

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Цель выполнения контрольной работы – исследование рекурсивного звена 2-го порядка во временной, z -области и частотной области.

Исходными данными являются коэффициенты передаточной функции $H(z)$, приведенные в табл. 2.1. *Номер варианта* выбирается по *двум последним цифрам* студенческого билета (всего 100 вариантов).

Все расчеты выполняются с точностью до **4-го знака после запятой**.

Задание на контрольную работу для всех вариантов включает следующие пункты:

1. Записать передаточную функцию (ПФ).
2. Записать разностное уравнение (РУ).
3. Изобразить структурную схему.
4. Записать формулу импульсной характеристики (ИХ) с учетом нулевых начальных условий.
5. Рассчитать 5 отсчетов ИХ по полученной формуле с точностью до 4-го знака после запятой.
6. Рассчитать 5 отсчетов ИХ с помощью РУ с точностью до 4-го знака после запятой.
7. Сравнить результаты вычислений пп. 5, 6.
8. Построить график ИХ (5 отсчетов).
9. Изобразить карту нулей и полюсов.
10. Записать формулы для расчета АЧХ и ФЧХ в произвольной точке.
11. Сделать вывод о качественном характере АЧХ и ФЧХ по карте нулей и полюсов.
12. Выполнить экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ.
13. Построить графики АЧХ и ФЧХ по результатам пп. 11 – 12.

Примечание

1. Для всех вариантов *полюсы* – комплексно-сопряженные.
2. При выполнении контрольной работы должны быть приведены все необходимые расчетные формулы.
3. Значение угла φ следует задавать относительно π . Например, получено

$$\varphi_* = 1,7654. \text{ Необходимо записать } \varphi_* = \frac{1,7654}{\pi} \approx 0,562\pi.$$

Таблица 2.1.

*Номер варианта и исходные данные
для выполнения контрольной работы*

№	Коэффициенты передаточной функции				
	b_0	b_1	b_2	a_1	a_2
00	1	-0,7857	0,6904	0	0,64
01	1	-1,07	0,77	0,71	0,56
02	1	0	0	0,87	0,73
03	1	0,6429	0,999	-1,01	0,8
04	1	-2	1	-0,88	0,68
05	1	0	1	1,01	0,8
06	1	0	-1	0,57	0,62
07	1	2	1	-1,05	0,67
08	1	1,07	0,77	-0,71	0,56
09	1	-0,6429	0,999	0,71	0,56
10	1	-1,143	0,7631	0	0,7
11	1	-0,4	0,63	1,14	0,77
12	1	0	0	-0,87	0,73
13	1	1,571	1,008	-0,97	0,72
14	1	-2	1	0,88	0,68

15	1	0	1	0,97	0,72
16	1	0	- 1	- 0,57	0,62
17	1	2	1	1,05	0,67
18	1	0,4	0,63	- 1,14	0,77
19	1	- 1,571	1,008	1,14	0,77
20	1	- 0,9643	0,6231	0	0,75
21	1	- 0,25	0,58	0,93	0,75
22	1	0	0	0,75	0,78
23	1	0,75	1,003	- 0,46	0,76
24	1	- 2	1	- 0,77	0,84
25	1	0	1	0,46	0,76
26	1	0	- 1	1,07	0,71
27	1	2	1	- 1,16	0,71
28	1	0,25	0,58	- 0,93	0,75
29	1	- 0,75	1,003	0,93	0,75
30	1	- 0,6071	0,6818	0	0,78
31	1	- 1,25	0,76	0,68	0,57
32	1	0	0	- 0,75	0,78
33	1	1,5	0,999	- 0,96	0,67
34	1	- 2	1	0,77	0,84
35	1	0	1	0,96	0,67
36	1	0	- 1	- 1,07	0,71
37	1	2	1	1,16	0,71
38	1	1,25	0,76	- 0,68	0,57
39	1	- 1,5	0,999	0,68	0,57
40	1	- 1,429	0,7789	0	0,81

41	1	- 0,71	0,69	1,28	0,52
42	1	0	0	0,64	0,69
43	1	0,4467	0,9998	- 1,07	0,61
44	1	- 2	1	- 0,65	0,82
45	1	0	1	1,07	0,61
46	1	0	- 1	0,65	0,82
47	1	2	1	- 0,64	0,69
48	1	0,71	0,69	- 1,28	0,52
49	1	- 0,4467	0,9998	1,28	0,52
50	1	0,7857	0,6904	0	0,64
51	1	- 0,43	0,78	1,07	0,61
52	1	0	0	- 0,64	0,69
53	1	1,198	1,002	- 1,28	0,52
54	1	- 2	1	0,65	0,82
55	1	0	1	1,28	0,52
56	1	0	- 1	- 0,65	0,82
57	1	2	1	0,64	0,69
58	1	0,43	0,78	- 1,07	0,61
59	1	- 1,198	1,002	1,07	0,61
60	1	1,143	0,7631	0	0,75
61	1	- 0,43	0,78	0,96	0,67
62	1	0	0	1,16	0,71
63	1	0,3249	0,9962	- 0,68	0,57
64	1	- 2	1	- 1,07	0,71
65	1	0	1	0,68	0,57
66	1	0	- 1	0,77	0,84

