Лабораторная работа №3
Решение канонической задачи линейного программирования методом перебора

1. Цель работы: Закрепить теоретические сведения о методах решения канонической задачи линейного программирования

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Каноническая и стандартная формы задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называются задачи, в векторно-матричном виде записываемые следующим образом:

$$\overline{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\overline{\mathbf{x}}\in D}\left(\overline{\mathbf{c}}^T \cdot \overline{\mathbf{x}}\right);$$
$$D:\begin{cases} x_i \ge 0, \quad i = 1\ldots n \\ \mathbf{a}_j^T \cdot \overline{\mathbf{x}} \begin{Bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{Bmatrix} b_j, \qquad j = 1\ldots m \end{cases} \tag{1}$$

Конструкция $\begin{Bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{Bmatrix}$ в выражении (1) означает, что на ее месте может стоять один из знаков $\ge$, $\le$ или $=$.

n – размерность вектора переменных задачи (число переменных x_i), m – число уравнений и/или неравенств ограничений.

Таким образом, ЗЛП – это задача оптимизации линейной целевой функции при ограничениях, заданных линейными равенствами или неравенствами.

Среди различных вариантов постановки ЗЛП выделяют две формы, отличающиеся способом задания ограничений:

1) каноническая (КЗЛП);
2) стандартная (СЗЛР).

В канонической форме все ограничения заданы в виде равенств, причем число равенств меньше размерности вектора переменных задачи.

В стандартной форме все ограничения заданы в виде неравенств, причем число неравенств больше размерности вектора переменных системы ($m \ge n+1$).

Указанные формы постановки ЗЛП приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Формы постановки ЗЛП

Каноническая	Стандартная
$\overline{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\overline{\mathbf{x}}\in D}\left(\overline{\mathbf{c}}^T \cdot \overline{\mathbf{x}}\right);$ $D:\begin{cases} x_i \ge 0, \quad i = 1\ldots n \\ \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}, \end{cases}$ $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m < n$	$\overline{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\overline{\mathbf{x}}\in D}\left(\overline{\mathbf{c}}^T \cdot \overline{\mathbf{x}}\right);$ $D:\begin{cases} x_i \ge 0, \quad i = 1\ldots n \\ \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{x}} \le \overline{\mathbf{b}}, \end{cases}$ $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \ge n+1$

Любая форма постановки ЗЛП может быть сведена к указанным двум с помощью следующих преобразований:

1. если в условии задачи ЛП требуется определить максимум функции f(**x**) , то это эквивалентно нахождению минимума -f(**x**).

2. В ограничениях типа неревенств возможна замена знака неравенства на противоположный, т.е. неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

эквивалентно неравенству

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

3. Ограничения в виде неравенства можно заменить ограничением в виде равенства. Пусть ограничение имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

Вводим дополнительную переменную $x_{n+1} \geq 0$, тогда

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$$

Если знак неравенства противоположный, т,е,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b, \text{ то}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - x_{n+1} = b$$

При этом, естественно, увеличивается размерность вектора **x**.

4. От ограничений в виде равенств можно перейти к ограничениям в виде неравенств следующим образом. Систему из m уравнений с n переменными (m<n) решить относительно m переменных, т.е. выразить эти переменные через остальные (n-m) переменных. Тогда с учетом того, что все они неотрицательны, получим m неравенств.

2.3. Методы решения КЗЛП

Определим основные термины, используемые при решении КЗЛП.

Точка, удовлетворяющая ограничениям задачи называется допустимым решением или планом.

Допустимое решение, при котором целевая функция f(x) приобретает минимальное значение называется оптимальным решением (оптимальным планом),

Набор из m переменных, для которых определитель матрицы, составленный из коэффициентов при этих переменных, отличен от нуля, называется базисом а сами переменные базисными переменными.

Оставшиеся (n-m) переменных называются свободными переменными.

Решение системы из m уравнений с m базисными переменными при условии равенства нулю свободных (n-m) переменных называется базисным решением.

Если базисное решение дает отрицательные значения некоторых переменных, то оно называется недопустимым, а базисное решение с неотрицательными значениями переменных называется допустимым базисным решением.

В теории ЗЛП доказано, что решением ЗЛП является одно из базисных решений, поэтому для решения ЗЛП необходимо перебрать базисные решения задачи по какому-либо алгоритму.

2.3.1. Метод перебора базисных решений

В методе перебора определяются все базисные решения задачи. Для этого необходимо рассмотреть всевозможные случаи сочетания базисных (m штук) переменных. Количество перебираемых вариантов определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad (2)$$

Для определения базисного решения необходимо выбрать базисные переменные (m переменных), приравняв к нулю свободные, и решить полученную систему уравнений ограничений.

