Лабораторная работа №4
Решение канонической задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом

1. Цель работы: Закрепить теоретические сведения о симплекс-методе решения задачи линейного программирования

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Каноническая формы задачи линейного программирования

Каноническая форма задачи линейного-программирования (КЗЛП) в векторно-матричной записи формулируется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\bar{\mathbf{x}}\in D}\left(\bar{\mathbf{c}}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}\right);\\
&D:\begin{cases} x_i \ge 0, \quad i = 1\ldots n \\ \mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}, \end{cases}\\
&\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\\
&m < n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

n – размерность вектора переменных задачи (число переменных x_i), m – число уравнений и/или неравенств ограничений.

Таким образом, КЗЛП – это задача оптимизации линейной целевой функции при ограничениях, заданных линейными равенствами.

2.2. Симплекс-метод решения КЗЛП

Основные термины, используемые при решении КЗЛП приведены в методических указаниях к лабораторной работе №3.

Напомним основной результат теории ЗЛП – решением ЗЛП является одно из базисных решений, поэтому для решения ЗЛП необходимо перебрать базисные решения задачи по какому-либо алгоритму, одним из которых является симплекс-метод, разработанный в 1947 году Д.Данцигом.

Симплекс-метод решения ЗЛП перебирает базисные решения таким образом, чтобы каждое последующее решение уменьшало значение целевой функции. Процесс перебора начинается с некоторого допустимого базисного решения. На каждом шаге алгоритма в текущем базисном решении заменяется одна из координат.

В настоящей работе используется модифицированный симплекс-метод, вычисления в котором производятся в терминах векторно-матричных операций, а не операций со строками и столбцами симплекс-таблиц.

Иллюстрация работы симплекс-метода в трехмерном случае приведена рисунке 2.1. Красной линией на рисунке 2.1 показана траектория перебора базисных решений (вершин многогранника).

В симплекс-методе КЗЛП представляется в преобразованном виде.

Исходные уравнения КЗЛП:

$$
\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} = f, \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}; \end{cases}
\tag{2}
$$

где f – целевая функция.

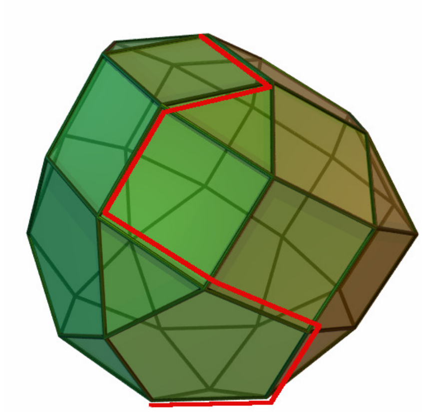

Рисунок 2.1 – Переход от одного базисного решения к другому в симплекс-методе[1]

Используя вектор $\overline{\chi}=\begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$, систему уравнений (2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} f-\overline{\mathbf{c}}^T\cdot\overline{\mathbf{x}}=0, \\ 0\cdot f+\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{b}}; \end{cases} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}\cdot\overline{\chi}=\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Матрицы и векторы, входящие в уравнение (3) – т.н. блочные матрицы и векторы, которые строятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & -c_1 & \dots & -c_n \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} f \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Обозначим для некоторого базисного решения $\overline{\mathbf{x}}_b$, матрицу коэффициентов уравнений ограничений $\mathbf{B}$, а соответствующий вектор коэффициентов целевой функции $\overline{\mathbf{c}}_b^T$. Причем размерности $\overline{\mathbf{x}}_b$, $\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{c}}_b^T$ равны $m\times 1$, $m\times m$ и $1\times m$ соответственно.

Для базисного решения $\overline{\mathbf{x}}_b$, система (3) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}_b^T \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Уравнение (5) не является недоопределенным, поэтому оно может быть разрешено относительно текущего базисного решения:

$$\begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}_b^T \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mathbf{c}}_b^T\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{c}}_b^T\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

2.2.1. Симплекс-таблицы

Процесс перебора базисных решений в симплекс-методе реализуется путем преобразования т.н. симплекс-таблиц.

