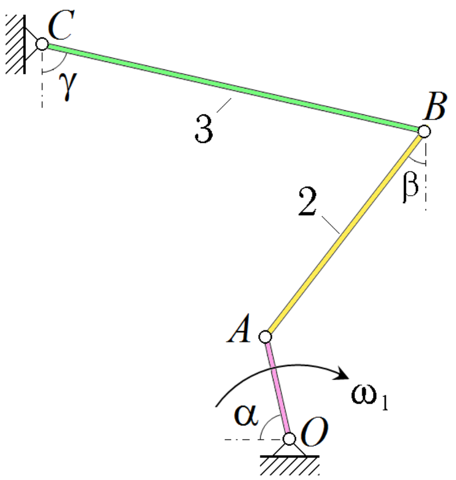
Пример выполнения контрольной работы.



К – 33

В стержневом механизме, кривошип AO вращается с известной угловой скоростью ω_1. Длины звеньев равны соответственно r_i, заданы углы α, β и γ. В положении, указанном на рисунке, определить угловые скорости всех звеньев.

К заданной постановке задачи введем дополнительный вопрос. При каком соотношении заданных углов α и γ угловая скорость второго стержня может обратится в ноль?

Следуя договоренности, контрольная работа должна быть, решена двумя способами (аналитическим и геометрическим).

Начнем с аналитического.

В рассматриваемом примере всего три подвижных тела (в любом другом варианте то же самое) и угловая скорость одного из них задана, т.е. известна угловая скорость стержня AO (здесь под ω_1 следует понимать заданное числовое значение). На рисунке вращение стержня AO изображено по ходу часовой стрелки. Следовательно $\omega_{1z} = -\ \omega_1$.

Составим граф

$$O \xrightarrow[\pi-\alpha]{1} A \xrightarrow[\frac{\pi}{2}-\beta]{2} B \xrightarrow[\frac{\pi}{2}+\gamma]{3} C$$

Из графа получаем векторное соотношение

$$\overline{V}_C = \overline{V}_O + [\overline{\boldsymbol{\omega}}_1, \overline{OA}] + [\overline{\boldsymbol{\omega}}_2, \overline{AB}] + [\overline{\boldsymbol{\omega}}_3, \overline{BC}] \qquad (1)$$

Принимая во внимание уравнения связей

$$V_{Cx} = 0, \quad V_{Cy} = 0, \quad V_{Ox} = 0, \quad V_{Oy} = 0$$

Запишем уравнение (1) в проекциях на координатные оси

$$x\colon\ 0 = -\omega_{1z} r_1 \sin\varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin\varphi_2 - \omega_{3z} r_3 \sin\varphi_3 \qquad (2)$$

$$y\colon\ 0 = \omega_{1z} r_1 \cos\varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos\varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \cos\varphi_3 \qquad (3)$$

Здесь, как отмечено в графе

$$\varphi_1 = \pi - \alpha, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \gamma \qquad (4)$$

Используя формулы приведения, перепишем уравнения (2) и (3)

$$-\omega_{1z} r_1 \sin\alpha - \omega_{2z} r_2 \cos\beta - \omega_{3z} r_3 \cos\gamma = 0 \qquad (5)$$

$$-\omega_{1z} r_1 \cos\alpha + \omega_{2z} r_2 \sin\beta - \omega_{3z} r_3 \sin\gamma = 0 \qquad (6)$$

Итак, в нашем распоряжении система двух уравнений с двумя неизвестными (ω_{2z} и ω_{3z}).

Домножим уравнение (5) на $\sin\beta$, а уравнение (6) на $\cos\beta$ и сложим, в итоге получим

$$0 = -\omega_{1z} r_1 (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) - \omega_{3z} r_3 (\sin\gamma \cos\beta + \sin\beta \cos\gamma)$$

Отсюда находим

$$\omega_{3z} = -\omega_{1z} \frac{r_1}{r_3} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\beta + \gamma)} \qquad (7)$$

Теперь домножим (5) уравнение на $\sin\gamma$, а (6) уравнение – на $\cos\gamma$. После вычитания имеем

$$0 = -\omega_{1z} r_1 (\sin\gamma \sin\alpha - \cos\alpha \cos\gamma) - \omega_{2z} r_2 (\sin\gamma \cos\beta + \sin\beta \cos\gamma)$$

Отсюда получаем

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \qquad (8)$$

Теперь можно рассмотреть и дополнительный вопрос. При каком соотношении заданных углов α и γ угловая скорость второго стержня обратится в ноль?

