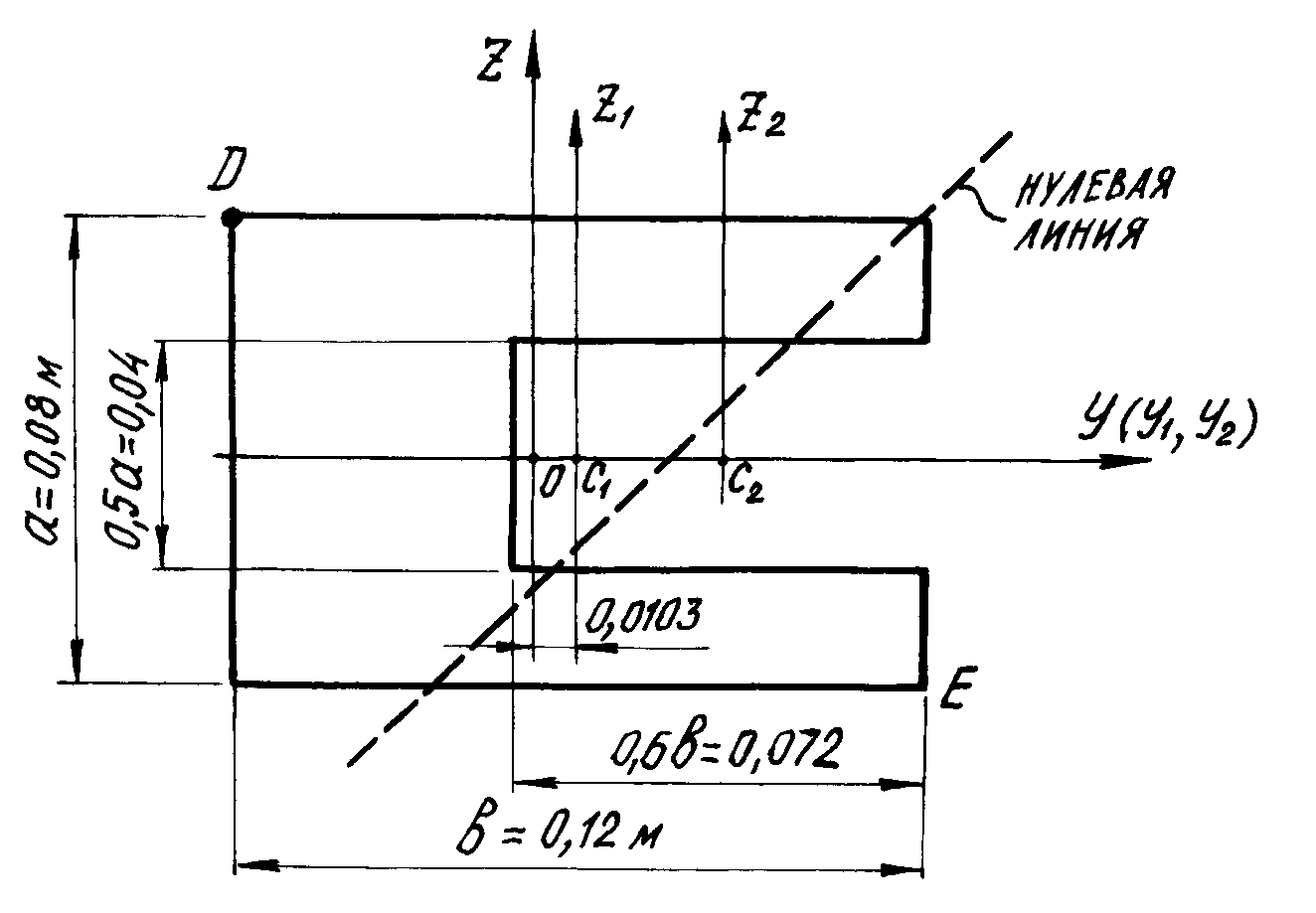


Площадь сечения всей фигуры:



Абсциссы центров тя­же­с­ти составляющих фи­гур:

*y*1 *=* 0; *y2 =* 2,4см*.*



*Рис. 34.* Поперечное сечение бруса.

