

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
Ухтинский государственный технический университет

---

Б. А. Иванов, А. В. Недвига

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Ухта  
2007

Учебное издание

Борис Аркадьевич Иванов  
Александр Владимирович Недвига

## **Элементы теории дискретных систем автоматического управления**

Учебное пособие

УДК 681.51  
И 20

**Иванов, Б. А.** Элементы теории дискретных систем автоматического управления [Текст]: учеб. пособие / Б. А. Иванов, А. В. Недвига. – Ухта: УГТУ, 2007. – 112 с., ил.

ISBN 978-5-88179-453-8

В пособии излагаются основы теории дискретизации сигналов и дискретных систем автоматического управления. Материал иллюстрируется разбором задач, решаемых с использованием современных программных средств: системы MATLAB и пакета Mathcad. Приводится задание на курсовую работу, а также пример его выполнения.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлению магистратуры 140600 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», а также по специальности подготовки инженеров 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов». Может быть полезно аспирантам, обучающимся по специальностям 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации» и 05.11.16 «Информационно-измерительные и управляющие системы (нефтяной и газовой промышленности)».

Пособие может быть использовано в ходе изучения таких дисциплин, как «Теория автоматического управления», «Синтез законов управления в технических системах» и «Системы управления электроприводов».

Рецензенты: кафедра «Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами» ЮРГТУ (НПИ);  
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системный анализ и управление» РГУ В. А. Петраков.

Редактирование и корректура Коптяева К. В.

Компьютерная верстка Иванов Б. А.

Технический редактор Коровкина Л. П.

© Ухтинский государственный технический университет, 2007

© Иванов Б. А., Недвига А. В., 2007

ISBN 978-5-88179-453-8

План 2006 г., позиция 10. Подписано в печать 13.02.2007 г.

Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.

Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.

Усл. п. л. 6,5. Уч.- изд. л. 5,8. Тираж 120 экз. Заказ №207.

Ухтинский государственный технический университет.

169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.

Отдел оперативной полиграфии УГТУ.

169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Глава 1. Дискретизация сигналов в системах автоматического управления.....	5
1.1. Классификация сигналов управления .....	5
1.2. Шумы квантования.....	15
1.3. Теорема Котельникова .....	20
1.4. Дискретные системы автоматического управления .....	27
1.4.1. Структура дискретных систем.....	27
1.4.2. Свойства формирующего элемента .....	31
1.4.3. Выбор частоты дискретизации .....	32
Глава 2. Математическое описание дискретных сигналов и систем автоматического управления.....	34
2.1. Z-преобразование и его свойства .....	34
2.2. Передаточные функции дискретных САУ .....	38
2.2.1. Общие сведения о ПФ дискретных систем .....	38
2.2.2. Передаточные функции разомкнутых САУ .....	45
2.2.3. Передаточные функции замкнутых дискретных САУ .....	50
Глава 3. Устойчивость и динамика дискретных систем .....	54
3.1. Понятие об устойчивости дискретной САУ .....	54
3.2. Алгебраический критерий устойчивости дискретных САУ .....	58
3.3. Расчет переходных процессов в дискретных САУ .....	61
Глава 4. Синтез дискретных систем автоматического управления .....	67
4.1. Теоретические основы синтеза дискретных САУ методом эталонных передаточных функций .....	67
4.2. Задание на синтез дискретной САУ .....	70
4.3. Пример синтеза дискретной САУ .....	76
Глава 5. Избранные объекты системы MATLAB .....	101
Библиографические ссылки .....	112

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Бурное развитие техники автоматизации технологических процессов затронуло практически все отрасли промышленности и народного хозяйства. Системы автоматического управления (САУ) различными технологическими объектами составляют ядро техники автоматизации. Все чаще они входят в состав иерархически построенных информационно-управляющих систем, которые интегрируют в себе самые разные уровни обработки информации: от низшего, привязанного непосредственно к локальным объектам управления, до самого высшего, соответствующего диспетчерским пунктам корпоративных территориально-распределенных систем. На сегодняшний день практически все внедряемые САУ являются цифровыми, так как выполняются на основе промышленных контроллеров и промышленных компьютеров. Это порождает ряд задач, требующих от работников, не всегда являющихся специалистами по автоматике, понимания основ теории цифровых систем.

В настоящем пособии в краткой форме излагаются основополагающие вопросы теории цифровых САУ. Материал рассчитан, прежде всего, на будущих инженеров-электриков по электроприводу и смежным специальностям. Предполагается, что читатели предварительно изучили теорию непрерывных линейных САУ. Изложение ведется в рамках одномерных вход-выходных моделей с использованием  $Z$ -преобразования. Описание в пространстве состояний, вполне оправданное применительно к многомерным САУ, в пособии не приводится, так как это – следующий этап изучения теории цифровых систем управления. Для изучения методов пространства состояний, применительно к цифровым САУ, можно рекомендовать книги [3] и [4].

Особенностью данного пособия является широкое привлечение программных пакетов MATLAB и Mathcad для решения задач анализа и синтеза цифровых систем автоматического управления. Для закрепления теоретического материала предлагается многовариантное расчетное задание и рассматривается пример его решения.

# ГЛАВА 1

## ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ

### В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 1.1. Классификация сигналов управления

В математическом смысле, сигнал – это функция времени (скалярный сигнал) или совокупность функций времени (векторный сигнал). Сигнал может быть сформирован из физического процесса, протекающего в объекте управления, или порожден информационным процессом в компьютере. По своей природе реальный сигнал в системе управления может быть электрическим, оптическим, гидравлическим или иным. Сигнал в теории – это функция, рассматриваемая вне зависимости от размерности величин. Обратимся к модели формирования сигнала  $x(t)$  из физического процесса  $\chi(t)$ , показанной на рис. 1.1.

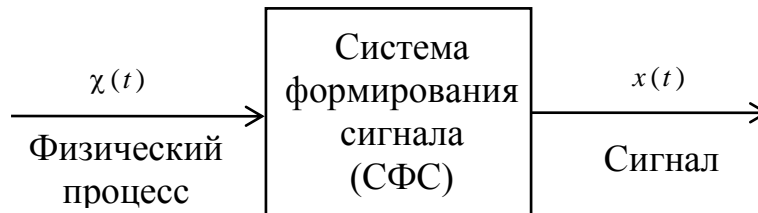


Рис. 1.1. Модель формирования сигнала

В общем случае, сигнал  $x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{св}}(t)$ , где  $x_{\text{в}}(t)$  – вынужденная составляющая, а  $x_{\text{св}}(t)$  – свободная составляющая общего движения выходной координаты СФС. Вынужденная составляющая  $x(t)$  порождена процессом  $\chi(t)$  и является полезной в информационном смысле. Свободная составляющая  $x(t)$  порождается СФС и является бесполезной в информационном смысле.

В зависимости от свойств СФС, сигналы, рассматриваемые в технике и теории автоматического управления, могут быть классифицированы в соответствии с рис. 1.2. Эта классификация охватывает и сигналы, формируемые из информационных процессов, при помощи компьютеров. Дадим определение и краткое описание классов сигналов, представленных на рис. 1.2.



Рис. 1.2. Классификация сигналов управления

**Континуальным** называется сигнал, у которого область (множество) значений, а также область определения (множество значений аргумента) являются континуумами\*. Континуальный сигнал математически описывается функцией непрерывного времени, например,  $u(t)$ . В любой момент времени  $t \in [t_1, t_2]$  или  $t \in (-\infty, \infty)$ , одномерный (скалярный) континуальный сигнал  $u(t)$  может принимать любое значение  $u \in [u_1, u_2]$  или  $u \in (-\infty, \infty)$ .

**Аналоговый** называется континуальный сигнал, у которого область определения вынужденной составляющей равна области определения всего сигнала.

Аналоговые сигналы называют также непрерывными. Однако, употребляя этот термин, нужно иметь в виду, что аналоговые сигналы могут претерпевать разрывы. Иллюстрация этому факту приведена на рис. 1.3.

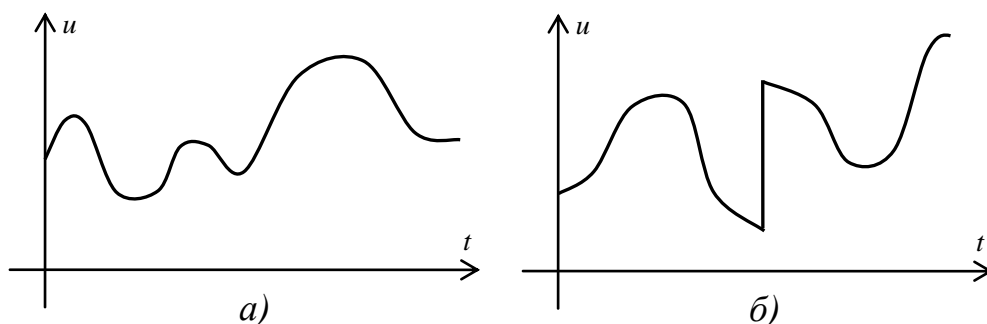


Рис. 1.3. Примеры аналоговых сигналов: а) – без разрыва; б) – с разрывом

**Псевдо-аналоговым сигналом** называется континуальный сигнал, у которого область определения вынужденной составляющей меньше всей области определения сигнала. Иначе говоря, в области определения такого сигнала имеются интервалы, на которых наблюдается только свободное движение в СФС\*\*. Если же область определения вынужденной составляющей – счетное или конечное множество, то сигнал является **псевдо-аналоговым сигналом с неявной дискретностью**.

Пример формирования псевдо-аналогового сигнала показан на рис. 1.4.

\* Континуум (от лат. continuum – непрерывное, сплошное) – это непрерывное множество, например, множество всех точек прямой или отрезка.

\*\* Это определение подразумевает, что известен способ формирования сигнала. В противном случае такие сигналы неотличимы от аналоговых.

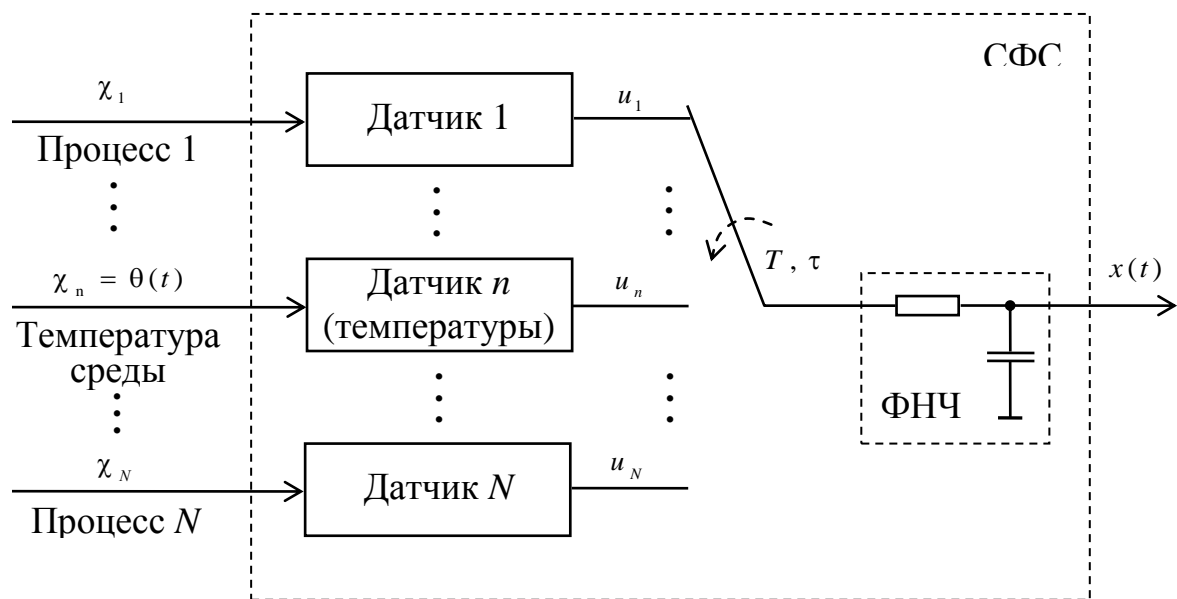


Рис. 1.4. Система сбора информации с датчиков

Типичная система сбора информации с датчиков технологических координат содержит мультиплексор (переключатель), работающий циклически. В течение цикла длительностью  $T$  мультиплексор последовательно подключается к каждому из  $N$  датчиков на время  $\tau$ . Фильтр нижних частот (ФНЧ) используется для подавления высокочастотных помех в линиях подключения датчиков. Датчик температуры измеряет температуру некой технологической среды  $\theta(t)$  и формирует напряжение  $u(t)$ , представляющее собой аналоговый электрический сигнал. Нужно заметить, что и сам процесс  $\theta(t)$  можно трактовать, как аналоговый сигнал. На выходе схемы образуется сигнал  $x(t)$ , являющийся примером псевдо-аналогового сигнала. Возможный график  $x(t)$  показан на рис. 1.5.

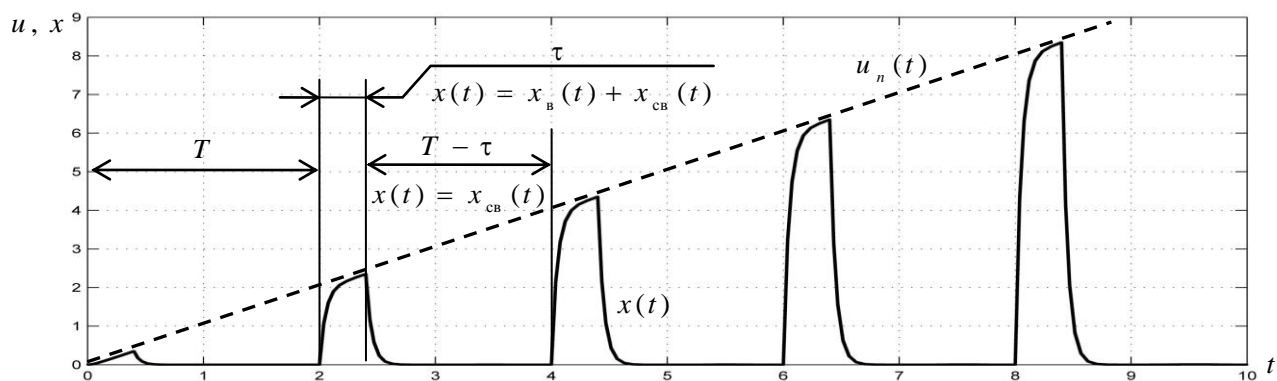


Рис. 1.5. Пример формирования псевдо-аналогового сигнала



Предполагается, что температура  $\theta$  линейно нарастает во времени. Электрический сигнал на выходе датчика температуры  $u_n(t)$  является аналоговым. Он также линейно растет. Каждый период выходного сигнала  $x(t)$ , соответствующий циклу опроса всех датчиков, можно разбить на два участка. На первом из них мультиплексор соединяет выход датчика с ФНЧ и  $x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{св}}(t)$ , а на втором —  $x(t) = x_{\text{св}}(t)$ , так как выход датчика отсоединен и  $u_n(t)$  не может вынуждать движения в ФНЧ. Таким образом, на втором участке вынужденная составляющая не определена и, следовательно, сигнал  $x(t)$  является псевдо-аналоговым.

Нужно отметить, этот данный класс сигналов в одном смысле относится к непрерывным сигналам, а в другом смысле — к дискретным. В этой связи, псевдо-аналоговые сигналы можно называть непрерывно-дискретными.

Далее обратимся к дискретным сигналам.

**Дискретным** называется сигнал, у которого область значений, или область определения (или область определения вынужденной составляющей движения), либо и то и другое, являются счетными или конечными множествами<sup>\*\*</sup>.

Преобразование аналогового сигнала в дискретный сигнал называется **дискретизацией** или **квантованием**. Как следует из определения дискретного сигнала, дискретизация может осуществляться только по времени, только по уровню или по времени и по уровню совместно<sup>\*\*\*</sup>.

Если область определения сигнала — счетное или конечное множество разрешенных моментов времени  $t = nT_{\text{д}}$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер отсчета,  $T_{\text{д}}$  — период дискретизации), а область значений — континуум, то такой сигнал называется **идеальным импульсным сигналом** (ИИС). Иначе говоря, ИИС дискретен только по времени. Импульсным он называется в связи с тем, что

---

<sup>\*\*</sup> Счетное множество — это множество, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность. Например, множество натуральных чисел является счетным. Конечное множество — это множество, имеющее конечное число элементов. Например, отрезок натурального ряда  $(1, 2, \dots, n)$  является конечным множеством.

<sup>\*\*\*</sup> Термин «квантование» будем понимать как полный синоним термина «дискретизация». В ряде случаев, под квантованием понимают только квантование уровня сигнала.

содержащаяся в нем информация заключена в площади  $\delta$ -импульсов\*. Можно считать, что ИИС  $u^*(t)$  формируется как результат умножения непрерывного сигнала  $u(t)$  на последовательность единичных импульсов ( $\delta$ -функций), как показано на рис. 1.6 (где площадь импульсов отображена высотой обозначений).

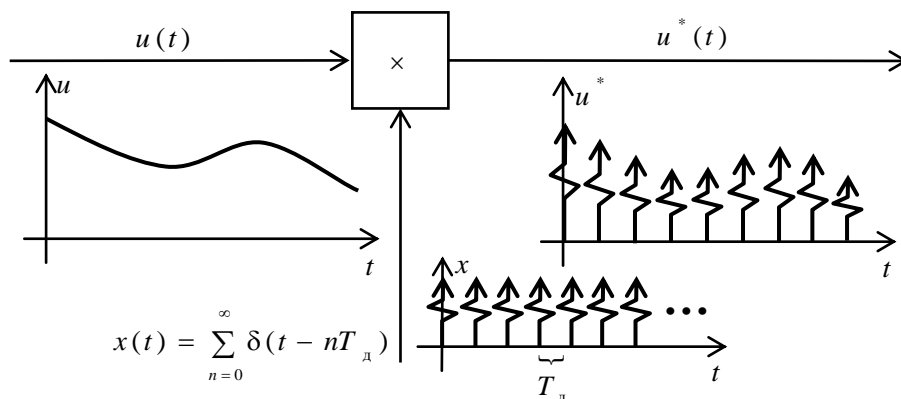


Рис. 1.6. Формирование ИИС

Таким образом,

$$u^*(t) = u(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT_d) \delta(t - nT_d), \quad (1.1)$$

где  $u(nT_d) = u(t)|_{t=nT_d}$  — **решетчатая функция**, представляющая собой совокупность ординат аналогового сигнала  $u(t)$ , определенных в дискретные моменты времени. Вид этой функции показан на рис. 1.7.

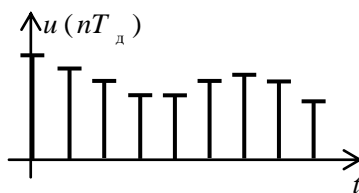


Рис. 1.7. Решетчатая функция  $u(nT_d)$ , соответствующая  $u(t)$  (см. рис. 1.6)

Фактически, значения решетчатой функции равны площади  $\delta$ -импульсов на выходе блока умножения сигналов (перемножителя), показанного на рис. 1.6. Последний, вместе с генератором последовательности единичных им-

\* Под  $\delta$ -импульсом неединичной (переменной) площади здесь понимается произведение  $a \cdot \delta(t)$ , где  $a$  — вещественное число,  $\delta(t)$  — дельта-функция с единичной площадью (единичный импульс).

пульсов (на рис. 1.6 не показан), образует **идеальный импульсный элемент** (ИИЭ). Этот элемент на структурных динамических схемах будем обозначать так, как показано на рис. 1.8.

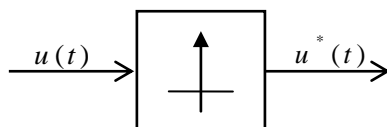


Рис. 1.8. Условное графическое обозначение ИИЭ

Очевидно, что ИИС не может быть сформирован на практике, но, теоретически, именно из ИИС формируется **реальный импульсный сигнал** (РИС)  $\mu(t)$  при помощи так называемого **формирующего элемента** (ФЭ). Реальный импульсный сигнал несет информацию о значениях исходного аналогового сигнала в значениях площади импульсов (напряжения, тока, момента, давления, или других физических величин) конечной амплитуды и конечной длительности. Операция преобразования ИИС в РИС иллюстрируется рис. 1.9.

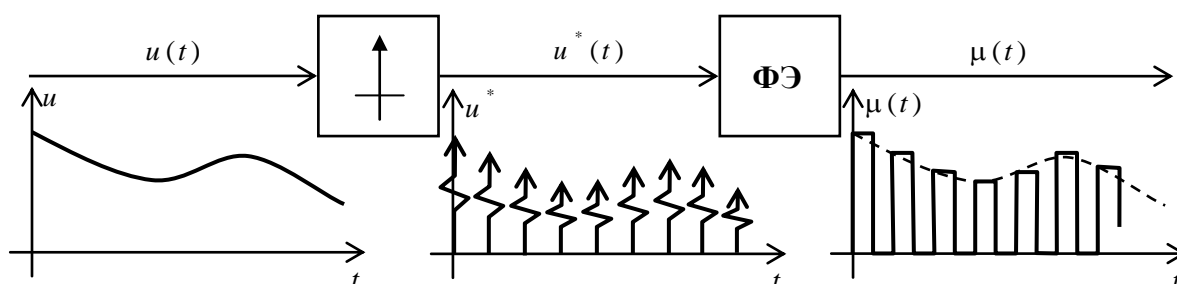


Рис. 1.9. Схема формирования реального импульсного сигнала

Совокупность ИИЭ и ФЭ называется **реальным импульсным элементом** или просто импульсным элементом (ИЭ). На выходе реального импульсного элемента формируется импульсный сигнал с тем или иным видом импульсной модуляции. Очевидно, что РИС определен на всей временной оси (континууме), но вынужденная составляющая движения определена только на счетном множестве дискретных моментов времени  $nT_d$ .

На практике используют амплитудно-импульсную модуляцию первого и второго рода (АИМ-I и АИМ-II, соответственно), а также широтно-импульсную модуляцию (ШИМ). Соответствующая форма РИС показана на рис. 1.10.

