Лабораторная работа №5
Решение транспортной задачи методом потенциалов

1. Цель работы: Закрепить теоретические сведения о транспортной задаче и методах ее решения.

2. Краткие теоретические сведения
2.1. Постановка транспортной задачи

Среди задач линейного программирования выделяют т.н. транспортную задачу (далее ТЗ). В классической постановке это задача об отыскании оптимального плана перевозок однородного товара с нескольких складов различным потребителям на однородных транспортных средствах. Критерием оптимальности является минимальная стоимость перевозок.

Исторически ТЗ задача была сформулирована при решении экономических задач планирования производства. Но задачи такого типа встречаются также и в электроэнергетике, например, при построении оптимальной конфигурации электрической сети. При этом складами выступают источники электрической энергии (трансформаторные подстанции), потребителями являются населенные пункты и различные объекты. Сеть проектируется исходя из минимальной стоимости, т.е. минимальной длины линий электропередач.

Рассмотрим математическую постановку ТЗ.

Пусть имеется m складов и n потребителей . Запасы на i-м складе составляют A_i. Заказ j-го потребителя составляет B_j.

Известна стоимость перевозки единицы груза (тарифы) между i-м складом и j-м потребителем – z_{ij}, эти стоимости записываются в виде матрицы – $Z = \left\| z_{ij} \right\|$.

Переменными в задаче являются объемы перевозок между i-м складом и j-м потребителем – x_{ij}. Совокупность всех x_{ij} называется планом перевозок и записывается в виде матрицы $X = \left\| x_{ij} \right\|$, называемой матрицей перевозок. Очевидно, что общее количество переменных в задаче составляет nm.

Общий объем перевозок с i-го склада всем n потребителям не может превысить запасы на i-м складе, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i \tag{1}$$

Неравенство (1) называется балансом запасов.

Кроме того объем перевозок j-му потребителю со всех m складов не может превысить его заказ, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le B_j \tag{2}$$

Неравенство (2) называется балансом заказов.

Т.к. количество перевозимого товара является величиной неотрицательной, то все переменные задачи удовлетворяют неравенству:

$$x_{ij} \ge 0, i = 1\ldots m, j = 1\ldots n \tag{3}$$

Критерий минимальной стоимости перевозок может быть записан в виде:

$$Z\left(\overline{\mathbf{x}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}z_{ij}\rightarrow\min \tag{4}$$

Объединяя вместе формулы (1) – (4) получим математическую запись ТЗ:

$$\overline{\mathbf{x}}^{*}=\arg\min_{\overline{\mathbf{x}}\in D}\left[Z\left(\overline{\mathbf{x}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}z_{ij}\right]$$
$$D:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le A_{i},\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le B_{j},\\ x_{ij}\ge 0, i=1\ldots m,\ j=1\ldots n\end{cases} \tag{5}$$

Общий объем запасов на складах обозначим A,

$$a=\sum_{i=1}^{m}A_{i}$$

Общий объем заказов потребителей обозначим b

$$b=\sum_{i=1}^{n}B_{i}$$

В зависимости от соотношения общих объемов запасов и заказов выделяют два вида ТЗ:

1) $a=b$ – закрытая (сбалансированная) задача;
2) $a\ne b$ – открытая задача.

Далее, будем рассматривать только закрытую задачу. Очевидно, что в закрытой задаче после осуществления перевозок запасы на всех складах будут израсходованы, а все потребители будут удовлетворены, т.е. в ограничениях задачи (5) неравенства обратятся в равенства.

Т.о. математическая запись рассматриваемой ТЗ выглядит следующим образом:

$$\overline{\mathbf{x}}^{*}=\arg\min_{\overline{\mathbf{x}}\in D}\left[Z\left(\overline{\mathbf{x}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}z_{ij}\right]$$
$$D:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_{i},\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=B_{j},\\ \sum_{i=1}^{m}A_{i}=\sum_{j=1}^{n}B_{j}\\ x_{ij}\ge 0, i=1\ldots m,\ j=1\ldots n\end{cases} \tag{6}$$

Закрытая ТЗ является специфической КЗЛП. В ней также выделяют базисные и свободные переменные.

