Задание 1. Найти все решения $z^5+1+i=0$.

Указание. Использовать формулы:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right), \arg(\mathrm{a}+\mathrm{bi})=\begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a}, & a>0,\\ \pi+arctg\,\dfrac{b}{a}, & a<0,\quad b\ge 0,\\ -\pi+arctg\,\dfrac{b}{a}, & a<0,\quad b<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & a=0,\quad b>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & a=0,\quad b<0.\end{cases}$$

Задание 2. Найти уравнение образа окружности $|Z|=\dfrac{1}{5}$ при отображении W = 0.5(Z+1/Z) (функции Жуковского). Доказать, что образом окружности при отображении функцией Жуковского является эллипс.

Указание. Используя показательную форму записи, формулу Эйлера, найти u и v.

$$0.5(z+1/z)=0.5[r(\cos\arg z+i\sin\arg z)+(1/r)(\cos\arg z-i\sin\arg z)],$$

$$u=0.5[r\cos\arg z+(1/r)\cos\arg z]=0.5[r+(1/r)]\cos\arg z,$$

$$v=0.5[r\sin\arg z-(1/r)\sin\arg z]=0.5[r-(1/r)]\sin\arg z,$$

$u^2/\{0.5[r+(1/r)]\}^2+v^2/\{0.5[r-(1/r)]\}^2=(\cos\arg z)^2+(\sin\arg z)^2=1$, уравнение эллипса.

Задание 3. Найти образ прямой Im Z=1 при отображении $W=e^{2z}$.

Указание: $\operatorname{Im}z=b_0\Rightarrow z=x+ib_0, x\in(-\infty,\infty)$. $w=e^z=e^{x+ib_0}=e^xe^{ib_0}\Rightarrow\arg w=b_0$, луч.

Задание 4. Найти образ луча arg=π/3 при отображении $w=z^5$ и W = 0.5(Z+1/Z).

Указание: луч $\arg z=\alpha\Rightarrow z=r\,e^{i\alpha}, 0\le r<\infty$. $z=|z|\,e^{i\alpha}\Rightarrow z^n=|z|^n\,e^{in\alpha}$, луч $\arg w=n\alpha$.

$$z=|z|\,e^{ia}\Rightarrow 1/z=1/(|z|\,e^{ia})=(1/|z|)e^{-ia}.$$

$$z=|z|\,e^{ia}=|z|(\cos a+i\sin a),\ 1/z=(1/|z|)e^{-ia}=(1/|z|)(\cos a-i\sin a).$$

$$w=0.5(z+1/z)=0.5[|z|(\cos a+i\sin a)+(1/r)(\cos a-i\sin a)].$$

$$\operatorname{Re}w=u=0.5[|z|\cos a+(1/|z|)\cos a]=0.5[|z|+(1/|z|)]\cos a,$$

$$\operatorname{Im}w=v=0.5[|z|\sin a-(1/|z|)\sin a]=0.5[|z|-(1/|z|)]\sin a.$$

$$u^2/\cos^2a=\{0.5[|z|+(1/|z|)]\}^2,\ v^2/\sin^2a=\{0.5[|z|-(1/|z|)]\}^2.$$

$u^2/\cos^2a-v^2/\sin^2a=\{0.5[|z|+(1/|z|)]\}^2-\{0.5[|z|-(1/|z|)]\}^2=1$, уравнение гиперболы.

Задание 5. Следующие отображения являются дробно-линейными:

1. $W=1/Z$. 2. $W=(Z-1)/(Z+2)$. 3. $W=Z/(Z^2+3i)$. 4. $W=(Z+1)/(Z^3+2)$.

Указание: Дробно-линейная функция $w=\dfrac{a+bz}{c+dz}$, где $\dfrac{a}{c}\ne\dfrac{b}{d}$.

Задание 6. Найти образ $\operatorname{Re}z=2$ при отображении $W=iz+1$.

Указание: $\operatorname{Re}z=a_0\Rightarrow z=a_0+iy, y\in(-\infty,\infty)$, $\operatorname{Im}z=b_0\Rightarrow z=x+ib_0, x\in(-\infty,\infty)$.

Задание 7. Записать числа в алгебраической форме.

а) $sh\left(1-\dfrac{\pi i}{3}\right)$; б) $Arch(i/2)$.

Указание: $sh\,z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, $Arch\,z=Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$,

$Ln\,z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$.

Задание 8 . Найти образ области $|z-3+2i|\le 4$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.

Задание 9 . Найти дробно-линейное преобразование, при котором неподвижные точки i , $2i$, а точка $1+i$ переходит в точку ∞ .

Указание: дробно-линейное преобразование, при котором точки z_1 , z_2 , z_3 переходят в точки w_1 , w_2 , w_3 удовлетворяет равенству: $\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$. Если одна из точек z_1 , z_2 или z_3 либо w_1 , w_2 или w_3 является бесконечно удаленной, то в формуле все разности, содержащие эти точки, следует заменить единицами.

Задание 10. Исследовать на аналитичность функцию $w = shz$.

Задание 11. Проверить гармоничность функции $u(x,y)=e^{-y}\sin x + y$ и в случае положительного ответа восстановить аналитическую функцию $f = u(x,y)+iv(x,y)$, $f(0)=1$, по данной ее мнимой части.

Задание 12. Вычислить $\int_l e^{\bar{z}}\, dz$, $l=\{x=2{,}0\le y\le 1\}$

Задание 13. Вычислить интеграл $\int_0^{2i}(z^2-1)dz$.

Указание: если интегрируемая функция аналитическая, то применима формула Ньютона-Лейбница.

Задание 14. Верным равенством, в предположении, что контур Г охватывает контуры γ_1, γ_2, γ_3, а функция f(z) аналитична между этими контурами, является:

1) $\int_\Gamma f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz - \oint_{\gamma_3} f(z)dz$

2) $\int_\Gamma f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = 0$

3) $\int_\Gamma f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz + \oint_{\gamma_3} f(z)dz$

Задание 15. Верным равенством, если функция *f(z)* аналитична внутри контура *C* и на нем, а точка *z* находится внутри контура *C*, является:

1. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$. 2. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta$ 3. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}dz$.

Задание16. Следующие утверждения, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ сходится равномерно в G, $f_n(z)$ аналитичны в G, справедливы:

а). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится равномерно в области G

б). ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится равномерно во всякой замкнутой области $\overline{R}\subset G$ к $f'(z)$.

в). функция f(z) является аналитической в G.

Задание 17. Найти радиус сходимости R ряда Тейлора функции f(z)=2sin(z+1) по степеням z .

Задание 18. Рядом Лорана является:

а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-n)^n$. б) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z+99)^n$.в) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z^n-z_0)^n$.

Задание 19. Найти области, в которых функция $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-i)}$ раскладывается в ряд Лорана по степеням z , $z+1$, $z-i$.

Указание: Для решения достаточно построить кольца аналитичности для каждого центра (см. методическое пособие, с.30-33).