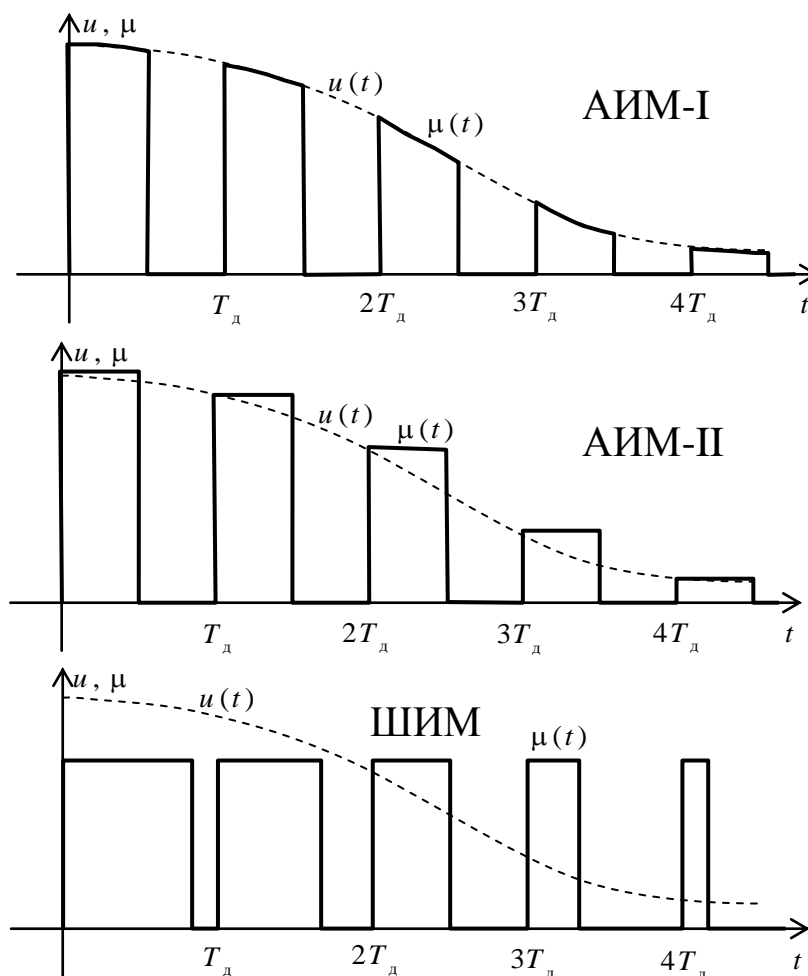


Рис. 1.10. Сигналы с различной импульсной модуляцией\*

Ниже будем рассматривать только системы с АИМ-II, так как системы с АИМ-I редко используются в настоящее время, а системы с ШИМ, при малой скважности импульсов, могут приводиться к эквивалентным системам с АИМ-II (при большой скважности проявляется нелинейность ШИМ и приведение невозможно). При АИМ-II формирующий элемент является линейным динамическим звеном. У РИС с АИМ-II область значений – континуум, область определения – также континуум, но область определения вынужденной составляющей движения – счетное множество дискретных моментов времени  $nT_d$ . Поэтому, такой сигнал на рис. 1.6 отнесен к классу псевдо-аналоговых сигналов

\* Нужно отметить, что в ряде книг наименования АИМ-I и АИМ-II используются иначе: сигнал, показанный на рис. 1.10 сверху называется сигналом с АИМ-II, а сигнал, показанный ниже – сигналом с АИМ-I.

с неявной дискретностью (при этом он является РИС и относится также к дискретным сигналам).

**Релейным** называется сигнал, у которого область определения – континуум, а область значений – счетное или конечное множество, состоящее из разрешенных уровней, отстоящих друг от друга на величину **шага квантования**  $\Delta$ . Иначе говоря, релейный сигнал дискретен только по уровню. Примером простейшего двухуровневого релейного сигнала может служить напряжение на зажимах нагревательного элемента утюга. Оно принимает одно из двух разрешенных значений: 0 В или 220 В ( $\Delta = 220$  В), а моменты переключения определяются срабатыванием теплового реле.

**Цифровым** называется сигнал, у которого область значений, а также область определения – счетные или конечные множества. Ближайшие разрешенные уровни цифрового сигнала отстоят друг от друга на величину шага квантования  $\Delta$ , как и релейного сигнала. Ближайшие моменты времени, в которые может изменяться цифровой сигнал, отстоят друг от друга на величину периода дискретизации  $T_d$ .

**Идеальным цифровым сигналом** (ИЦС) называется сигнал, область определения и область значений которого – счетные или конечные множества. Схема формирования ИЦС показана на рис. 1.11.

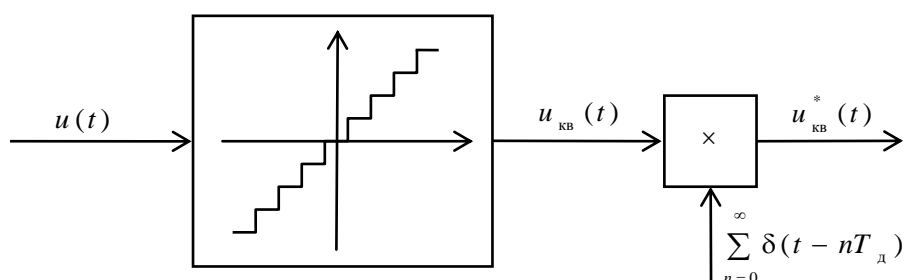


Рис. 1.11. Схема формирования идеального цифрового сигнала

Входной аналоговый сигнал, перед дискретизацией по времени, подвергается дискретизации по уровню, проходя через нелинейный безынерционный элемент типа «многоступенчатое реле». Далее квантованный по уровню сигнал

$u_{\text{кв}}(t)$  квантуется по времени так же, как это происходит при формировании ИИС. На выходе формируется ИЦС

$$u_{\text{кв}}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\text{кв}}(nT_{\text{д}}) \delta(t - nT_{\text{д}}), \quad (1.2)$$

где решетчатая функция  $u_{\text{кв}}(t)$  отличается от решетчатой функции из (1.1) тем, что ее значения (дискреты) имеет величину  $k(nT_{\text{д}}) \cdot \Delta$  ( $k$  — целое число, доставляющее минимум величине  $|k(nT_{\text{д}}) \cdot \Delta - u(nT_{\text{д}})|$ ). Пример подобной решетчатой функции показан на рис. 1.12.

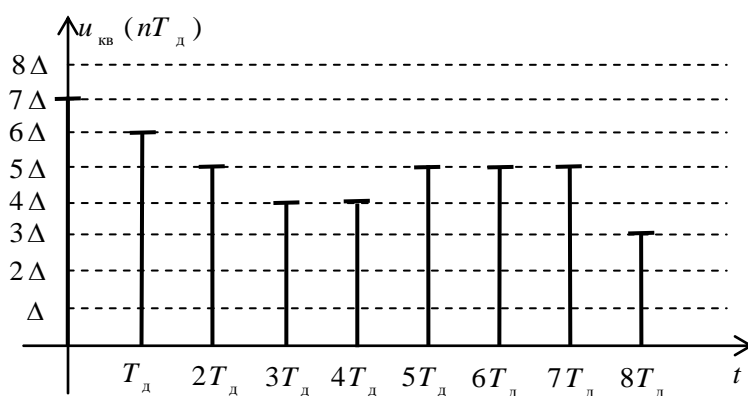


Рис. 1.12. Решетчатая функция цифрового сигнала

**Реальный цифровой сигнал** (РЦС)  $\mu_{\text{кв}}(t)$  получается обработкой ИЦС формирующим элементом, в соответствии со схемой, показанной на рис. 1.13.

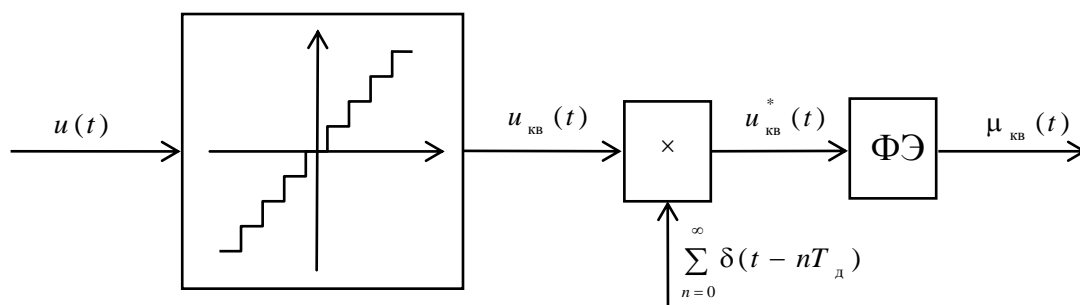


Рис. 1.13. Схема формирования РЦС

Область значений РЦС — конечное или счетное множество, в зависимости от вида импульсной модуляции, осуществляемой ФЭ, а также от принятия или непринятия допущения о конечности числа ступеней характеристики нелиней-

ного элемента. Область определения РЦС – континуум (вся ось времени), а область определения вынужденной составляющей движения – счетное множество дискретных моментов времени  $nT_d$ .

Примером РЦС является сигнал на выходе тактируемого аналого-цифрового преобразователя (АЦП) типа «напряжение-код»  $N_{\text{АЦП}}(t)$ , где  $N_{\text{АЦП}}$  – десятичное число, соответствующее двоичному коду на выходе преобразователя. Сигнал на выходе тактируемого цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) типа «код-напряжение»  $u_{\text{ЦАП}}(t)$  также может формально рассматриваться как РЦС, так как его область значений – конечное множество, а область определения вынужденной составляющей движения – счетное множество дискретных моментов времени  $nT_d$ .

Как и РИС, РЦС формируется с использованием того или иного вида импульсной модуляции. Будем ниже полагать, что РЦС – это сигнал с АИМ-II (к этому варианту сводятся и примеры с АЦП и ЦАП).

Очевидно, что формирование цифрового сигнала представляет собой нелинейное преобразование. Тем не менее, в ряде задач, при достаточно большом числе уровней квантования и достаточно малом шаге квантования  $\Delta$ , нелинейностью можно пренебречь и рассматривать цифровой сигнал как импульсный с АИМ-II. В этом случае, можно говорить о дискретном сигнале, так различие между импульсным и цифровым сигналами исчезает.

## 1.2. Шумы квантования

В результате квантования аналогового сигнала  $u(t)$  по уровню и по времени, неизбежно теряется часть информации и появляется так называемый **шум квантования**  $\chi(t)$ . Этот шум может быть определен как разность исходного аналогового сигнала и приведенного РЦС:

$$\chi(t) = u(t) - r\mu_{\text{KB}}(t), \quad (1.3)$$

где  $r$  – коэффициент, учитывающий усиление формирующего элемента и размерность  $u(t)$  ( $|r| = 1/k_{\text{ФЭ}}$ , где  $k_{\text{ФЭ}}$  – коэффициент передачи ФЭ). Часто размерность опускают, а  $k_{\text{ФЭ}}$  полагают равным единице. Тогда

$$\chi(t) = u(t) - \mu_{\text{кв}}(t), \quad (1.4)$$

На практике шум квантования выделяют, используя АЦП (А/С) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП или С/А) с одинаковым числом разрядов, как показано на рис. 1.14.

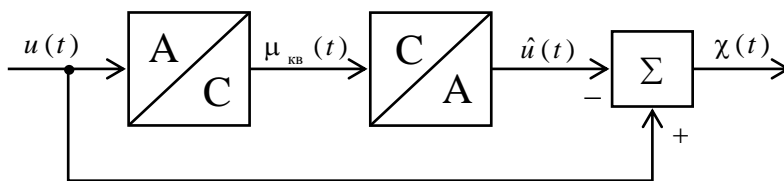


Рис. 1.14. Схема аппаратного выделения шума квантования

Оценим мощность шума квантования. Для этого рассмотрим подробнее статическую амплитудную характеристику (САХ) нелинейного звена, показанного на рис. 1.13. Характеристика изображена на рис. 1.15. При линейности остальных элементов, такого же вида САХ будет иметь и вся схема формирования РЦС (то есть, АЦП).

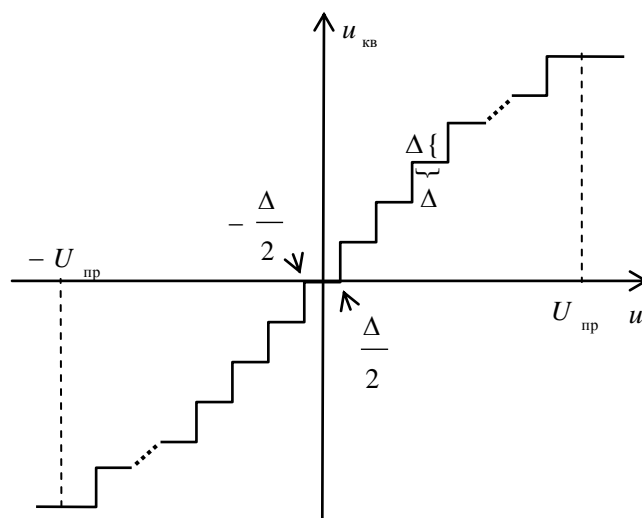


Рис. 1.15. Амплитудная характеристика многоступенчатого реле\*

\* Характеристика имеет двухстороннее ограничение, что соответствует модели реального АЦП с конечным числом разрядов  $q$ . За пределами отрезка  $[-U_{\text{пр}}, U_{\text{пр}}]$  выходная координата блока многоступенчатого реле (в англоязычной литературе – quantizer) не меняется. Количество ступеней равно  $2^q - 1$ .



Величина  $\Delta$ , как указывалось выше, называется шагом квантования. Отрезок  $[-U_{\text{пр}}, U_{\text{пр}}]$  длиной  $2U_{\text{пр}}$  называется **диапазоном преобразования** АЦП.

Если рассматривать схему формирования РЦС в установившемся режиме, когда квантованием по времени можно пренебречь, то выражение (1.4) можно переписать так:

$$\chi = u - u_{\text{кв}}, \quad (1.5)$$

где  $\chi$  приобретает смысл ошибки квантования. Из графика, показанного на рис. 1.15, видно, что  $\chi_{\text{макс}} = \Delta/2$  (соответствует, например, точке, примыкающей слева к точке  $u = \Delta/2$ ), а  $\chi_{\text{мин}} = -\Delta/2$  (соответствует, например, точке, примыкающей справа к точке  $u = \Delta/2$ ). Зависимость  $\chi(u)$  показана на рис. 1.16.

Положим, что сигнал  $u(t)$  является случайным процессом с равномерным распределением в диапазоне преобразования. Тогда шум квантования (ошибка) также имеет равномерное распределение, показанное на рис. 1.17.

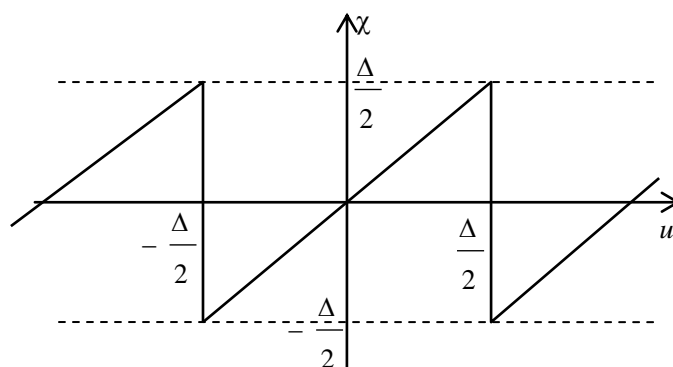


Рис. 1.16. Статическая зависимость ошибки квантования от величины входного аналогового сигнала

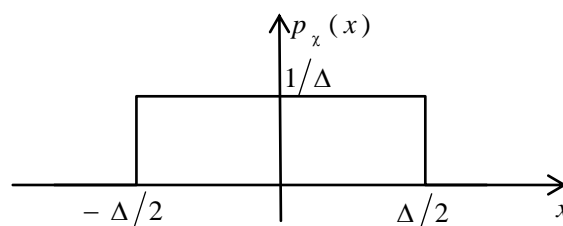


Рис. 1.17. Плотность распределения вероятности шума квантования

Найдем математическое ожидание шума квантования

$$M \{ \chi \} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\chi}(x) dx = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x dx = \frac{1}{\Delta} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\Delta^2}{2 \cdot 4} - \frac{\Delta^2}{2 \cdot 4} \right) = 0.$$

Далее найдем дисперсию

$$D_{\chi} = M \{ \chi^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\chi}(x) dx = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{1}{\Delta} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{3 \cdot 8} + \frac{\Delta^3}{3 \cdot 8} \right) = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) видно, что мощность шума квантования падает с уменьшением шага квантования  $\Delta$  и наоборот. Если говорить о модели реального АЦП и считать величину диапазона преобразования равной  $2U_{\text{пр}}$ , а число двоичных разрядов обозначить через  $q$ , то можно найти, что  $\Delta = 2U_{\text{пр}} / (2^q - 1)$ . При больших значениях  $q$ , единицей в скобках можно пренебречь и тогда имеет место приближенное равенство:  $\Delta \approx 2U_{\text{пр}} / 2^q$ . Подставляя эту величину в формулу (1.6), получаем

$$D_{\chi} \approx \frac{4U_{\text{пр}}^2}{12 \cdot (2^q)^2} = \frac{U_{\text{пр}}^2}{3 \cdot 2^{2q}}. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) следует, что мощность шума квантования можно уменьшать увеличением числа разрядов АЦП.

Определим наилучшее отношение сигнал/шум на выходе АЦП, считая, что на входе действует гармонический сигнал с максимальной амплитудой, равной  $A = U_{\text{пр}} \approx 2^q \Delta / 2$  (если амплитуда будет больше указанной, появится ограничение). Найдем среднюю мощность этого сигнала на интервале времени  $T$ , равном периоду синусоиды (то есть  $2\pi/\omega$ ), по формуле:

$$P_c = \frac{E_c}{T} = \frac{\omega E_c}{2\pi}, \quad (1.8)$$

где

$$E_c = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} u^2(t) dt \quad (1.9)$$

– энергия сигнала. Результат получаем с использованием пакета Mathcad\*:

$$\frac{w}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \left( \frac{2^q \cdot \delta}{2} \right)^2 \cdot \sin^2(w \cdot t) dt \rightarrow \frac{1}{8} \cdot (2^q)^2 \cdot \delta^2$$

В документе Mathcad символ «w» соответствует переменной « $\omega$ », а символ « $\delta$ » – переменной « $\Delta$ ».

Таким образом,

$$P_c = \frac{2^{2q} \Delta^2}{8}. \quad (1.10)$$

Отсюда, с учетом (1.6), получаем отношение сигнал/шум:

$$C/Ш = \frac{P_c}{D_\chi} = \frac{3}{2} 2^{2q}. \quad (1.11)$$

Эта формула является частным случаем формулы:

$$C/Ш = \frac{P_c}{D_\chi} = \frac{3 \cdot 2^{2q}}{K_{\text{ПФ}}^2}, \quad (1.12)$$

где  $K_{\text{ПФ}} = u_{\text{макс}} / \sqrt{u^2}$  – отношение максимального значения сигнала к среднеквадратическому, называемое пик-фактором сигнала. Заметим, что для гармонического колебания  $K_{\text{ПФ}} = \sqrt{2}$ .

При грубом оценивании отношения сигнал/шум используют соотношение  $P_c / D_\chi \approx 2^{2q}$ , выражаемое в децибелах:

$$C/Ш_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{P_c}{D_\chi} = 10 \cdot 2q \cdot \lg 2 \approx 6q. \quad (1.13)$$

Очевидно, что чем больше разрядов имеет АЦП, тем выше отношение сигнал/шум и тем больше оснований пренебречь эффектом квантования по уровню при рассмотрении цифрового сигнала. Считается, что при  $q \geq 6$ , шумом

---

\* Несмотря на обилие современной литературы по Mathcad на русском языке, лучшей книгой на момент написания пособия оставалась [11]. Версии этого пакета являются преемственными и все, что описано применительно к Mathcad 6.0, работает в новых версиях.

квантования можно пренебречь и рассматривать соответствующий цифровой сигнал как импульсный (то есть, квантованный только по времени).

### 1.3. Теорема Котельникова

Важнейшим аспектом формирования дискретных сигналов, является выбор величины периода дискретизации  $T_d$  или частоты дискретизации  $F_d = 1/T_d$  (соответственно,  $\Omega_d = 2\pi F_d = 2\pi/T_d$ ). Слишком большое значение  $T_d$  может привести к неудовлетворительной динамике САУ, вплоть до неустойчивости. Слишком малое – к неоправданным затратам на быстродействующие аппаратные средства, при незначительном выигрыше в качестве управления. Теоретическим основанием для выбора  $T_d$  является теорема Котельникова\*.

Для формулировки указанной теоремы, определим спектр сигнала на выходе ИИЭ (см. рис. 1.6). Указанный сигнал можно считать ИИС или ИЦС, если не учитывать квантование по уровню. Поскольку в обоих случаях речь идет о дискретных по времени сигналах, будем далее сигнал на выходе ИИЭ называть идеальным дискретным сигналом (ИДС). Представим последовательность немодулированных  $\delta$ -импульсов  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_d)$  в виде ряда Фурье (что возможно из-за периодичности такого сигнала):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_d t}, \quad (1.14)$$

где коэффициенты  $C_k$  определяются на периоде:

$$C_k = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{jk\Omega_d t} dt = \frac{1}{T_d}. \quad (1.15)$$

Тогда, с учетом (1.1),

$$u^*(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t) e^{jk\Omega_d t}. \quad (1.16)$$

---

\* В зарубежной научно-технической литературе эта теорема называется теоремой Найквиста или теоремой дискретизации.

Возьмем преобразование Лапласа от (1.16):

$$L\{u^*(t)\} = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L\{u(t)e^{jk\Omega_d t}\}. \quad (1.17)$$

Применим теорему о смещении изображения, выражаемую следующим соотношением:

$$L\{f(t)e^{-\alpha t}\} = F(p + \alpha). \quad (1.18)$$

Тогда

$$U^*(p) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(p - jk\Omega_d). \quad (1.19)$$

Сделаем замену  $p \rightarrow j\omega$  и получим выражение для спектра ИДС:

$$U^*(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(j\omega - jk\Omega_d). \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует, что спектр ИДС  $U^*(j\omega)$  пропорционален сумме смещенных спектров  $U(j(\omega - k\Omega_d))$  аналогового сигнала  $u(t)$ . Следовательно, спектр ИДС периодичен по частоте с интервалом  $\Omega_d$  (см. рис. 1.18).

