

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

УХТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Решение задач по ТАУ с использованием MATLAB

Выпуск 1

Методические указания для студентов направлений
551300, 654500 «Электромеханика, электротехника и электротехнологии»
и специальности 180400 «Электропривод и автоматика
промышленных установок и технологических комплексов»

Ухта 2005

УДК 526.001.24

И 20

Иванов, Б. А. Решение задач по ТАУ с использованием MATLAB. Выпуск 1[Текст]: метод. указания / Б.А. Иванов. – Ухта: УГТУ, 2005. – 16 с., ил.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 551300, 654500 «Электромеханика, электротехника и электротехнологии», а также по специальности 180400 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов». Указания ориентированы на самостоятельную работу студентов, изучающих дисциплину «Теория автоматического управления», раздел «Точность управления в установившемся режиме». Кратко излагается теория вопроса, рассматривается пример решения задачи, приводится описание необходимых функций системы MATLAB.

Содержание указаний соответствует рабочей программе по дисциплине «Теория автоматического управления»

Методические указания рекомендованы к печати кафедрой ЭАТП (протокол № 7 от 12 октября 2005 г.)

Рецензент: Фандеев Е. И.

План 2005 г., позиция 66.

Подписано в печать 11.11.2005. Компьютерный набор.

Объем 16 с. Тираж 150 экз. Заказ № 195.

© Ухтинский государственный технический университет, 2005

169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13

Отдел оперативной полиграфии

169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13

Содержание

1. Краткие теоретические сведения по точности управления в установившихся режимах	4
2. Избранные функции MATLAB для моделирования динамических систем	7
3. Решение типовой задачи с использованием MATLAB	11
Библиографический список.....	16

1. Краткие теоретические сведения по точности управления в установившихся режимах

Качество управления в замкнутых системах автоматического управления (САУ) оценивается разнообразными критериями или показателями качества*. Важнейшую группу упомянутых критериев составляют критерии точности управления. Они делятся на две группы: показатели точности в переходных режимах и показатели точности в установившихся режимах. Последние – характеризуют качество вынужденного движения в САУ. Наиболее часто оперируют величиной установившейся ошибки при типовых задающих и возмущающих воздействиях. Нахождению указанной ошибки и посвящен излагаемый ниже материал.

Рассмотрим САУ с типовой структурной схемой, показанной на рис. 1.

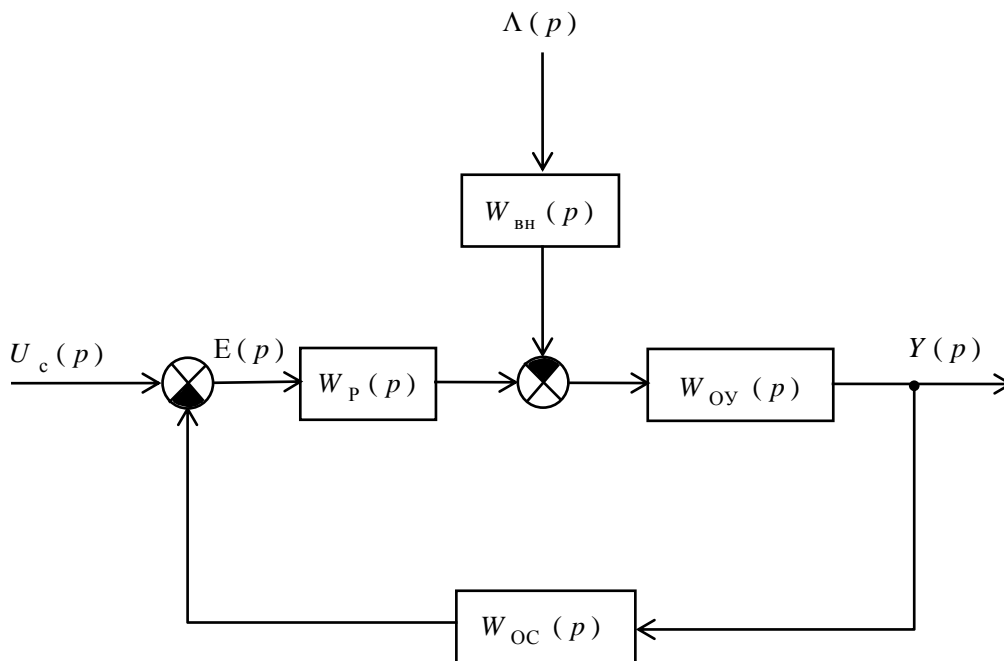


Рис. 1

Структурная схема содержит: $w_p(p)$ – передаточная функция (ПФ) регулятора; $w_{oy}(p)$ – ПФ объекта управления; $w_{oc}(p)$ – ПФ звена, замыкающего обратную связь (ОС); $w_{bh}(p)$ – ПФ внешней (по отношению к замкнутому контуру) цепи.