Перебрав все сочетания базисных переменных и, соответственно, определив все базисные решения, среди них выбираются допустимые базисные решения (с неотрицательными переменными).

Рассчитав значения целевой функции для каждого из допустимых базисных решений, среди них выбирается то, при котором целевая функция достигает минимального значения.

Пример

Решим методом перебора следующую КЗЛП:

$$\bar{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\bar{\mathbf{x}}\in D}\left(x_1 + x_2\right);$$

$$D:\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

В данной задаче размерность вектора переменных n=4, число уравнений m=2.

Методом перебора необходимо перебрать $N = C_n^m = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ базисных решений.

Сочетания базисных переменных: x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4.

В таблице 2.2 представлены сочетания базисных переменных, системы уравнений и базисные решения

Таблица 2.2. К решению примера

№	Сочетание	Система уравнений	Базисное решение	Значение целевой функции
1	x_1x_2	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 = 1; \end{cases}$	$(3.5 \quad -1.5 \quad 0 \quad 0)$	-
2	$\mathbf{x_1x_3}$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 = 1 \end{cases}$	$(0.5 \quad 0 \quad 1.5 \quad 0)$	0.5
3	x_1x_4	$\begin{cases} x_1 = 2, \\ 2x_1 + x_4 = 1 \end{cases}$	$(2 \quad 0 \quad 0 \quad -3)$	-
4	$\mathbf{x_2x_3}$	$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_2 = 1 \end{cases}$	$(0 \quad 0.25 \quad 1.75 \quad 0)$	0.25
5	x_2x_4	$\begin{cases} x_2 = 2, \\ 4x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$	$(0 \quad 2 \quad 0 \quad -7)$	-
6	$\mathbf{x_3x_4}$	$\begin{cases} x_3 = 2, \\ x_4 = 1 \end{cases}$	$(0 \quad 0 \quad 2 \quad 1)$	0

Жирным шрифтом выделены допустимые базисные решения.

Среди допустимых базисных решений минимальное значение целевая функция имеет для сочетания 6.

Таким образом, Оптимальное решение: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

На рисунке 2.1 приведен фрагмент документа MathCAD, в котором решена рассмотренная задача. Как видно из рисунка методом перебора получено правильное решение.

$$f(x1, x2, x3, x4) := x1 + x2$$

$$x1 := 2 \qquad x2 := 2 \qquad x3 := 2 \qquad x4 := 2$$

Given

$$x1 + x2 + x3 = 2$$

$$2x1 + 4x2 + x4 = 1$$

$$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0 \qquad x3 \ge 0 \qquad x4 \ge 0$$

$$R := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3, x4) \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.1 – Решение примера в MathCAD

Обратите внимание, что целевая функция в MathCAD должна быть определена как функция всех переменных задачи.

2.4. Матричные операции в MathCAD

При выполнение настоящей лабораторной работы удобно использовать вектор-матричную форму записи уравнений.

В среде MathCAD векторные и матричные операции собраны на панели инструментов вектора и матрицы (Vector and Matrix Toolbar), изображение которой приведена на рисунке 2.2.

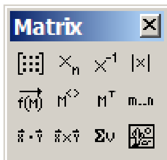

Рисунок 2.2 – Панель инструментов вектора и матрицы

Среди представлнных на панели операций в данной работе могут быть полезны следующие:

-  – создание матрицы;
-  – нижний индекс, для вектора эта операция выбирает из вектора элемент с указанным номером;
-  – вычисление обратной матрицы;
-  – вычисление определителя матрицы;
-  – получение столбца матрицы;
-  – вычисление транспонированной матрицы;
- – создание переменной-диапазона;

По умолчанию MathCAD ведет нумерацию строк и столбцов матриц с нуля. Для повышения наглядности вычисление удобно начинать нумерацию с 1. Число, с которого начинается нумерация элементов векторов и матриц хранится в переменной ORIGIN. Изменив ее значение, можно начать нумерацию с любого числа. Так для начала нумерации с 1 используется команда, приведенная на рисунке 2.3

$$ORIGIN := 1$$

Рисунок 2.3 – Команда задания начала нумерации с 1

Для решения систем линейных уравнений удобно использовать известные из линейной алгебры формулы:

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}} \qquad \rightarrow \qquad \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{b}}. \tag{3}$$

Запись формулы (3) в среде MathCAD приведена на рисунке 2.4.

$$x1 := A1^{-1} \cdot b$$

Рисунок 2.4 – Нахождение решения системы линейных уравнений с использованием обратно матрицы

Также при работе с матрицами бывает необходимо "собрать" матрицу из нескольких исходных, расположив их слева направо или сверху вниз. Для этого используются функции augment и stack, которые имеют следующий синтаксис:

augment(A,B,C,....)

stack(A,B,C...)