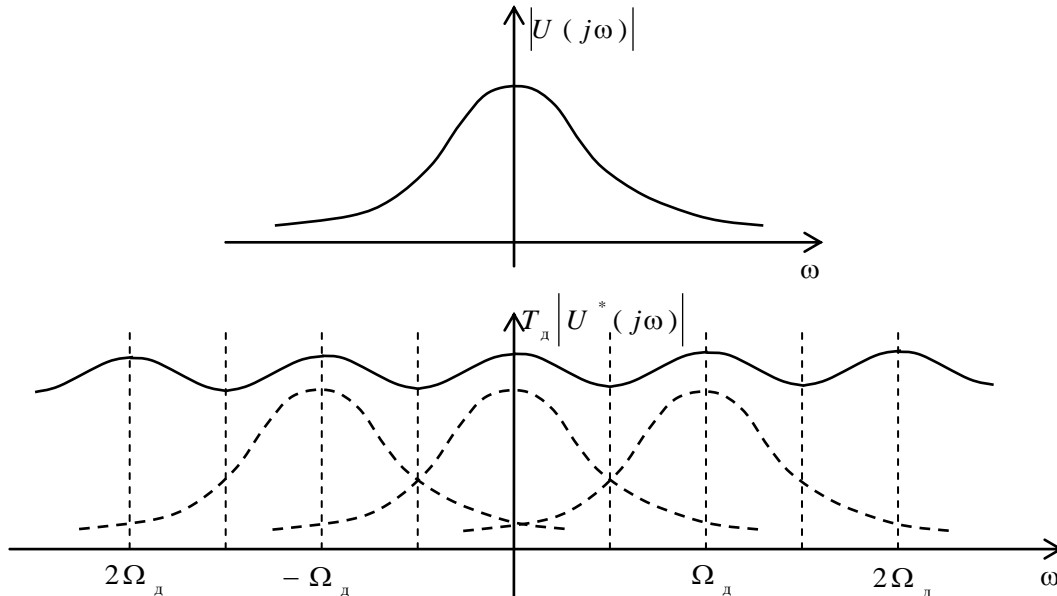


Рис. 1.18. Спектр непрерывного сигнала (вверху) и масштабированный спектр дискретизированного сигнала (внизу): пунктиром показаны слагаемые суммарного спектра (согласно формуле (1.20))

На рис. 1.18 нижний график отмасштабирован введением коэффициента  $T_d$ , что делает однозначным его построение и дает возможность зрительно соотносить его с верхним графиком (см. формулу (1.20)).

Рис. 1.18 иллюстрирует тот факт, что слагаемые спектры  $U(j(\omega - k\Omega_d))$  перекрываются, из-за чего спектр аналогового сигнала  $U(j\omega)$  нельзя выделить из результирующего спектра каким бы то ни было фильтром. Это означает, что дискретизация осуществлена с необратимыми искажениями.

Другой результат может быть получен, если спектр аналогового  $U(j\omega)$  удовлетворяет условию:

$$U(j\omega) \equiv 0 \Big|_{|\omega| \geq \Omega_{cp}}, \quad (1.21)$$

где  $\Omega_{cp}$  — частота среза спектра  $U(j\omega)$ .

В этом случае спектр сигнала называется **финитным**\*. Дискретизация сигнала с финитным спектром иллюстрируется рис. 1.19.

Очевидно, что при  $\Omega_d < 2\Omega_{cp}$ , имеется наложение спектральных слагаемых и, следовательно, выделение исходного спектра  $U(j\omega)$  из спектра дискретного сигнала  $U^*(j\omega)$  невозможно. При  $\Omega_d \geq 2\Omega_{cp}$  наложения нет, а, следовательно, пропустив дискретный сигнал через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с коэффициентом передачи в полосе пропускания равным  $T_d$  и частотой среза  $\Omega_d/2$ , можно выделить спектр  $U(j\omega)$ . Это означает полное восстановление дискретизируемого сигнала с финитным спектром  $u(t)$ .

Частота  $\Omega_d/2$  (или  $F_d/2$ ), ограничивающая сверху диапазон частот, в котором возможно квантование без потерь информации, называется **частотой Найквиста**.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) идеального восстанавливающего ФНЧ показана на рис. 1.20.

---

\* Кроме сигналов с финитным спектром, выделяют сигналы финитные по времени, или просто финитные. Финитный сигнал равен нулю вне конечного интервала времени. Финитный сигнал не может иметь финитный спектр. Сигнал с финитным спектром сам не может быть финитным.

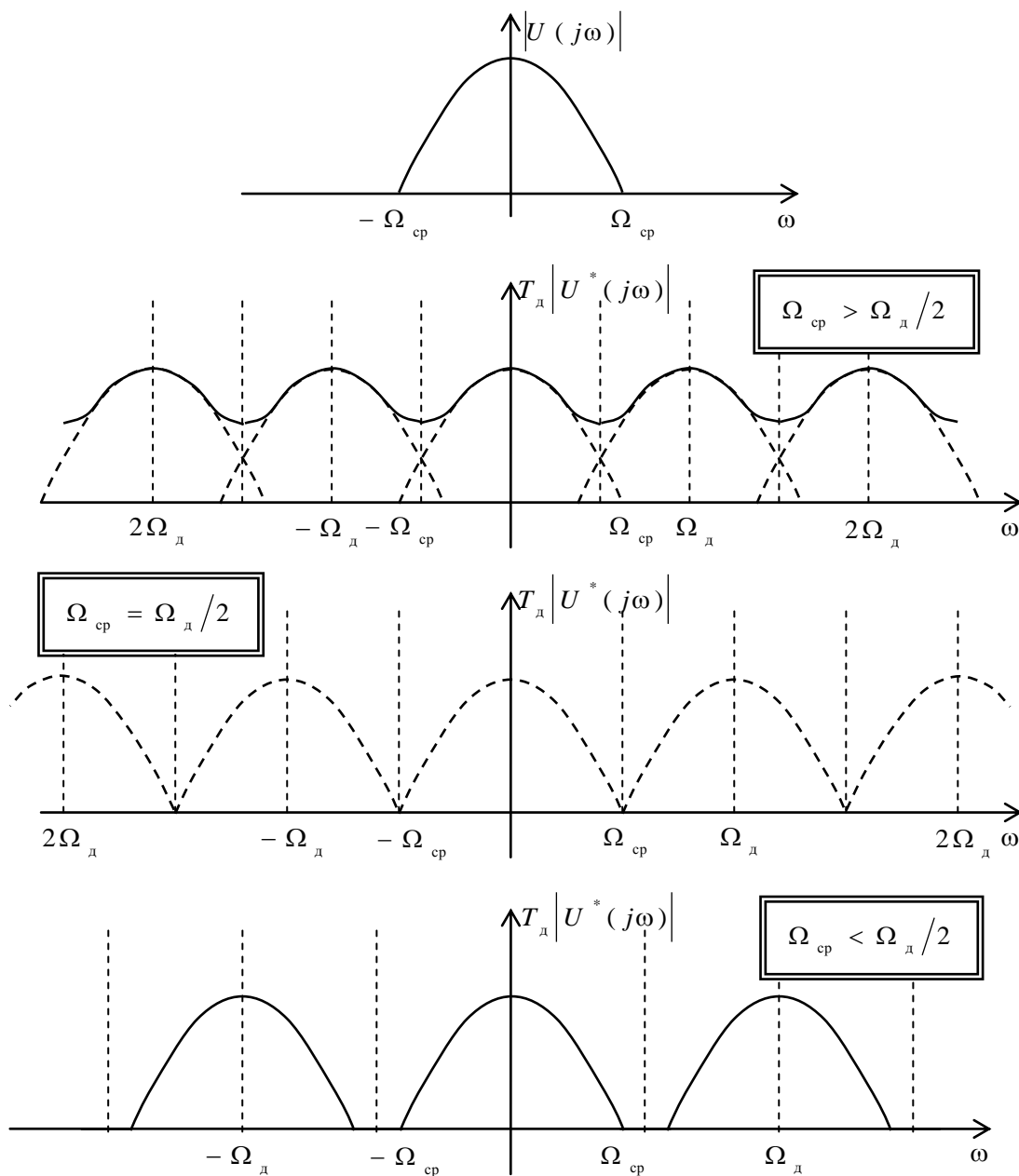


Рис. 1.19. Дискретизация сигнала с финитным спектром

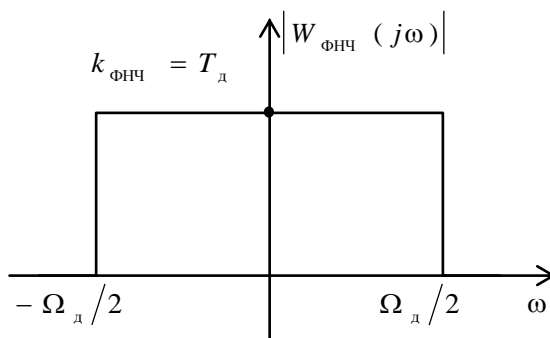


Рис. 1.20. АЧХ идеального восстанавливающего ФНЧ

**Теорема Котельникова** заключается в следующем: аналоговый сигнал  $u(t)$  с финитным спектром, ограниченным частотой  $\Omega_{\text{cp}}$ , может быть без потерь информации представлен отсчетами, взятыми с частотой дискретизации  $\Omega_{\text{д}}$ , если выполняется условие:

$$\Omega_{\text{д}} \geq 2 \Omega_{\text{cp}}. \quad (1.22)$$

Условие (1.22) можно записать как

$$F_{\text{д}} \geq 2 F_{\text{cp}} \quad (1.23)$$

или

$$T_{\text{д}} \leq \frac{\pi}{\Omega_{\text{cp}}}. \quad (1.24)$$

При выполнении этого условия, исходный аналоговый сигнал может быть восстановлен по своей решетчатой функции в виде ряда Котельникова:

$$u(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} u(nT_{\text{д}}) \frac{\sin[\Omega_{\text{cp}}(t - nT_{\text{д}})]}{\Omega_{\text{cp}}(t - nT_{\text{д}})}. \quad (1.25)$$

Следует подчеркнуть, что, в своем строгом смысле, теорема Котельникова в практических задачах никогда не выполняется. Причина – ограниченность временного интервала обработки сигналов. Сигнал, заданный на конечном отрезке  $[0, T]$ , то есть финитный, как уже указывалось, не может иметь финитный спектр. Отсюда ясно, что теорема Котельникова сформулирована для сигнала бесконечной протяженности. Тем не менее, эта теорема широко применяется на практике применительно к сигналам, спектр которых (для случайных сигналов – спектральная плотность мощности (СПМ)) убывает, начиная с некоторой частоты. В этом случае, роль частоты среза спектра  $\Omega_{\text{cp}}$  играет некоторая частота, условно принимаемая за верхнюю граничную частоту спектра, например, эффективная ширина СПМ (она может быть определена как для случайных, так и для детерминированных сигналов). В практических задачах частоту дискретизации, как правило, выбирают с запасом, то есть, не в два, а в несколько раз выше граничной частоты.



В практическом смысле существуют и другие факторы, препятствующие выполнению условия теоремы Котельникова. Например, если квантуется смесь узкополосного сигнала и широкополосного шума, то, естественно, возникает стремление использовать намного более медленный и более дешевый АЦП, способный полноценно дискретизировать только полезную составляющую такого сигнала (помеху, как будет показано ниже, нужно подавлять до квантования). В противном случае, быстродействие АЦП и системы обработки информации, а также объем обрабатываемых данных, достигли бы неприемлемых величин. Кроме того, при проектировании САУ не всегда можно предвидеть характер потенциальных возмущений. Следовательно, выбор частоты дискретизации потенциально может оказаться неудовлетворительным.

Таким образом, при реальном квантовании всегда существует негативный эффект, вызванный невыполнением условия теоремы Котельникова. Этот эффект называется **наложением частот** (или маскировкой частот). Его суть в том, что для любой частоты  $\Omega \in [0, \Omega_d/2]$ , сигналы с частотами  $\Omega, \Omega_d \pm \Omega, 2\Omega_d \pm \Omega, 4\Omega_d \pm \Omega, 8\Omega_d \pm \Omega, \dots$  оказываются неразличимыми. Докажем это на примере определения значения функции  $\cos[(m\Omega_d \pm \Omega)t]$ , где  $m$  — целое положительное число, в произвольный момент времени  $t = nT_d$ :

$$\begin{aligned} \cos [ (m\Omega_d \pm \Omega) nT_d ] &= \cos \left[ \left( \frac{m \cdot 2\pi}{T_d} \pm \Omega \right) nT_d \right] = \\ &= \cos (mn \cdot 2\pi \pm \Omega nT_d) = \underbrace{\cos (mn \cdot 2\pi)}_1 \cos (\Omega nT_d) \mp \underbrace{\sin (mn \cdot 2\pi)}_0 \sin (\Omega nT_d) = \\ &= \cos (\Omega nT_d). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Маскировка частот иллюстрируется рис. 1.21, на котором показаны синусоиды с частотами 30 Гц и 230 Гц, неразличимые в дискретные моменты при частоте дискретизации  $F_d = 100$  Гц.

В частотной области эффект наложения может быть проиллюстрирован в качественном отношении, например, так, как показано на рис. 1.22.

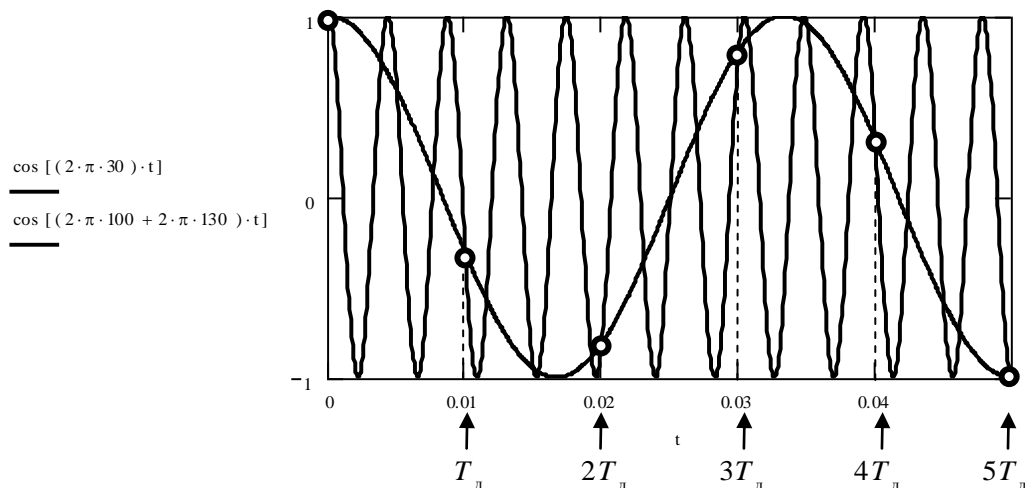
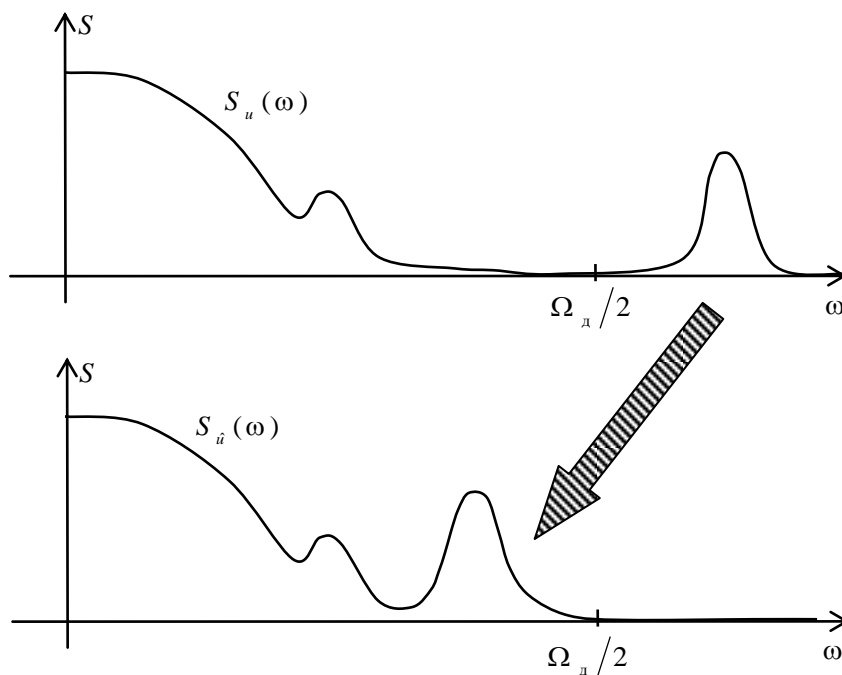


Рис. 1.21. Эффект наложения (иллюстрация из документа Mathcad)


 Рис. 1.22. Примерный вид спектральной плотности мощности аналогового сигнала  $u(t)$  (вверху) и его оценки  $\hat{u}(t)$  (внизу)

На нижнем графике показан спектр оценки  $\hat{u}(t)$ , получаемой на выходе восстанавливающего ФНЧ с частотой среза  $\Omega_d/2$ , включенного после ИИЭ.

Для борьбы с эффектом наложения частот используют аналоговый ФНЧ, включаемый на входе АЦП. Задача этого ФНЧ – как можно сильнее подавить спектр выше частоты Найквиста  $\Omega_d/2$  и как можно меньше затронуть спектр

ниже этой частоты. Схема квантования аналогового сигнала с таким фильтром показана на рис. 1.23.

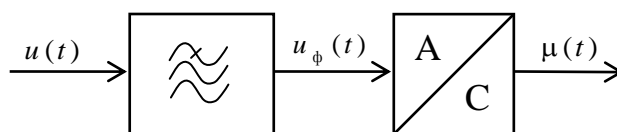


Рис. 1.23. Включение ФНЧ, препятствующего наложению частот

В англоязычной литературе такой ФНЧ называется “anti-aliasing filter”. Чем выше порядок ФНЧ, тем, в общем случае, лучше подавляется эффект наложения частот.

Некоторые замечания по выбору частоты дискретизации при проектировании цифровых систем автоматического управления будут даны ниже.

## 1.4. Дискретные системы автоматического управления

### 1.4.1. Структура дискретных систем

В соответствии с рассмотренными выше видами дискретизации сигналов, различают следующие типы САУ:

- непрерывные, в которых дискретизация отсутствует и формируются только аналоговые сигналы;
- импульсные, в которых осуществляется дискретизация только по времени (при их рассмотрении используются модели ИИС и РИС);
- релейные, в которых осуществляется дискретизация только по уровню;
- цифровые, в которых осуществляется дискретизация по времени и по уровню (при их рассмотрении используются модели ИЦС и РЦС).

Импульсные, релейные и цифровые САУ являются дискретными. Существуют и комбинированные САУ, в которых есть несколько каналов управления с различными типами управляющих сигналов (например, аналого-цифровые и цифро-аналоговые САУ).

Релейные системы, при малом числе уровней квантования (чаще всего используется двухуровневое квантование), являются существенно нелинейны-

ми и в данном пособии не рассматриваются. Материал по таким системам можно найти, например, в [1].

Современные цифровые САУ реализуются на основе промышленных контроллеров и промышленных компьютеров с большим числом двоичных разрядов ( $n = 8 \dots 32$ ). Из-за высокой разрядности, мощность шумов квантования в таких системах невелика. Это дает возможность не рассматривать процессы квантования по уровню при анализе и синтезе подобных систем. В результате, различие в математическом описании цифровых и импульсных систем исчезает. В этой связи, как правило, будем использовать единый термин «дискретные САУ», применительно к цифровым и импульсным системам.

Рассмотрим функциональную схему типичной цифровой САУ, построенной на базе специализированной вычислительной системы. Схема показана на рис. 1.24\*.

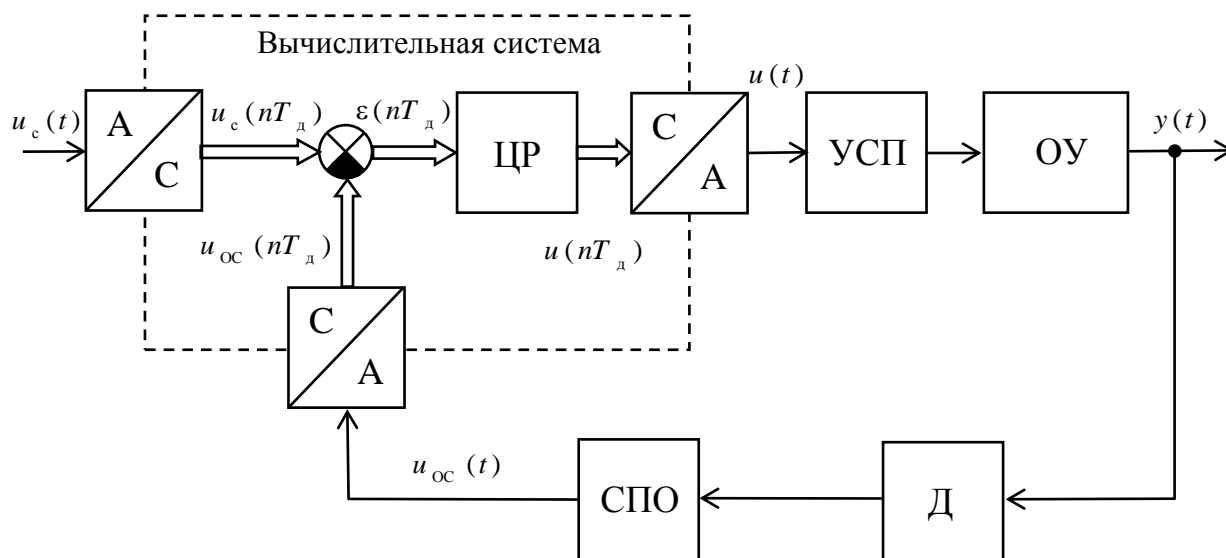


Рис. 1.24. Функциональная схема цифровой САУ

На рис. 1.24 приняты следующие основные обозначения: ЦП – цифровой регулятор; УСП – управляемый силовой преобразователь; Д – датчик выходной координаты  $y(t)$ ; СПО – схема предварительной обработки сигнала датчика

\* Естественно, что эта схема не единственная из всех возможных. На практике используется большое разнообразие различных цифровых САУ, в том числе и многоконтурных. Однако, данная схема является типовой, а большинство других схем, при их теоретическом рассмотрении, могут быть приведены к этой.

(осуществляет нормализацию и фильтрацию сигнала датчика); А/С – АЦП; С/А – ЦАП;  $\varepsilon(nT_d)$  – решетчатая функция рассогласования;  $u(nT_d)$  – решетчатая функция сигнала управления;  $u(t)$  – псевдо-аналоговый сигнал управления. Следует отметить, что если в САУ имеется дискретизация по времени, то есть имеется ИИЭ, то все сигналы, формирующиеся на выходах непрерывных звеньев, будут по сути псевдо-аналоговыми с неявной дискретностью. На рис. 1.24 это относится к  $y(t)$  и  $u_{oc}(t)$ .