Мерой ошибки управления в замкнутой САУ выступает координата рассогласования $\varepsilon(t)$. Это наиболее очевидно при единичной ОС, когда $w_{oc}(p) = 1$. Тогда

* В данном контексте критерии и показатели – синонимы. В литературе широко используются оба термина.

$\varepsilon(t)$ – это разность между заданием $u_c(t)$ и фактически полученным значением выходной координаты $y(t)$. При неединичной ОС рассогласование сохраняет тот же смысл и в установившемся режиме может быть легко преобразовано в отклонение выходной координаты от заданного значения.

Прежде, чем говорить об установившемся значении ошибки (рассогласования), найдем рассогласование в изображениях по Лапласу. Для этого запишем уравнение:

$$E(p) = U_c(p) - Y(p)W_{OC}(p). \quad (1)$$

Учтем, что

$$Y(p) = (E(p)W_p(p) - \Lambda(p)W_{вн}(p))W_{OY}(p). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), можем выразить $E(p)$:

$$E(p) = \frac{U_c(p) + \Lambda(p)W_{вн}(p)W_{OY}(p)W_{OC}(p)}{1 + W_p(p)W_{OY}(p)W_{OC}(p)}. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$W_{раз}(p) = W_p(p)W_{OY}(p)W_{OC}(p), \quad (4)$$

$$W_{y\lambda,раз}(p) = W_{вн}(p)W_{OY}(p), \quad (5)$$

где $W_{раз}(p)$ – ПФ разомкнутой САУ; $W_{y\lambda,раз}(p)$ – ПФ цепи преобразования возмущения в разомкнутой системе (или ПФ разомкнутой системы по возмущению).

Подставляем (4) и (5) в (3) и переписываем (3) как

$$E(p) = \frac{U_c(p)}{1 + W_{раз}(p)} + \frac{\Lambda(p)W_{y\lambda,раз}(p)W_{OC}(p)}{1 + W_{раз}(p)}. \quad (6)$$

Таким образом, ошибка управления складывается из двух составляющих: ошибки от воспроизведения входного воздействия $E''(p)$ (первое слагаемое в формуле (6)) и ошибки, вызванной возмущением $E^\lambda(p)$ (второе слагаемое в формуле (6)):

$$E(p) = E''(p) + E^\lambda(p).$$

Если возмущений много, положим N штук, и все они приводятся ко входу объекта управления, то

$$E(p) = E^u(p) + E^{\lambda_1}(p) + E^{\lambda_2}(p) + \dots + E^{\lambda_N}(p).$$

В этом случае, (6) приобретает вид:

$$E(p) = \frac{U_c(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} + \frac{W_{\text{ос}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \sum_{i=1}^N \Lambda_i(p) W_{y\lambda_i, \text{раз}}(p). \quad (7)$$

Теперь можно переходить к установившемуся значению ошибки $\varepsilon_{\text{уст}}$. Для этого прибегнем к теореме о конечном значении оригинала, согласно которой

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p). \quad (8)$$

В результате, с учетом (7) и (8), получаем

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{p U_c(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \right\} + \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{W_{\text{ос}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \sum_{i=1}^N \Lambda_i(p) W_{y\lambda_i, \text{раз}}(p) \right\}. \quad (9)$$

Из полученной формулы (9) можно вывести ряд частных случаев (и более простых выражений) для конкретных типовых задающих и возмущающих воздействий [1]. Тем не менее, формула (9) может успешно использоваться для решения задач в приведенной выше форме.

2. Избранные функции MATLAB для моделирования динамических систем

В составе системы MATLAB имеется пакет прикладных программ (ППП) Control System Toolbox, предназначенный для решения задач автоматического управления [2]. В этом пакете возможно оперировать с особыми LTI-объектами (linear, time-invariant (LTI) models или линейные модели с постоянными параметрами). Имеется три подкласса LTI-объектов:

- 1) TF-объекты (от transfer functions), задаваемые передаточными функциями;
- 2) ZPK-объекты (от zero-pole-gain), задаваемые нулями, полюсами и обобщенным коэффициентом передачи;
- 3) SS-объекты (от state-space), описываемые в пространстве состояний.