67	1	2	1	-0,75	0,78
68	1	0,43	0,78	-0,96	0,67
69	1	-0,3249	0,9962	0,96	0,67
70	1	0,9643	0,6231	0	0,81
71	1	-0,32	0,79	0,46	0,76
72	1	0	0	-1,16	0,71
73	1	0,3249	0,9962	-0,93	0,75
74	1	-2	1	1,07	0,71
75	1	0	1	0,93	0,75
76	1	0	-1	-0,77	0,84
77	1	2	1	0,75	0,78
78	1	0,32	0,79	-0,46	0,76
79	1	-0,3249	0,9962	0,46	0,76
80	1	0,6071	0,6818	0	0,72
81	1	-0,44	0,65	0,97	0,72
82	1	0	0	1,05	0,67
83	1	0,4873	1,009	-1,14	0,77
84	1	-2	1	-0,57	0,62
85	1	0	1	1,14	0,77
86	1	0	-1	0,88	0,68
87	1	2	1	-0,87	0,73
88	1	0,44	0,65	-0,97	0,72
89	1	-0,4873	1,009	0,97	0,72
90	1	1,429	0,7789	0	0,81
91	1	-0,54	0,61	1,01	0,8
92	1	0	0	-1,05	0,67

93	1	0,9746	0,9998	- 0,71	0,56
94	1	- 2	1	0,57	0,62
95	1	0	1	0,71	0,56
96	1	0	- 1	- 0,88	0,68
97	1	2	1	0,87	0,73
98	1	0,54	0,61	- 1,01	0,8
99	1	- 0,9746	0,9998	1,01	0,8
0A	1	0	0	- 0,7	0,49
0B	1	0	- 1	- 0,7	0,49
0C	1	0,7	0,49	- 0,7	0,49

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Пример 1. Вариант 0A.

Исходные данные – коэффициенты ПФ $H(z)$ 2-го порядка:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = 0;$$

$$a_1 = -0,7; \quad a_2 = 0,49.$$

Решение.

1. Запишем ПФ на основе ее общего вида

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,7z^{-1} + 0,49z^{-2}}. \quad (1)$$

Исследуемое звено является **базовым**, так как числитель передаточной функции $H(z)$ равен 1.

2. Используя методику, описанную в лекциях, на основе РУ общего вида получим

$$y(n) = x(n) + 0,7y(n-1) - 0,49y(n-2). \quad (2)$$

3. На основе структурной схемы рекурсивного звена 2-го порядка общего вида имеем

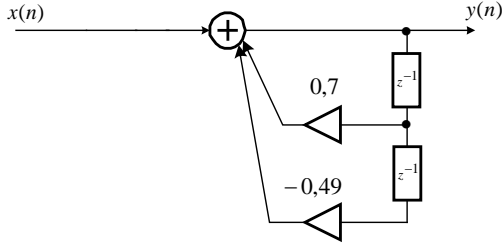


Рис. 1. Структурная схема базового звена 2-го порядка

4. Используя методику, описанную в лекциях, на основе общей формулы импульсной характеристики базового звена с учетом нулевых начальных условий запишем

$$h(n) = 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

где значения r_* и φ_* равны:

$$r_* = \sqrt{a_2} = \sqrt{0,49} = 0,7;$$

$$\varphi_* = \arccos\left(-\frac{a_1}{2r_*}\right) = \arccos\left(-\frac{-0,7}{2 \cdot 0,7}\right) = \arccos(0,5) = \frac{\pi}{3}.$$

5. Результаты расчета 5 точек ИХ по формуле (3) с точностью до 4-го знака после запятой приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Вычисление ИХ по формуле (3)

n	$h(n)$ (3)
0	$h(0) = 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 1,0000$

1	$h(1) = 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0,7000$
2	$h(2) = 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0,0000$
3	$h(3) = 0,7^3 \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -0,3430$
4	$h(4) = 0,7^4 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -0,2401$

6. Расчет ИХ по РУ выполняется методом прямой подстановки при нулевых начальных условиях.