Система представляет собой одноконтурную замкнутую САУ и реализуется в виде аппаратно-программного комплекса на базе промышленного контроллера или промышленного компьютера. Большинство современных промышленных САУ соответствует такой схеме.

Закон управления  $u(nT_d) = F(\varepsilon(nT_d))$  синтезируется, исходя из требований к качеству управления, и реализуется цифровым регулятором.

**Цифровой регулятор** – это алгоритм цифровой фильтрации для преобразования отсчетов рассогласования в отсчеты управляющего воздействия, в соответствии с требуемым законом управления. Реализуется ЦР, как правило, программно, а реже – аппаратно, в виде отдельного устройства. Преимущества цифровых регуляторов перед аналоговыми заключаются в возможности реализации достаточно сложных и эффективных законов управления, легкости изменения закона управления, при возникновении такой необходимости (гибкости), стабильности свойств и простоте интеграции цифровой САУ в информационно-управляющую систему более высокого уровня.

В большинстве случаев ЦР управляет непрерывным ОУ (электрическим или газотурбинным двигателем, управляемым клапаном, нагревательным элементом термощафа и т.п.). Тем не менее, дискретность, вносимая АЦП и регулятором, определяет дискретность САУ в целом, что, в свою очередь, требует специального математического аппарата для описания таких систем.

Функциональной схеме, показанной на рис. 1.24, может быть поставлена в соответствие структурная динамическая схема, показанная на рис. 1.25.

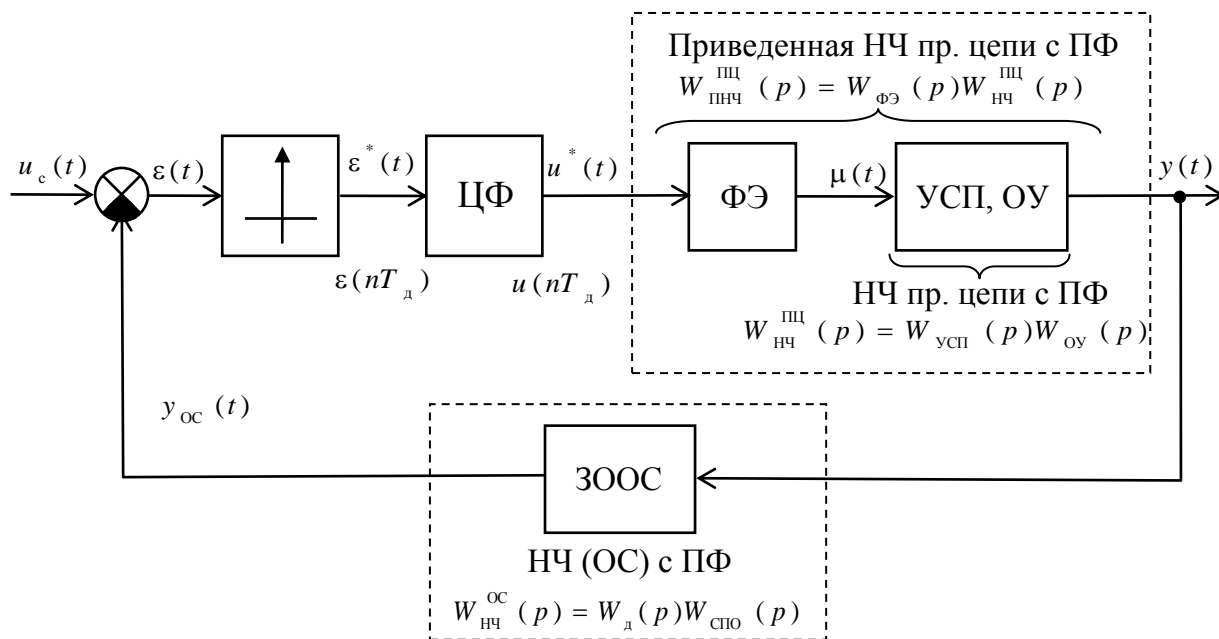


Рис. 1.25. Типовая структура дискретной САУ

На рис. 1.25 приняты следующие обозначения: ЦФ – цифровой фильтр (форма представления ЦР или информационно-математическая модель ЦР);  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПФ}}(p)$  – ПФ приведенной непрерывной части (НЧ) прямой цепи (ПЦ) управления;  $W_{\text{НЧ}}^{\text{ПФ}}(p)$  – ПФ НЧ прямой цепи управления; ЗООС – звено отрицательной обратной связи (ООС);  $W_{\text{НЧ}}^{\text{ОС}}(p)$  – ПФ НЧ цепи ООС. Отметим здесь же, что в НЧ ПЦ управления входят ОУ и УСП. Однако, во многих задачах считают, что УСП входит в состав ОУ и тогда  $W_{\text{НЧ}}^{\text{ПФ}}(p) = W_{\text{ОУ}}(p)$ . Такое допущение принято и в расчетном задании, приведенном в разделе 4.2, а также в примере синтеза дискретной САУ, рассмотренном в разделе 4.3.

Задачей ЦФ является преобразование решетчатой функции рассогласования  $\varepsilon(nT_d)$  в решетчатую функцию управления  $u(nT_d)$  или, что то же, преобразование ИЦС  $\varepsilon^*(t)$  в ИЦС  $u^*(t)$ . Фактически, ЦФ – это алгоритм преобразования одного массива чисел в другой массив чисел, в соответствии с определенным законом (в данном случае, законом управления). Таким образом, здесь ЦФ понимается как информационно-математический объект. Тем не менее, на практике говорят о ЦФ, как о программах, устройствах или аппаратно-

программных компонентах. В данном контексте понятия ЦФ и ЦР по существу не различаются (ЦР – это ЦФ, предназначенный для формирования управляющего воздействия на ОУ).

Отметим, что в ряде случаев, ЦФ в составе дискретной САУ не рассматривают, полагая, тем самым, что осуществляется пропорциональное управление по закону  $u(nT_d) = \varepsilon(nT_d)$ , а коэффициент передачи виртуального П-регулятора учитывается в модели ФЭ или НЧ ПЦ управления.

### 1.4.2. Свойства формирующего элемента

Как указывалось выше, назначением ФЭ является формирование РЦС или РИС из ИИС. Формирующий элемент является линейным динамическим звеном. Определим передаточную функцию ФЭ, считая, что в САУ применяется АИМ-П. Желаемая форма РЦС (а, фактически, РИС, так как квантование по уровню не учитывается) – прямоугольные импульсы с фиксированной скважностью  $\gamma = \tau_n / T_d$ , где  $\tau_n$  – длительность импульса. Учитывая, что на входе ФЭ присутствуют модулированные по площади  $\delta$ -импульсы, заключаем, что форма ИПФ ФЭ должна соответствовать показанной на рис. 1.26 (так как ИПФ – это реакция системы на  $\delta$ -импульс).

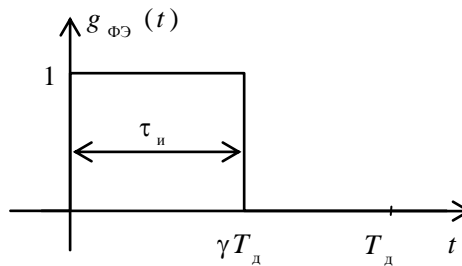


Рис. 1.26. Требуемая ИПФ ФЭ

Задание ИПФ позволяет найти ПФ ФЭ как  $W_{\text{ФЭ}}(p) = L\{g_{\text{ФЭ}}(t)\}$ .

Представим ИПФ ФЭ как

$$g_{\text{ФЭ}}(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T_d). \quad (1.27)$$

Соответствующие графики показаны на рис. 1.27.

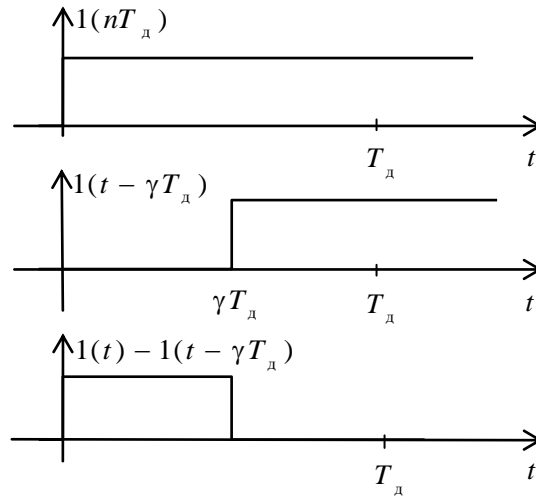


Рис. 1.27. Представление ИПФ ФЭ в виде разности единичных скачков

Тогда

$$W_{\text{ФЭ}}(p) = L\{1(t) - 1(t - \gamma T_d)\} = \frac{1 - e^{-\gamma T_d p}}{p}. \quad (1.28)$$

При скважности  $\gamma = 1$  (которая характерна для многих цифровых САУ с аналого-цифровыми преобразователями), имеем

$$W_{\text{ФЭ}}(p) = W_{\text{ЭНП}}(p) = W_{\text{Ф}}(p) = \frac{1 - e^{-T_d p}}{p}. \quad (1.29)$$

В этом случае (когда  $\gamma = 1$ ) формирующий элемент называется **экстраполятором нулевого порядка** (ПФ –  $W_{\text{ЭНП}}(p)$ ) или **фиксатором** (ПФ –  $W_{\text{Ф}}(p)$ ). Термин «фиксатор» подчеркивает тот факт, что сигнал на выходе такого ФЭ фиксируется на один период дискретизации. Далее будем рассматривать системы только с таким ФЭ.

### 1.4.3. Выбор частоты дискретизации

Вопрос о выборе частоты дискретизации, как указывалось выше, решается на основе теоремы Котельникова. Выбирая указанную частоту, следует анализировать причину возмущения координаты рассогласования. Если рассогласование возмущается только внешним возмущающим воздействием, приложенным к ОУ (задающее воздействие неизменно), то сам ОУ выполняет



роль фильтра нижних частот (ФНЧ), препятствующего эффекту наложения частот. В этом случае возмущение считают белым шумом. Это позволяет избежать риска занижения частоты дискретизации, что могло бы привести к появлению колебаний и даже к неустойчивости САУ. Частоту дискретизации принимают в несколько раз больше (как правило, от 2-х до 8-ми раз, в зависимости от порядка ОУ) эквивалентной полосы пропускания разомкнутой цепи преобразования возмущения в рассогласование.

Если же рассогласование возмущается входным воздействием, приложенным прямо к элементу рассогласования, то перед АЦП должен включаться ФНЧ, как это показано на рис. 1.23. В этом случае частоту дискретизации выбирают в несколько раз больше (от 2-х до 8-ми раз, в зависимости от крутизны спада СПМ воздействия на высоких частотах) эффективной полосы флуктуации рассогласования.

При совместном действии указанных выше факторов, исходят из анализа суммарной СПМ сигнала.

Безусловно, изложенные здесь соображения не являются строгими и относятся в большей мере к разработке и проектированию реальных САУ.

## ГЛАВА 2

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 2.1. Z-преобразование и его свойства

Математическое описание дискретных сигналов и линейных дискретных САУ базируется на дискретном преобразовании Лапласа (ДПЛ) и связанном с ним Z-преобразованием. Последнее позволяет более компактно и «прозрачно» записывать формулы, но не позволяет, в отличие от ДПЛ, формулировать некоторые закономерности теории дискретных систем точно так, как это делается в теории непрерывных линейных САУ. По этой и другим причинам некоторые авторы придерживаются только ДПЛ [9], а другие применяют Z-преобразование [2]. В пользу Z-преобразования дополнительно говорит тот факт, что оно общепринято в теории цифровой обработки сигналов, имеющей много пересечений с теорией дискретных САУ [7]. Поскольку Z-преобразование является удобной формой записи ДПЛ (это будет показано ниже) и полностью эквивалентно ДПЛ в математическом отношении, далее будем, как правило, использовать именно Z-преобразование.

Найдем преобразование Лапласа дискретной функции времени  $x^*(t)$ , которая может пониматься либо как дискретный сигнал, либо как дискретная временная характеристика системы:

$$L\{x^*(t)\} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \int_0^{\infty} \delta(t - nT_d) e^{-pt} dt.$$

Учтем фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, которое выражается формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau).$$

Получим:

$$L\{x^*(t)\} = X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) e^{-pnT_d}. \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) можно рассматривать как *дискретное преобразование Лапласа* решетчатой функции  $x(nT_d)$  и записывать так:

$$D \{ x(nT_d) \} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) e^{-pnT_d}. \quad (2.2)$$

Введем обозначение  $z = e^{pT_d}$ . Тогда из (2.2) получим определение одно-стороннего *Z-преобразования*:

$$Z \{ x(nT_d) \} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) z^{-n}, \quad (2.3)$$

где  $X(z)$  называется *Z-изображением оригинала*  $x(nT_d)^*$ . Для всех оригиналов будем полагать, что

$$x(nT_d) = 0 \Big|_{n < 0}. \quad (2.4)$$

Если рассматривать оригинал как характеристику системы (реакцию на то или иное воздействие, прилагаемое в момент времени  $t = 0$ ), то (2.4) означает каузальность<sup>\*\*</sup>. Если же рассматривать оригинал как координату системы, то (2.4) означает принятие нулевых начальных условий.

Для сходимости ряда (2.4), то есть для существования Z-изображения, должно выполняться условие:

$$|x(nT_d)| < M e^{\sigma n},$$

где  $M > 0$  и  $\sigma > 0$  – константы. Величина  $\sigma$  называется показателем роста решетчатой функции  $x(nT_d)$ .

Часто аргумент решетчатых функций записывают упрощенно, опуская  $T_d$  (имея в виду, что меняется только  $n$ ). Тогда формула (2.3) принимает вид:

$$Z \{ x(n) \} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}.$$

В ряде случаев используется условная запись:

$$X(z) = Z \{ X(p) \}, \quad (2.5)$$

\* Отсюда видно, что, фактически, Z-преобразование является формой представления ДПЛ.

\*\* Каузальность – соответствие принципу причинности. Если реакция системы наступает раньше приложения воздействия – система некаузальна.

где  $X(p) = L\{x(t)\}$ . В строгом смысле, такая запись некорректна, так как Z-преобразование определено только от решетчатой функции времени. Корректно будет так:

$$X(z) = Z\left\{\left(L^{-1}\{X(p)\}\right)\Big|_{t=nT_d}\right\}. \quad (2.6)$$

Однако, для компактности, применяют запись в форме (2.5).

Находить Z-изображения в соответствии с (2.5) удобно, используя таблицы Z-преобразований, например таблицу 2.1.

Таблица 2.1

$x(t)$	$X(p) = L\{x(t)\}$	$X(z) = Z\{x(nT_d)\}$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_d z}{(z-1)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T_d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{T_d z d}{(z-d)^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \cdot \sin(\beta T_d)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\beta T_d) + 1}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos(\beta T_d)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\beta T_d) + 1}$

При использовании (2.5) следует иметь в виду, что

$$Z\{X_1(p)X_2(p)\} \neq Z\{X_1(p)\}Z\{X_2(p)\},$$

так как  $Z\{X_1(p)X_2(p)\} = Z\left\{\left(x_1(t) \otimes x_2(t)\right)\Big|_{t=nT_d}\right\}.$

Находить Z-преобразования можно при помощи пакета Mathcad. Например, зададим в документе Mathcad решетчатую функцию гармонического сигнала с периодом дискретизации  $T$ :

$$n \cdot T \cdot \cos(\beta \cdot n \cdot T).$$

Выделив переменную "n", выполняем команду Symbolics/Transform/Z. Получаем Z-изображение:

$$T \cdot z \cdot \frac{z^2 \cdot \cos(\beta \cdot T) - 2 \cdot z + \cos(\beta \cdot T)}{z^4 - 4 \cdot z^3 \cdot \cos(\beta \cdot T) + 4 \cdot z^2 \cdot \cos(\beta \cdot T)^2 + 2 \cdot z^2 - 4 \cdot \cos(\beta \cdot T) \cdot z + 1}.$$

Оригинал Z-изображения может быть найден с использованием обратного Z-преобразования. Если все полюсы изображения лежат внутри окружности единичного радиуса на  $z$ -плоскости, то обратное Z-преобразование определяется следующим контурным интегралом:

$$x(n) = \frac{1}{j 2 \pi T_d} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz.$$

В упрощенной записи:

$$x(n) = Z^{-1} \{X(z)\}.$$

Обратное Z-преобразование можно находить при помощи теоремы вычетов Коши (она будет рассмотрена ниже) либо вычисляя контурный интеграл с использованием символьного процессора программных пакетов Mathcad, MATLAB и некоторых других.

Рассмотрим основные свойства Z-преобразования без доказательства соответствующих теорем.

1. Линейность:

$$Z \{x_1(n) + x_2(n)\} = X_1(z) + X_2(z).$$

2. Z-изображение задержанного сигнала:

$$Z \{x(n - k)\} = z^{-k} X(z). \quad (2.7)$$

Множитель  $z^{-k}$  можно рассматривать как оператор задержки решетчатой функции на  $k$  периодов дискретизации.

3. Z-изображение опережающего сигнала:

$$Z \{x(n + k)\} = z^k \left[ X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(nT_d) z^{-n} \right].$$

4. Z-изображение свертки решетчатых функций:

$$\begin{aligned}
Z \left\{ \sum_{m=0}^n x_1(m) x_2(n-m) \right\} &= Z \left\{ \sum_{m=0}^n x_1(n-m) x_2(m) \right\} = \\
&= X_1(z) X_2(z).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Свертке решетчатых оригиналов соответствует произведение их  $Z$ -изображений.

5. Нахождение предельных значений. Конечное (установившееся) значение может быть найдено, согласно теореме о конечном значении дискретного оригинала, по формуле:

$$x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z). \tag{2.9}$$

Начальное значение, согласно соответствующей теореме, определяется следующим образом:

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow 0} x(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Формула (2.9) часто используется для нахождения установившегося значения выходной координаты САУ.

## 2.2. Передаточные функции дискретных САУ

### 2.2.1. Общие сведения о ПФ дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретную систему (ЛДС), на входе которой действует дискретный сигнал с решетчатой функцией  $u(n)$ , а на выходе формируется дискретный сигнал с решетчатой функцией  $y(n)$ . Линейность дискретных систем автоматического управления, как и непрерывных, понимается в смысле выполнения принципа суперпозиции.

Введем в рассмотрение единичный дискретный импульс\*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

---

\* Нужно обратить внимание, что единичный дискретный импульс отличается от единичного импульса в теории непрерывных систем. Там единичным импульсом называлась  $\delta$ -функция с единичной площадью, а здесь – дискрета (отсчет) единичной величины.

Реакция ЛДС на единичный дискретный импульс называется **дискретной импульсной переходной функцией ЛДС** (ДИПФ)  $g(n)$ .

Произвольный дискретный сигнал  $u(n)$  можно представить в виде линейной комбинации (взвешенной суммы) единичных дискретных импульсов:

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m) \delta(n-m).$$

В силу принципа суперпозиции, выходной сигнал ЛДС будет линейной комбинацией отсчетов ДИПФ:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m) g(n-m).$$

Считая систему каузальной, верхний предел суммирования заменяем на « $n$ ». В противном случае, для текущего значения  $n$  пришлось бы вычислять «будущие» значения  $u(n+1)$ ,  $u(n+2)$  и так далее. Таким образом,

$$y(n) = \sum_{m=0}^n u(m) g(n-m). \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) описывает во временной области преобразование произвольного сигнала ЛДС и называется **дискретной сверткой**.

С учетом (2.8) выражение (2.10) можно преобразовать к виду:

$$Y(z) = U(z)W(z), \quad (2.11)$$

где  $Y(z) = Z\{y(n)\}$ ,  $U(z) = Z\{u(n)\}$ , а  $W(z) = Z\{g(n)\}$  – **дискретная передаточная функция** (ДПФ) ЛДС.

Из формулы (2.11) вытекает определение дискретной передаточной функции ЛДС:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (2.12)$$

Таким образом, **ДПФ – это отношение  $Z$ -изображения выходной координаты системы к  $Z$ -изображению входной координаты при нулевых начальных условиях**.

Если начальные условия не были бы положены нулевыми (см. примечание к (2.4)), то вместо (2.11) мы получили бы  $Y(z) = U(z)W(z) + V(z)$ , где  $V(z)$  – сумма членов, определяемых начальными условиями. Очевидно, что в этом случае мы не смогли бы определить  $W(z)$  как характеристику системы (она неизбежно оказалась бы зависимой от начальных условий).

Очевидно, что ДИПФ может быть найдена по ДПФ как  $g(n) = Z^{-1}\{W(z)\}$ .

Используются два способа записи ДПФ:

1. Запись в виде отношения полиномов от переменной  $z$  (то есть полиномов по положительным степеням  $z$ ).

2. Запись в виде отношения полиномов от переменной  $z^{-1}$  (то есть полиномов по отрицательным степеням  $z$ ).

Рассмотрим вначале первый способ, согласно которому ДПФ может быть представлена в следующей дробно-рациональной форме:

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_0}, \quad (2.13)$$

где  $l \geq m$  для каузальной системы. В этом случае величину  $l$  будем называть **порядком** ЛДС, или порядком ДПФ ЛДС. Введем в рассмотрение также величину  $r = l - m$ , называемую **степенью** ЛДС, или степенью ДПФ ЛДС. Часто в учебной литературе ограничиваются случаем, когда  $m = l - 1$  и, следовательно,  $r = 1$ . Тем не менее в данном пособии такое ограничение вводить не будем.

Форму записи (2.13) будем называть **естественной формой представления ДПФ** ЛДС.

Заметим, что единичный коэффициент при  $z^l$  с принципиальных позиций не обязателен, но удобен для формирования алгоритма преобразования входных отсчетов (дискрет) в выходные (то есть для алгоритма цифровой фильтрации). Очевидно, что получить единичный коэффициент можно делением числителя и знаменателя дроби ДПФ на соответствующее число.