В вычислительном отношении наиболее эффективны SS-объекты, затем идут ZPK-объекты и наименее эффективны TF-объекты. При высоком порядке системы полюсы TF-объектов оказываются сильно зависимыми от точности представления коэффициентов ПФ. Незначительная вариация коэффициентов, особенно, при высоких степенях комплексной переменной p , вызывает сильный разброс полюсов системы. Тем не менее, в задачах исследования вынужденного движения в САУ, это не сказывается существенно на точности получаемых результатов. Кроме того, оперирование с ПФ является общепринятым в теории автоматического управления и в инженерной практике. Поэтому, ниже речь будет идти именно о TF-объектах.

Объект подкласса TF может быть задан функцией $\text{sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$, где num – вектор многочлена числителя ПФ, den – вектор многочлена знаменателя ПФ.

Например, ПФ $w_1(p) = \frac{0,15 p + 1}{0,001 p^2 + 0,2 p + 1}$ может быть определена следующим обра-

зом:

```
W1=tf([0.03 1], [0.05 0.24 1])
```

```
Transfer function:
```

```
0.03 s + 1
```

```
-----  
0.05 s^2 + 0.24 s + 1
```

В MATLAB комплексная переменная, фигурирующая в преобразовании Лапласа и в ПФ, по умолчанию обозначается буквой « s », а не « p ». Тем не менее, далее будем записывать ПФ в привычном виде, учитывая это обстоятельство.

При параллельном соединении ЛТИ-объектов результирующий объект (фактически, ПФ) может быть определен как $sys = sys1 + sys2$. Чтобы привести пример, введем еще одну ПФ

W2=tf([1], [0.15 1])

Transfer function:

1

0.15 s + 1

Теперь определим сумму

W3=W1+W2

Transfer function:

0.0545 s^2 + 0.42 s + 2

0.0075 s^3 + 0.086 s^2 + 0.39 s + 1

При последовательном соединении ЛТИ-объектов результирующий объект может быть определен как $sys = sys1 * sys2$. Например:

W4=W1*W2

Transfer function:

0.03 s + 1

0.0075 s^3 + 0.086 s^2 + 0.39 s + 1

При соединении звеньев в контур с отрицательной обратной связью, результирующая ПФ задается функцией `feedback(sys1,sys2)`. Например, система с ПФ $W(p)$ в прямой цепи управления и единичной обратной связью будет задана так:

W=feedback(W1, W2)

Transfer function:

0.0045 s^2 + 0.18 s + 1

0.0075 s^3 + 0.086 s^2 + 0.42 s + 2

Следует подчеркнуть, что непосредственное использование известной формулы для ПФ замкнутой системы дает в результате ПФ более высокого порядка:

W=W1/(1+W1*W2)

Transfer function:

0.000225 s^4 + 0.01008 s^3 + 0.0977 s^2 + 0.42 s + 1

0.000375 s^5 + 0.0061 s^4 + 0.04914 s^3 + 0.2868 s^2 + 0.9 s + 2

Очевидно, что полученная ПФ имеет одинаковые нули и полюсы, которые в данном случае, необходимо и допустимо сократить. Убедимся в этом, преобразуя ПФ в ZPK-форму, найдя нули и полюсы ПФ, а также, выведя расположение нулей и полюсов на комплексной плоскости (рис. 2):


```

W3=zpk(W)
Zero/pole/gain:
    0.6 (s+33.33) (s+6.667) (s^2 + 4.8s + 20)
-----
(s+8.564) (s^2 + 4.8s + 20) (s^2 + 2.903s + 31.14)

```

```

zero(W)
ans =
-33.3333
-6.6667
-2.4000 + 3.7736i
-2.4000 - 3.7736i

```

```

pole(W)
ans =
-8.5636
-1.4515 + 5.3882i
-1.4515 - 5.3882i
-2.4000 + 3.7736i
-2.4000 - 3.7736i