Выполнив в РУ (2) подстановку, запишем уравнение

$$h(n) = u_0(n) + 0,7h(n-1) - 0,49h(n-2), \quad (4)$$

результаты решения которого при нулевых начальных условиях с точностью до 4-го знака после запятой приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Вычисление ИХ по РУ (4)

n	$h(n)$ (4)
0	$h(0) = u_0(0) + 0,7h(-1) - 0,49h(-2) = 1 + 0 - 0 = 1,0000$
1	$h(1) = u_0(1) + 0,7h(0) - 0,49h(-1) = 0 + 0,7 \cdot 1 - 0 = 0,7000$

2	$h(2) = u_0(2) + 0,7h(1) - 0,49h(0) = 0 + 0,7 \cdot 0,7 - 0,49 \cdot 1 =$ $= 0,49 - 0,49 = 0,0000$
3	$h(3) = u_0(3) + 0,7h(2) - 0,49h(1) =$ $= 0 + 0,7 \cdot 0 - 0,49 \cdot 0,7 = -0,3430$
4	$h(4) = u_0(4) + 0,7h(3) - 0,49h(2) =$ $= 0 + 0,7 \cdot (-0,3430) - 0,49 \cdot 0 = -0,2401$

7. Результаты вычислений ИХ двумя способами в пп. 5, 6 совпадают.
8. График ИХ (5 отсчетов) представлен на рис.2.

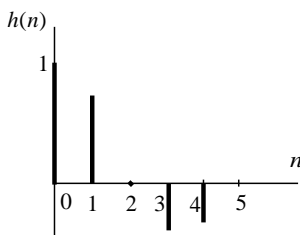


Рис. 2. Импульсная характеристика (5 отсчетов, к примеру 1)

9. Для построения карты нулей и полюсов необходимо вычислить нули и полюсы ПФ (1).

Комплексно-сопряженные полюсы в показательной форме

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$$

с учетом рассчитанных в п.4 значений r_* и φ_* равны

$$z_{*1,2} = 0,7 e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$

Для определения комплексно-сопряженных нулей умножим числитель и знаменатель ПФ (1) на z^2 , получим

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

и найдем корни числителя – нули ПФ

$$z_{o,1,2} = 0.$$

В данном примере имеем два *одинаковых вещественных* нуля; такие нули называют *кратными*.

Карта нулей и полюсов изображена на рис. 3 а; на рис. 3 б приведена та же карта с необходимыми комментариями.

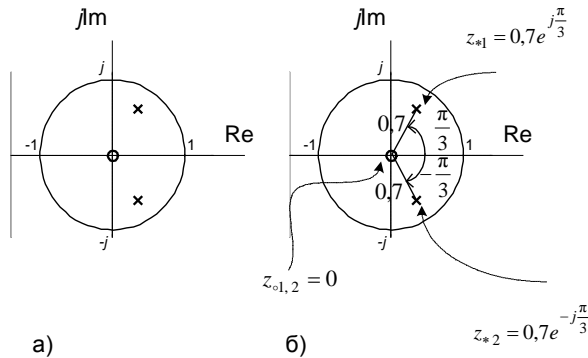


Рис. 3. Карта нулей и полюсов (к примеру 1)

10. Для расчета значений АЧХ и ФЧХ звена 2-го порядка в произвольной точке необходимо использовать общие формулы,

$$A(\bar{\omega}) = \sqrt{\frac{[b_0 + b_1 \cos(\bar{\omega}) + b_2 \cos(2\bar{\omega})]^2 + [b_1 \sin(\bar{\omega}) + b_2 \sin(2\bar{\omega})]^2}{[1 + a_1 \cos(\bar{\omega}) + a_2 \cos(2\bar{\omega})]^2 + [a_1 \sin(\bar{\omega}) + a_2 \sin(2\bar{\omega})]^2}};$$

$$\varphi(\bar{\omega}) = \arctg \frac{a_1 \sin(\bar{\omega}) + a_2 \sin(2\bar{\omega})}{1 + a_1 \cos(\bar{\omega}) + a_2 \cos(2\bar{\omega})} - \arctg \frac{b_1 \sin(\bar{\omega}) + b_2 \sin(2\bar{\omega})}{b_0 + b_1 \cos(\bar{\omega}) + b_2 \cos(2\bar{\omega})},$$

подставляя в них заданные значения коэффициентов.

11. Качественный анализ АЧХ и ФЧХ по карте нулей и полюсов выполняется на основе методики, изложенной в лекциях, которые предварительно необходимо внимательно изучить.