От естественной формы записи ДПФ всегда можно перейти к так называемой **канонической форме представления ДПФ**, имеющей вид:



$$W(z) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i}{\sum_{i=1}^{l-s} c_i} \cdot \frac{1}{(z-1)^s} \cdot \frac{\frac{b_m}{m} z^m + \frac{b_{m-1}}{m} z^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{m}}{\frac{c_{l-s}}{l} z^{l-s} + \frac{c_{l-s-1}}{l} z^{l-s-1} + \dots + \frac{c_1}{l}}.$$

Вводя необходимые обозначения, получаем запись:

$$W(z) = \frac{k}{(z-1)^s} \cdot \frac{B(z)}{C(z)}, \quad (2.14)$$

где  $k = \sum_{i=1}^m b_i / \sum_{i=1}^{l-s} c_i$  — **коэффициент передачи** дискретной системы;

$s$  — **индекс астатизма** (число полюсов, равных единице и определяющих нахождение ЛДС на границе устойчивости);

$$B(z) = \frac{b_m}{m} z^m + \frac{b_{m-1}}{m} z^{m-1} + \dots + \frac{b_1}{m} \quad \text{— полином числителя ДПФ } W(z),$$

нормированный так, что  $\lim_{z \rightarrow 1} B(z) = 1$ ;

$$C(z) = \frac{c_{l-s}}{l} z^{l-s} + \frac{c_{l-s-1}}{l} z^{l-s-1} + \dots + \frac{c_1}{l} \quad \text{— полином знаменателя ДПФ}$$

$W(z)$ , нормированный так, что  $\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = 1$ .

Обратимся к примеру. Положим, что на систему, у которой  $s = 0$ , подан дискретный единичный скачок  $1(n)$ , то есть решетчатая функция, соответствующая непрерывной функции  $1(t)$ . Определим установившееся значение выходной координаты  $y(\infty)$ , используя теорему о конечном значении оригинала (смотри формулу (2.9)) и таблицу 2.1:

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot k \cdot \frac{B(z)}{C(z)} = k.$$

Результат получился такой же, как и для непрерывной системы, что указывает на сохранение прежнего смысла коэффициента передачи: для САУ с ну-

левым индексом (порядком) астатизма коэффициент передачи равен отношению установившегося значения выходной координаты к установившемуся значению координаты на входе. В случае ненулевого индекса (порядка) астатизма подобное определение также может быть дано, но уже через установившуюся скорость изменения выходной координаты, установившееся ускорение и так далее.

Заметим, что корни уравнения  $B(z) = 0$ , где  $B(z)$  – полином, фигурирующий в (2.13), называются **нулями** ДПФ и обозначаются как  $z_1, \dots, z_m$  (от англ. zero – ноль). Корни уравнения  $A(z) = 0$ , где  $A(z)$  – полином из (2.13), называются **полюсами** ДПФ и обозначаются как  $p_1, \dots, p_l$  (от англ. pole – полюс).

Через нули и полюсы ЛДС может быть определена **последовательно-декомпозируемая форма записи ДПФ**:

$$W(z) = b_m \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_l)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^l (z - p_i)}, \quad (2.15)$$

где  $K = b_m$  – **обобщенный коэффициент передачи** системы, связанный с коэффициентом передачи  $k$  соотношением:

$$k = K \frac{(-1)^m \prod_{i=1}^m z_i}{(-1)^l \prod_{i=1}^l p_i}. \quad (2.16)$$

Далее перейдем ко второму способу записи ДПФ. Для этого поделим числитель и знаменатель (2.13) на  $z^l$  и получим полиномы по переменной  $z$  в отрицательной степени:

$$W(z) = \frac{b_m z^{m-l} + b_{m-1} z^{m-l-1} + \dots + b_0 z^{-l}}{1 + a_{l-1} z^{-1} + a_{l-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-l}}. \quad (2.17)$$

Такой способ записи ДПФ характерен для теории и практики цифровой фильтрации [7]. Поэтому форму представления ДПФ (2.17) будем называть **формой цифрового фильтра**.

Из (2.17) следует, что

$$Y(z)(1 + a_{l-1}z^{-1} + a_{l-2}z^{-2} \dots + a_0z^{-l}) = U(z)(b_mz^{m-l} + b_{m-1}z^{m-l-1} + \dots + b_0z^{-l}). \quad (2.18)$$

Применяя к (2.18) формулу (2.7) или, говоря иначе, учитывая, что умножение  $Z$ -изображения на оператор задержки  $z^{-k}$  соответствует задержке оригинала на  $k$  периодов дискретизации, получаем:

$$\begin{aligned} y(n) + a_{l-1}y(n-1) + a_{l-2}y(n-2) \dots + a_0y(n-l) = \\ = b_mu(n+m-l) + b_{m-1}u(n+m-l-1) + \dots + b_0u(n-l). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Или, в компактной форме записи,

$$\sum_{k=0}^l a_{l-k}y(n-k) = \sum_{k=0}^m b_{m-k}u(n+m-l-k). \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) принято называть **разностным уравнением** дискретной системы. Разностные уравнения играют такую же роль в теории дискретных систем, как дифференциальные – в теории непрерывных систем.

Из выражения (2.19) следует формула, выражающая алгоритм цифровой фильтрации:

$$\begin{aligned} y(n) = b_mu(n+m-l) + b_{m-1}u(n+m-l-1) + \dots + b_0u(n-l) - \\ - a_{l-1}y(n-1) - a_{l-2}y(n-2) - \dots - a_0y(n-l). \end{aligned} \quad (2.21)$$

По этой формуле может рассчитываться переходный процесс, если известно входное воздействие и параметры системы.

Структура ЦФ, описываемого выражением (2.21), показана на рис. 2.1\*. Такой фильтр называется **рекурсивным ЦФ**, или **ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой** (БИХ-фильтр). Из формулы (2.21), а также из рис. 2.1 видно, что ДИПФ такого ЦФ никогда не затухает до нуля. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить, что на некотором такте с номером  $n = v$   $y(v) \neq 0$ , и

---

\* В теории и практике цифровой обработки сигналов, наряду с рекурсивными, используют **нерекурсивные фильтры**. В таких фильтрах выходной сигнал формируется только из отсчетов входного сигнала, то есть все коэффициенты  $a_k$  равны нулю (см. формулы (2.16) и (2.15)). Это означает, что нерекурсивный фильтр не имеет внутренних обратных связей. Он всегда устойчив, а переходный процесс в нем заканчивается за конечное число периодов дискретизации. Однако такой фильтр в данном контексте не может являться моделью дискретной САУ.

тогда, по формуле (2.21), можно вычислить  $y(v+1)$ ,  $y(v+2)$  и так далее.

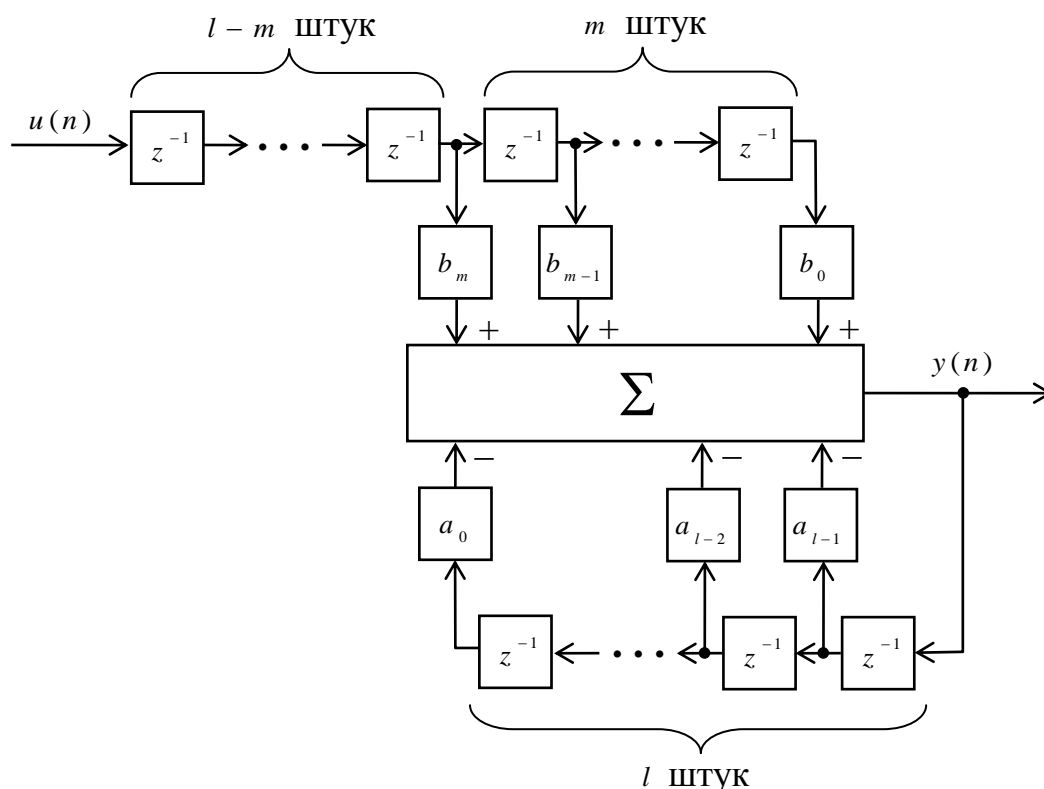


Рис. 2.1. Структура цифрового БИХ-фильтра (прямая реализация)

Важнейшим элементом структуры ЦФ является звено с ДПФ  $z^{-1}$ , осуществляющее задержку сигнала на один период дискретизации. Реализация такого звена средствами цифровой техники в реальном масштабе времени предполагает запись чисел в память вычислительной системы и считывание их через требуемый интервал времени. Кроме элементов задержки, структура ЦФ содержит сумматор и пропорциональные звенья (коэффициенты). Очевидно, что рекурсивный ЦФ имеет  $m$  прямых каналов преобразования входного сигнала и  $l$  обратных связей по выходному сигналу. Наличие отрицательных связей указывает на существование проблемы устойчивости цифрового фильтра с бесконечной импульсной характеристикой.

Кроме прямой формы реализации ЦФ, показанной на рис. 2.1, известны и используются другие формы реализации: каноническая, транспонированная, последовательная (каскадная) и параллельная [7].

### 2.2.2. Передаточные функции разомкнутой САУ

Рассмотрим разомкнутую систему со структурой, представленной на рис. 2.2. Эта система получена размыканием замкнутой САУ, рассмотренной в разделе 1 (см. рис. 1.25).

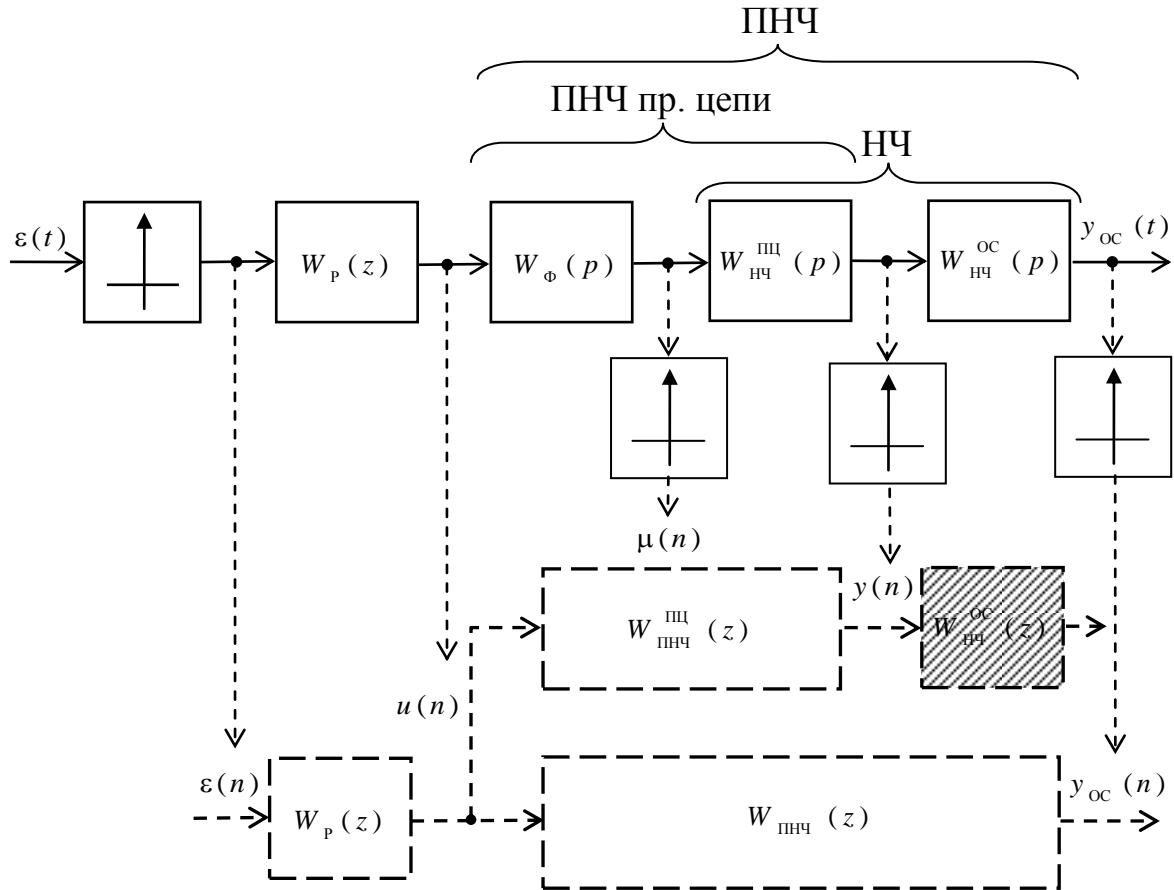


Рис. 2.2. Структура разомкнутой системы

На рисунке приняты следующие обозначения:  $W_p(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$  – ДПФ ЦР

(ЦФ);  $W_\Phi(p)$  – ПФ фиксатора;  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{пц}}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  – эквивалентная ДПФ ПНЧ пря-

мой цепи (дискретный эквивалент  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{пц}}(p)$ );  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{oc}}(z) = \frac{Y_{\text{oc}}(z)}{U(z)}$  – эквивалентная

ДПФ ПНЧ разомкнутой системы (дискретный эквивалент  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{oc}}(p)$ );

$W_{\text{НЧ}}^{\text{oc}}(z) = \frac{Y_{\text{oc}}(z)}{Y(z)}$  – условно рассматриваемая ДПФ звена обратной связи.

Все координаты как в разомкнутой, так и в замкнутой САУ, которые изначально не дискретизированы, рассматриваются в виде решетчатых функций, порождаемых фиктивными ИИЭ, работающими синхронно и синфазно с основным ИИЭ, квантуящим рассогласование (фиктивные ИИЭ показаны на рис. 2.2). Фактически, исходная система, имеющая в своем составе непрерывные звенья, заменяется эквивалентной системой, состоящей из цифровых фильтров (пунктирная схема на рис. 2.2). Каждый из этих фильтров в определенном смысле (не обязательно в одном и том же) эквивалентен соответствующему непрерывному звену исходной системы.

Существует несколько способов установления соответствия (эквивалентности) непрерывных и дискретных динамических систем. В общем случае эти способы дают различные результаты. Используем метод инвариантности импульсной переходной функции (ИПФ), суть которого выражается формулой (2.6), если под изображением  $X(p)$  понимать ПФ  $W(p)$ , а под  $X(z)$  – ДПФ  $W(z)$ . Таким образом, согласно методу инвариантности ИПФ, непрерывному объекту с ПФ  $W(p)$  ставится в соответствие дискретный объект с ДПФ  $W(z) = Z\{g(n)\} = Z\left\{\left(L^{-1}\{W(p)\}\right)\Big|_{t=nT_a}\right\}$ . Этот способ гарантирует, что ИПФ аналогового прототипа  $g(t)$  будет огибающей решетчатой функцией ДИПФ дискретного объекта-аналога  $g(n)$ .

Поскольку

$$Z\{W_\Phi(p)W_{\text{НЧ}}^{\text{мц}}(p)\} \neq Z\{W_\Phi(p)\} \cdot Z\{W_{\text{НЧ}}^{\text{мц}}(p)\},$$

$$Z\{W_\Phi(p)W_{\text{НЧ}}(p)\} \neq Z\{W_\Phi(p)\} \cdot Z\{W_{\text{НЧ}}(p)\},$$

эквивалентные ДПФ имеют смысл только для приведенных участков НЧ, то есть участков, включающих в себя фиксатор. Поэтому, определим

$$W_{\text{пнч}}^{\text{мц}}(z) = Z\{W_{\text{пнч}}^{\text{мц}}(p)\} = Z\{W_\Phi(p)W_{\text{нч}}^{\text{мц}}(p)\};$$

$$W_{\text{пнч}}(z) = Z\{W_{\text{пнч}}(p)\} = Z\{W_{\text{пнч}}^{\text{мц}}(p)W_{\text{нч}}^{\text{ос}}(p)\} = Z\{W_\Phi(p)W_{\text{нч}}(p)\},$$

где  $W_{\text{нч}}(p) = W_{\text{нч}}^{\text{мц}}(p)W_{\text{нч}}^{\text{ос}}(p)$  – ПФ НЧ разомкнутой САУ.

Поскольку звено обратной связи с ПФ  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(p)$  не соединено непосредственно с фиксатором, мы не можем найти его ДПФ  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  по  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(p)$ , то есть

$$W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z) \neq Z\{W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(p)\}.$$

В то же время  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  должна соответствовать выражению

$$W_{\text{пнч}}(z) = W_{\text{пнч}}^{\text{пц}}(z)W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z),$$

поскольку линейные ЦФ с ДПФ  $W_{\text{пнч}}^{\text{пц}}(z)$  и  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  включены последовательно.

Отсюда получаем определение ДПФ звена обратной связи:

$$W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z) = \frac{W_{\text{пнч}}(z)}{W_{\text{пнч}}^{\text{пц}}(z)}. \quad (2.22)$$

Таким образом, ДПФ  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  в контексте данной задачи не имеет независимого определения и может быть определена только через другие ДПФ, согласно формуле (2.2). Заметим, что сама по себе ДПФ  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  и не нужна при решении расчетных задач, и следовательно, её можно вообще не вводить в рассмотрение (можно мысленно убрать с рис. 2.2 заштрихованный элемент). Тем не менее  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  введена, чтобы не возникало недопонимания вопроса, а также для сохранения визуального соответствия структурных схем дискретных систем с непрерывными ПФ и эквивалентных схем с ЦФ.

Определим теперь ДПФ разомкнутой системы как

$$\begin{aligned} W_{\text{раз.}}(z) &= \frac{Y_{\text{oc}}(z)}{E(z)} = W_{\text{р}}(z)W_{\text{пнч}}(z) = \\ &= W_{\text{р}}(z) \cdot Z\{W_{\text{ф}}(p)W_{\text{нч}}(p)\}. \end{aligned}$$

С учетом (1.16)

$$W_{\text{раз.}}(z) = W_{\text{р}}(z) \cdot Z\left\{\frac{1 - e^{-T_{\text{д}}p}}{p} W_{\text{нч}}(p)\right\}.$$

Поскольку  $e^{T_{\text{д}}p} = z$ , согласно определению Z-преобразования, то

$$W_{\text{раз.}}(z) = (1 - z^{-1})W_{\text{р}}(z) \cdot Z\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p}\right\}.$$

Приводя выражение в скобках к общему знаменателю, получаем:

$$W_{\text{раз.}}(z) = \frac{z-1}{z} W_p(z) \cdot Z \left\{ \frac{W_{\text{нч}}(p)}{p} \right\}. \quad (2.23)$$

Эта формула широко применяется при расчете ДПФ разомкнутых САУ.

**Пример.** Найти дискретную передаточную функцию разомкнутой системы с пропорциональным законом управления ( $W_p(z) = 1$ ) и экстраполятором нулевого порядка, если непрерывная часть имеет ПФ:

$$W_{\text{нч}}(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)},$$

где  $k = 50 \text{ с}^{-1}$ ;  $T = 1 \text{ с}$ ; период дискретизации  $T_d = 0,05 \text{ с}$ .

Чтобы воспользоваться формулой (2.23) и таблицей Z-преобразований, разложим  $W_{\text{нч}}(p)/p$  на простые дроби.

Используем известную формулу разложения правильной дроби на сумму простейших дробей\*:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{a_0(x-a)^k(x-b)(x-c)\dots(x-l)} &= \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \\ &+ \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l}. \end{aligned}$$

В нашем случае

$$\frac{k}{T(p-0)(p-0)\left(p+\frac{1}{T}\right)} = \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{T}}.$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{k}{Tp^2\left(p+\frac{1}{T}\right)} = \frac{A_2 p\left(p+\frac{1}{T}\right) + A_1 p^2\left(p+\frac{1}{T}\right) + Bp^3}{p^3\left(p+\frac{1}{T}\right)}.$$

---

\* Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1969. Смотри формулу (2) на стр. 427 и формулу (9) на стр. 428.



После сокращения получаем:

$$\frac{k}{T} = A_2 p + \frac{A_2}{T} + A_1 p^2 + \frac{A_1 p}{T} + B p^2.$$

Группируем слагаемые по степеням  $p$  :

$$\frac{k}{T} = p^2 (A_1 + B) + p \left( A_2 + \frac{A_1}{T} \right) + \frac{A_2}{T}.$$

Приравниваем слагаемые при одинаковых степенях  $p$  из правой и левой частей полученного выражения. Получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B &= 0 \\ A_2 + \frac{A_1}{T} &= 0 \\ \frac{A_2}{T} &= \frac{k}{T} \end{aligned} \right\}.$$

Решаем эту систему и находим, что

$$A_2 = k;$$

$$A_1 = -kT;$$

$$B = kT.$$

Таким образом,

$$\frac{k}{p^2 (Tp + 1)} = \frac{k}{p^2} - \frac{kT}{p} + \frac{kT}{p + \frac{1}{T}}.$$

Согласно (2.23),

$$W_{\text{раз.}}(z) = k \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T}{p + \frac{1}{T}} \right\}.$$

Согласно таблице 2.1, получаем:

$$W_{\text{раз.}}(z) = k \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{z-d} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= k(z-1) \left[ \frac{T_d(z-d) - T(z-1)(z-d) + T(z-1)^2}{(z-1)^2(z-d)} \right] = \\
&= k \frac{T_d z - T_d d - T z^2 + T z d + T z - T d + T z^2 - T 2 z + T}{z^2 - z d - z + d} = \\
&= k \frac{(T_d + T d - T) z - T_d d - T d + T}{z^2 - z(d+1) + d}, \quad d = e^{-\frac{T_d}{T}}.
\end{aligned}$$

После численной подстановки

$$W_{\text{раз.}}(z) = \frac{0,06147 \ z + 0,06046}{z^2 - 1,951 \ z + 0,9512}.$$

Решение этой задачи с использованием пакета Mathcad иллюстрирует рис. 2.3. Еще проще получить решение при помощи пакета MATLAB. Определяем в рабочей области MATLAB ПФ непрерывной части:

```
>> w1=tf([50], [1 1 0])
```

Transfer function:

```
50
-----
s^2 + s
```

Далее определяем ДПФ системы с экстраполятором нулевого порядка, используя команду c2d:

```
>> w2=c2d(w1, 0.05, 'zoh')
```

Transfer function:

```
0.06147 z + 0.06046
-----
z^2 - 1.951 z + 0.9512
Sampling time: 0.05
```

Естественно, результаты, полученные в обоих пакетах, совпадают.