Абсцисса центра тяжести всей фигуры:



Центр тяжести сечения лежит на оси *Y* (точка *О*) слева от точки *С*1 на расстоянии *y*с. Главные центральные оси сечения – *Y*, *Z.*

Главные центральные моменты инерции составного сечения относительно осей *Y*, *Z* вычисляются с помощью зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная:



Моменты инерции прямоугольников относительно собственных глав­ных центральных осей равны







Расстояния между главными центральными осями *Y*, *Z* и собственными глав­ными центральными осями составляющих фигур определяются по чер­тежу.

Расстояние между главной центральной осью *Y* и осями *y*1*,y*2:

*a*1 = *а*2 = 0, так как главные центральные оси *у*1 и *y*2 составляющих фи­гур совпадают с главной центральной осью *Y* сечения;

расстояния между главной центральной осью *Z* и осями *z1,* *z2*:

*b1* = 1,03 см,

*b2* = 1,03 + 2,4 = 3,43 см.

Подставив найденные величины в формулы для вычисления главных цент­ральных моментов инерции и учитывая, что осевой момент инерции от­вер­стия условно считается отрицательным, получаем



Квадраты главных центральных радиусов инерции



2. *Определение положения нулевой линии.* По условию задачи сила *Р* приложена в точке *D*, координаты которой в си­стеме главных центральных осей *Y*, *Z* определяются по рис. 34:



Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат *Y*, *Z*:



На осях координат *Y*, *Z* откладываются в масштабе величины найденных отрезков и проводится нулевая линия.

3. *Вычисление максимальных нормальных напряжений в поперечном сече­нии бруса.*

Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от ну­левой линии. В рассматриваемой задаче это точки *D* и *E*. В точке *D* на­пря­жения сжимающие, в точке *E* – растягивающие.

Координаты опасных точек находятся по рис. 34:





Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения выражаются че­рез внешнюю нагрузку;





Допускаемая нагрузка *Р*доп определяется из условий прочности бруса по растягивающим и сжимающим напряжениям.

Допускаемые напряжения определяются по исходным данным для растяжения и для сжатия хрупкого материала, в рассматриваемом случае чугуна:



Из условия прочности материала бруса на растяжение  опре­де­ляется величина допускаемой нагрузки

, откуда

Из условия прочности на сжатие 

 и 

В качестве допускаемой нагрузки принимается меньшая из двух полу­чен­ных, что обеспечивает прочность бруса как по растягивающим, так и по сжи­­мающим напряжениям, то есть 