В данном случае карта нулей и полюсов содержит два комплексно-сопряженных полюса и два одинаковых нуля, равных нулю. Поэтому относительно АЧХ можно сделать следующие выводы.

В основной полосе частот $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ АЧХ звена 2-го порядка (5) является гладкой функцией, причем:

- *внутри* основной полосы частот АЧХ имеет один максимум, расположенный на частоте полюса $\hat{\omega}_* = \varphi_* \approx \frac{\pi}{3}$;

- *внутри* основной полосы частот АЧХ не имеет минимума;

- *на границах* основной полосы частот $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$ АЧХ имеет минимумы.

Относительно ФЧХ можно сказать, что внутри основной полосы частот и на ее границах ФЧХ представляет собой непрерывную функцию, не имеющую скачков на π .

12. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ.

В данном примере следует вычислить значения АЧХ и ФЧХ в *четырёх* точках:

а) в точке $\hat{\omega} = 0$ при $z = 1$

$$A(0) = |H(1)| = \left| \frac{1}{1 - 0,7 + 0,49} \right| \approx 1,2658;$$
$$\varphi(0) = \arg\{H(1)\} = 0;$$

б) в точке $\hat{\omega} = \pi$ при $z = -1$

$$A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{1}{1 + 0,7 + 0,49} \right| \approx 0,4567;$$
$$\varphi(\pi) = \arg\{H(-1)\} = 0;$$

в) в точке $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$ при $z = j$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = |H(j)| = \left| \frac{1}{(1 - 0,49) + 0,7j} \right| = \sqrt{\frac{1}{(1 - 0,49)^2 + 0,7^2}} \approx 1,1546;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arg\{H(j)\} = \arg\left\{\frac{1}{(1-0,49)+0,7j}\right\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-0,7}{1-0,49}\right) \approx -0,9412;$$

г) в точке максимума АЧХ $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$, который находится приблизительно на частоте φ_* полюса

$$z_{*1,2} = 0,7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$$

$$\hat{\omega}_* \approx \frac{\pi}{3};$$

значения АЧХ и ФЧХ в этой точке равны

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 2,2525;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0,4221.$$

13. Графики *нормированной* АЧХ и ФЧХ, построенные на основе качественного анализа и экспресс-анализа, представлены на рис. 4.

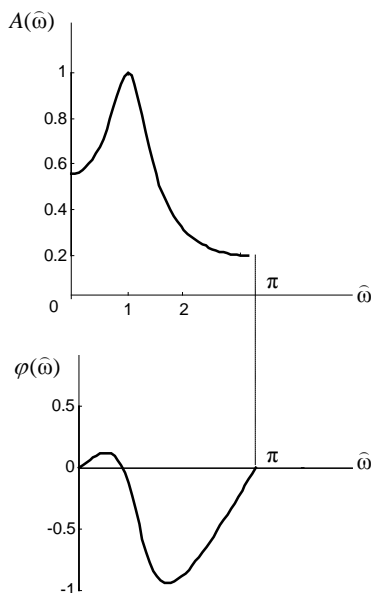


Рис. 4. Графики нормированной АЧХ и ФЧХ (к примеру 1)

Замечание

В контрольной работе студенты могут строить нормированную либо ненормированную АЧХ.

Пример 2. Вариант 0В.

Исходные данные – коэффициенты ПФ $H(z)$ 2-го порядка:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = -1;$$

$$a_1 = -0,7; \quad a_2 = 0,49.$$

Решение.

1. Запишем ПФ на основе ее общего вида

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,49z^{-2}}. \tag{1a}$$

Исследуемое звено не является базовым.

Знаменатели ПФ небазового звена (1а) и базового звена (1) совпадают, поэтому основное внимание в данном примере будет уделено анализу «влияния числителя» и студенту предварительно следует изучить пример 1.

- Используя методику, описанную в лекциях, на основе РУ общего вида получим

$$y(n) = x(n) - x(n-2) + 0,7y(n-1) - 0,49y(n-2). \quad (2a)$$

- На основе структурной схемы рекурсивного звена 2-го порядка общего вида имеем

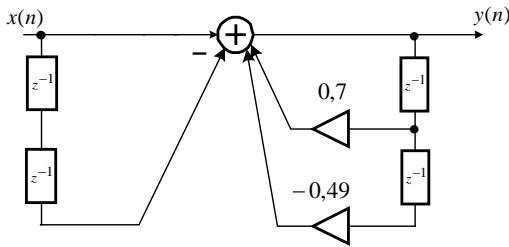


Рис. 5. Структурная схема базового звена 2-го порядка

- Используя методику, описанную в лекциях, на основе общей формулы импульсной характеристики небазового звена с учетом нулевых начальных условий запишем

$$h(n) = \begin{cases} 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n = 0, 1; \\ 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 0,7^{(n-2)} \frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (3a)$$

где значения $r_* = 0,7$ и $\varphi_* = \frac{\pi}{3}$, рассчитаны в п. 4 примера 1.

