ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания

Введение

Методические указания предназначены для закрепления осваиваемого в процессе изучения материала студентами дневного, заочного и заочного (сокращённая программа) обучений. При выполнении работы студенты выбирают номер варианта по двум последним цифрам зачётной книжки. В первой и второй задачах по последней цифре выбирается вид передаточной функции, а по предпоследней – численные значения коэффициентов и постоянных времени, заданных передаточных функций. В задачах под номерами три, четыре, пять по последней цифре выбирается вид заданной структурной схемы, а по предпоследней цифре – численные значения постоянных времени и коэффициентов.

Студенты заочного обучения выполняют две контрольные работы:

- Контрольная работа №1 – задачи 1 и 2;
- Контрольная работа №2 – задачи 3, 4, 5.

Студенты дневного обучения выполняют расчётно-графическую работу (задачи с 1-ой по 5-ую).

При выполнении работы студенты должны руководствоваться следующими правилами:

- Выполнять работу рекомендуется только после изучения соответствующего материала.
- Работа выполняется на листах формата А4 в написанном от руки, либо печатном вариантах. Все рисунки и графики должны быть выполнены чётко и аккуратно. Небрежно выполненная работа возвращается студенту без проверки.
- Решая предлагаемую задачу, необходимо расчёт каждой искомой величины выполнять в начале в общем виде, а затем, подставив в полученное выражение числовые значения, получить результат с обязательным указанием единиц измерения.
- Работа допускается до защиты, если она оформлена в соответствии с вышеперечисленными правилами и не содержит принципиальных ошибок.
- Не допущенную к защите контрольную работу необходимо исправить в той же тетради и представить на повторное рецензирование.
- Исправление ошибок в отрецензированном тексте не допускается.

Защита контрольной работы проводится с целью выявления уровня подготовки студента по предложенному в задании ряду вопросов в форме собеседования с рецензентом. Если по результатам собеседования работа зачитывается, то это даёт право допуска к аттестации по дисциплине (сдаче зачёта) и, соответственно, наоборот.

Задача 1

Получить выражение для выходной величины *y(t)* системы, передаточная функция (ПФ) которой задана в таблице П1*а, б* для двух случаев:

1. На вход заданной системы подаётся единичное ступенчатое воздействие;
2. На вход системы подаётся воздействие в виде ∂-функции.

Построить графики изменения выходной величины для двух случаев.

Задача 2

Определить комплексный коэффициент передачи (ККП) и найти амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики (АЧХ и ФЧХ) системы. Варианты заданий выбираются из приложения 1 (таблица П1*а*, *б*).

Задача 3

Найти ПФ системы по управляющему и возмещающему воздействиям по заданной структурной схеме. Варианты заданий выбираются из приложения 2.

Задача 4

Исследовать замкнутую систему автоматического управления на устойчивость:

1. С помощью любого алгебраического критерия устойчивости.
2. По логарифмическим частотным характеристикам (ЛАЧХ и ФЧХ) соответствующих частотных характеристик. (В случае если система не устойчива, предложить меры по обеспечению устойчивости).

Структурная схема и конкретные значения передаточных функций звеньев, исследуемой САУ, даны в приложении 2.

Задача 5

Определить порядок астатизма САУ (исходные данные к задаче принять из приложения 2) по управляющему *x(t)* и возмущающему *f(t)* воздействиям. Найти значения установившейся ошибки при $x(t)=1(t)$ и $f(t)=1(t)$.

Методические указания к выполнению заданий

Задача № 1. Выходная величина *y(p)* определяется по выражению:

$$y(p) = W(p) \cdot x(p),$$

где $W(p)$ – заданная передаточная функция;

$x(p)$ – сигнал на входе исследуемой САУ.

При определении выходной величины, следует иметь в виду, что изображение единичной ступенчатой функции 1*(t)* определяется выражением (приложение 3):

$$x(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда выходная величина *y(p)* заданной системы примет вид:

$$y(p) = F(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}.$$

Выходную величину системы *y(t)* определяют, применив к изображению *F(p)* обратное преобразование Лапласа:

$$y(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Задача № 2. Для нахождения ККП по ПФ системы следует воспользоваться соотношением:

$$W(j\omega) = W(p)\,|_{p \to j\omega}\,.$$

Для определения АЧХ (*A(w)) = mod{W(jω)}*) необходимо привести выражение для *W(jω)* к алгебраической форме:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где *P(ω)* – вещественная частотная характеристика системы;

Q(ω) – мнимая частотная характеристика системы.