```

```
pzmap(W)
```

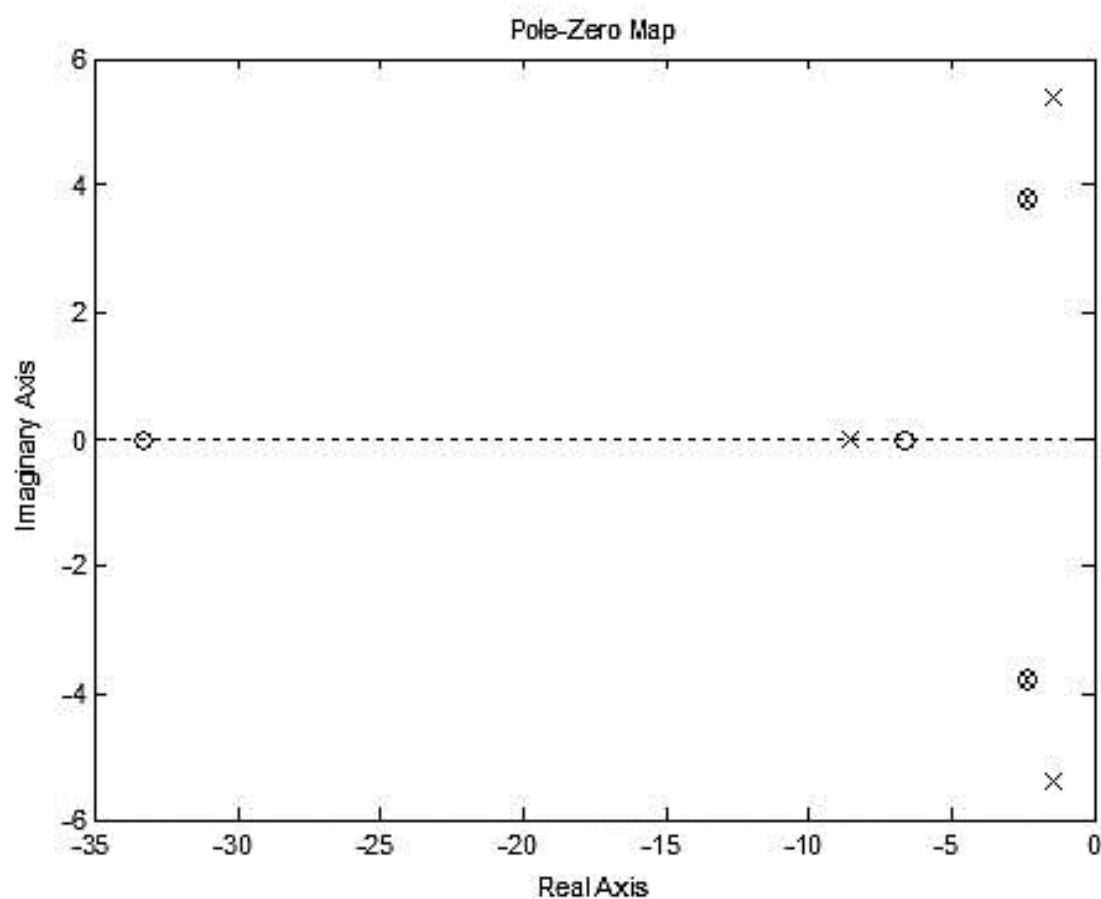


Рис. 2

Видим, что одинаковые нули и полюсы есть и в ПФ сомножители $p^2 + 4,8p + 20$ могут быть сокращены с целью получения минимальной реализации

данной ПФ*. Нахождение минимальной реализации ЛТИ-объекта производится при помощи функции `sysr = minreal(sys)`. Например:

```
Wmin=minreal(W)
Transfer function:
0.6 s^2 + 24 s + 133.3
-----
s^3 + 11.47 s^2 + 56 s + 266.7
```

В задачах на нахождение установившихся ошибок в САУ часто требуется вычисление пределов типа $\lim_{p \rightarrow 0} p E(p)$. В системе MATLAB, а точнее в ППП Symbolic

Math Toolboxes, предназначенном для символьческих вычислений, имеется специальная функция для вычисления пределов `limit(F,x,a)`, где F – функция, x – аргумент, a – предел, к которому устремляется аргумент [3]. Однако, эта функция не применима к ЛТИ-объектам и требует задания функции переменной x (а затем и функции $F(x)$), как «символьческих» объектов (например, `x=sym('x')`, затем, `F(x)=X^2`). Чтобы не прибегать к перенабору в рабочей области MATLAB изображения, от которого ищется предел, учтем, что $\lim_{p \rightarrow 0} p E(p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega E(j\omega)$. Последний предел можно

вычислить прямой подстановкой $\omega = 0$. В этой связи представляет интерес функция `frsp = evalfr(sys,f)`, позволяющая вычислить значение комплексного коэффициента передачи, равно как и другой функции комплексного переменного, заданной в виде ЛТИ-объекта, на той или иной частоте ω . Применительно к ПФ, действие, задаваемое функцией `frsp = evalfr(sys,0)`, имеет смысл нахождения статического коэффициента передачи системы. Например:

```
e=evalfr(Wmin, 0)
e =
0.5000
```

Указанную функцию будем использовать для нахождения пределов, фигурирующих в выражениях для установившейся ошибки регулирования в САУ.