### 2.2.3. Передаточные функции замкнутых дискретных САУ

Обратимся к замкнутой САУ, структура которой показана на рис. 1.25. С учетом замечаний, сделанных выше по отношению к разомкнутой системе (см. рис. 2.2), структура замкнутой САУ может быть приведена к виду, показанному на рис. 2.4.

Задаем  $W_{\text{нч}}(p)/p$ :

$$\frac{k}{p^2(Tp + 1)}$$

Осуществляем обратное преобразование Лапласа:

$$k \left( -T + t + T \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right) \quad n \cdot TD$$

Переходим к дискретному времени заменой переменной  $t$  на  $nT_d$  (для чего копируем в буфер  $nT_d$  и, выделив  $t$ , применяем команду `Substitute (Symbolics/Variable/Substitute)`):

$$k \left( -T + n \cdot TD + T \cdot \exp\left(-n \cdot \frac{TD}{T}\right) \right)$$

Берем Z-преобразование (`Symbolics/Transform/ Z`):

$$k \cdot z \frac{T \cdot z \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T \cdot z - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + TD \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T}{(z-1)^2 \cdot \left(z - \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)\right)}$$

Группируем числитель по степеням  $z$  (`Symbolics/Collect`):

$$k \cdot z \frac{\left(TD + T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T\right) \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}{(z-1)^2 \cdot \left(z - \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)\right)}$$

Дмножаем на  $(z-1)/z$  и осуществляем упрощение (`Symbolics/Simplify`):

$$\frac{z-1}{z} \cdot k \cdot z \frac{\left(TD + T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T\right) \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}{(z-1)^2 \cdot \left(z - \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)\right)}$$

$$k \cdot \frac{T \cdot z \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T \cdot z - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + TD \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T}{(z-1) \cdot \left(z - \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)\right)}$$

Раскрываем скобки в знаменателе (`Symbolics/Expand`) и делаем группировку:

$$k \cdot \frac{T \cdot z \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T \cdot z - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + TD \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T}{z^2 - \frac{z}{\exp\left(\frac{TD}{T}\right)} - z + \frac{1}{\exp\left(\frac{TD}{T}\right)}}$$

$$k \cdot \frac{\left(TD + T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T\right) \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}{z^2 + \left(\frac{-1}{\exp\left(\frac{TD}{T}\right)} - 1\right) \cdot z + \frac{1}{\exp\left(\frac{TD}{T}\right)}}$$

Упрощаем знаменатель и получаем результат в общем виде:

$$k \cdot \frac{\left(TD + T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T\right) \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}{z^2 - z \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - z + \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}$$

Подставляем числа:

$$k := 50 \quad T_{\text{нч}} = 1 \quad TD := 0.05$$

$$k \cdot \frac{\left(TD + T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - T\right) \cdot z - TD \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) + T - T \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)}{z^2 - z \cdot \exp\left(-\frac{TD}{T}\right) - z + \exp\left(-\frac{TD}{T}\right)} \rightarrow 50 \cdot \frac{.12294245007140091e-2 \cdot z + .120910427425029046e-2}{z^2 - 1.9512294245007140091 \cdot z + .95122942450071400909}$$

$$50 \cdot \frac{.122942450071400909 \cdot 10^{-3} \cdot z + 1.20910427425029045 \cdot 10^{-3}}{z^2 - 1.9512294245007140091 \cdot z + .95122942450071400909}$$

Делаем `Symbolics/Expand`:

$$\frac{.61471225035700454500 \cdot 10^{-2} \cdot z + 6.0455213712514522500 \cdot 10^{-2}}{z^2 - 1.9512294245007140091 \cdot z + .95122942450071400909}$$

Ограничиваем число отображаемых значащих цифр (`Symbolics/Evaluate/Floating Point, 4`):

$$\frac{.6147e-1 \cdot z + .6046e-1}{z^2 - 1.951 \cdot z + .9512}$$

Рис. 2.3. Нахождение ДПФ разомкнутой системы в Mathcad

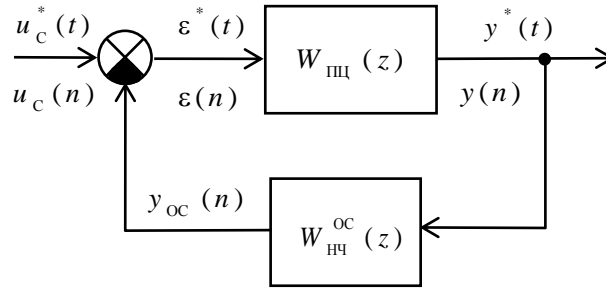


Рис. 2.4. Приведенная структура замкнутой САУ

На рис. 2.4 приняты обозначения:  $W_{\text{пц}}(z) = W_p(z)W_{\text{пнч}}^{\text{пц}}(z)$  – ДПФ прямой цепи управления;  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$  – ДПФ звена обратной связи, определенная согласно (2.22). Задающее воздействие также показано дискретным. Считается, что оно дискретизируется фиктивным ИИЭ, аналогично тому, как это делается с другими координатами системы (см. рис. 2.2). Схема, показанная на рис. 2.4, может быть приведена к эквивалентной схеме, показанной на рис. 2.5.

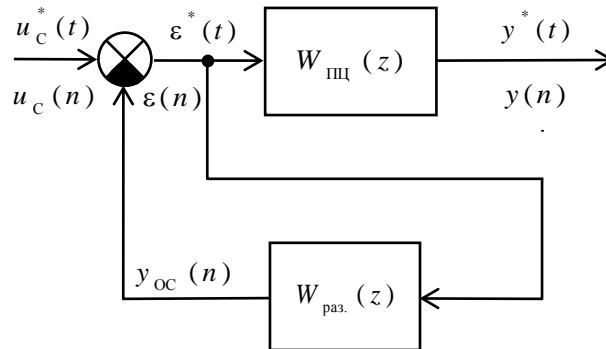


Рис. 2.5. Эквивалентная структура замкнутой САУ

На рис. 2.5 обозначена дискретная передаточная функция разомкнутой системы  $W_{\text{раз.}}(z) = W_p(z)W_{\text{пнч}}^{\text{пц}}(z)$ . Такое представление структурной схемы является предпочтительным, так как на схеме отсутствует в явном виде звено с ДПФ  $W_{\text{нч}}^{\text{oc}}(z)$ , о которой говорилось выше.

Итак, определим ДПФ замкнутой системы как

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U_c(z)}$$

при нулевых начальных условиях.

Составим уравнения для рассогласования и выходной координаты:

$$E(z) = U_c(z) - E(z)W_{\text{раз.}}(z);$$

$$Y(z) = E(z)W_{\text{пц}}(z).$$

Из второго уравнения следует, что  $E(z) = Y(z)/W_{\text{пц}}(z)$ . Подставляем это выражение в первое уравнение и получаем:

$$\frac{Y(z)}{W_{\text{пц}}(z)} = U_c(z) - \frac{Y(z)}{W_{\text{пц}}(z)}W_{\text{раз.}}(z).$$

Отсюда следует:

$$Y(z) \frac{1 + W_{\text{раз.}}(z)}{W_{\text{пц}}(z)} = U_c(z). \quad (2.24)$$

Делим левую и правую часть (2.24) на изображение  $U_c(z)$  и находим, что

$$W(z) = \frac{W_{\text{пц}}(z)}{1 + W_{\text{раз.}}(z)},$$

или

$$W(z) = \frac{W_p(z)W_{\text{пц}}^{\text{пч}}(z)}{1 + W_p(z)W_{\text{пч}}^{\text{пч}}(z)}. \quad (2.25)$$

Отметим, что в ряде учебников, например в [1], формулу для ДПФ замкнутой САУ записывают в виде:

$$W(z) = \frac{W_{\text{раз.}}(z)}{1 + W_{\text{раз.}}(z)}.$$

Такая запись справедлива для системы с единичной обратной связью. Современные САУ имеют неединичные обратные связи, но их структурные схемы могут быть приведены к единичной обратной связи. Чтобы избежать ряда возникающих при этом затруднений, будем далее пользоваться выражением (2.25).

Следует отметить, что рассмотренная структура дискретной САУ является типичной, но не единственно возможной. В специальной литературе можно найти описание множества структур дискретных систем, математическое описание которых имеет свои особенности.

## ГЛАВА 3

### УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

#### 3.1. Понятие об устойчивости дискретной САУ

Для анализа устойчивости ЛДС воспользуемся известным из теории непрерывных систем корневым критерием. Для этого запишем ДПФ (2.13) как функцию комплексной переменной  $p$ . Учтем, что  $z = e^{pT_d}$ . Тогда

$$W^*(p) = \frac{b_m e^{mpT_d} + b_{m-1} e^{(m-1)pT_d} + \dots + b_0}{e^{lpT_d} + a_{l-1} e^{(l-1)pT_d} + \dots + a_0}. \quad (3.1)$$

Такая запись соответствует использованию дискретного преобразования Лапласа (которое можно рассматривать как частный случай непрерывного преобразования Лапласа) вместо Z-преобразования. К ДПФ в форме (3.1) применим критерий устойчивости, требующий расположения всех полюсов системы в левой полуплоскости переменной  $p$ .

Если изменять мнимую часть комплексной переменной  $p$ , то ДПФ проявит периодичность, поскольку  $W^*(p) = W^*(p + j\Omega_d r)$ , где  $r$  — целое число. Чтобы доказать этот факт, учтем, что

$$e^{a + jb} = e^a (\cos b + j \sin b).$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{(p + j\Omega_d r)T_d} &= e^{(c + j\omega)T_d + j\frac{2\pi}{T_d} r T_d} = e^{cT_d + j(\omega T_d + 2\pi r)} = \\ &= e^{cT_d} \left[ \underbrace{\cos(\omega T_d + 2\pi r)}_{\cos \omega T_d} + j \underbrace{\sin(\omega T_d + 2\pi r)}_{\sin \omega T_d} \right] = e^{pT_d}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что ДПФ в форме (3.1) имеет бесконечное число полюсов  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и нулей  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), которые расположены на комплексной  $p$ -плоскости группами в полосах шириной  $\Omega_d$ . Каждая полоса содержит группу из  $l$  полюсов и  $m$  нулей. Этот факт иллюстрируется рис. 3.1.

Очевидно, ДПФ полностью определяется полюсами и нулями, лежащими в основной полосе. Поэтому можно говорить о том, что ДПФ в форме (3.1) имеет  $l$  основных полюсов и  $m$  основных нулей.

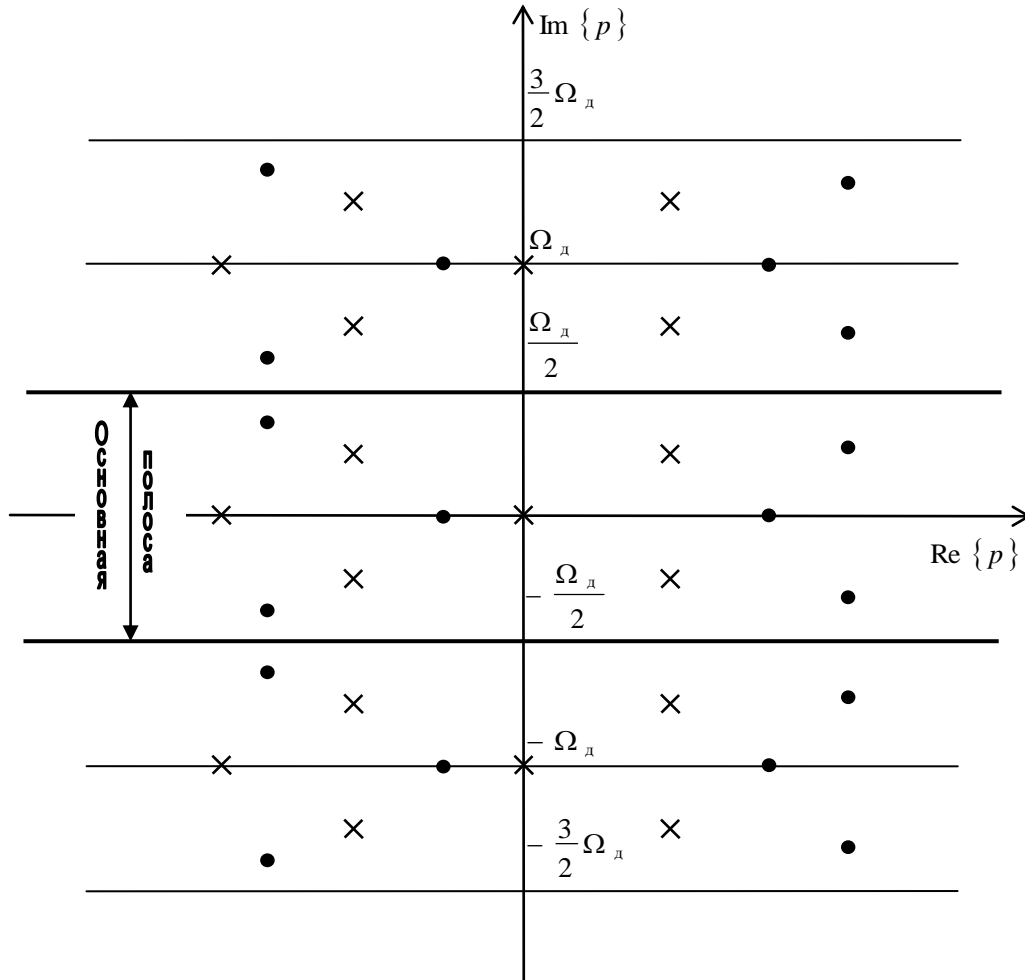


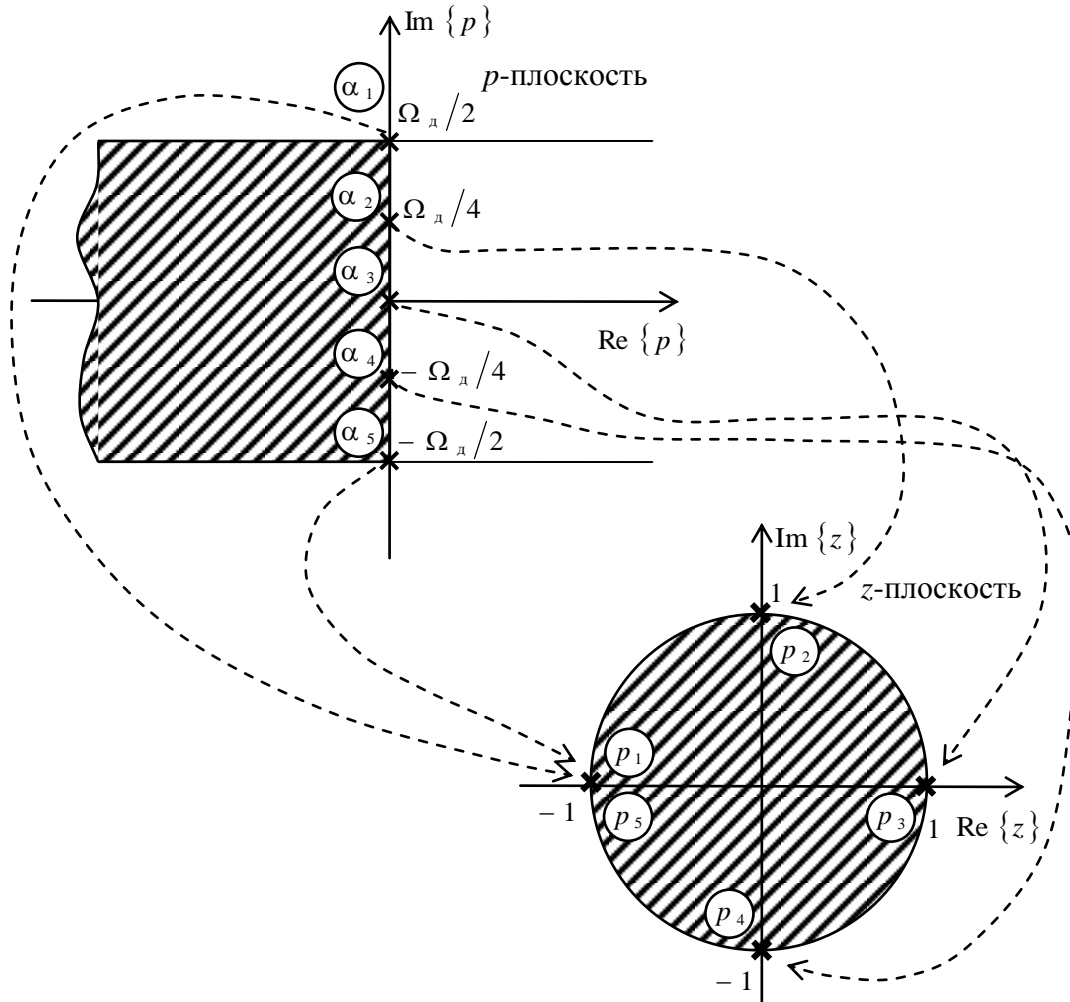
Рис. 3.1. Расположение полюсов и нулей ДПФ

Каждому основному полюсу  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) соответствует полюс ДПФ в форме (2.13)  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ). Можно считать, что Z-преобразование отображает основную полосу  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость. Этот факт иллюстрируется рис. 3.2. Отрезок мнимой оси  $p$ -плоскости  $[-\Omega_d/2, \Omega_d/2]$  отображается в окружность единичного радиуса на  $z$ -плоскости. Поясним это на примере отображения пяти точек, соответствующих нейтральным полюсам:

$$\alpha_1 = 0 + j \frac{\Omega_d}{2} \rightarrow p_1 = -1 + j0,$$

так как

$$\begin{aligned}
 z = e^{pT_d} \Rightarrow p_1 = e^{\alpha_1 T_d} &= e^{\left(0 + j\frac{\Omega_d}{2}\right)T_d} = e^0 \left( \cos \left( \frac{\Omega_d}{2} T_d \right) + j \sin \left( \frac{\Omega_d}{2} T_d \right) \right) = \\
 &= \cos \left( \frac{2\pi}{2T_d} T_d \right) + j \sin \left( \frac{2\pi}{2T_d} T_d \right) = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + j \underbrace{\sin \pi}_0 = -1 + j0;
 \end{aligned}$$


 Рис. 3.2. Отображение основной полосы  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость

$$\alpha_2 = 0 + j\frac{\Omega_d}{4} \rightarrow p_2 = 0 + j1,$$

так как

$$\begin{aligned}
 p_2 = e^{\alpha_2 T_d} &= e^{\left(0 + j\frac{\Omega_d}{4}\right)T_d} = e^0 \left( \cos \left( \frac{\Omega_d}{4} T_d \right) + j \sin \left( \frac{\Omega_d}{4} T_d \right) \right) = \\
 &= \cos \left( \frac{2\pi}{4T_d} T_d \right) + j \sin \left( \frac{2\pi}{4T_d} T_d \right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + j \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 = 0 + j1;
 \end{aligned}$$



$$\alpha_3 = 0 + j0 \rightarrow p_3 = 1 + j0,$$

так как

$$p_3 = e^{\alpha_3 T_d} = e^0 (\cos 0 + j \sin 0) = 1;$$

$$\alpha_4 = 0 - j \frac{\Omega_d}{4} \rightarrow p_4 = 0 - j1,$$

так как

$$\begin{aligned} p_4 &= e^{\alpha_4 T_d} = e^{\left(0 - j \frac{\Omega_d}{4}\right) T_d} = e^0 \left( \cos \left( - \frac{\Omega_d}{4} T_d \right) + j \sin \left( - \frac{\Omega_d}{4} T_d \right) \right) = \\ &= \cos \left( - \frac{2\pi}{4T_d} T_d \right) + j \sin \left( - \frac{2\pi}{4T_d} T_d \right) = \underbrace{\cos \left( - \frac{\pi}{2} \right)}_0 + j \underbrace{\sin \left( - \frac{\pi}{2} \right)}_{-1} = 0 - j1; \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = 0 - j \frac{\Omega_d}{2} \rightarrow p_5 = -1 + j0,$$

так как

$$\begin{aligned} p_5 &= e^{\alpha_5 T_d} = e^{\left(0 - j \frac{\Omega_d}{2}\right) T_d} = e^0 \left( \cos \left( - \frac{\Omega_d}{2} T_d \right) + j \sin \left( - \frac{\Omega_d}{2} T_d \right) \right) = \\ &= \cos \left( - \frac{2\pi}{2T_d} T_d \right) + j \sin \left( - \frac{2\pi}{2T_d} T_d \right) = \underbrace{\cos - \pi}_{-1} + j \underbrace{\sin - \pi}_0 = -1 + j0. \end{aligned}$$

Слева от мнимой оси в основной полосе  $p$ -плоскости находится область устойчивости. Очевидно, что она отображается внутрь окружности единичного радиуса на  $z$ -плоскости. Отсюда получаем условие устойчивости линейной дискретной САУ:

$$|p_i| < 1, i = 1, \dots, l.$$

Таким образом, **линейная дискретная система устойчива, если все её полюсы лежат внутри окружности единичного радиуса на  $Z$ -плоскости.**

Влияние полюсов на характер составляющих свободного движения иллюстрируется рис. 3.3.

Точки, соответствующие ординатам решетчатой функции, на рис. 3.3 условно соединены отрезками прямой.

Можно также доказать, что дискретная система устойчива, если её ДИПФ удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) < \infty.$$

Доказательство этого факта приводится, например, в [10].