Домножив левую и правую часть уравнения (3) на матрицу текущего базисного решения, получим следующее матричное уравнение:

[1] http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Simplex-method-3-dimensions.png

$$\begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}_b^T \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}_b^T \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Симплекс-таблицей называется табличная запись матричного уравнения (7), заполняется симплекс-таблица соответствии с таблицей 2.1.

Таблица 2.1. Симплекс-таблица

Базис	$\overline{\mathbf{x}}$	Решение
f	$\overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T$	$\overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$
$\overline{\mathbf{x}}_b$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$

Пример 1.

Рассмотрим построение симплекс-таблицы для нижеприведенной КЗЛП.

Целевая функция: $f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$

Система ограничений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5; \end{cases}$

Решение

В данной задаче $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $n = 4$, $m = 2$.

Построим симплекс-таблицу для базиса x_3, x_4.

Для данного базиса $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{c}}_b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Вычисляем $\overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad cb := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$cb^T \cdot B^{-1} \cdot A - c^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем текущее базисное решение:

$$cb^T \cdot B^{-1} \cdot b \rightarrow \frac{43}{2} \qquad B^{-1} \cdot b \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Заполняем симплекс-таблицу:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
f	$3/2$	$-1/2$	0	0	$43/2$
x_3	0	$1/2$	1	0	2
x_4	$1/2$	0	0	1	$3/2$

В симплекс-таблице в столбце "Базис" пишутся целевая функция f и базисные переменные. В первую строку таблицы переписываются соответствующие столбцы матрицы $\overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T$, в строки 2–3 переписываются соответствующие троки матрицы $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. В столбец "Решение" переписывается значение выражений $\overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ и $\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ соответственно.

Первую строку симплекс-таблицы будем далее называть *f*-строкой.

2.2.2. Условие оптимальности базисного решения

На каждом шаге симплекс-метода производится изменение текущего базисного вектора, какая-то переменная исключается из базиса, какая-то добавляется.

Критерием для включения переменной в базис является возможное улучшение условия оптимальности – приближение к оптимальному решению.

Если соответствующее переменной значение, стоящее в *f*-строке симплекс-таблицы, строго положительно, то включение переменной в базис может улучшить значение критерия оптимальности. Таких переменных на каждом шаге алгоритма может несколько. Для выбора конкретной переменной используется следующее правило: *в базис вводится переменная, которой соответствует наибольший положительный коэффициент в f-строке симплекс-таблицы*. В симплекс-таблице примера 1 такой переменной является x_1.

На основании вышесказанного можно сформулировать следующее условие оптимальности решения: *если на текущем шаге алгоритма для всех небазисных переменных значения f-строки строго отрицательны, то текущее решение является оптимальным*.

2.2.3. Критерий допустимости нового решения

На основании уравнения (7) можно записать:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T \\ 0 & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{c}}_b^T \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}} \tag{8}$$

Для i-й базисной переменной, преобразовав выражение (8), можно получить:

$$\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i + \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_j\right)_i \cdot x_j = \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i, \tag{9}$$

где $\overline{\mathbf{P}}_j$ – j-й столбец матрицы A.

В выражении (9) запись $\left(\overline{\mathbf{a}}\right)_i$ означает i-я строка вектора $\overline{\mathbf{a}}$.

Пусть на основании критерия оптимальности п.2.2.2 переменная x_k должна быть включена в базис, тогда в новом базисе ее значение будет отличным от нуля, а значения остальных небазисных переменных будут равны нулю. Тогда выражение (9) можно переписать в виде:

$$\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i + \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i \cdot x_k = \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i$$

$$\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i = \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i - \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i \cdot x_k \tag{10}$$

В правой части выражения (10) $\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i \geq 0$, тогда если $\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i > 0$, то увеличение переменной x_k приведет к уменьшению i-й переменной базиса $\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i$. Если переменная $\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i$ исключается из базиса, то $\left(\overline{\mathbf{x}}_b\right)_i = 0$, тогда

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i - \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i \cdot x_k = 0$$

$$x_k = \frac{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i}{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i} \tag{11}$$