5. Результаты расчета 5 точек ИХ по формуле (3а) с точностью до 4-го знака после запятой приведены в табл. 3.1а.

Таблица 3.1а.

Вычисление ИХ по формуле (3а)

n	$h(n)$ (3а)
0	$h(0) = 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 1,0000$
1	$h(1) = 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0,7000$
2	$h(2) = 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -1,0$
3	$h(3) = 0,7^3 \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -1,043$
4	$h(4) = 0,7^4 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -0,2401$

6. Расчет ИХ по РУ выполняется методом прямой подстановки при нулевых начальных условиях.

Выполнив в РУ подстановку, запишем уравнение

$$h(n) = u_0(n) - u_0(n-2) + 0,7h(n-1) - 0,49h(n-2), \quad (4a)$$

результаты решения которого с точностью до 4-го знака после запятой приведены в табл. 3.2а.

Таблица 3.2а.

Вычисление ИХ по РУ (4а)

n	$h(n)$ (4а)
0	$h(0) = u_0(0) - u_0(-2) + 0,7h(-1) - 0,49h(-2) = 1 - 0 + 0 - 0 = 1,0$
1	$h(1) = u_0(1) - u_0(-1) + 0,7h(0) - 0,49h(-1) = 0 - 0 + 0,7 \cdot 1 - 0 = 0,70$
2	$h(2) = u_0(2) - u_0(0) + 0,7h(1) - 0,49h(0) = 0 - 1 + 0,7 \cdot 0,7 - 0,49 \cdot 1 = -1 + 0,49 - 0,49 = -1,0$
3	$h(3) = u_0(3) - u_0(1) + 0,7h(2) - 0,49h(1) = 0 - 0 + 0,7 \cdot (-1) - 0,49 \cdot 0,7 = -1,043$
4	$h(4) = u_0(4) - u_0(2) + 0,7h(3) - 0,49h(2) = 0 - 0 + 0,7 \cdot (-1,043) - 0,49 \cdot (-1) = -0,2401$

7. Результаты вычислений ИХ двумя способами в пп. 5 – 6 совпадают.
8. График ИХ (5 отсчетов) представлен на рис.6.

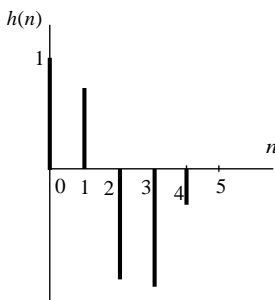


Рис. 6. Импульсная характеристика (5 отсчетов, к примеру 2)

9. Для построения карты нулей и полюсов необходимо вычислить нули и полюсы ПФ (1) по методике, приведенной в лекциях.

Комплексно-сопряженные полюсы вычислены в примере 1, п.4 и равны

$$z_{*1,2} = 0,7e^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Для определения нулей умножим числитель и знаменатель ПФ (1а) на z^2 , получим

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + a_1z + a_2},$$

и найдем корни числителя

$$z^2 - 1 = 0;$$

$$z_{o1} = 1; z_{o2} = -1,$$

которые являются вещественными нулями.

Карта нулей и полюсов изображена на рис. 7 а; на рис. 7 б приведена та же карта с необходимыми комментариями.

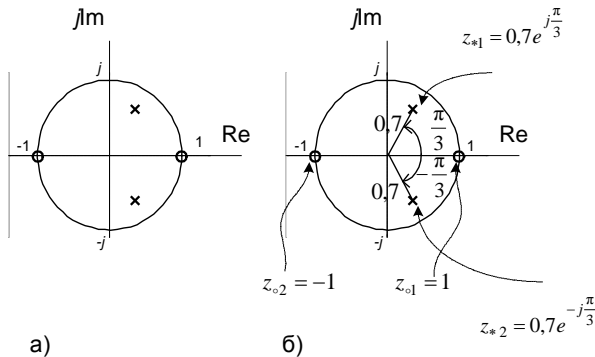


Рис. 7. Карта нулей и полюсов (к примеру 2)

10. См. п. 10 в примере 1.
11. Качественный анализ АЧХ и ФЧХ по карте нулей и полюсов выполняется на основе методики, изложенной в лекциях.

В данном случае карта нулей и полюсов содержит два комплексно-сопряженных полюса (таких же, как в примере 1) и два нуля, лежащих на единичной окружности, на границах основной полосы частот. Поэтому относительно АЧХ можно сделать следующие выводы.