* В общем случае, сокращение кратных нулей и полюсов является некорректной операцией и не может производиться без детального анализа причин появления указанных нулей и полюсов и возможных последствий их сокращения.

3. Решение типовой задачи с использованием MATLAB

Обратимся к задаче со следующими условиями. Необходимо исследовать заданную САУ на устойчивость и определить установившуюся ошибку при следующих параметрах ПИД-регулятора: $k_{\text{п}} = 1$, $k_{\text{и}} = 2 \text{ с}^{-1}$, $k_{\text{д}} = 1,5 \text{ с}$. Регулятору соответствует ПФ $w_1(p)$ на структурной динамической схеме, показанной на рис. 3.

Передаточные функции звеньев:

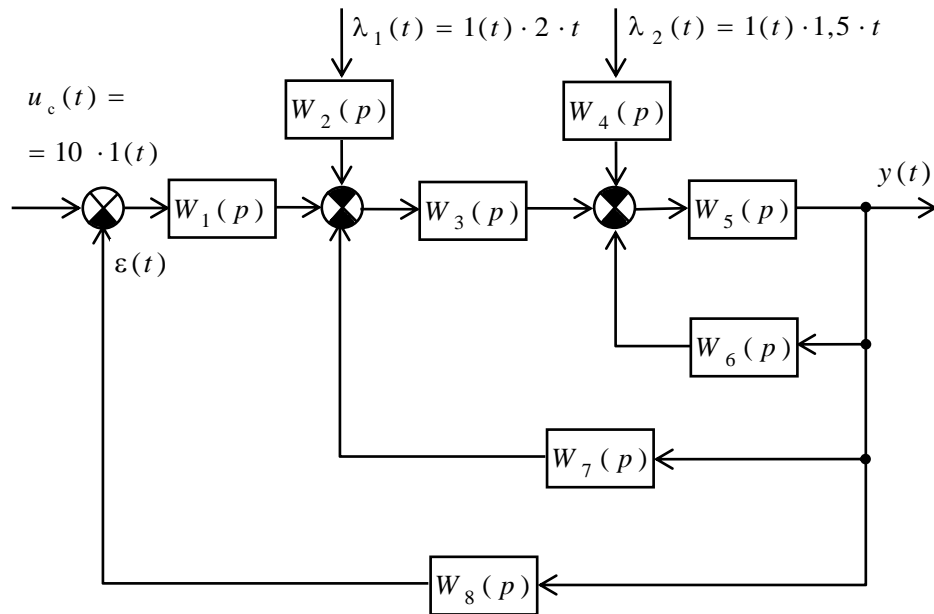


Рис. 3

$$W_1(p) = 1 + \frac{2}{p} + 1,5 p = \frac{1,5 p^2 + p + 2}{p};$$

$$W_2(p) = \frac{0,3 p + 1}{0,3 p^3 + 1,7 p^2 + 2,4 p + 1};$$

$$W_3(p) = \frac{0,5}{0,4 p + 1};$$

$$W_4(p) = \frac{0,6}{0,2 p + 1};$$

$$W_5(p) = \frac{10}{0,15 p^2 + 1,7 p + 1};$$

$$W_6(p) = \frac{0,5}{0,01 p + 1};$$

$$W_7(p) = \frac{0,7}{0,07 p + 1};$$

$$W_8(p) = \frac{0,5}{0,5 p + 1}.$$

Для решения задачи с использованием ППП MATLAB необходимо определить в рабочей области ПФ всех звеньев САУ. Определим ПФ $w_1(p)$:

```
W1=tf([1.5 1 2], [1 0])
Transfer function:
1.5 s^2 + s + 2
-----
s
```

Определим ПФ $w_2(p)$:

```
W2=tf([0.3 1], [0.3 1.7 2.4 1])
Transfer function:
0.3 s + 1
-----
0.3 s^3 + 1.7 s^2 + 2.4 s + 1
```

