

Лабораторная работа 7

Задание для вариантов 1 - 4, 6 - 37

Даны a, b, h, ϵ ($0 < \epsilon < 1$). Построить таблицу значений заданной функции на отрезке $[a, b]$ с шагом h . Для вычисления функции использовать заданное разложение функции. Функцию вычислять с точностью ϵ . Считаем, что заданная точность достигнута, если очередное слагаемое по модулю меньше ϵ . Использовать директиву препроцессорной обработки `#define` для задания препроцессорного идентификатора.

1.

- 3.19 (8 б.) Для заданных a и p вычислить $x = \sqrt[p]{a}$, используя рекуррентную формулу:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{p^2} \left[(p^2 - 1) + \frac{1}{2}(p + 1) \frac{a}{x_n^p} - \frac{1}{2}(p - 1) \frac{x_n^p}{a} \right].$$

Сколько итераций надо выполнить, чтобы для заданной погрешности ϵ было справедливо соотношение $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$? При каких начальных приближениях x_0 процесс сходится?

2.

- 3.20 (7 б.) Для заданных a и p вычислить $x = \sqrt[p]{a}$ по рекуррентному соотношению Ньютона:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} \left[(p - 1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right]; \quad x_0 = a.$$

Сколько итераций надо выполнить, чтобы для заданной погрешности ϵ выполнялось соотношение: $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$?

3.

- 3.21 (7 б.) Вычислить $x = \sqrt[3]{a}$ для заданного значения a , используя рекуррентное соотношение:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + 2\sqrt[3]{\frac{a}{x_n}} \right); \quad x_0 = a.$$

Сколько итераций надо выполнить для достижения заданной погрешности ϵ , используя условие: $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$?

4.

- 3.22 (7 б.) Для заданного $x > 1$ вычислить $y = \sqrt{x}$ по ите-

рационной формуле: $y_i = \frac{1}{2} \left(y_{i-1} + \frac{x}{y_{i-1}} \right)$ с заданной погрешностью ϵ , задав начальное приближение $y_0 = x$. Сравнить с результатом использования встроенной функции. Сколько итераций пришлось выполнить?

5.

- 3.23 (6 б.) **Текущее среднее.** Числа x_1, x_2, \dots последовательно поступают с устройства ввода. Все числа хранить

в памяти нет необходимости; после ввода каждого числа нужно вычислить и напечатать среднее значение всех введенных чисел: $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

6.

3.26 (6 б.) $\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n-1} + \dots \right], \quad x > 0.$

7.

3.27 (6 б.) $\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right), \quad x < 1.$

8.

3.28 (6 б.) $\ln |\sin x| = -\ln 2 - \cos 2x - \frac{\cos 4x}{2} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} - \dots,$
 $0 < x < \pi.$

9.

$$3.29 \quad (7.6.) \quad a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$$

10.

$$3.30 \quad (7.6.) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

11.

$$3.31 \quad (7.6.) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

12.

$$3.32 \quad (6.6.) \quad x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right), \\ -\pi < x < \pi.$$

13.

$$3.33 \quad (6.6.) \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n-1)^2 \pi^2} \right) \dots$$

14.

$$3.34 \quad (6.6.) \quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2} \right) \dots \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \dots$$

15.

$$3.35 \quad (6.6.) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

16.

$$3.36 \quad (7.6.) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

17.

$$3.37 \quad (7.6.) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

18.

$$3.38 \quad (6.6.) \quad \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x| = \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \dots, \\ |x| < 1.$$

19.

$$3.39 \quad (6.6.) \quad \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x = x + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \dots, \\ -1 < x < 1.$$

20.

$$3.40 \quad (7.6.) \quad (1+2x^2)e^{x^2} = 1 + 3x^2 + \dots + \frac{2n+1}{n!} x^{2n} + \dots$$

21.

$$3.41 \quad (6.6.) \quad \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = -\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2},$$

$$\frac{\pi}{5} \leq x \leq \pi.$$

22.

$$y = e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots;$$

23.

$$y = \ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots + (-1)^{n-1} x^n/n + \dots (|x| < 1);$$

24.

$$\sin x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right]$$

25.

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} \sin 4x + \frac{3}{5 \cdot 7} \sin 6x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \sin 2nx + \dots \right\}$$

$$[0 < x < \pi]$$

26.

$$\sin ax = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right\},$$

где a — не целое число $[-\pi < x < \pi]$

27.

$$\cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a^2} + \frac{\cos x}{1^2 - a^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right\},$$

где a — не целое число. $[-\pi \leq x \leq \pi]$

28.

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad [-\pi < x < \pi]$$

29.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} - \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \quad \left[-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right]$$

30.

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right) \quad [-\pi \leq x \leq \pi]$$

31.

$$\begin{aligned} x^2 - \pi^2 x &= \\ &= -12 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \frac{\sin 4x}{4^3} + \dots \right) \quad [-\pi \leq x \leq \pi]. \end{aligned}$$

32.

$$\ln(x+a) = \ln x + 2 \left[\frac{a}{2x+a} + \frac{a^3}{3(2x+a)^3} + \frac{a^5}{5(2x+a)^5} + \dots \right] \quad [a^2 < (2x+a)^2]$$

33.

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad [0 < x \leq 2]$$

34.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) &= 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \right], \\ &= 2 \operatorname{Arcth} x \quad [x^2 > 1]. \end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right) &= \\ &= \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \dots \quad [x^2 < a^2], \end{aligned}$$

36.

$$\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots \quad \left[x > \frac{1}{2} \right].$$

37.

$$\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right) =$$

$$= \ln \frac{2x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \frac{a^6}{x^6} - \dots$$

$$\left[\frac{x}{a} > 1\right]$$