Чтобы представить *W(jω)* в алгебраической форме, следует умножить числитель и знаменатель *W(jω)* на функцию, комплексно сопряжённую знаменателю, и воспользоваться формулой:

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2,$$

позволяющей освободиться от мнимой составляющей в знаменателе.

После этого можно определить *A(w)* по формуле:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| == \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

Получив выражение для *A(w)*, необходимо построить график этой функции. Затем определяется ФЧХ:

$$\phi(\omega) = \arg\{W(j\omega)\} = \arg\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Строится график этой характеристики.

Задача № 3. Для нахождения ПФ системы по заданной структурной схеме следует воспользоваться как методом преобразования структурных схем, так и методом преобразования координат (координат сигналов) [2, 3]. Проверкой правильности решения является сравнение результатов.

При применении метода преобразования структурных схем необходимо стремиться к тому, чтобы избавить схему (участок схемы) от перекрёстных обратных связей (ОС). Например, дана схема (рисунок 1). Наиболее рациональным здесь является преобразование, состоящее в переносе 2-го (правого по схеме) сумматора через звено с ПФ.

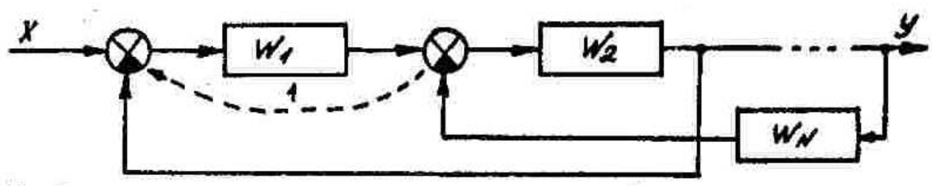


Рисунок 1 – Перенос сумматора через звено против сигнала

В результате получается структурная схема (рисунок 2).

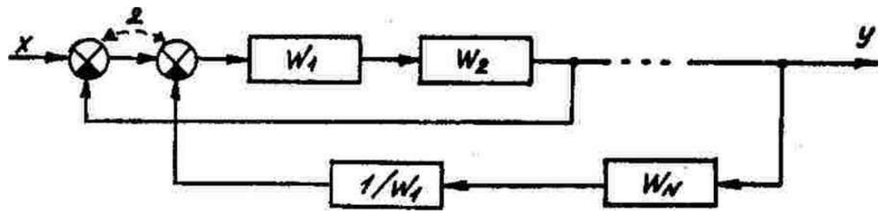


Рисунок 2 – Структурная схема, полученная в результате преобразований

Далее возможно поменять сумматоры местами и освободить схему от перекрёстных связей (рисунок 3).

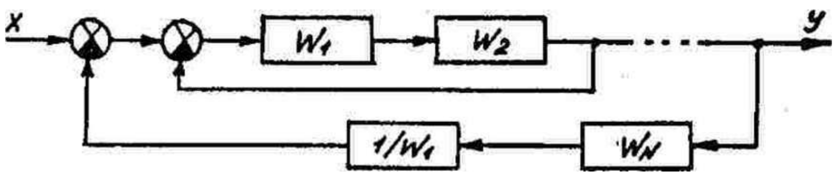


Рисунок 3 – Структурная схема без перекрёстных связей

Теперь ПФ определяется без труда, с учётом формулы для ПФ систем, охваченных ОС:

$$W(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1 \pm W_{пр}(p) W_{ос}(p)}.$$

При решении задачи методом преобразования координат, составляется система линейных уравнений, связывающих между собой координаты системы через ПФ звеньев. Система должна содержать N-1 уравнений, если имеется N координат. Из системы можно получить зависимость:

$$y(p) = x(p) F(W_1, W_2, ..., W_{N-1}),$$

где $x(p)$ – входная координата системы;

$y(p)$ – выходная координата системы;

$F(W_1, W_2, ..., W_{N-1})$ – некоторая функция от ПФ звеньев, входящих в систему (фактически, это и есть искомая ПФ системы).