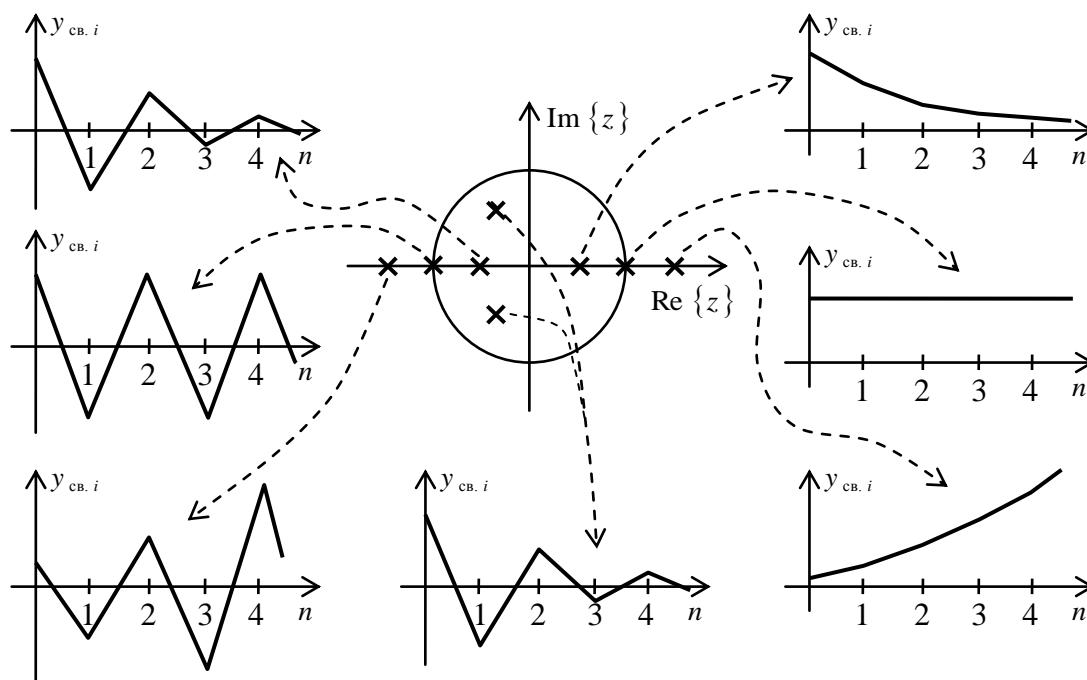


Рис. 3.3. Влияние полюсов на характер переходного процесса

### 3.2. Алгебраический критерий устойчивости дискретных САУ

Устойчивость дискретной системы может быть исследована по коэффициентам её характеристического уравнения

$$\underbrace{z^l + a_{l-1}z^{l-1} + \dots + a_0}_{A(z)} = 0, \quad (3.2)$$

где  $A(z)$  – характеристический полином (ХП) (см. знаменатель ДПФ (2.13)).

Непосредственно к (3.2) критерии устойчивости непрерывных линейных систем не могут быть применены. Но если ХП дискретной системы подвергнуть преобразованию, которое отображало бы пространство внутри единичной окружности на  $z$ -плоскости в левую полуплоскость некой комплексной переменной  $s$ , а саму единичную окружность – в мнимую ось  $s$ -плоскости, то при-

менение упомянутых критериев оказалось бы возможным. Такое преобразование задается заменой переменной:

$$z = \frac{1+s}{1-s}. \quad (3.3)$$

Делаем в (3.2) замену, определяемую (3.3):

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^l + a_{l-1}\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{l-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Произведя очевидные преобразования, получаем:

$$\frac{D(s)}{(1-s)^l} = 0,$$

где  $D(s)$  – полином степени  $l$  от новой переменной  $s$ :

$$D(s) = d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_0. \quad (3.4)$$

Коэффициенты полинома (3.4) легко вычисляются после приведения подобных, следующего за заменой переменной. Выражения общего вида для этих коэффициентов можно найти в [10]. Нули ХП  $A(z)$ , то есть полюсы системы  $p_i$ , отображены в нули  $p_i^*$  полинома  $D(s)$  заменой переменной:

$$p_i^* = \frac{p_i - 1}{p_i + 1}.$$

При этом нули  $A(z)$ , лежащие внутри единичной окружности  $z$ -плоскости, отображены в нули  $D(s)$ , лежащие в левой полуплоскости переменной  $s$ . Это позволяет применить к (3.4) известный критерий Гурвица.

Составим матрицу Гурвица размером  $l \times l$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} d_{l-1} & d_{l-3} & d_{l-5} & \dots & 0 \\ d_l & d_{l-2} & d_{l-4} & \dots & 0 \\ 0 & d_{l-1} & d_{l-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & d_2 & d_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & d_3 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_4 & d_2 & d_0 \end{bmatrix}.$$

Определим главные диагональные миноры (определители Гурвица):

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= d_{l-1}; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} d_{l-1} & d_{l-3} \\ d_l & d_{l-2} \end{vmatrix}; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} d_{l-1} & d_{l-3} & d_{l-5} \\ d_l & d_{l-2} & d_{l-4} \\ 0 & d_{l-1} & d_{l-3} \end{vmatrix}; \\ &\dots \\ \Delta_l &= |\Gamma|.\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать критерий Гурвица: система устойчива, если при  $d_l > 0$  все главные диагональные миноры положительны, то есть

$$\Delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l). \quad (3.5)$$

Соблюсти условие  $d_l > 0$  всегда легко: если изначально  $d_l < 0$ , то ХП (3.4) следует умножить на  $-1$ .

Если один из определителей Гурвица отрицателен, то система неустойчива. Если один из определителей равен 0, то система может быть как неустойчивой, так и находиться на границе устойчивости. Так, если  $\Delta_l = 0$ , то система — на границе устойчивости. С учетом того, что разложение определителя  $\Delta_l$  по элементам последнего столбца определяется выражением  $\Delta_l = d_0 \Delta_{l-1}$ , система может находиться на границе устойчивости в двух случаях: когда  $d_0 = 0$  или когда  $\Delta_{l-1} = 0$ .

Решая уравнение  $\Delta_{l-1} = 0$ , можно найти критические параметры системы, которые соответствуют границе устойчивости, например предельный коэффициент передачи (или предельную добротность).

Для дискретных систем невысокого порядка условия устойчивости (3.5) могут быть выражены непосредственно через коэффициенты исходного ХП  $A(z)$  [10]. Рассмотрим три частных случая ( $l = 1, 2, 3$ ).

I. При  $l = 1$ ,  $A(z) = z + a_0$ . Условия устойчивости:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a_0 > 0, \\ 1 - a_0 > 0. \end{array} \right\}.$$

II. При  $l = 2$ ,  $A(z) = z^2 + a_1 z + a_0$ . Условия устойчивости:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a_1 + a_0 > 0, \\ 2(1 - a_1) > 0, \\ 1 - a_1 + a_0 > 0. \end{array} \right\}.$$

III. При  $l = 3$ ,  $A(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ . Условия устойчивости:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a_2 + a_1 + a_0 > 0, \\ 3(1 - a_0) + a_2 - a_1 > 0, \\ 3(1 + a_0) - a_2 - a_1 > 0, \\ 1 - a_2 + a_1 - a_0 > 0, \\ 1 - a_0^2 + a_2 a_0 - a_0 > 0. \end{array} \right\}.$$

**Задача.** На основе критерия Гурвица найти предельное значение периода дискретизации  $T_d$  для замкнутой дискретной САУ с единичной ООС, фиксатором и непрерывной частью, имеющей ПФ

$$W_{\text{нч}}(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где  $k = 10$ ,  $T = 0,1$  с.

Решение иллюстрируется рис. 3.4.

### 3.3. Расчет переходных процессов в дискретных САУ

Получение решетчатых функций переходных процессов основано на использовании обратного Z-преобразования. Для вычисления последнего применяется теорема о вычетах, согласно которой

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi T_d} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^l \text{Res}_i X(z) z^{n-1} \Big|_{z=p_i}, \quad (3.6)$$

где  $\text{Res}_i X(z) z^{n-1} \Big|_{z=p_i}$  — вычет в точке  $z = p_i$ ,  $X(z) = Z\{x(n)\}$ .

**Задаем ПФ непрерывной части:**

$$W1 := \frac{k}{T \cdot p + 1}$$

**Находим Z-преобразование от  $W_{Hq}(p)/p$ :**

$$g := \frac{W1}{p} \text{ invlaplace, } p \rightarrow k \left[ \left( \frac{-1}{T} \right) + 1 \right]$$

**Дискретизируем время, заменяя  $t$  на  $nT_d$ :**

$$gn := g \text{ substitute, } t = n \cdot TD \rightarrow k \left[ \left( -e^{\frac{(-n) \cdot TD}{T}} \right) + 1 \right]$$

**Находим ДПФ разомкнутой системы:**

$$WZ1 := gn \text{ ztrans, } n \rightarrow k \cdot z \frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{1}{\left[ \frac{-TD}{T} \right] \cdot (z - 1)}$$

$$WZ2 := \frac{z - 1}{z} \cdot WZ1$$

$$WZ2 \rightarrow k \frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{1}{(-z) + e^{\frac{-TD}{T}}}$$

**Находим ДПФ замкнутой системы:**

$$WZ := \frac{WZ2}{1 + WZ2}$$

$$WZ \rightarrow k \frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{1}{\left[ \frac{-TD}{T} \right] \cdot \left[ 1 + k \frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \right]}$$

$$WZ \text{ simplify} \rightarrow k \frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{1}{\frac{-TD}{T} - k + k e^{\frac{-TD}{T}}}$$

**Упрощаем знаменатель ДПФ замкнутой системы, производя группировку по экспоненте:**

$$\frac{\frac{-TD}{T}}{(-1) + e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{1}{\frac{-TD}{T} - k + k e^{\frac{-TD}{T}}} \xrightarrow{\text{collect, } e^{\frac{-TD}{T}}} \frac{\frac{-TD}{T}}{(k + 1) \cdot e^{\frac{-TD}{T}} - z - k}$$

**Выписываем коэффициенты ХП:**

$$a1 := 1$$

$$a0 := - \left[ (k + 1) \cdot e^{\frac{-TD}{T}} - k \right]$$

**Записываем и решаем уравнение, получаемое из второго условия устойчивости:**

$$(1 - a0) \text{ solve, } TD \rightarrow \left[ -\ln \left[ \frac{(-1) + k}{k + 1} \right] \right] \cdot T$$

**Получили результат в общем виде. Подставим числа:**

$$k := 10 \quad T_w = 0.1$$

$$\left[ -\ln \left[ \frac{(-1) + k}{k + 1} \right] \right] \cdot T \rightarrow (-1) \cdot \ln \left( \frac{9}{11} \right)$$

$$(-1) \cdot \ln \left( \frac{9}{11} \right)$$

$$.20067069546215116130e-1$$

**Таким образом, период дискретизации не должен превышать 0,02 с.**

Рис. 3.4. Нахождение предельного параметра из условия устойчивости

Вычет в точке  $z = p_i$ , если  $p_i$  – простой полюс, определяется так:

$$\operatorname{Res}_i X(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) X(z) z^{n-1}.$$

Вычет в точке  $z = p_i$ , если  $p_i$  – полюс кратности  $\nu$  (то есть имеется  $\nu$  одинаковых полюсов величиной  $p_i$ ), может быть найден по формуле:

$$\operatorname{Res}_i X(z) z^{n-1} = \frac{1}{(\nu-1)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} [(z - p_i)^\nu F(z) z^{n-1}].$$

Рассмотрим применение формулы (3.6) для нахождения *дискретной переходной характеристики* (ДПХ) САУ  $h(n)$ . Определим ДПХ как реакцию ЛДС на единичный дискретный скачок  $1(n)$ . Тогда  $H(z) = Z\{h(n)\}$  может быть определено с учетом того, что  $Z\{1(n)\} = \frac{z}{z-1}$ , как

$$H(z) = \frac{z}{z-1} W(z),$$

где  $W(z)$  – ДПФ САУ.

С учетом формулы (3.6)

$$h(n) = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res}_i \frac{z}{z-1} W(z) z^{n-1} \Big|_{z=p_i}, \quad (3.7)$$

где  $p_i$  – полюсы  $H(z)$ .

Определим в качестве примера переходную характеристику системы из задачи, приведенной в разделе 3.2, на основе формулы (3.7). Первый этап решения заключается в определении Z-изображения ПХ  $H(z) = \frac{z}{z-1} W(z)$  и его полюсов. Этот этап иллюстрируется рис. 3.5.

Второй этап выполняем без использования Mathcad из-за проблем, имеющих в этом пакете, с вычислением пределов интересующего нас типа. Итак,  $p_1 = 0,4635$ ,  $p_2 = 1$ . Находим первый вычет:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 H(z) z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1) H(z) z^{n-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1) \frac{0,4877 \cdot z \cdot z^{n-1}}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{0,4877 \cdot 0,4635^n}{0,4635 - 1} = -0,9091 \cdot 0,4635^n. \end{aligned}$$

**Выбираем период дискретизации с учетом результата решения предыдущей задачи и задаём численные значения параметров системы:**

$$TD := 0.01 \quad T_s := 0.1 \quad k := 10$$

$$WZ := k \cdot \frac{(-1) + e^{\frac{-TD}{T_s}}}{(-z) + e^{\frac{-TD}{T_s}} - k + k \cdot e^{\frac{-TD}{T_s}}}$$

$$WZ \rightarrow \frac{-95162581964040426840}{(-z) - .467884016044446952e-1}$$

$$WZ \text{ simplify} \rightarrow \frac{1189532274550505335.5}{125000000000000000. \cdot z + 58485502005555869.}$$

**Определяем изображение переходной характеристики  $H(z)$**

$$H := \frac{z}{z-1} \cdot WZ$$

$$H \rightarrow (-95162581964040426840) \cdot \frac{z}{(z-1) \cdot [(-z) - .467884016044446952e-1]}$$

$$(-95162581964040426840) \cdot \frac{z}{[(z-1) \cdot (-z) - .467884016044446952e-1]}$$

**Применяем к знаменателю  $H(z)$  команду **Simbolics/Expand**:**

$$(-95162581964040426840) \cdot \frac{z}{[(-z^2) + .9532115983955553048 \cdot z + .467884016044446952e-1]}$$

**Решаем характеристическое уравнение и находим полюсы  $p_1$  и  $p_2$ . Для этого выделяем переменную "z" и применяем команду **Simbolics/Variable/Solve**:**

$$\left( \begin{array}{c} (-z^2) + .9532115983955553048 \cdot z + .467884016044446952e-1 \\ 1. \\ (-.46788401604444695200e-1) \end{array} \right)$$

Рис. 3.5. Иллюстрация из документа Mathcad к первому этапу решения

Далее находим второй вычет:

$$\begin{aligned} \text{Res}_2 H(z) z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow p_2} (z - p_2) H(z) z^{n-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_2} (z - p_2) \frac{0,4877 \cdot z \cdot z^{n-1}}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{0,4877}{1 - 0,4635} = 0,9091 \end{aligned}$$

Теперь определяем ПХ в соответствии с (2.31) как сумму вычетов:

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{Res}_1 H(z) z^{n-1} + \text{Res}_2 H(z) z^{n-1} = \\ &= 0,9091 \cdot (1 - 0,4635^n) \end{aligned}$$

Третий этап – построение графика переходной характеристики по полученной формуле. Его удобно выполнить в документе Mathcad так, как показано на рис. 3.6.

Следует подчеркнуть, что данный метод нахождения решетчатых функций переходных процессов применим и при других видах входных воздействий. Важным достоинством этого метода является аналитичность результата (получается формула переходного процесса, а не просто набор отсчетов).



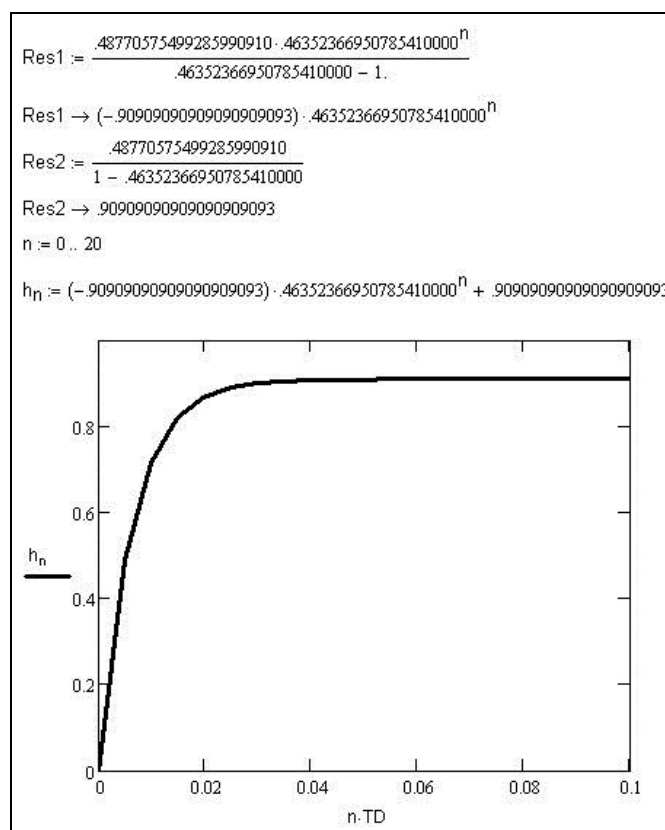


Рис. 3.6. Формирование ПХ и построение её графика в Mathcad

Альтернативой является другой метод, основанный на рекуррентном решении разностного уравнения системы (2.21):

$$y(n) = b_m u(n + m - l) + b_{m-1} u(n + m - l - 1) + \dots + b_0 u(n - l) - a_{l-1} y(n - 1) - a_{l-2} y(n - 2) - \dots - a_0 y(n - l).$$

Подставляя в это уравнение значения входного воздействия  $u(n)$ , можно шаг за шагом рассчитать значения выходной координаты  $y(n)$ . Вычислительная процедура получается рекуррентной, так как для вычисления значения  $y$  в некоторый момент времени необходимо использовать ряд значений  $y$ , наблюдавшихся в предшествующие моменты времени. Метод весьма прост в использовании, но результат получается в виде массива чисел. В отдельных случаях это может рассматриваться как недостаток метода, так как решение желательно было бы получить в виде формулы.

Выполним предыдущий пример, решая разностное уравнение системы. Иллюстрация из рабочей области Mathcad – на рис. 3.7.

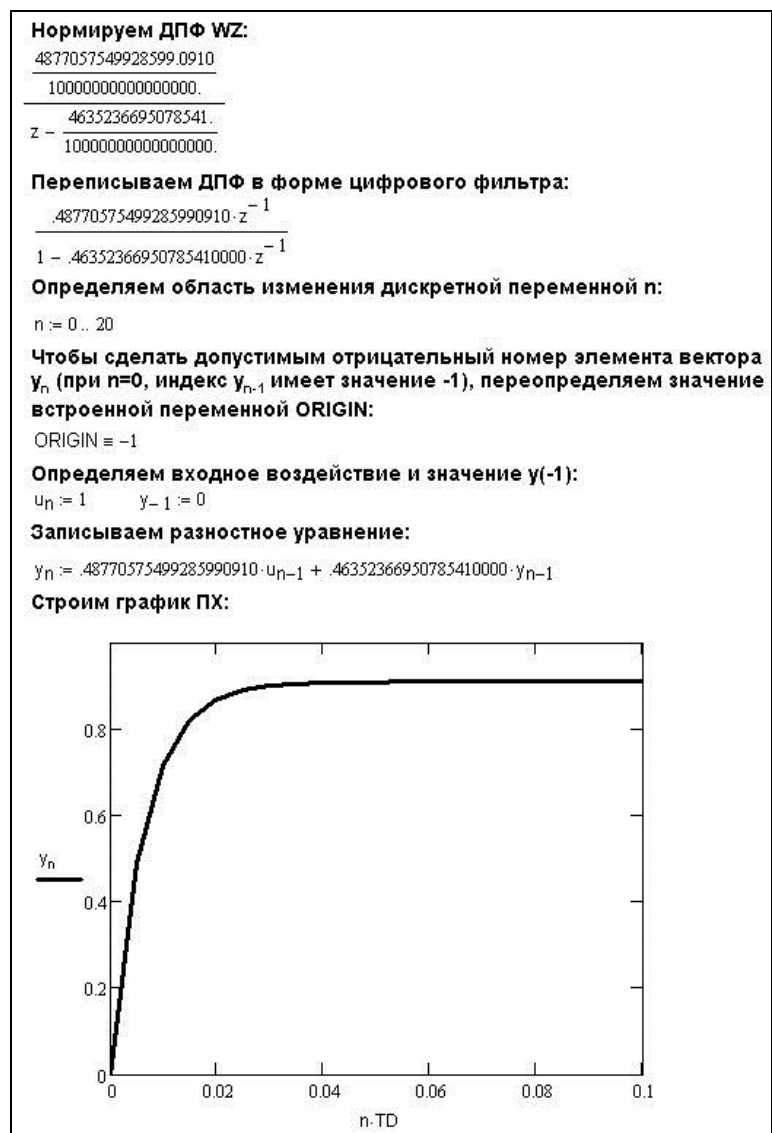


Рис. 3.7. Нахождение ПХ по разностному уравнению

## ГЛАВА 4

### СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 4.1. Теоретические основы синтеза дискретных САУ методом эталонных передаточных функций

Существует много различных методов синтеза дискретных САУ. Среди них особое место занимает метод эталонных передаточных функций (ЭПФ). Этот метод выделяется простотой и естественностью исходной идеи, прозрачностью инженерной интерпретации и практической реализуемостью. Поэтому рассмотрим основные теоретические посылки метода ЭПФ.

Определить главную задачу синтеза можно двояко<sup>\*</sup>:

1. Синтезировать ЦР, обеспечивающий, при заданной непрерывной части, ДПФ замкнутой САУ, равную некой эталонной ДПФ. Эта формулировка приводит к строгой идентичности свойств синтезированной и эталонной систем.

2. Синтезировать ЦР, обеспечивающий, при заданной непрерывной части, динамику САУ, в определенном смысле приближенную к динамике системы с эталонной ДПФ. Степень приближения динамических характеристик может задаваться численно, например в виде допустимого значения относительного среднеквадратичного отклонения за время переходного процесса, либо оцениваться качественно по результатам синтеза. В любом случае этой формулировке отвечает бесконечное множество регуляторов. Однако для инженерной практики такая формулировка более конструктивна, так как позволяет получать реализуемые регуляторы ограниченной сложности. Далее будем придерживаться именно такой формулировки.

Рассмотрим синтез ЦР для системы, показанной на рис. 1.25. Для такой системы ранее была получена формула (2.25), выражающая ДПФ замкнутого

---

<sup>\*</sup> В приводимых ниже формулировках не оговариваются некоторые дополнительные требования к ЦР и системе, которые всегда имеют место на практике и о которых речь пойдет дальше.

контура  $W(z)$  через ДПФ ЦР  $W_p(z)$ , ДПФ приведённой непрерывной части прямой цепи  $W_{\text{пнч}}^{\text{пр}}(z)$  и ДПФ приведенной непрерывной части  $W_{\text{пнч}}(z)$ .