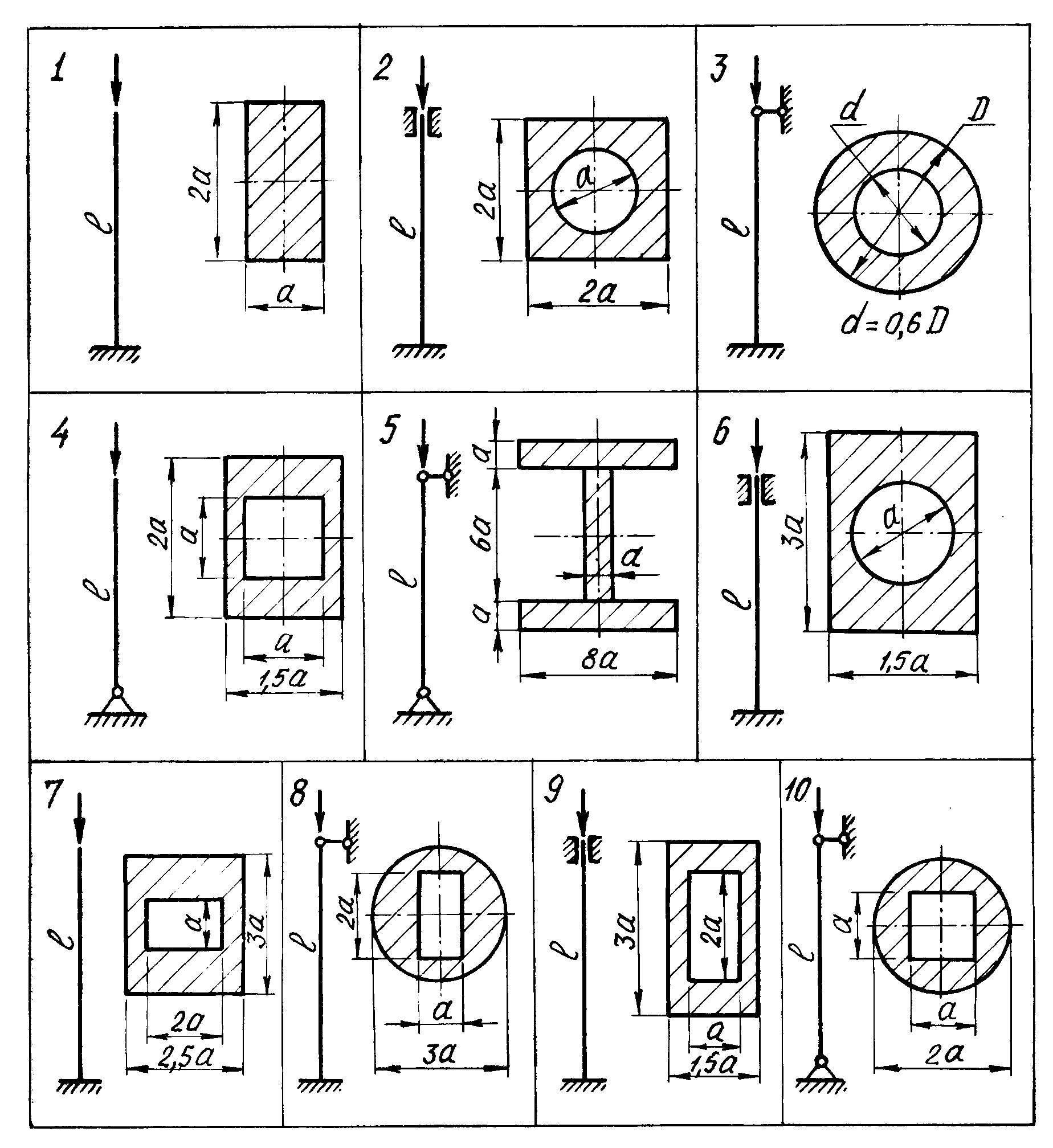
**ЗАДАЧА № 9**

Для стального стержня длиной *l*, cжимаемого силой *Р*,требуется:

1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия его устойчивости при допускаемом напряжении на сжатие [σ] = 160 МПа (расчет проводить методом последовательных приближений по коэффициенту снижения допускаемых напряжений на сжатие);

2) найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости *n*у.

Числовые данные для расчета следует взять из табл. 9, расчетные схемы – по рис. 35.



Р*ис. 35.* Расчетные схемы сжатия стержней и их поперечные сечения.