В основной полосе частот $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ АЧХ звена 2-го порядка (5а) является гладкой функцией, причем:

- *внутри* основной полосы частот АЧХ имеет один максимум, расположенный приблизительно на частоте полюса

$$\hat{\omega}_* = \varphi_* \approx \frac{\pi}{3};$$

- *внутри* основной полосы частот АЧХ не имеет минимума;

- *на границах* основной полосы частот $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$ АЧХ равна нулю; нули АЧХ не являются ее минимумами.

Относительно ФЧХ можно сказать, что она представляет собой непрерывную функцию, имеющую на границах основной полосы скачки на π .

12. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ.

В данном примере следует вычислить значения АЧХ и ФЧХ в двух точках:

а) в точке $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$ при $z = j$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = |H(j)| = \left| \frac{1+1}{(1-0,49) + 0,7j} \right| = \sqrt{\frac{2^2}{(1-0,49)^2 + 0,7^2}} \approx 4,505;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arg\{H(j)\} = \arg\left\{ \frac{1+1}{(1-0,49) + 0,7j} \right\} = \arctg\left(\frac{-0,7}{1-0,49}\right) \approx -0,9412;$$

б) в точке максимума АЧХ $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$, который находится приблизительно на частоте φ_* полюса

$$z_{*1,2} = 0,7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$$

$$\hat{\omega}_* \approx \frac{\pi}{3};$$

значения АЧХ и ФЧХ в этой точке, вычисленные по общим формулам соответственно, равны

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 3,9014;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,1015.$$

13. Графики *нормированной* АЧХ и ФЧХ, построенные на основе качественного анализа и экспресс-анализа, представлены на рис. 8.

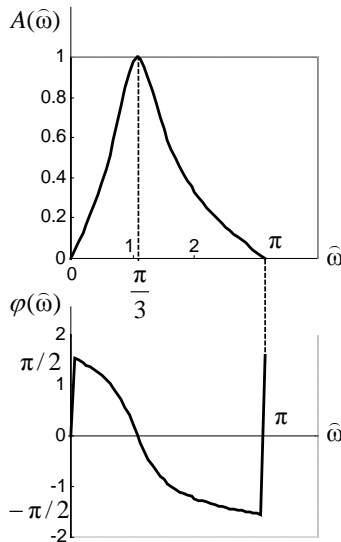


Рис. 8. Графики нормированной АЧХ и ФЧХ (к примеру 2)

Пример 3. Вариант 0С.

Исходные данные – коэффициенты ПФ $H(z)$ 2-го порядка:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 0,7; \quad b_2 = 0,49;$$

$$a_1 = -0,7; \quad a_2 = 0,49.$$

Решение.

1. Запишем ПФ на основе ее общего вида (1.49)

$$H(z) = \frac{1 + 0,7z^{-1} + 0,49z^{-2}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,49z^{-2}}. \quad (16)$$

Исследуемое звено не является базовым.

Знаменатели ПФ небазового звена (1а) и базового звена (1) совпадают, поэтому основное внимание в данном примере, так же как в примере 2, будет уделено анализу «влияния числителя» и студенту предварительно следует изучить пример 1.

2. Используя методику, описанную в лекциях, на основе РУ общего вида получим

$$y(n) = x(n) + 0,7x(n-1) + 0,49x(n-2) + 0,7y(n-1) - 0,49y(n-2). \quad (26)$$

3. На основе структурной схемы рекурсивного звена 2-го порядка общего вида имеем

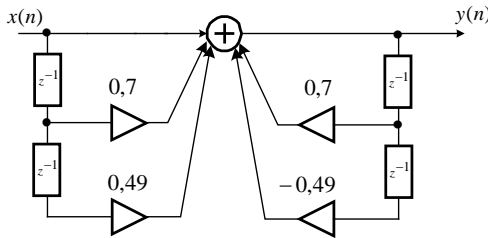


Рис. 9. Структурная схема базового звена 2-го порядка

4. Используя методику, описанную в лекциях, на основе общей формулы импульсной характеристики небазового звена с учетом нулевых начальных условий запишем

$$h(n) = \begin{cases} 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n=0; \\ 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^{n-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n=1; \\ 0,7^n \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^{n-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \\ + 0,49 \cdot 0,7^{(n-2)} \frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{3}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}, & n \geq 2, \end{cases} \quad (36)$$

где значения $r_* = 0,7$ и $\varphi_* = \frac{\pi}{3}$, рассчитаны в п. 4 примера 1.