Получив указанную зависимость, легко найти ПФ системы $W(p)$:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}.$$

Задача №4. Для исследования САУ на устойчивость по алгебраическим критериям Гурвица или Рауса [1, 2, 3] следует записать ПФ замкнутой системы и выделить характеристический полином $D(p)$. Далее следует определить порядок системы n. Если n > 4, то ПФ следует упростить, пренебрегая малыми постоянными времени. При помощи такого упрощения порядок системы доводится до 4-го – 3-го. После этого следует формальная процедура вычисления диагональных миноров определителя Гурвица (если используется критерий Гурвица) или процедура заполнения таблицы Рауса (если используется соответствующий критерий).

Использование «логарифмического» критерия устойчивости предполагает построение ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы. Критерий особенно прост, если логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ) пересекает линию $\phi = -\pi$ только один раз. Тогда требование сводится к тому, чтобы на частоте среза ЛАЧХ запас устойчивости по фазе был больше 0 (иными словами, линия $L(w)$ должна пересекать ось $L = 0$ «раньше», чем кривая $\varphi(\omega)$ пересечёт линию $-\pi$). В других случаях следует пользоваться более общей формулировкой критерия [1, 2].

Если в результате окажется, что система неустойчива, то необходимо дать предложения по обеспечению устойчивости. В ряде случаев достаточно уменьшить коэффициент передачи разомкнутой системы. Допустимо также изменить одно или несколько значений постоянных времени. Такой подход можно назвать параметрическим (меняются только параметры звеньев САУ). Возможен и структурный подход, когда изменяется структура САУ. Например, можно уменьшить порядок астатизма системы, исключив из регулятора идеальное интегрирующее звено (предложение состоит в использовании регуляторе другого типа).

Задача №5. Порядок астатизма САУ по управляющему воздействию ν_x может быть определён по количеству интеграторов, имеющихся в разомкнутой системе (ν_x равно этому количеству). Определяя порядок астатизма САУ ν_λ по возмущению $\lambda(t)$, следует из количества интеграторов в разомкнутой системе вычесть число интеграторов, относящихся к объекту управления (в общем случае, стоящих между точкой приложения возмущения и выходом системы). Возможно также судить о порядке астатизма системы по величине выделенной установившейся ошибки [1, 2, 3].

Для нахождения установившейся ошибки устойчивой системы необходимо получить операторное изображение применительно к замкнутой системе в виде:

$$\varepsilon_x(p) = W_x(p)x(p)\,|_{x(p)=L\{1(t)\}},$$

или

$$\varepsilon_\lambda(p) = W_\lambda(p)\lambda(p)\,|_{\lambda(p)=L\{1(t)\}},$$

где $W_x(p)$ – ПФ по управлению;

$W_\lambda(p)$ – ПФ по возмущению.

После этого следует при помощи обратного преобразования Лапласа перейти к соответствующим временным оригиналам ошибки:

$$\varepsilon^x_{уст} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_x(t) = \lim_{t\to\infty}\left[L\{\varepsilon_x(p)\}\right],$$

$$\varepsilon_{уст}^{\lambda} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_{\lambda}(t) = \lim_{t \to \infty} \left[L\{\varepsilon_{\lambda}(p)\} \right].$$

Обойтись без вычислений предела можно путём при использовании теоремы о конечном значении оригинала:

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot \varepsilon(p).$$

Знание свойств статических и астатических систем позволяет найти соответствующие значения ошибки и без указанной процедуры [1, 2, 3].

Приложение 1

Варианты заданий для задач №1 и №2

Таблица П1*а* – Передаточные функции к задаче 1

№ варианта	Передаточная функция к задаче 1
0	$W(p)=\dfrac{K}{Tp+1}\cdot\dfrac{1}{p}$
1	$W(p)=\dfrac{K}{Tp+1}\cdot\dfrac{1}{p^2}$
2	$W(p)=\dfrac{K}{(Tp+1)^2}\cdot\dfrac{1}{p}$
3	$W(p)=\dfrac{K}{(Tp+1)^2}$
4	$W(p)=\dfrac{K}{T^2p+1}$
5	$W(p)=\dfrac{K}{Tp+1}$
6	$W(p)=\dfrac{K}{(Tp+1)(0{,}2Tp+1)}$
7	$W(p)=\dfrac{K}{(Tp+1)(4Tp+1)}$
8	$W(p)=\dfrac{1}{p^2}$
9	$W(p)=\dfrac{Kp}{Tp+1}$

Примечание: Вариант задания выбирается по последней цифре зачётки.