Определим ПФ $w_3(p)$:

```
W3=tf([0.5], [0.4 1])
Transfer function:
0.5
-----
0.4 s + 1
```

Определим ПФ $w_4(p)$:

```
W4=tf([0.6], [0.2 1])
Transfer function:
0.6
-----
0.2 s + 1
```

Определим ПФ $w_5(p)$:

```
W5=tf([10], [0.15 1.7 1])
Transfer function:
10
-----
0.15 s^2 + 1.7 s + 1
```

Определим ПФ ПФ $w_6(p)$:

```
W6=tf([0.5], [0.01 1])
Transfer function:
0.5
-----
0.01 s + 1
```

Определим ПФ $w_7(p)$:

```
W7=tf([0.7], [0.07 1])
Transfer function:
      0.7
```

```
-----
0.07 s + 1
```

Определим ПФ $w_8(p)$:

```
W8=tf([0.5], [0.5 1])
Transfer function:
      0.5
```

```
-----
0.5 s + 1
```

Далее определим ПФ $w_{56}(p)$ для замкнутого контура, образованного звеньями с ПФ $w_5(p)$ и $w_6(p)$:

```
W56=feedback(W5, W6)
Transfer function:
      0.1 s + 10
```

```
-----
0.0015 s^3 + 0.167 s^2 + 1.71 s + 6
```

Определим также ПФ $w_{3567}(p)$ для замкнутого контура, образованного звеньями с ПФ $w_3(p)$, $w_5(p)$, $w_6(p)$ и $w_7(p)$:

```
W3567=feedback(W3*W56, W7)
Transfer function:
```

```
      0.0035 s^2 + 0.4 s + 5
```

```
-----
4.2e-005 s^5 + 0.005381 s^4 + 0.1279 s^3 + 1.139 s^2 + 4.565 s + 9.5
```

Для исследования САУ на устойчивость определим ПФ замкнутой системы $W(p)$:

```
W=feedback(W1*W3567, W8)
Transfer function:
```

```
      0.002625 s^5 + 0.307 s^4 + 4.557 s^3 + 10.81 s^2 + 10.8 s + 10
```

```
-----
2.1e-005 s^7 + 0.002733 s^6 + 0.06932 s^5 + 0.6998 s^4 + 3.723 s^3 + 13.27 s^2 + 12.4 s + 5
```

Находим полюсы замкнутой системы:

```
pole(W)
ans =
1.0e+002 *
```

```
-1.0037
-0.1220 + 0.0032i
-0.1220 - 0.0032i
-0.0210 + 0.0510i
```

$-0.0210 - 0.0510i$
 $-0.0057 + 0.0045i$
 $-0.0057 - 0.0045i$

Поскольку все полюсы имеют отрицательную вещественную часть, то есть, являются левыми, заключаем, что система устойчива.

Для нахождения установившейся ошибки определим ПФ разомкнутой системы $W_{\text{раз}}(p)$:

Wraz=W1*W3567*W8

Transfer function:

$$0.002625 s^4 + 0.3018 s^3 + 3.954 s^2 + 2.9 s + 5$$

$$2.1e-005 s^7 + 0.002733 s^6 + 0.06932 s^5 + 0.6972 s^4 + 3.421 s^3 + 9.315 s^2 + 9.5 s$$

Чтобы найти ПФ по каналам преобразования возмущений в разомкнутой САУ, преобразуем структурную схему к виду, показанному на рис. 4.