где A,B,C – исходные матрицы.

Функции возвращают матрицы следующей структуры:

$$augment(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \qquad stack(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

2.5. Пример решения КЗЛП методом перебора

Ниже приведен документ MathCAD, в котором задача примера решена с использованием операций MathCAD.

Исходные данные

$$c := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ORIGIN := 1$$

1. Сочетание x_1x_2 Матрица системы: $A1 := augment\left(A^{\langle 1 \rangle}, A^{\langle 2 \rangle}\right) \qquad A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$x1 := A1^{-1} \cdot b$$

Базисное решение $b1 := \begin{pmatrix} x1_1 & x1_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad b1^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **недопустимое**

2. Сочетание x_1x_3 Матрица системы: $A2 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 1\rangle}, A^{\langle 3\rangle}\right)$ $A2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$x2 := A2^{-1} \cdot b$

Базисное решение $b2 := \begin{pmatrix} x2_1 & 0 & x2_2 & 0 \end{pmatrix}^T$ $b2^T \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Значение целевой функции $f2 := c \cdot b2$ $f2 = 0.5$

3. Сочетание x_1x_4 Матрица системы: $A3 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 1\rangle}, A^{\langle 4\rangle}\right)$ $A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$x3 := A3^{-1} \cdot b$

Базисное решение $b3 := \begin{pmatrix} x3_1 & 0 & 0 & x3_2 \end{pmatrix}^T$ $b3^T \rightarrow (2 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -3)$ **недопустимое**

4. Сочетание x_2x_3 Матрица системы: $A4 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 2\rangle}, A^{\langle 3\rangle}\right)$ $A4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$x4 := A4^{-1} \cdot b$

Базисное решение $b4 := \begin{pmatrix} 0 & x4_1 & x4_2 & 0 \end{pmatrix}^T$ $b4^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Значение целевой функции $f4 := c \cdot b4$ $f4 = 0.25$

5. Сочетание x_2x_4

Матрица системы: $A5 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 2\rangle}, A^{\langle 4\rangle}\right)$ $A5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$x5 := A5^{-1} \cdot b$

Базисное решение $b5 := \begin{pmatrix} 0 & x5_1 & 0 & x5_2 \end{pmatrix}^T$ $b5^T \rightarrow (0 \ \ 2 \ \ 0 \ \ -7)$ **недопустимое**

6. Сочетание x_3x_4 Матрица системы: $A6 := \mathrm{augment}\left(A^{\langle 3\rangle}, A^{\langle 4\rangle}\right)$ $A6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x6 := A6^{-1} \cdot b$

Базисное решение $b6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & x6_1 & x6_2 \end{pmatrix}^T$ $b6^T \rightarrow (0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 1)$

Значение целевой функции $f6 := c \cdot b6$ $f6 = 0$

Оптимальное решение: $x := b6$ $x^T = (0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 1)$

3. Задания на работу

3.1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, номер варианта, ФИО студента, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рисунке 3.1.

Лабораторная работа №3.

Решение канонической задачи линейного программирования

Выпонил: студент гр. 111111 Иванов И.И.

Дата: 01.03.2009 г.

Рисунок 3.1. – Образец форматирования текста

3.2. Привести к канонической форме ЗЛП:

$$\overline{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\overline{\mathbf{x}} \in D} f\left(\overline{\mathbf{x}}\right); \qquad f\left(\overline{\mathbf{x}}\right) = x_1 - x_2$$

$$D: \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \le 1, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \le 3, \\ \gamma_1 x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

Параметры α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 определяются по формулам:

$\alpha_1 = N$, $\alpha_2 = 7 - N$, $\beta_1 = N - 8$, $\beta_2 = 14 - N$, $\gamma_1 = N - 15$ где N – номер студента по журналу.

3.3. Решить КЗЛП методом перебора базисных решений.

3.4. Решить КЗЛП встроенными средствами MathCAD (функция Minimize)

Каждое задание должно начинаться с текстового блока, в котором указан номер и формулировка задания.

4. Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача линейного программирования?
2. Назовите основные формы постановки ЗЛП и укажите в чем заключается их отличие.
3. Какие приемы используются для приведения задачи линейного программирования к каноническому виду?
4. Каким образом задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации и наоборот?