Чем больше значение x_k, тем ближе решение к оптимальному, поэтому среди переменных базиса следует исключать ту, которая в наибольшей степени ограничивает увеличение переменной x_k, т.е. ту, для которой значение отношения $\frac{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i}{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i}$ является минимальным:

$$k = \arg\min_i \left(\frac{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\right)_i}{\left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i} \right), \left(\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k\right)_i > 0 \tag{12}$$

2.2.4. Вычислительная процедура симплекс-метода

Алгоритм симплекс метода состоит из следующих шагов:

0) Определяется начальное допустимое базисное решение $\overline{\mathbf{x}}_b$ и соответствующих матрицы $\mathbf{B}$ и вектора $\overline{\mathbf{c}}_b$

1) Расчет матрицы $\mathbf{B}^{-1}$

2) Вычисление $\overline{\mathbf{c}}_b^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \overline{\mathbf{c}}^T$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ и заполнение симплекс-таблицы

3) Проверка текущего решения по критерию оптимальности (п.2.2.2). Если решение является оптимальным, то вычисления заканчиваются.

4) Определение вводимой в базис переменной x_k – переменной, которой соответствует наибольший положительный коэффициент в f-строке симплекс-таблицы.

Для данной переменной определяется вектор $\overline{\mathbf{P}}_k$ – вектор-столбец коэффициентов при переменной в системе ограничений (k-й столбец матрицы $\mathbf{A}$).

5) Вычисление вектора $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{P}}_k$

Если все элементы вектора $\overline{\mathbf{R}}$ отрицательны или равны нулю, то задача не имеет конечного решения, вычисления заканчиваются.

6) Вычисление вектора $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$. Для всех строго положительных элементов вектора $\overline{\mathbf{R}}$ вычисляется отношение (11).

Базисная переменная x_r, которой соответствует наименьшее значение отношения (11), исключается из базиса.

7) Формируется новый базис путем замены в нем столбца соответствующего переменной x_r на столбец, соответствующий переменной x_k

8) Переход к шагу 1 алгоритма.

2.2.5. Определение начального допустимого базисного решения

Для работы алгоритма симплекс-метода на 0-м шаге необходимо выбрать допустимое базисное решение. Выбор допустимого базисного решения представляет собой отдельную задачу.

В настоящей работе предлагается использовать следующий подход: в качестве свободных переменных при определении начального допустимого решения в задачах, получаемых приведением СЗЛП к КЗЛП, следует выбирать дополнительные переменные, с помощью которых неравенства сводятся к равенствам.

2.2.6. Пример решения КЗЛП модифицированным симплекс-методом

Решим пример лабораторной работы №3 симплекс-методом.

Постановка задачи

$$\overline{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\overline{\mathbf{x}} \in D} (x_1 + x_2);$$

$$D: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

Решение

Из вида ограничений очевидно, что с помощью переменных x_3 и x_4 ограничения-неравенства были приведены к равенствам. Поэтому выбираем их в качестве свободных переменных.

Ниже приведен документ MathCAD, в котором решена приведенная выше КЗЛП симплекс-методом.

Исходные данные

$C := (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$ORIGIN := 1$

Шаг 0

Выбираем в качестве базисных переменных x1 и x2

Базис x1x2

$B := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 1 \rangle}, A^{\langle 2 \rangle}\right) \qquad cb := \mathrm{stack}(C_1, C_2) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Шаг 1 $\quad B1 := B^{-1} \qquad B1 = \begin{pmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$

Шаг 2

$f := cb^T \cdot B1 \cdot A - C^T \qquad f = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$

$XX := B1 \cdot A \qquad XX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$

Симплекс-таблица

$$\mathrm{augment}\left(\mathrm{stack}(f, XX), \mathrm{stack}\left(cb^T \cdot B1 \cdot b, B1 \cdot b\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -0.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & -1 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Шаг 3 Текущее решение неоптимально

Шаг 4

В f-строке симплекс-таблицы наибольший положительный коэффициент соответствует x3

$f := cb^T \cdot B1 \cdot A - C^T$ $\quad f = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

$XX := B1 \cdot A$ $\quad XX = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 & -0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

Симплекс-таблица

$$\text{augment}\left(\text{stack}(f, XX), \text{stack}\left(cb^T \cdot B1 \cdot b, B1 \cdot b\right)\right) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 1 & -0.25 & 1.75 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$ Текущее решение неоптимально