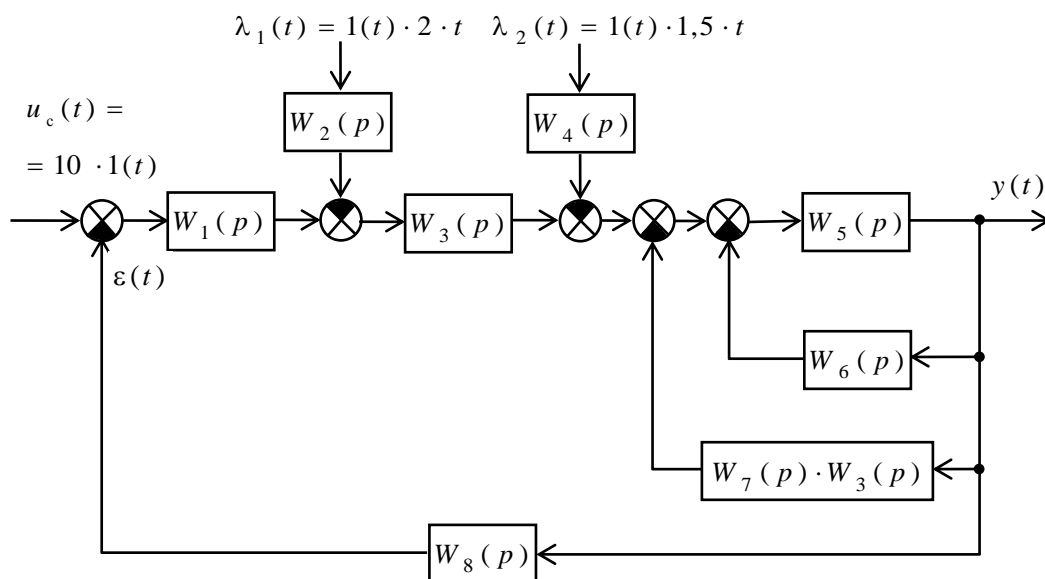


Рис. 4

Теперь определим ПФ $w_{y\lambda_1.\text{раз}}(p)$ для цепи преобразования возмущения $\lambda_1(t)$ в разомкнутой системе:

Wyl1raz=W2*W3*feedback(W56, W7*W3)

Transfer function:

$$0.00042 s^4 + 0.05045 s^3 + 0.8835 s^2 + 3.9 s + 5$$

$$5.04e-006 s^9 + 0.0006869 s^8 + 0.02073 s^7 + 0.2764 s^6 + 2.019 s^5 + 9.006 s^4 + 24.77 s^3 + 39.19 s^2 + 31.16 s + 9.5$$

Определим также ПФ $w_{y\lambda_2.\text{раз}}(p)$ для цепи преобразования возмущения $\lambda_2(t)$ в разомкнутой системе:

Wyl2raz=W4*feedback(W56, W7*W3)

Transfer function:

$$0.00168 s^3 + 0.1962 s^2 + 2.88 s + 6$$

$$8.4e-006 s^6 + 0.001118 s^5 + 0.03096 s^4 + 0.3556 s^3 + 2.052 s^2 + 6.465 s + 9.5$$

Для нахождения ε_{ycm} по формуле (9) определим изображение $p \cdot E(p)$ с уче-

ТОМ ТОГО, ЧТО $U_c(p) = 10 / p$, $\Lambda_1(p) = 2 / p^2$ и $\Lambda_2(p) = 1,5 / p^2$, и вычислим предел

$\lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot E(p))$ ПОДСТАНОВКОЙ $p = 0^*$:

e=evalfr(Q, 0)

e =

1.9000

e=evalfr(minreal(s*10/(s*(1+Wraz))+s*2*Wyl1raz*W8/(s^2*(1+Wraz))+s*1.5*Wyl2raz*W8/(s^2*(1+Wraz))), 0)

e =

1.9000

Результат проверяем моделированием в Simulink. Схема моделирования представлена на рис. 5.