Можно показать, что в закрытой задаче одно из уравнений баланса запасов или заказов является избыточным, поэтому число базисных переменных определяется как $n+m-1$, а число свободных – $n\cdot m-(n+m-1)$.

Особенности закрытой ТЗ:

- все ограничения имеют вид равенств;
- все коэффициенты в системе ограничений равны +1;
- каждая переменная входит в уравнения ограничений дважды: один раз в уравнения ограничений складских запасов и один раз в ограничения заказов потребителей.

ТЗ может быть решена обычными методами решения задач линейного программирования, например симплекс-методом. Но ввиду специфической структуры для данной задачи разработаны специальные методы такие как рассматриваемый ниже метод потенциалов.

2.2. Метод потенциалов

При решении транспортной задачи используют т.н. транспортную таблицу, которая строится следующим образом:

x_{11} z_{11}	…	x_{1n} z_{1n}	A_1
…	…	…	…
x_{m1} z_{m1}	…	x_{mn} z_{mn}	A_m
B_1	…	B_n	Z

В правом столбце транспортной таблицы указывают складские запасы, в нижней строке – заказы потребителей, в правом нижнем углу – значение целевой функции.

В каждой ячейке транспортной таблицы в левом верхнем углу указывает значение соответствующей переменной x, а в правом нижнем углу значение соответствующей стоимости z.

Каждая строка таблицы соответствует балансу запасов, а каждый столбец – балансу заказов.

В транспортной таблице также можно выделить базисные переменные – отличные от нуля и свободные – равные нулю.

Метод потенциалов представляет собой модифицированный и упрощенный вариант симплекс-метода, поэтому он также представляет собой итерационный алгоритм перебора допустимых базисных решений, на каждом шаге которого улучшается предыдущее приближение к оптимальному решению, путем исключения из базиса одной из базисных переменных и включения в базис одной из свободных.

В методе потенциалов каждой строке и каждому столбцу транспортной таблицы присваивается соответствующий потенциал: строкам – $U_i, i=1\ldots m$; столбцам – $V_j, j=1\ldots n$

Потенциалы указываются в дополнительной строке и столбце транспортной таблицы:

	V_1	…	V_n	
U_1	x_{11} z_{11}	…	x_{1n} z_{1n}	A_1
…	…	…	…	…
U_m	x_{m1} z_{m1}	…	x_{mn} z_{mn}	A_m
	B_1	…	B_n	Z

Для каждой базисной переменной x_{ij} для потенциалов выполняются соотношения:

$$U_i + V_j = z_{ij} \qquad (7)$$

На основе формулы (7) можно составить систему уравнений для определения потенциалов. Число потенциалов всегда на 1 больше, чем число базисных переменных, поэтому для определения потенциалов какому-то одному из них присваивают произвольное значение (обычно полагают $U_1 = 0$) и затем последовательно вычисляют значения остальных.

Для каждой свободной переменной вычисляют величину: $U_i + V_j - z_{ij}$, которая указывается в левом нижнем углу транспортной таблицы.

Эта величина соответствует значению из f-строки симплекс-таблицы (см. работу №4), *поэтому в базис вводится переменная имеющая наибольшее положительное значение рассчитанной величины*. Если не нашлось такой свободной переменной, то полученной решение оптимальное.

Исключаемая переменная определяется более сложно. Для этого строится т.н. замкнутый цикл.

Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, начинающуюся в клетке, включаемой в базис свободной переменной, остальные вершины лежат в клетках базисных переменных. Начальной вершине присваивается знак "+", далее знаки чередуются. Знак "+" соответствует увеличению переменной, знак "-" уменьшению. Вершины в которых расположен знак "-" называются отрицательными.

Среди отрицательных вершин выбирается вершина с наименьшим значением базисной переменной, и на эту величину изменяются все переменные в соответствии с их знакам. В результате выбранная свободная переменная становится базисной, а исключаемая переменная – свободной.

Т.о. образом алгоритм метода потенциалов заключается в следующем:

Шаг 1. Определение начального допустимого базисного решения

Шаг 2. Определение соответствующих базисному решению потенциалов

Шаг 3. Определение вводимой в базис переменной. Если такой переменной нет, то текущее решение оптимальное

Шаг 4. Построение замкнутого цикла и определение исключаемой переменной.