В f-строке симплекс-таблицы наибольший положительный коэффициент соответствует x4

$Pk := A^{\langle 4 \rangle}$

$R := B1 \cdot Pk$ $\quad R = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ вектор R содержит и положительные элементы

$q := B1 \cdot b$ $\quad q = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

Текущий базис x3x2, следовательно исключаем из базиса переменную x2, вместо нее в базис вводим переменную x4

Базис x3x4

$B := \text{augment}\left(A^{\langle 3 \rangle}, A^{\langle 4 \rangle}\right)$ $\quad cb := \text{stack}\left(C_3, C_4\right)$

$B1 := B^{-1}$ $\quad B1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Pk := A^{\langle 3 \rangle}$

Шаг 5

$R := B1 \cdot Pk$ $\quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ вектор R содержит и положительные элементы

Шаг 6

$q := B1 \cdot b$ $\quad q = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

Шаг 7

Данный даг можно было бы опустить, т.к. вектор R содержит только один положительный элемент, следовательно именно соответствующую ему переменную необходимо исключить из базиса

$i := 1 .. 2$

$Ko_i := \dfrac{q_i}{R_i}$ $\quad Ko = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

Текущий базис x1x2, следовательно исключаем из базиса переменную x1, вместо нее в базис вводим переменную x3

Базис x3x2

$B := \text{augment}\left(A^{\langle 3 \rangle}, A^{\langle 2 \rangle}\right)$ $\quad cb := \text{stack}\left(C_3, C_2\right)$

Дальнейшие вычисления будем выполнять без нумерации шагов

$B1 := B^{-1}$ $\quad B1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

$f := cb^T \cdot B1 \cdot A - C^T$ $\qquad f = (-1\ \ -1\ \ 0\ \ 0)$

$XX := B1 \cdot A$ $\qquad XX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Симплекс-таблица

$S := \text{augment}\left(\text{stack}(f, XX), \text{stack}\left(cb^T \cdot B1 \cdot b, B1 \cdot b\right)\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Текущее решение оптимально

Оптимальное значение целевой функции : $S_{1,5} = 0$

Оптимальные значения базисных переменных: $S_{2,5} = 2$ x3

$S_{3,5} = 1$ x4

Т.о. оптимальное решение

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{2,5} & S_{3,5} \end{pmatrix} = (0\ \ 0\ \ 2\ \ 1)$

Проверим встроенными средствами MathCAD

$f(x) := C^T \cdot x$ $\qquad x := (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$

Given

$A \cdot x = b$

$x \geq 0$

Оптимальное решение $Xo := \text{Minimize}(f, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Оптимальное значение целевой функции $C^T \cdot Xo = 0$

3. Задания на работу

3.1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, номер варианта, ФИО студента, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рисунке 3.1.

Лабораторная работа №3.

Решение канонической задачи линейного программирования симплекс-методом

Выполнил: студент гр. 111111 Иванов И.И.

Дата: 01.03.2009 г.

Рисунок 3.1. – Образец форматирования текста

3.2. Привести к канонической форме ЗЛП:

$$\bar{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\bar{\mathbf{x}} \in D} f(\bar{\mathbf{x}}); \qquad f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1 - x_2$$

$$D: \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq 1, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \leq 3, \\ \gamma_1 x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Параметры α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 определяются по формулам:

$\alpha_1 = N$, $\alpha_2 = 7 - N$, $\beta_1 = N - 8$, $\beta_2 = 14 - N$, $\gamma_1 = N - 15$ где N – номер студента по журналу.

3.3. Решить КЗЛП симплекс-методом

3.4. Решить КЗЛП встроенными средствами MathCAD (функция Minimize)

Каждое задание должно начинаться с текстового блока, в котором указан номер и формулировка задания.

4. Контрольные вопросы

1. Как формулируется критерий оптимальности решения КЗЛП?
2. Как заполняется симплекс-таблица?
3. В чем заключается смысл симплекс-метода?
4. Каким образом определяется какая переменная должна быть исключена из базиса на текущем щаге?
5. Каким образом определяется какая переменная должна быть включена в базис на текущем шаге?

5. Рекомендуемая литература

5.1. Таха, Хамди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.: ил.