5. Результаты расчета 5 точек ИХ по формуле (36) с точностью до 4-го знака после запятой приведены в табл. 3.16.

Таблица 3.16.

Вычисление ИХ по формуле (36)

n	$h(n)$ (36)
0	$h(0) = 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 1,0000$

1	$h(1) = 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 1,4$
2	$h(2) = 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,49 \cdot 0,7^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -0,98$
3	$h(3) = 0,7^3 \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,49 \cdot 0,7^1 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0$
4	$h(4) = 0,7^4 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,7 \cdot 0,7^3 \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 0,49 \cdot 0,7^2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$ $= -0,4802$

6. Расчет ИХ по РУ выполняется методом прямой подстановки при нулевых начальных условиях.

Выполнив в РУ (2б) подстановку, запишем уравнение

$$h(n) = u_0(n) + 0,7u_0(n-1) + 0,49u_0(n-2) + 0,7h(n-1) - 0,49h(n-2), \quad (46)$$

результаты решения которого при нулевых начальных условиях приведены в табл. 3.2б.

Таблица 3.2б.

Вычисление ИХ по РУ (46)

n	$h(n)$ (46)
0	$h(0) = u_0(0) + 0,7u_0(-1) + 0,49u_0(-2) + 0,7h(-1) - 0,49h(-2) = 1$
1	$h(1) = u_0(1) + 0,7u_0(0) + 0,49u_0(-1) + 0,7h(0) - 0,49h(-1) = 1,4$
2	$h(2) = u_0(2) + 0,7u_0(1) + 0,49u_0(0) + 0,7h(1) - 0,49h(0) = 0,98$
3	$h(3) = u_0(3) + 0,7u_0(2) + 0,49u_0(1) + 0,7h(2) - 0,49h(1) = 0$
4	$h(4) = u_0(4) + 0,7u_0(3) + 0,49u_0(2) + 0,7h(3) - 0,49h(2) = -0,4802$

7. Результаты вычислений ИХ двумя способами в пп. 5 – 6 совпадают.
8. График ИХ (5 отсчетов) представлен на рис.10.

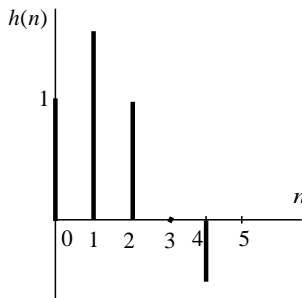


Рис. 10. Импульсная характеристика (5 отсчетов, к примеру 3)

9. Для построения карты нулей и полюсов необходимо вычислить нули и полюсы ПФ (1) по методике, приведенной в лекциях.

Комплексно-сопряженные полюсы вычислены в примере 1, п. 4 и равны

$$z_{*1,2} = 0,7e^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Для определения нулей умножим числитель и знаменатель ПФ (16) на z^2 , получим

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,7z^{-1} + 0,49}{z^2 + a_1z + a_2},$$

и найдем корни числителя

$$z^2 + 0,7z^{-1} + 0,49 = 0,$$

которые являются *комплексно-сопряженными* нулями

$$z_{o,1,2} = -0,35 \pm \sqrt{0,35^2 - 0,49} = -0,35 \pm j0,6062 = \xi_o \pm j\eta_o,$$

или в показательной форме

$$z_{o,1,2} = r_o e^{\pm j\varphi_o} = 0,7e^{\pm j\frac{2\pi}{3}},$$

где

$$r_o = \sqrt{\xi_o^2 + \eta_o^2} = \sqrt{0,35^2 + 0,6062^2} = 0,7;$$

$$\varphi_o = \arctg\left(\frac{\eta_o}{\xi_o}\right) = \arctg\left(\frac{0,6062}{-0,35}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Карта нулей и полюсов изображена на рис. 11 а; на рис. 11 б приведена та же карта с необходимыми комментариями.

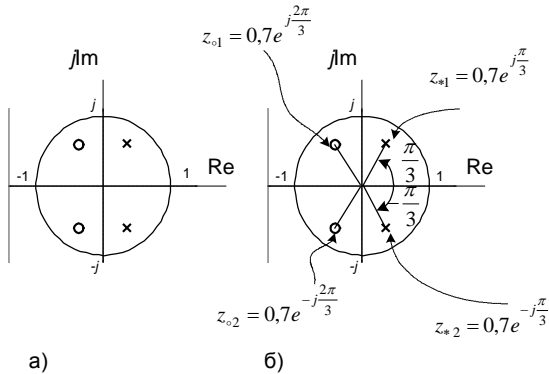


Рис. 11. Карта нулей и полюсов (к примеру 3)

10. См. п. 10 в примере 1.