Шаг 5. Полученное базисное решение принимаем в качестве начального и переходим на шаг 2.

2.3. Получение первоначального допустимого решения

Для получения начального допустимого базисного решения применяются 3 метода:

1) метод северо-западного угла;
2) метод минимального элемента;
3) метод Фогеля.

Различие методов заключается в "качестве" начального решения, т.е. удаленности от оптимального, а также в объеме необходимых вычислений.

2.3.1. Метод северо-западного угла

Расчеты начинаются с верхней левой ячейки транспортной таблицы (с переменной x_{11}), что и обусловило название метода.

Шаг 1. Переменной x11 присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на запасы и заказы

Шаг 2. Вычеркиваем строку (или столбец) с полностью реализованным предложением (или с удовлетворенным спросом). В вычеркнутой строке (столбце) больше никаким переменным значение не присваивается. Если одновременно удовлетворяется и предложение и спрос, то вычеркивается только строка или только столбец.

Шаг 3. Если осталась не вычеркнута только одна строка или столбец, то процесс останавливается.

Шаг 4. Переходим к ячейке справа, если вычеркнут столбец, или к нижележащей ячейке, если вычеркнута строка. В ячейке также присваиваем максимально возможное значение, удовлетворяющее ограничениям на запасы и заказы. Переход на шаг 2.

Пример

Пусть запасы на складах: $A=\begin{pmatrix}15 & 25 & 10\end{pmatrix}^T$,

заказы потребителей: $B=\begin{pmatrix}5 & 15 & 15 & 15\end{pmatrix}^T$,

матрица стоимости: $Z=\begin{pmatrix}10 & 2 & 20 & 11\\ 12 & 7 & 9 & 20\\ 4 & 14 & 16 & 18\end{pmatrix}$

Транспортная таблица задачи:

					Запасы
	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 1. $x_{11}=5$, т.к. в столбце 1 заказы меньше запасов. Вычеркиваем столбец 1, т.к. спрос полностью удовлетворен. Вычеркиваемые строки и столбцы будем заливать серым цветом.

					Запасы
	5 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 3. Переходим к ячейке x_{12}. Максимальные доступные запасы равны $15-5=10$, заказы 15, поэтому $x_{12}=10$. Вычеркиваем строку 1.

					Запасы
	5 10	10 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 4. Переходим к ячейке x_{22}. Максимальные доступные запасы равны 25, заказы, $15-10=5$ поэтому $x_{22}=5$. Вычеркиваем столбец 2.

					Запасы
	5 10	10 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	5 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 5. Переходим к ячейке x_{23}. Максимальные доступные запасы равны $25-5=20$, заказы, 15 поэтому $x_{23}=15$. Вычеркиваем столбец 3.

					Запасы
	5 10	10 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	5 7	15 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 6. Переходим к ячейке x_{24}. Максимальные доступные запасы равны $25-5-15=5$, заказы, 15 поэтому $x_{24}=5$. Вычеркиваем строку 2.

					Запасы
	5 10	10 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	5 7	15 9	5 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 7. Осталась только одна строка. Процесс останавливается, $x_{34}=15-5=10$.

Т.о. имеем следующее допустимое базисное решение: $x_{11}=5$, $x_{12}=10$, $x_{23}=15$, $x_{22}=10$, $x_{24}=5$, $x_{34}=10$. Остальные переменные свободные и равны нулю.

2.3.2. Метод минимального элемента

<u>Шаг 1</u>. В транспортной таблице определяется ячейка с наименьшей стоимостью. Переменной в этой ячейке присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на запасы и заказы. Если таких переменных несколько, то выбор произволен. Вычеркивается строка (или столбец) с полностью реализованным предложением (или с удовлетворенным спросом). Если одновременно удовлетворяется и предложение и спрос, то вычеркивается только строка или только столбец.

Шаг 2. Процесс продолжаем для незачеркнутых ячеек, пока не останется только одна невычеркнутая строка или столбец.

Пример

Используем транспортную таблицу предыдущего примера.

					Запасы
	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 1. Наименьшую стоимость имеет ячейка x_{12}. Максимальные доступные запасы равны 15, заказы 15, поэтому $x_{12} = 15$. Вычеркиваем второй столбец.