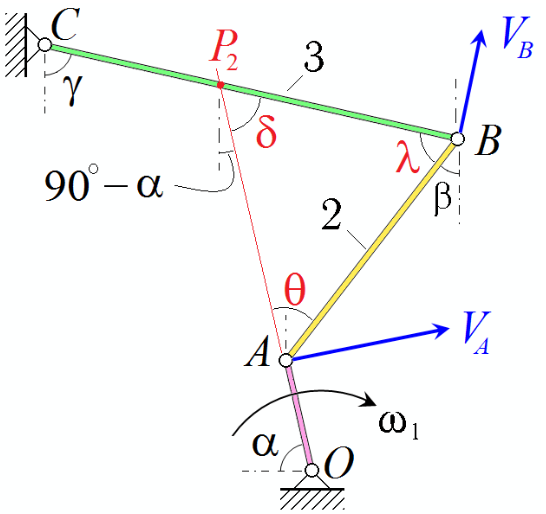
Из формулы (8) заключаем, что когда $\cos(\alpha + \gamma) = 0$, т.е. когда

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

Другими словами увеличение угла α должно компенсироваться уменьшением угла γ, и наоборот.

Перейдем к геометрическому методу решения задачи.

Для решения задачи геометрическим методом, прежде всего, уточним какие из точек являются узловыми (точки, принадлежащие одновременно, по крайней мере, двум подвижным телам). В рассматриваемом случае такими точками являются точки A и B. Неподвижными центрами вращения являются точки C и O. При известной угловой скорости первого звена скорость его конечной точки A в данный момент времени направлена ортогонально к стержню OA и численно равна $V_A = \omega_1 r_1$.



Из тех же соображений скорость точки B будет ортогональна к стержню CB и численно равна $V_B = \omega_3 r_3$.

Здесь векторы скоростей рассмотренных точек изображены, синим цветом. Для нахождения мгновенного центра скоростей второго звена достаточно через точки A и B провести перпендикуляры к скоростям, это фактически продолжение стержня OA (изображено красным цветом) и сам стержень CB. Точку пересечения прямых назовем P_2. В образовавшемся треугольнике ABP_2 обозначим углы δ, θ, λ.

Первый из них $\delta = \alpha + \gamma - 90^\circ$. Второй угол $\theta = 90^\circ - (\alpha - \beta)$.

Третий находится из условия, что сумма углов $\beta + \gamma + \lambda = 180^\circ$.

Если угол δ окажется равным нулю (скорости V_A и V_B параллельны), то движение второго стержня именуется мгновенно-поступательным и угловая скорость его при этом равна нулю.

Модуль угловой скорости второго звена можно представить в виде

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{V_B}{BP_2} \qquad (10)$$

Здесь V_A и V_B также модули скоростей точек A и B.

По теореме синусов можно найти входящие соотношение (10) две длины

$$\frac{AB}{\sin\delta} = \frac{BP_2}{\sin\theta} = \frac{AP_2}{\sin\lambda} \qquad (11)$$

$$AP_2 = r_2 \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\gamma)} \quad \text{и} \quad BP_2 = r_2 \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \qquad (12)$$

Подставляя выражение AP_2 в соотношение (10) получаем

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} \qquad (13)$$

Далее, из соотношения (10) находим V_B

$$V_B = \omega_1 r_1 \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \qquad (14)$$

И наконец

$$\omega_3 = \frac{|V_B|}{r_3} = \omega_1 \frac{r_1}{r_3} \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \qquad (15)$$

Полученные результаты для ω_2 и ω_3 отличаются знаком по сравнению с найденными ранее (см. формулы (7) и (8)). Не следует забывать, что найденные ранее величины это проекции векторов угловых скоростей, которые могут быть и отрицательны. Из рисунка геометрического решения задачи видно, что по ходу часовой стрелки вращается только первый стержень. Второй и третий вращаются против хода часовой стрелки.

Результаты контрольной работы считаются удовлетворительными, если получено аналитическое решение задачи, а в геометрическом решении построен мгновенный центр скоростей второго звена и выписаны в общем виде соотношение типа (10).

Более высокий бал, если полученные аналитическое и геометрическое решения совпадают (с точностью до знака).

Самый высокий бал (помимо всего перечисленного выше), если проведено исследование, устанавливающее, при каких условиях угловая скорость второго звена может равняться нулю.