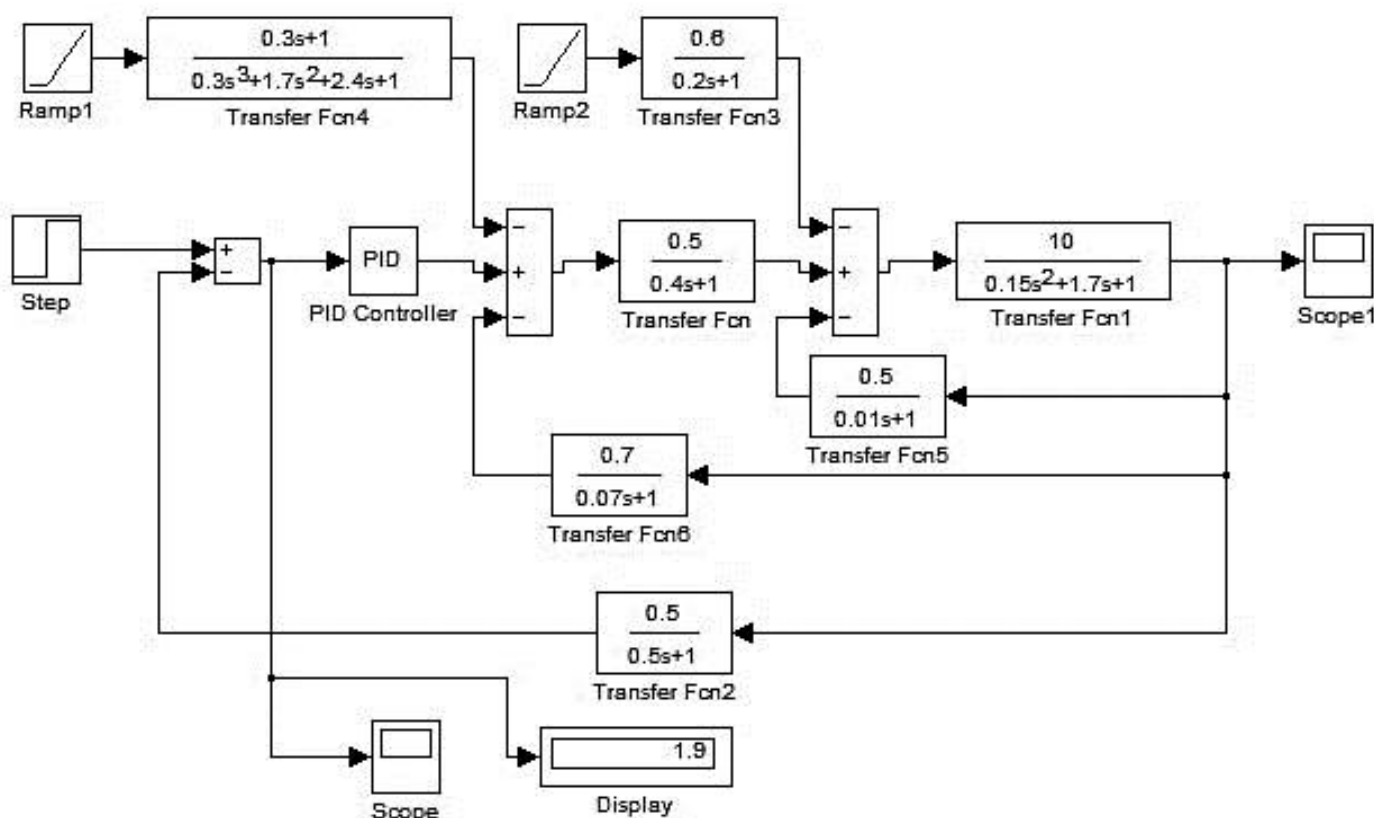


Рис. 5

Вид переходного процесса по рассогласованию показан на рис. 6.

* В MATLAB ищется минимальная реализация изображения, позволяющая избавиться от одинаковых нулей и полюсов, что в данном случае допустимо и что требуется для нахождения предела подстановкой.

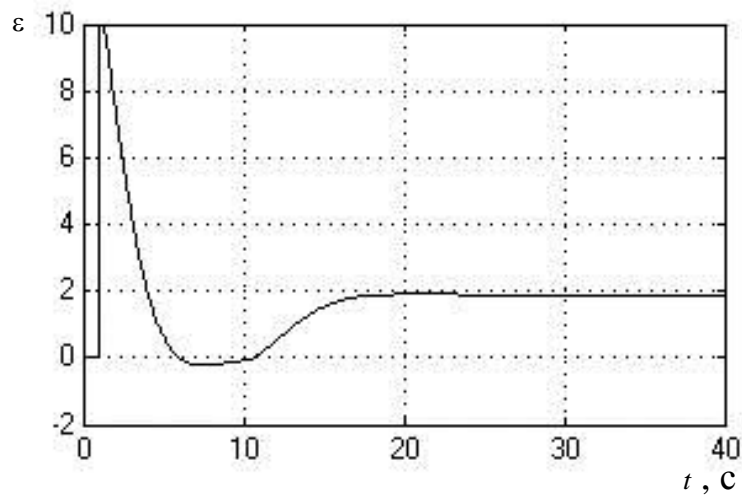


Рис. 6

Очевидно, что найденное расчетным путем значение ошибки совпадает со значением, полученным при моделировании (см. Display на рис. 5). Из этого с большой вероятностью следует вывод о том, что задача решена верно.

Библиографический список

1. Бесекерский В. А. Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. – СПб: Профессия, 2003. – 752 с.
2. Медведев В. С., Потемкин В. Г. Control System Toolbox. MATLAB 5.0 для студентов. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.
3. Мартынов Н. Н. Введение в MATLAB 6. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2002. – 352 с.