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 2. Наименьшую стоимость имеет ячейка x_{31}. Максимальные доступные запасы равны 10, заказы 5, поэтому $x_{31} = 5$. Вычеркиваем первый столбец.

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 3. Наименьшую стоимость имеет ячейка x_{23}. Максимальные доступные запасы равны 25, заказы 15, поэтому $x_{23} = 15$. Вычеркиваем третий столбец

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 4. Наименьшую стоимость имеет ячейка x_{14}. Максимальные доступные запасы равны $15-15=0$, заказы 15, поэтому $x_{14}=0$. Вычеркиваем первую строку

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	0 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 5. Наименьшую стоимость имеет ячейка x_{34}. Максимальные доступные запасы равны $10-5=5$, заказы 15, поэтому $x_{34}=5$. Вычеркиваем третью строку

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	0 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	5 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 6. Осталась только одна строка. Процесс останавливается. $x_{24}=15-5=10$

Т.о. имеем следующее допустимое базисное решение: $x_{12}=15$, $x_{31}=5$, $x_{23}=15$, $x_{14}=0$, $x_{34}=5$, $x_{24}=10$. Остальные переменные свободные и равны нулю.

2.3.3. Метод Фогеля

Шаг 1. Для каждой строки и столбца транспортной таблицы, которым соответствует положительные предложение и спрос, вычисляется штраф путем вычитания наименьшей стоимости из следующей по величине стоимости в данной строке и столбце.

Шаг 2. Выбирается строка или столбец с наибольшим штрафом. В выбранной сроке выбирается переменная с минимальной стоимостью и ей присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на запасы и заказы. Вычеркиваем строку (или столбец) с полностью реализованным предложением (или с удовлетворенным спросом). Если одновременно удовлетворяется и предложение и спрос, то вычеркивается только строка или только столбец.

Шаг 3. Возможны следующие варианты:

а) не вычеркнута только одна строка или столбец с нулевыми нереализованными предложением или спросом, то процесс останавливается

б) не вычеркнута только одна строка или столбец с положительными предложением или спросом, то в этой строке или столбце методом минимального элемента определяет базисная переменная и процесс останавливается

в) не вычеркнуто несколько строк или столбцов, причем всем им соответствуют нулевые остаточные предложение и спрос, тогда методом минимального элемента определяются нулевые базисные переменные и процесс останавливается

г) пр невыполнении условий а,б или в переходим на шаг 1.

Пример

Используем транспортную таблицу предыдущего примера.

Штрафы	$10-4=6$	$7-2=5$	$16-9=7$	$18-11=7$	Запасы
$10-2=8$	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
$9-7=2$	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
$14-4=10$	x_{31} 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 1. В первой строке минимальная стоимость – 2, следующая по величине – 10, т.е штраф первой строки $10-2=8$.

В первом столбец минимальная стоимость – 4, следующая 10, т.е штраф первого столбца $10-4=6$.

Аналогично определяем остальные штрафы.

Шаг 2. Наибольший штраф соответствует 3-й строке. Переменная с минимальной стоимостью $x_{31}=5$. Вычеркиваем первый столбец.

Штрафы		$7-2=5$	$16-9=7$	$18-11=7$	Запасы
$11-2=9$	x_{11} 10	x_{12} 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
$9-7=2$	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
$16-14=2$	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 3. Наибольший штраф соответствует 1-й строке. Переменная с минимальной стоимостью $x_{12}=15$. Вычеркиваем второй столбец.

Штрафы			$16-9=7$	$18-11=7$	Запасы
$20-11=9$	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
$20-9=11$	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
$18-16=2$	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 4. Наибольший штраф соответствует 2-й строке. Переменная с минимальной стоимостью $x_{23}=15$. Вычеркиваем третий столбец.

Штрафы				$18-11=7$	Запасы
$20-11=9$	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	x_{14} 11	15
$20-9=11$	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
$18-16=2$	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 5. Остался только один столбец с ненулевым спросом. Применяем к нему метод минимального элемента.