Таблица П1*б* – Численные значения коэффициентов

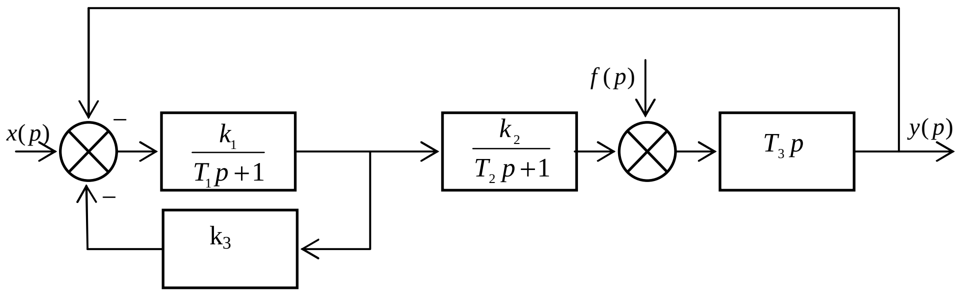
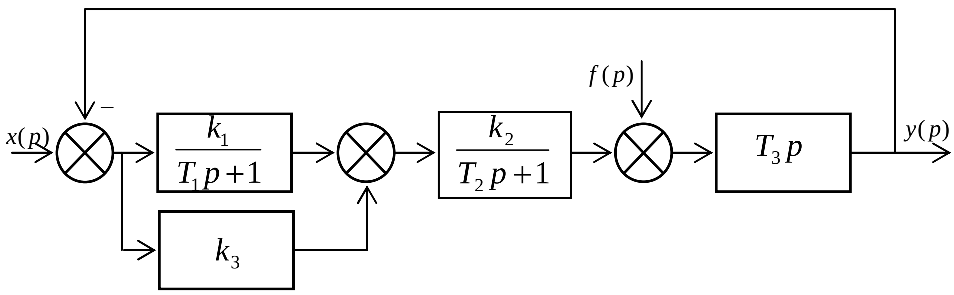
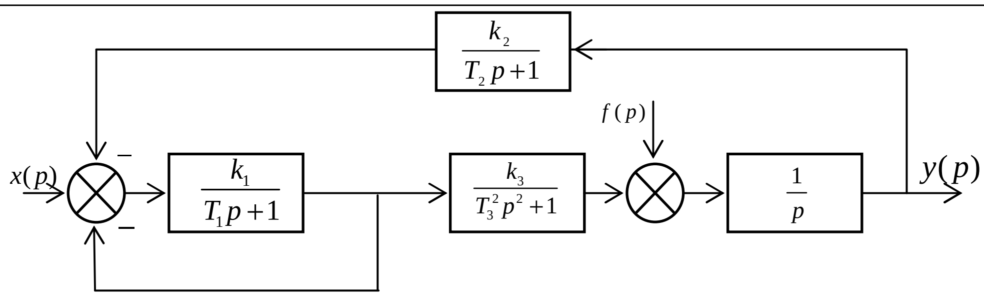
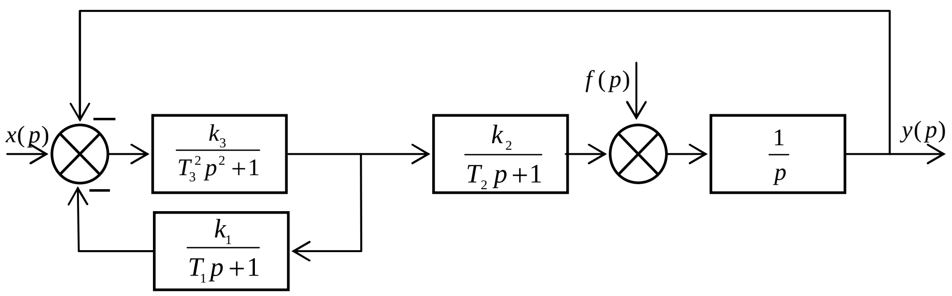
№ варианта	Значения коэффициента K к задаче 1	Значения постоянной времени T к задаче 1
0	2,8	0,22
1	-4	1,36
2	16	1,54
3	22	0,02
4	-1,25	0,062
5	6,2	0,06
6	3,6	3,2
7	4,8	1,41
8	7,6	0,056
9	-1,88	0,0031

Примечание: Вариант задания выбирается по предпоследней цифре зачётки.