11. Качественный анализ АЧХ и ФЧХ по карте нулей и полюсов выполняется на основе методики, изложенной в лекциях.

В данном случае карта нулей и полюсов содержит два комплексно-сопряженных полюса (таких же, как в примерах 1 и 2) и два комплексно-сопряженных нуля, не лежащих на единичной окружности. Поэтому относительно АЧХ можно сделать следующие выводы.

В основной полосе частот $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ АЧХ звена 2-го порядка (5) является гладкой функцией, причем:

- *внутри* основной полосы частот АЧХ имеет один *максимум*, расположенный приблизительно на частоте полюса $\hat{\omega}_* = \varphi_* \approx \frac{\pi}{3}$;

- *внутри* основной полосы частот АЧХ имеет один *минимум*, расположенный приблизительно на частоте нуля $\hat{\omega}_0 = \varphi_0 \approx \frac{2\pi}{3}$;

- *на границах* основной полосы частот АЧХ имеет экстремумы, а именно: на частоте $\hat{\omega} = 0$ – минимум, а на частоте $\hat{\omega} = \pi$ – максимум.

Относительно ФЧХ можно сказать, что она представляет собой непрерывную функцию, не имеющую ни на границах, ни внутри основной полосы частот скачков на π .

12. Экспресс-анализ АЧХ и ФЧХ.

В данном примере следует вычислить значения АЧХ и ФЧХ в *пяти* точках:

а) в точке $\hat{\omega} = 0$ при $z = 1$

$$A(0) = |H(1)| = \left| \frac{1 + 0,7 + 0,49}{1 - 0,7 + 0,49} \right| \approx 2,7722;$$

$$\varphi(0) = \arg\{H(1)\} = 0;$$

б) в точке $\hat{\omega} = \pi$ при $z = -1$

$$A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{1 - 0,7 + 0,49}{1 + 0,7 + 0,49} \right| \approx 0,3608;$$

$$\varphi(\pi) = \arg\{H(-1)\} = 0;$$

в) в точке $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$ при $z = j$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = |H(j)| = \left| \frac{(1-0,49) - 0,7j}{(1-0,49) + 0,7j} \right| = \sqrt{\frac{(1-0,49)^2 + 0,7^2}{(1-0,49)^2 + 0,7^2}} = 1;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arg\{H(j)\} = \arg\left\{ \frac{(1-0,49) - 0,7j}{(1-0,49) + 0,7j} \right\} =$$

$$\arctg\left(\frac{-0,7}{1-0,49}\right) - \arctg\left(\frac{0,7}{1-0,49}\right) = -2\arctg\left(\frac{0,7}{1-0,49}\right) \approx -1,8823;$$

г) в точке *максимума* АЧХ $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$, который находится приблизительно на частоте φ_* *полюса*

$$z_{*1,2} = 0,7e^{\pm j\frac{\pi}{3}};$$

$$\hat{\omega}_* \approx \frac{\pi}{3};$$

значения АЧХ и ФЧХ в этой точке равны

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 3,4034;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -1,1726;$$

д) в точке *минимума* АЧХ $\hat{\omega} \approx \hat{\omega}_0$, который находится приблизительно на частоте φ_0 *нуля*

$$z_{01,2} = 0,7e^{\pm j\frac{2\pi}{3}};$$

$$\hat{\omega}_0 \approx \frac{2\pi}{3};$$

значения АЧХ и ФЧХ в этой точке вычислены по общим формулам соответственно и равны

$$A\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,2938;$$

$$\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx -1,1726.$$

13. Графики *нормированной* АЧХ и ФЧХ, построенные на основе качественного анализа и экспресс-анализа представлены на рис. 8.

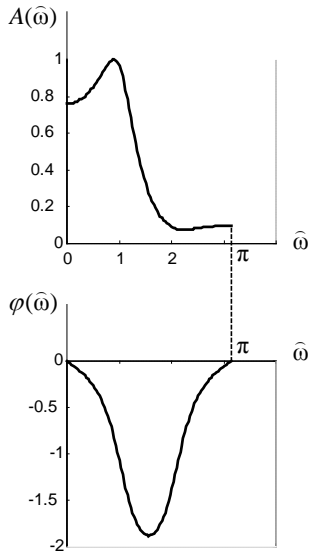


Рис. 12. Графики нормированной АЧХ и ФЧХ (к примеру 3)

Рассмотренные выше примеры 1–3 являются типовыми, их внимательное изучение поможет студенту выполнить контрольную работу для любого варианта табл. 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

Солонина А. И., Улахович Д. А. Линейные дискретные системы. Учебное пособие, СПбГУТ, 2005.