Минимальная стоимость у переменной x_{14}, $x_{14} = 15 - 15 = 0$ **(!!!)**

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	0 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 6. Минимальная стоимость у переменной x_{34}, $x_{34} = 10 - 5 = 5$

					Запасы
	x_{11} 10	15 2	x_{13} 20	0 11	15
	x_{21} 12	x_{22} 7	15 9	x_{24} 20	25
	5 4	x_{32} 14	x_{33} 16	5 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 7. $x_{24} = 15 - 5 = 10$

Т.о. имеем следующее допустимое базисное решение: $x_{31} = 5$, $x_{12} = 15$, $x_{23} = 15$, $x_{14} = 0$, $x_{24} = 10$, $x_{34} = 5$. Остальные переменные свободные и равны нулю.

2.4. Пример решения транспортной задачи

Решим рассмотренную выше ТЗ методом потенциалом.

Шаг 1. В качестве начального приближения выберем полученное выше методом северо-западного угла, т.е. начальное допустимое базисное решение: $x_{11} = 5$, $x_{12} = 10$, $x_{23} = 15$, $x_{22} = 5$, $x_{24} = 5$, $x_{34} = 10$.

Транспортная таблица:

Потенциалы	V_1	V_2	V_3	V_4	Запасы
U_1	**5** 10	**10** 2	20	11	15
U_2	12	**5** 7	**15** 9	**5** 20	25
U_3	4	14	16	**10** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Жирным шрифтом выделены значения базисных переменных.

Шаг 2. Рассчитаем значения потенциалов:

$$\begin{cases} U_1 = 0, \\ U_1 + V_1 = 10, \\ U_1 + V_2 = 2, \\ U_2 + V_2 = 7, \\ U_2 + V_3 = 9, \\ U_2 + V_4 = 20, \\ U_3 + V_4 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_1 = 10, \\ V_2 = 2, \\ U_2 = 5, \\ V_3 = 4, \\ V_4 = 15, \\ U_3 = 3, \end{cases}$$

Шаг 3. Рассчитываем значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ для свободных переменных и заполняем транспортную таблицу:

Потенциалы	10	2	4	15	Запасы
0	**5** 10	**10** 2	$0+4-20$ 20	$0+15-11$ 11	15
5	$5+10-12$ 12	**5** 7	**15** 9	**5** 20	25
3	$3+10-4$ 4	$3+2-14$ 14	$3+4-16$ 16	**10** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Потенциалы	10	2	4	15	Запасы
0	**5** 10	**10** 2	-16 20	4 11	15
5	3 12	**5** 7	**15** 9	**5** 20	25
3	9 4	-9 14	-9 16	**10** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 4. Наибольшее значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ имеет свободная переменная x_{31}, т.е. данная переменная будет вводится в базис.

Шаг 5. Строим цикл (показан стрелочками):

Потенциалы	10	2	4	15	Запасы
0	**5** - 10	**10** 2 +	-16 20	4 11	15
5	3 12	**5** - 7	**15** 9	**5** + 20	25
3	+ 9 4	-9 14	-9 16	**10** 18 -	10
Заказы	5	15	15	15	

Обратите внимание на то, что переменная x_{23} не является вершиной цикла, поэтому она пропущена.

Среди отрицательных вершин наименьшее значение базисной переменной имеют вершины x_{11} и x_{22}. Выберем из них x_{11} (также можно выбрать и x_{22}).

Т.о. переменная x_{11} исключается из базиса, переменная x_{31} вводится в базис.

Шаг 6. Скорректируем транспортную таблицу и пересчитаем потенциалы:

$$
\begin{cases}
U_1 = 0, \\
U_1 + V_2 = 2, \\
U_2 + V_2 = 7, \\
U_2 + V_3 = 9, \\
U_2 + V_4 = 20, \\
U_3 + V_1 = 4, \\
U_3 + V_4 = 18,
\end{cases}
\begin{cases}
U_1 = 0, \\
V_2 = 2, \\
U_2 = 5, \\
V_3 = 4, \\
V_4 = 15, \\
V_1 = 1, \\
U_3 = 3,
\end{cases}
$$

Потенциалы	1	2	4	15	Запасы
0	10	**15** 2	20	11	15
5	12	**0** 7	**15** 9	**10** 20	25
3	**5** 4	14	16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 7. Рассчитываем значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ для свободных переменных и заполняем транспортную таблицу

Потенциалы	1	2	4	15	Запасы
0	$0+1-10$ 10	**15** 2	$0+4-20$ 20	$0+15-11$ 11	15
5	$5+1-12$ 12	**0** 7	**15** 9	**10** 20	25
3	**5** 4	$3+2-14$ 14	$3+4-16$ 16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Потенциалы	1	2	4	15	Запасы
0	-9 10	**15** 2	-16 20	4 11	15
5	-6 12	**0** 7	**15** 9	**10** 20	25
3	**5** 4	-9 14	-9 16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 8. Наибольшее значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ имеет свободная переменная x_{14}, т.е. данная переменная будет вводится в базис.

Шаг 9. Строим цикл (показан стрелочками):

Потенциалы	1	2	4	15	Запасы
0	-9 10	**15** - 2	-16 20	4 11 +	15
5	-6 12	**0** + 7	**15** 9	**10** 20 -	25
3	**5** 4	-9 14	-9 16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Обратите внимание на то, что переменные x_{31} и x_{34} не может быть включена в замкнутый цикл с начальной вершиной x_{14}, поэтому они пропущены.

Среди отрицательных вершин наименьшее положительное значение базисной переменной имеет вершина x_{24}.

Т.о. переменная x_{22} исключается из базиса, переменная x_{14} вводится в базис.

Шаг 10. Скорректируем транспортную таблицу и пересчитаем потенциалы:

$$\begin{cases} U_1 = 0, \\ U_1 + V_2 = 2, \\ U_1 + V_4 = 11, \\ U_2 + V_2 = 7, \\ U_2 + V_3 = 9, \\ U_3 + V_1 = 4, \\ U_3 + V_4 = 18, \end{cases} \begin{cases} U_1 = 0, \\ V_2 = 2, \\ V_4 = 11, \\ U_2 = 5, \\ V_3 = 4, \\ V_1 = -3, \\ U_3 = 7 \end{cases}$$

Потенциалы	-3	2	4	11	Запасы
0	10	**5** 2	20	**10** 11	15
5	12	**10** 7	**15** 9	20	25
7	**5** 4	14	16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 11. Рассчитываем значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ для свободных переменных и заполняем транспортную таблицу

Потенциалы	-3	2	4	11	Запасы
0	$0-3-10$ 10	**5** 2	$0+4-20$ 20	**10** 11	15
5	$5-3-12$ 12	**10** 7	**15** 9	$5+11-20$ 20	25
7	**5** 4	$7+2-14$ 14	$7+4-16$ 16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Потенциалы	-3	2	4	11	Запасы
0	-13 10	**5** 2	-16 20	**10** 11	15
5	-10 12	**10** 7	**15** 9	-4 20	25
7	**5** 4	-5 14	-5 16	**5** 18	10
Заказы	5	15	15	15	

Шаг 12. Значение величины $U_i + V_j - z_{ij}$ для всех свободных переменных отрицательно, т.е. полученное решение является оптимальным.

Т.о. оптимальный план перевозок следующий:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Задания на работу

3.1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, номер варианта, ФИО студента, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рисунке 3.1.

Лабораторная работа №5.

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Выполнил: студент гр. 111111 Иванов И.И.

Дата: 03.05.2009 г.

Рисунок 3.1. – Образец форматирования текста

3.2. Решить ТЗ, приведенную в таблице 3.1 методом потенциалов, определив начальное допустимое решение указанным методом.

Процесс определения начального допустимого базисного решения проиллюстрировать с помощью транспортных таблиц, аналогично приведенным выше примерам.

3.4. Решить ТЗ встроенными средствами MathCAD (функция Minimize)

Каждое задание должно начинаться с текстового блока, в котором указан номер и формулировка задания.

4. Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Как формулируется транспортная задача применительно к построению оптимальной электрической сети?
3. Чем отличаются открытая и закрытая транспортные задачи?
4. Перечислите особенности транспортной задачи по сравнению с задачей линейного программирования.
5. Каким образом выбирается первоначальное допустимое решение?
6. Сформулируйте критерий оптимальности найденного решения транспортной задачи

5. Рекомендуемая литература

5.1. Таха, Хамди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.: ил.

5.2. Костин В.Н. Оптимизационные задачи электроэнергетики: Учеб. пособие. – Спб.: СЗТУ, 2003. – 120с.

5.3. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. – М.:ЮНИТИДАНА, 2001