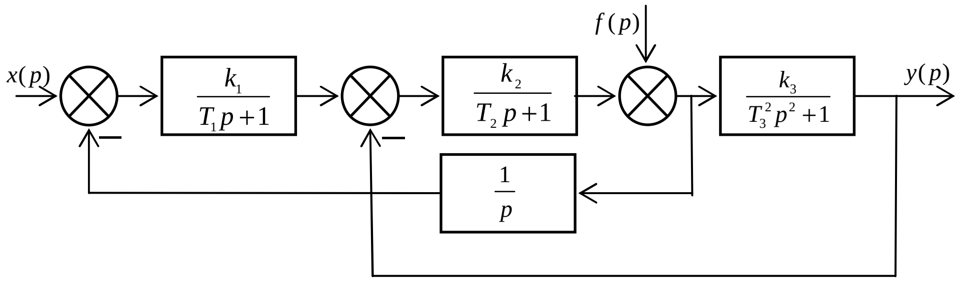
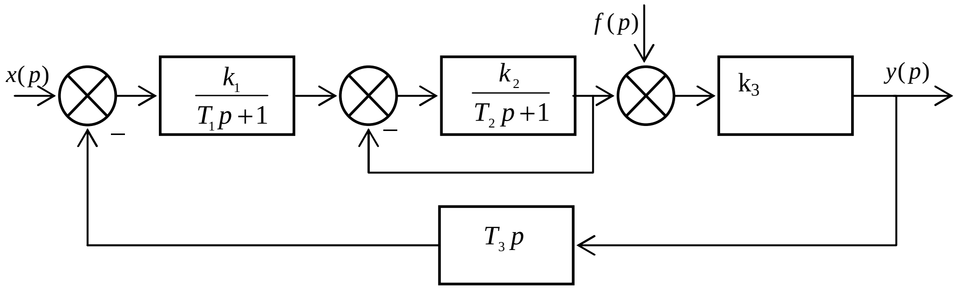
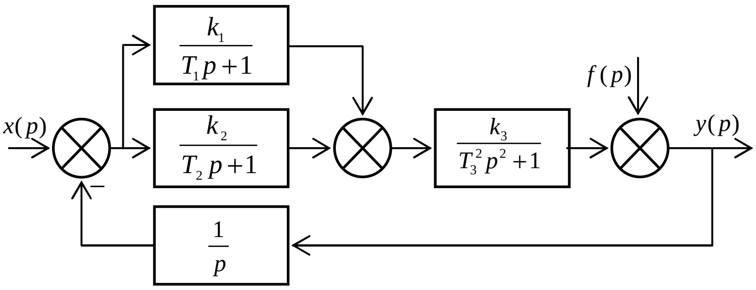
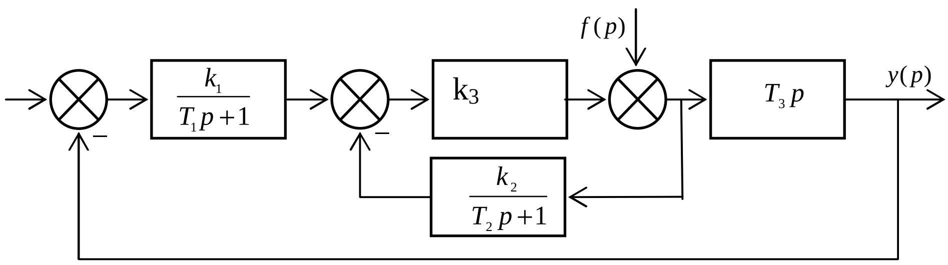
Приложение 2