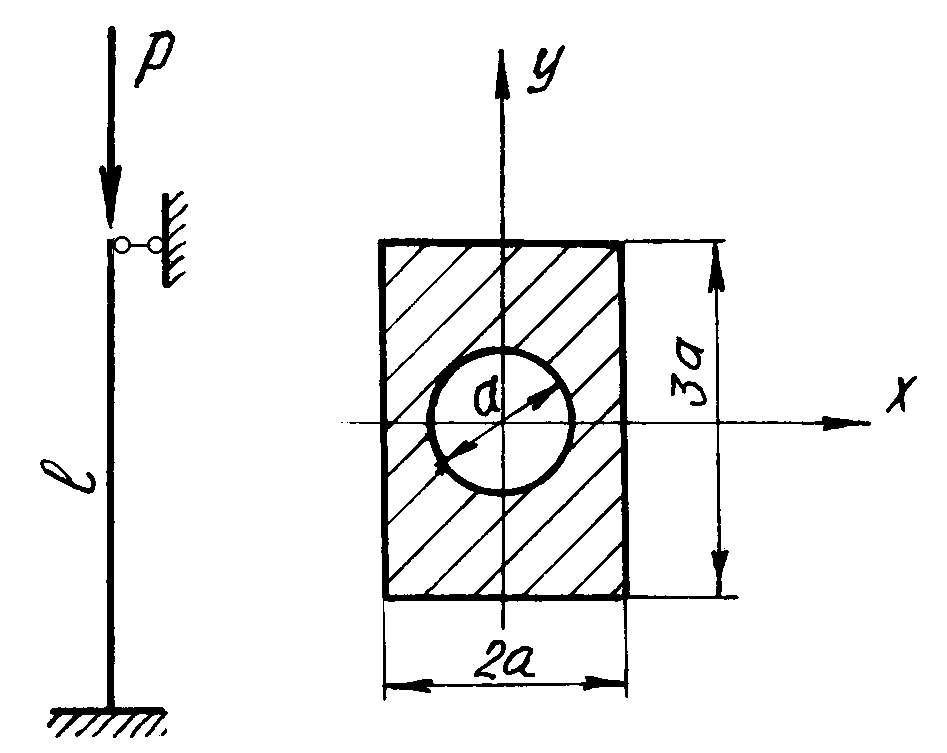
Таблица 9

**Числовые данные к задаче № 9**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер  строки | Номер расчетной  схемы по рис. 35 | Сила  *Р*, кН | Длина стержня  *l,* м |
| 1 | 1 | 500 | 2,5 |
| 2 | 2 | 480 | 3,9 |
| 3 | 3 | 450 | 2,8 |
| 4 | 4 | 300 | 3,2 |
| 5 | 5 | 350 | 2,7 |
| 6 | 6 | 370 | 3,5 |
| 7 | 7 | 360 | 3,0 |
| 8 | 8 | 460 | 2,7 |
| 9 | 9 | 370 | 2,6 |
| 0 | 10 | 400 | 3,1 |
|  | е | в | г |

**ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 9**

Стальной стержень длиной *l* = 2,8 м заданной формы попе­речного сечения сжимается силой *Р* = 411 кН(рис. 36).



*Рис. 36.* Расчетная схема сжатого стержня и его поперечное сечение.

Требуется:

1) подобрать размеры поперечного сечения стержня (расчет производить методом последовательных приближений по коэффициенту ); 2) найти величину критической силы *Р*кр и вычислить запас устойчивости стержня *n*у. Материал стержня сталь *Ст.3*; допускаемое напряжение на сжатие [σ]с = 160 МПа.

1. *Определение геометрических характеристик сечения стержня через искомый размер сечения a: площадь сечения*



размер *a*



Главные центральные моменты инерции



Минимальный момент инерции



Минимальный радиус инерции



Для заданного варианта закрепления по табл. 16 выбирается коэф­фи­ци­ент приведения длины μ *=* 0,7*.*

Гибкость стержня



2. *Подбор поперечного сечения стержня.* Из условия устойчивости площадь поперечного сечения



Как указывалось выше, в условии устойчивости неизвестными вели­чинами являются ϕ и *F*, которые можно найти методом последовательных приближений, для чего за­да­ется одна из неизвестных величин – .

Для первого приближения примем ϕ1 = 0,5*.*

Тогда соответствующая площадь поперечного сечения стержня



Находим параметр  *а*:



Проверяем, соответствует ли допускаемая нагрузка для подобранного сечения заданной силе.

Гибкость стержня при 



По табл. 17 следует найти соответствующий коэффициент . Значения λ = 102 в таблице нет, поэтому искомое значения коэффициента ϕ оп­ре­деляется линей­ной интерполяцией:

при λ *=* 100ϕ100 *=* 0,60;

при λ *=* 110 ϕ110 *=* 0,5;



Соответствующая допускаемая сила

,

Расхождение между заданной силой и полученной



Подобранное сечение не удовлетворяет условию устойчивости, так как до­пускаемое расхождение между силами заданной и полученной расчетным пу­тем не должно превышать 5 %.

Вычисления повторяются еще раз.

Второе приближение: новое значение коэффициента ϕ2 определяется по выражению:



Все вычисления, выполненные при первом приближении, повторяются, но при новом значении ϕ = ϕ*2*:



Расхождение между силами составляет менее 5 %, что приемлемо. Тогда искомый размер 

3. *Определение критической силы.* Для подобранного сечения расчетная гибкость стержня



Предельная гибкость для стали марки *Ст. 3* равна100, поэтому критическую силу следует вычислять по формуле Эйлера, так как λ>λпр .

Минимальный момент инерции принятого сечения стержня



Критическая сила



Запас устойчивости сжатого стержня:

