

## Домашняя Контрольная работа № 2

### Двойные интегралы

100% = 100р

#### I. (10р) Вычислить двукратный интеграл с постоянными пределами

$$1. \int_1^3 dy \int_0^1 (1 + 4xy) dx$$

$$2. \int_2^4 dx \int_{-1}^1 (x^2 + xy) dy$$

$$3. \int_1^3 dx \int_0^1 (1 + 4xy) dy$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y dy$$

$$5. \int_1^4 dy \int_0^2 (x + \sqrt{y}) dx$$

$$6. \int_0^3 dy \int_0^1 \sqrt{x+y} dx$$

$$7. \int_2^4 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dy$$

$$9. \int_1^4 dx \int_1^2 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy$$

$$10. \int_0^{\ln 2} dx \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} dy$$

$$11. \int_1^2 dx \int_0^1 (-2 + xy^2) dx$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dx$$

$$13. \int_1^2 dy \int_0^1 (1 + 2xy) dx$$

$$14. \int_1^3 dx \int_0^1 (2x^2 + y^2) dy$$

15.  $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dx$   
 16.  $\int_0^3 dx \int_1^4 (x + \sqrt{y}) dy$   
 17.  $\int_1^2 dx \int_0^1 (2x^2 + y) dy$   
 18.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y) dy$

**II. (10р) Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику**

1.  $\iint_D (2x^2 y^3 - 5y^4) dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$   
 2.  $\iint_D (x^3 y^2 - 3y^4) dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 3.  $\iint_D xye^y dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 4.  $\iint_D \frac{xy^2}{x^2 + 1} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$   
 5.  $\iint_D \frac{xy^2}{x^2 + 1} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$   
 6.  $\iint_D \frac{1+x^2}{y^2 + 1} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$   
 7.  $\iint_D x \sin(x+y) dx dy$        $D = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \right\}$   
 8.  $\iint_D xe^{-xy} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$   
 9.  $\iint_D ye^{-xy} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$   
 10.  $\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy$        $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 11.  $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$        $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 12.  $\iint_D (x^4 y^2 + y^3) dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$   
 13.  $\iint_D \frac{2}{x+y} dx dy$        $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$   
 14.  $\iint_D x \cos(x+y) dx dy$        $D = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \right\}$   
 15.  $\iint_D \sqrt{x+y} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$

16.  $\iint_D (2x^2 + y^2) dx dy$        $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$
17.  $\iint_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy$        $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
18.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$        $D = \{(x, y): 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$

**III. (10p) Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле**

1.  $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy$
2.  $\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy$
3.  $\int_2^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$
4.  $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx$
5.  $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$
6.  $\int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx$
7.  $\int_0^3 dx \int_{x^2}^{3+2x} f(x, y) dy$
8.  $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx$
9.  $\int_1^2 dx \int_{\frac{2}{x}}^{2x} f(x, y) dy$
10.  $\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$
11.  $\int_1^4 dx \int_x^{8-x} f(x, y) dy$

$$12. \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy$$

$$13. \int_0^2 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^0 f(x, y) dy$$

$$14. \int_{-\sqrt{2}}^0 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x, y) dx$$

$$15. \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx$$

$$16. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$$

$$17. \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$18. \int_0^2 dx \int_{2x-1}^{x+1} f(x, y) dy$$

**IV. (10p) Вычислить двукратный интеграл с переменными пределами.  
Изобразить графически область интегрирования.**

$$1. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (1+4y) dy$$

$$2. \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx$$

$$3. \int_0^1 dy \int_y^{e^y} x dx$$

$$4. \int_0^1 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y) dy$$

$$5. \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} e^{\sin\varphi} dr$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} e^{\cos\varphi} dr$$

$$7. \int_1^2 dv \int_0^v \sqrt{v^2-1} du$$

$$8. \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{1-u^2} dv$$

$$9. \int_0^1 dy \int_y^{e^y} dx$$

$$10. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (2-3y) dy$$

$$11. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (1+y) dy$$

$$12. \int_0^1 dx \int_0^{x^3} (2-y) dy$$

$$13. \int_0^2 dy \int_y^{e^y} x dx$$

$$14. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} x dx$$

$$15. \int_0^1 dx \int_0^x (x+2y) dy$$

$$16. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y) dy$$

$$17. \int_0^1 du \int_0^{2u} \sqrt{1-u^2} dv$$

$$18. \int_0^3 dy \int_y^3 xy dx$$

**V. (20p) Вычислить двойной интеграл по произвольной области  $D$  и найти среднее значение функции  $z$  в заданной области. (В качестве функции  $z$  взять подынтегральную функцию)**

$$1. \iint_D x^3 y^2 dx dy \quad D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$$

$$2. \iint_D x^2 y^3 dx dy \quad D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$$

$$3. \iint_D \frac{4y}{x^3 + 2} dx dy \quad D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$4. \iint_D \frac{2y}{x^2} dx dy \quad D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

5.  $\iint_D \frac{2y}{x^2+1} dx dy$   $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
6.  $\iint_D e^{y^2} dx dy$   $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$
7.  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$   $D = \{(x, y): 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$
8.  $\iint_D x\sqrt{y^2-x^2} dx dy$   $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$
9.  $\iint_D x \cos y dx dy$   $D$  ограничена кривыми  $y = 0, y = x^2, x = \pi$
10.  $\iint_D x \sin y dx dy$   $D$  ограничена кривыми  $y = 0, y = x^2, x = \pi$
11.  $\iint_D (x+y) dx dy$   $D$  ограничена кривыми  $y = \sqrt{x}, y = x^2$
12.  $\iint_D y^3 dx dy$   $D$  – треугольная область с вершинами  $(0,2), (1,1), (3,2)$
13.  $\iint_D ye^x dx dy$   $D$  – треугольная область с вершинами  $(0,0), (2,4), (6,0)$
14.  $\iint_D ye^x dx dy$   $D$  – треугольная область с вершинами  $(0,0), (2,3), (5,0)$
15.  $\iint_D (x+y) dx dy$   $D$  ограничена линиями  $y = x, y = 2x, x + y = 6$
16.  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$   $D$  ограничена линиями  $x = 2, y = x, y = \frac{1}{x}$
17.  $\iint_D \cos(x+y) dx dy$   $D$  ограничена линиями  $x = 0, y = \pi, y = x$
18.  $\iint_D (x+y+3) dx dy$   $D$  ограничена линиями  $x + y = 2, y = 0, x = 0$

**VI. (20р) Вычислить данный интеграл, используя полярные координаты**

1.  $\iint_D x dx dy$ , где область  $D$  – область в первом квадранте, ограниченная окружностью  $x^2 + y^2 = 25$ .
2.  $\iint_D y dx dy$ , где область  $D$  – область в первом квадранте, ограниченная окружностью  $x^2 + y^2 = 9$ .

3.  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D$  – область в первом квадранте, лежащая между окружностями  $x^2 + y^2 = 4$  и  $x^2 + y^2 = 25$ .
4.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$   $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$
5.  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , где область  $D$  – область, ограниченная полуокружностью  $x = \sqrt{4 - y^2}$  и осью  $Oy$ .
6.  $\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$ , где область  $D$  – область в первом квадранте, ограниченная окружностью  $x^2 + y^2 = 16$ .
7.  $\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
8.  $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
9.  $\iint_D \sqrt{64 - 4x^2 - 4y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
10.  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 3$ .
11.  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 8$ .
12.  $\iint_D (x + y) dx dy$ , где область  $D$  – часть круга радиуса 3 с центром в начале координат, лежащая в первом квадранте.
13.  $\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 25$ .
14.  $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
15.  $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ ,  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
16.  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0\}$
17.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$   $D = \{(x, y): 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$
18.  $\iint_D \sqrt{36 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

## VII. (20p) Приложения двойного интеграла

1. Найти объём тела, расположенного под параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и над областью, ограниченной кривыми  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ .
2. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 4x$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = 7x^2 + y$ . Найти массу пластинки.
3. Найти объём тела, расположенного под параболоидом  $z = 3x^2 + y^2$  и над областью, ограниченной кривыми  $y = x$ ,  $x = y^2$ .
4. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 4x$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = \frac{7}{2}x^2 + 5y$ . Найти массу пластинки.
5. Найти объём тела, расположенного под параболоидом  $z = x^2 + 4y^2$  и над областью, ограниченной кривыми  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ .
6. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ . Найти массу пластинки.
7. Найти объём тела, расположенного под поверхностью  $z = xy$  и над треугольником с вершинами  $(1;1)$ ,  $(4;1)$ ,  $(1;2)$ .
8. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = \frac{7x^2}{8 + 2y}$ . Найти массу пластинки.
9. Найти объём тела, расположенного под поверхностью  $z = 2xy$  и над треугольником с вершинами  $(0;0)$ ,  $(1;2)$ ,  $(3;0)$ .
10. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = \frac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$ . Найти массу пластинки.
11. Найти объём тела, расположенного под параболоидом  $z = 2x^2 + 3y^2$  и над областью, ограниченной кривыми  $y = x$ ,  $x = y^2$ .
12. Пластинка  $D$  заданна ограничивающими ее кривыми  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластинки, задана уравнением  $\gamma = \frac{7x^2}{2 + 6y}$ . Найти массу пластинки.



13. Пластика  $D$  задана ограничивающими ее кривыми  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластики, задана уравнением  $\gamma = \frac{2x - 3y}{x^2 + y^2}$ . Найти массу пластики.
14. Найти объём тела, расположенного под поверхностью  $z = xy$  и над треугольником с вершинами  $(0;1)$ ,  $(1;2)$ ,  $(3;1)$ .
15. Определить момент инерции пластины относительно оси  $Oy$ , ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 1$ , если поверхностная плотность пластины  $\gamma = y$ .
16. Пластика  $D$  задана ограничивающими ее кривыми  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = x$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластики, задана уравнением  $\gamma = x^2 + y$ . Найти массу пластики.
17. Пластика  $D$  задана ограничивающими ее кривыми  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 9x$ ,  $y \geq 0$ .  $\gamma$  – поверхностная плотность пластики, задана уравнением  $\gamma = x^2 + 5y$ . Найти массу пластики.
18. Найти объём тела, расположенного под параболоидом  $z = x^2 + 2y^2$  и над областью, ограниченной кривыми  $y = x$ ,  $x = y^2$ .