Варианты заданий для задач 3, 4, 5

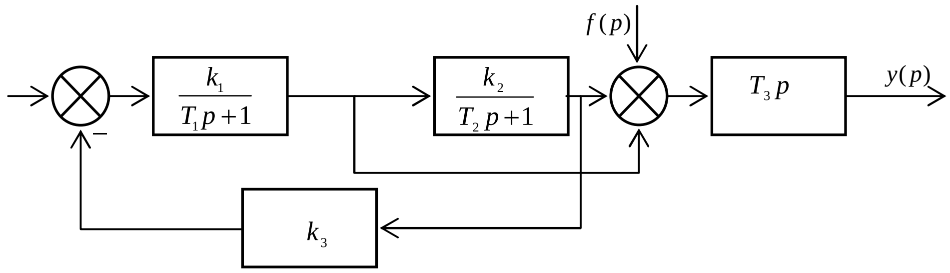
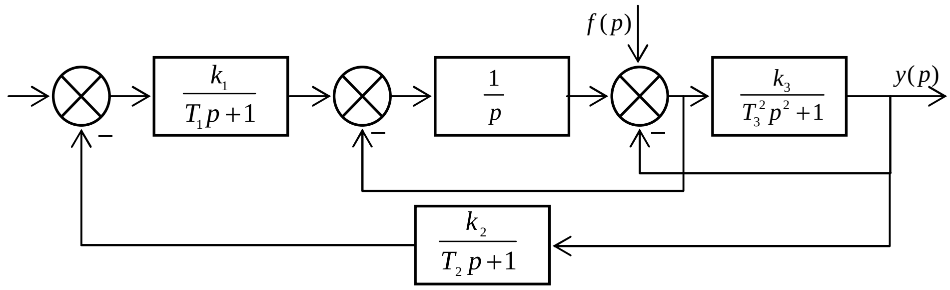
Таблица П2*а* – Варианты структурных схем к задаче 3

№ варианта	Структурная схема к задаче 3
1	2
0	
1	
2	
3	

Продолжение таблицы П2*а*

1	2
4	
5	
6	
7	

Окончание таблицы П2*а*

1	2
8	
9	

Примечание: Вариант задания выбирается по последней цифре зачётки.

Таблица П2*б* – Варианты заданий к задаче 3

№ варианта	k_1	T_1	k_2	T_2	k_3	T_3
0	4,1	0,111	0,15	0,023	3,3	0,67
1	2,8	0,108	0,35	0,04	3,4	0,73
2	3,5	0,202	0,8	0,038	1,7	0,71
3	4,3	0,188	0,4	0,022	3,1	0,64
4	2,7	0,133	0,25	0,011	7,5	0,78
5	4,5	0,149	0,22	0,014	6,4	0,8
6	4,8	0,291	0,23	0,036	6,5	0,41
7	4,8	0,298	0,5	0,011	5,4	0,68
8	2,4	0,162	0,23	0,042	2,6	0,45
9	4,1	0,111	0,15	0,023	3,3	0,67

Примечание: Вариант задания выбирается по предпоследней цифре зачётки.

Приложение 3

Справочные сведения о преобразовании Лапласа

Таблица П3 – Избранное из таблиц преобразований Лапласа

№ п/п	Оригинал функций $y(t)$	Изображение по Лапласу $F(p)$
1	$\partial(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p\mp\alpha}$
5	$t\cdot e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
6	$1-e^{\pm\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
7	$e^{-at}+e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
8	$1+\frac{b}{a-b}e^{-at}-\frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$

Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема сложения

Изображение суммы нескольких функций равно сумме изображений нескольких функций:

$$L\{y_1(t)+y_2(t)+\ldots+y_n(t)\}=L\{y_1(t)\}+L\{y_2(t)\}+\ldots+L\{y_n(t)\}=F_1(p)+F_2(p)+$$
$$+\ldots+F_n(p),$$

или

$$L^{-1}\{F_1(p)+F_2(p)+\ldots+F_n(p)\}=L^{-1}\{F_1(p)\}+L^{-1}\{F_2(p)\}+\ldots+L^{-1}\{F_n(p)\}=$$
$$=y_1(t)+y_2(t)+\ldots+y_n(t).$$

2. Изображение функции, умноженной на константу

Константа выносится за знак изображения:

$$L\{a\cdot y(t)\}=a\cdot L\{y(t)\}=a\cdot F(p),$$

или

$$L^{-`}\{a\cdot F(p)\}=a\cdot L^{-1}\{F(p)\}=a\cdot y(t).$$

3. Теорема о конечном значении:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{p\to 0}p\cdot F(p).$$