Выразим из (2.25) ДПФ регулятора

$$W_p(z) = \frac{W(z)}{W_{\text{пнч}}^{\text{пр}}(z) - W(z)W_{\text{пнч}}(z)}. \quad (4.1)$$

Подставляя в (4.1) эталонную или, говоря иначе, желаемую ДПФ в качестве  $W(z)$ , получаем

$$W_p(z) = \frac{W_{\text{ж}}(z)}{W_{\text{пнч}}^{\text{пр}}(z) - W_{\text{ж}}(z)W_{\text{пнч}}(z)}. \quad (4.2)$$

Расчет ЦР по полученной формуле может, в общем случае, приводить к двум практически неприемлемым последствиям:

1. Регулятор может оказаться нереализуемым, так как степень его ДПФ может быть отрицательной (разность степеней полиномов знаменателя и числителя ДПФ меньше нуля).

2. Синтезированная САУ может оказаться неробастной, иначе говоря, не отвечающей требованию грубости. В этом случае малые вариации коэффициентов могут приводить к сколь угодно большим изменениям характеристик системы. На практике неробастная САУ неработоспособна.

Чтобы избежать этих проявлений, к желаемой ДПФ предъявляются определенные требования. Рассмотрим требование реализуемости ЦР. Для этого проанализируем формулу (2.25) с точки зрения степеней дробно-рационального представления  $Z$ -изображений. Заменим в (2.25)  $W(z)$  на  $W_{\text{ж}}(z)$  и положим, что

$$W_p(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}; W_{\text{пнч}}^{\text{пр}}(z) = \frac{M(z)}{N(z)}; W_{\text{пнч}}(z) = \frac{R(z)}{S(z)}.$$

Тогда

$$W_{\text{ж}}(z) = \frac{\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{M(z)}{N(z)}}{1 + \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{R(z)}{S(z)}} = \frac{P(z)M(z)S(z)}{N(z)Q(z)S(z) - N(z)P(z)R(z)}.$$

Учтем, что порядок произведения  $N(z)Q(z)S(z)$  больше порядка произведения  $N(z)P(z)R(z)$ , если регулятор и приведенная непрерывная часть являются реализуемыми (что естественно потребовать от указанных систем). Тогда порядок полинома знаменателя  $W_{\text{ж}}(z)$  будет равен порядку произведения  $N(z)Q(z)S(z)$ , а порядок полинома числителя  $W_{\text{ж}}(z)$  – порядку произведения  $P(z)M(z)S(z)$ . Это позволяет записать выражение для порядка ДПФ  $W_{\text{ж}}(z)$ :

$$r_{W_{\text{ж}}} = n_N + n_Q + n_S - n_P - n_M - n_S = n_N - n_M + n_Q - n_P = r_{W_{\text{ПНЧ}}} + r_{W_P}.$$

Таким образом,

$$r_{W_{\text{ж}}} = r_{W_{\text{ПНЧ}}} + r_{W_P}.$$

Следовательно, от ДПФ  $W_{\text{ж}}(z)$  нужно потребовать, чтобы

$$r_{W_{\text{ж}}} \geq r_{W_{\text{ПНЧ}}}. \quad (4.3)$$

Формула (4.3) задает условие реализуемости регулятора: ***степень желаемой ДПФ должна быть не меньше степени приведенной непрерывной части прямой цепи САУ.***

Обратимся теперь к условию грубости или робастности САУ. Это условие может быть установлено нахождением и анализом вариации ДПФ замкнутой САУ  $w(z)$ . Как показано в [10], при наличии у ДПФ ПНЧ или у ДПФ ПНЧ ПЦ (фактически, у ДПФ ОУ) полюсов и (или) нулей, лежащих вне круга единичного радиуса на  $z$ -плоскости, у вариации  $w(z)$  имеются полюсы, лежащие вне указанного круга. Это означает, что при сколь угодно малых вариациях параметров НЧ такая САУ становится неустойчивой.

Проиллюстрировать механизм негрубости (неробастности) САУ можно и без нахождения вариации  $w(z)$ . Представим, что  $W_{\text{ПНЧ}}(z)$  имеет полюс  $p_1$ , лежащий вне круга единичного радиуса. Иначе говоря, дискретный аналог приведенного ОУ (то есть рассматриваемого вместе с фиксатором) неустойчив. Если  $W_{\text{ж}}(z)$  не имеет такого же полюса, то «плохой» полюс  $p_1$  будет скомпенсирован нулем регулятора  $z_1 = p_1$ . Это можно доказать, анализируя полиномы ДПФ,

входящих в формулу (4.2). Таким образом, последовательно-декомпозированная ДПФ разомкнутого контура САУ будет содержать сомножитель  $(z - z_1)/(z - p_1)$ , равный  $(z - p_1)/(z - p_1)$ , в котором, казалось бы, можно произвести сокращение. Однако, любая реализация не может быть идеальной и равенство нуля регулятора и полюса ПНЧ ПЦ в реальности неизбежно окажется приближенным:  $z_1 \approx p_1$ . Следовательно, САУ будет иметь полюс, лежащий вне круга единичного радиуса, то есть будет неустойчивой. Аналогично объясняется ситуация, когда  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПЦ}}(z)$  имеет ноль  $z_1$ , лежащий вне круга единичного радиуса. Это означает, что дискретный аналог приведенного ОУ является неминимально-фазовым. Если  $W_{\text{ж}}(z)$  не имеет такого же нуля, то  $z_1$  будет скомпенсирован полюсом регулятора  $p_1 = z_1$ . В этом случае последовательно-декомпозированная ДПФ разомкнутого контура САУ будет содержать сомножитель  $(z - z_1)/(z - p_1)$ , равный  $(z - z_1)/(z - z_1)$ . По указанной выше причине САУ опять окажется неустойчивой. Отсюда вытекает вывод: желаемая ДПФ  $W_{\text{ж}}(z)$  должна содержать все нули и полюсы ДПФ ПНЧ ПЦ  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПЦ}}(z)$ , лежащие вне круга единичного радиуса на  $z$ -плоскости. Очевидно, что придание системе таких полюсов делает её неустойчивой и синтез в этом случае теряет смысл. Поэтому, условие грубости (робастности) САУ сводится к следующему требованию: **желаемая ДПФ  $W_{\text{ж}}(z)$  должна содержать все нули ДПФ  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПЦ}}(z)$  устойчивой ПНЧ ПЦ, лежащие вне круга единичного радиуса на  $z$ -плоскости.** При этом синтезируемая САУ оказывается неминимально-фазовой, что не ведет к каким-либо неприятным последствиям.

Более подробно метод ЭПФ рассмотрен в [1] и в [10].

#### 4.2. Задание на синтез дискретной САУ

Задание формулируется следующим образом: **«Синтезировать дискретную САУ методом эталонных передаточных функций. Разработать**

**структуру цифрового регулятора. Произвести математическое моделирование САУ».**

Структурная схема САУ приведена на рис. 1.25 (УСП считать входящим в состав ОУ). Данные для синтеза нужно взять из таблицы 4.1.

Таблица 4.1

Данные для проектирования

№ вар-та	ПФ объекта управления $W_{\text{ОУ}}(p)$	ПФ звена ОС $W_{\text{ОС}}(p)$
1	2	3
1	5 ----- 62.5 p <sup>5</sup> + 271.3 p <sup>4</sup> + 487 p <sup>3</sup> + 314.1 p <sup>2</sup> + 36.8 p + 1	10 ----- 0.2 p + 1
2	14 ----- 15.05 p <sup>6</sup> + 84.67 p <sup>5</sup> + 185 p <sup>4</sup> + 226.3 p <sup>3</sup> + 137.4 p <sup>2</sup> + 21.98 p + 1	4 ----- 0.4 p + 1
3	0.9 ----- 654.2 p <sup>6</sup> + 2123 p <sup>5</sup> + 3657 p <sup>4</sup> + 3030 p <sup>3</sup> + 354.8 p <sup>2</sup> + 28.91 p + 1	0.8 ----- 0.25 p + 1
4	20 ----- 625 p <sup>6</sup> + 2675 p <sup>5</sup> + 4717 p <sup>4</sup> + 2891 p <sup>3</sup> + 254.3 p <sup>2</sup> + 30.8 p + 1	1 ----- 0.6 p + 1
5	4.4 ----- 127.7 p <sup>7</sup> + 482.6 p <sup>6</sup> + 1131 p <sup>5</sup> + 1665 p <sup>4</sup> + 1395 p <sup>3</sup> + 154.9 p <sup>2</sup> + 24.47 p + 1	25 ----- 0.3 p + 1
6	47 ----- 0.2304 p <sup>7</sup> + 2.606 p <sup>6</sup> + 30.32 p <sup>5</sup> + 81.4 p <sup>4</sup> + 168.9 p <sup>3</sup> + 51.1 p <sup>2</sup> + 12.7 p + 1	100 ----- 0.15 p + 1
7	24 ----- 1032 p <sup>6</sup> + 2354 p <sup>5</sup> + 3136 p <sup>4</sup> + 1925 p <sup>3</sup> + 328.4 p <sup>2</sup> + 32.6 p + 1	1 ----- 0.5 p + 1
8	1 ----- 2000 p <sup>6</sup> + 3000 p <sup>5</sup> + 3360 p <sup>4</sup> + 1614 p <sup>3</sup> + 258.6 p <sup>2</sup> + 22.8 p + 1	0.1
9	0.47 ----- 216000 p <sup>6</sup> + 232640 p <sup>5</sup> + 106060 p <sup>4</sup> + 1.85e004 p <sup>3</sup> + 1205 p <sup>2</sup> + 51.2 p + 1	3
10	7 ----- 44.74 p <sup>6</sup> + 177.4 p <sup>5</sup> + 362.9 p <sup>4</sup> + 371.8 p <sup>3</sup> + 204.7 p <sup>2</sup> + 27.1 p + 1	1 ----- 0.1 p + 1
11	1 ----- 2000 p <sup>6</sup> + 3000 p <sup>5</sup> + 3360 p <sup>4</sup> + 1614 p <sup>3</sup> + 258.6 p <sup>2</sup> + 22.8 p + 1	2.5

1	2	3
12	24 ----- $1032 p_6 + 2354 p_5 + 3136 p_4 + 1925 p_3 + 328.4 p_2 + 32.6 p + 1$	5 ----- $p + 1$
13	0.47 ----- $216000 p_6 + 232640 p_5 + 106060 p_4 + 1.85e004 p_3 + 1205 p_2 + 51.2 p + 1$	15
14	3 ----- $1120 p_6 + 3325 p_5 + 3826 p_4 + 2133 p_3 + 291.9 p_2 + 34.5 p + 1$	2 ----- $0.5 p + 1$
15	35 ----- $369.5 p_6 + 742.1 p_5 + 1160 p_4 + 816.8 p_3 + 457.2 p_2 + 44.84 p + 1$	0.1
16	1.25 ----- $45090 p_6 + 48906 p_5 + 25650 p_4 + 6360 p_3 + 402.4 p_2 + 36.3 p + 1$	14
17	2.5 ----- $24.5 p_6 + 135.3 p_5 + 307.6 p_4 + 322.8 p_3 + 86.85 p_2 + 15.34 p + 1$	0.5
18	0.5 ----- $8.247 p_6 + 36.58 p_5 + 148.1 p_4 + 204.8 p_3 + 215.2 p_2 + 28.98 p + 1$	12 ----- $0.75 p + 1$
19	4.4 ----- $127.7 p_7 + 482.6 p_6 + 1131 p_5 + 1665 p_4 + 1395 p_3 + 154.9 p_2 + 24.47 p + 1$	5 ----- $0.1 p + 1$
20	0.9 ----- $654.2 p_6 + 2123 p_5 + 3657 p_4 + 3030 p_3 + 354.8 p_2 + 28.91 p + 1$	1.8 ----- $0.15 p + 1$
21	47 ----- $0.2304 p_7 + 2.606 p_6 + 30.32 p_5 + 81.4 p_4 + 168.9 p_3 + 51.1 p_2 + 12.7 p + 1$	15 ----- $0.5 p + 1$
22	7 ----- $44.74 p_6 + 177.4 p_5 + 362.9 p_4 + 371.8 p_3 + 204.7 p_2 + 27.1 p + 1$	1 ----- $0.07 p + 1$
23	0.5 ----- $8.247 p_6 + 36.58 p_5 + 148.1 p_4 + 204.8 p_3 + 215.2 p_2 + 28.98 p + 1$	2 ----- $0.5 p + 1$
24	35 ----- $369.5 p_6 + 742.1 p_5 + 1160 p_4 + 816.8 p_3 + 457.2 p_2 + 44.84 p + 1$	0.3
25	5 ----- $62.5 p_5 + 271.3 p_4 + 487 p_3 + 314.1 p_2 + 36.8 p + 1$	4 ----- $0.1 p + 1$
26	1.25 ----- $45090 p_6 + 48906 p_5 + 25650 p_4 + 6360 p_3 + 402.4 p_2 + 36.3 p + 1$	6
27	3 ----- $1120 p_6 + 3325 p_5 + 3826 p_4 + 2133 p_3 + 291.9 p_2 + 34.5 p + 1$	5 ----- $0.25 p + 1$



1	2	3
28	$\frac{24.5 p^6 + 135.3 p^5 + 307.6 p^4 + 322.8 p^3 + 86.85 p^2 + 15.34 p + 1}{2.5}$	0.35
29	$\frac{625 p^6 + 2675 p^5 + 4717 p^4 + 2891 p^3 + 254.3 p^2 + 30.8 p + 1}{20}$	$\frac{10}{0.2 p + 1}$
30	$\frac{15.05 p^6 + 84.67 p^5 + 185 p^4 + 226.3 p^3 + 137.4 p^2 + 21.98 p + 1}{14}$	9
31	$\frac{62.5 p^5 + 271.3 p^4 + 487 p^3 + 314.1 p^2 + 36.8 p + 1}{5}$	15
32	$\frac{15.05 p^6 + 84.67 p^5 + 185 p^4 + 226.3 p^3 + 137.4 p^2 + 21.98 p + 1}{14}$	$\frac{2}{0.5 p + 1}$
33	$\frac{654.2 p^6 + 2123 p^5 + 3657 p^4 + 3030 p^3 + 354.8 p^2 + 28.91 p + 1}{0.9}$	0.1
34	$\frac{625 p^6 + 2675 p^5 + 4717 p^4 + 2891 p^3 + 254.3 p^2 + 30.8 p + 1}{20}$	14
35	$\frac{127.7 p^7 + 482.6 p^6 + 1131 p^5 + 1665 p^4 + 1395 p^3 + 154.9 p^2 + 24.47 p + 1}{4.4}$	0.5
36	$\frac{0.2304 p^7 + 2.606 p^6 + 30.32 p^5 + 81.4 p^4 + 168.9 p^3 + 51.1 p^2 + 12.7 p + 1}{47}$	$\frac{10}{0.2 p + 1}$
37	$\frac{1032 p^6 + 2354 p^5 + 3136 p^4 + 1925 p^3 + 328.4 p^2 + 32.6 p + 1}{24}$	$\frac{1}{0.07 p + 1}$
38	$\frac{2000 p^6 + 3000 p^5 + 3360 p^4 + 1614 p^3 + 258.6 p^2 + 22.8 p + 1}{1}$	$\frac{2}{0.5 p + 1}$
39	$\frac{216000 p^6 + 232640 p^5 + 106060 p^4 + 1.85e004 p^3 + 1205 p^2 + 51.2 p + 1}{0.47}$	$\frac{0.8}{0.25 p + 1}$
40	$\frac{44.74 p^6 + 177.4 p^5 + 362.9 p^4 + 371.8 p^3 + 204.7 p^2 + 27.1 p + 1}{7}$	$\frac{1}{0.6 p + 1}$
41	$\frac{2000 p^6 + 3000 p^5 + 3360 p^4 + 1614 p^3 + 258.6 p^2 + 22.8 p + 1}{1}$	$\frac{25}{0.3 p + 1}$
42	$\frac{1032 p^6 + 2354 p^5 + 3136 p^4 + 1925 p^3 + 328.4 p^2 + 32.6 p + 1}{24}$	$\frac{100}{0.15 p + 1}$
43	$\frac{216000 p^6 + 232640 p^5 + 106060 p^4 + 1.85e004 p^3 + 1205 p^2 + 51.2 p + 1}{0.47}$	$\frac{1}{0.5 p + 1}$

1	2	3
44	<div>3</div> <div>-----</div> <div><math>1120 p_6 + 3325 p_5 + 3826 p_4 + 2133 p_3 + 291.9 p_2 + 34.5 p + 1</math></div>	0.1
45	<div>35</div> <div>-----</div> <div><math>369.5 p_6 + 742.1 p_5 + 1160 p_4 + 816.8 p_3 + 457.2 p_2 + 44.84 p + 1</math></div>	<div>1</div> <div>-----</div> <div><math>0.1 p + 1</math></div>
46	<div>1.25</div> <div>-----</div> <div><math>45090 p_6 + 48906 p_5 + 25650 p_4 + 6360 p_3 + 402.4 p_2 + 36.3 p + 1</math></div>	<div>1</div> <div>-----</div> <div><math>0.1 p + 1</math></div>
47	<div>2.5</div> <div>-----</div> <div><math>24.5 p_6 + 135.3 p_5 + 307.6 p_4 + 322.8 p_3 + 86.85 p_2 + 15.34 p + 1</math></div>	<div>2</div> <div>-----</div> <div><math>0.5 p + 1</math></div>
48	<div>0.5</div> <div>-----</div> <div><math>8.247 p_6 + 36.58 p_5 + 148.1 p_4 + 204.8 p_3 + 215.2 p_2 + 28.98 p + 1</math></div>	<div>5</div> <div>-----</div> <div><math>0.25 p + 1</math></div>
49	<div>4.4</div> <div>-----</div> <div><math>127.7 p_7 + 482.6 p_6 + 1131 p_5 + 1665 p_4 + 1395 p_3 + 154.9 p_2 + 24.47 p + 1</math></div>	0.35
50	<div>0.9</div> <div>-----</div> <div><math>654.2 p_6 + 2123 p_5 + 3657 p_4 + 3030 p_3 + 354.8 p_2 + 28.91 p + 1</math></div>	<div>10</div> <div>-----</div> <div><math>0.2 p + 1</math></div>

Последовательность синтеза САУ следует из приводимого ниже содержания пояснительной записки. Структура пояснительной записки такова.

## ***Оглавление***

***1. Исследование динамических и частотных свойств объекта управления***

***2. Понижение расчетного порядка объекта управления***

***3. Синтез желаемой дискретной передаточной функции замкнутой системы***

***4. Синтез цифрового регулятора***

***5. Математическое моделирование системы и разработка структуры цифрового регулятора***

***Выводы***

***Список литературы***

Графическая часть выполняется на одном листе формата А1, разделенном на два формата А2. На лист выносятся:

а) структурная динамическая схема САУ с раскрытыми ПФ всех элементов (1/2 листа);

б) карта нулей и полюсов, а также графики переходных характеристик, иллюстрирующие этапы синтеза САУ (1/2 листа).

Выполнение работы нужно начинать с разбора примера, который дан в разделе 4.4. Там же имеются необходимые методические указания.

Оформление отчета осуществляется по правилам, общепринятым для оформления и публикации научных работ. Стандарты, регламентирующие оформление технической документации на промышленные изделия, не используются. Если отчет оформляется как пояснительная записка к курсовому проекту (работе), то вначале помещается типовой титульный лист, за которым размещается также типовой лист с указанием номера варианта, исходными данными и местом для будущей оценки (образцы – на кафедре). Затем идут листы формата А4 без штампов. Поля – по 20 мм со всех сторон, шрифт – Times New Roman с кеглем 14 пт, через 1,5 интервала. Размер обычных символов редактора формул – также 14 пт. Переменные в формулах записываются курсивом, за исключением греческих букв. Все греческие буквы, большинство общих математических знаков, в том числе функции, а также числа, записываются прямо. Матрицы и векторы – жирным шрифтом, прямо. Формулы располагаются по центру страницы. После формул, как правило, ставятся знаки препинания. Нумерация формул используется по мере необходимости. Формула нумеруется только в том случае, если на неё нужно сослаться в тексте.

Цитаты из рабочей области MATLAB оформляются более мелким шрифтом, другой по отношению к основному тексту гарнитуры, через 1 интервал (рекомендуется гарнитура Courier).

Содержание пояснительной записки определено выше.

Следует подчеркнуть, что на каждый литературный источник, приведенный в списке литературы, должна быть ссылка в тексте работы. Число источников – не менее пяти.

Структурирование и представление материала оценивается наряду с содержанием пояснительной записки. Примеры правильного структурирования и оформления научно-технических текстов можно найти в книгах и журналах соответствующей тематики.

Приведенный ниже пример решения не является образцом для изложения текста в записке (отчете). Прямое воспроизведение тех или иных материалов из этого примера недопустимо. Текст должен быть более развернутым, со ссылками на теоретические источники, с цитатами (оформляются по правилам цитирования) и подробными обоснованиями расчетов. Приведенные в примере вычисления, в ряде случаев, могут быть сделаны иначе, с привлечением других средств MATLAB и, возможно, более эффективно. Любое творчество в части оптимизации вычислений при математическом моделировании поощряется.

Выносной лист оформляется как чертёж с использованием соответствующих ГОСТов.

Все, что содержится в записке, должно быть результатом индивидуального труда, включая формулировки каких бы то ни было положений, запись формул и компьютерный набор.

### 4.3. Пример синтеза дискретной САУ

Положим, что задана ПФ ОУ

$$W_{\text{оу}}(p) = \frac{7,523}{0,055 p^6 + 0,821 p^5 + 4,285 p^4 + 9,244 p^3 + 8,264 p^2 + 6,316 p + 1},$$

а также ПФ звена обратной связи

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{2,345}{0,274 p + 1}.$$

#### Этап 1. Исследование свойств ОУ

В качестве инструмента для исследования и моделирования САУ используем программную систему MATLAB. Возможности этой системы, в части задач автоматического управления, определяются, прежде всего, наличием

интегрированного пакета Control System Toolbox [6]. Некоторые инструменты пакета описаны в главе 5 настоящего пособия. С ними нужно предварительно ознакомиться. Итак, задаем ПФ ОУ в рабочей области MATLAB:

```
>> Wou=tf([7.523], [0.055 0.821 4.285 9.244 8.264 6.316 1])
```

Transfer function:

7.523

-----  
 $0.055 s^6 + 0.821 s^5 + 4.285 s^4 + 9.244 s^3 + 8.264 s^2 + 6.316 s + 1$

При помощи средства просмотра линейных динамических объектов LTI-Viewer просматриваем характеристики ОУ. Результат показан на рис. 4.1-4.4.

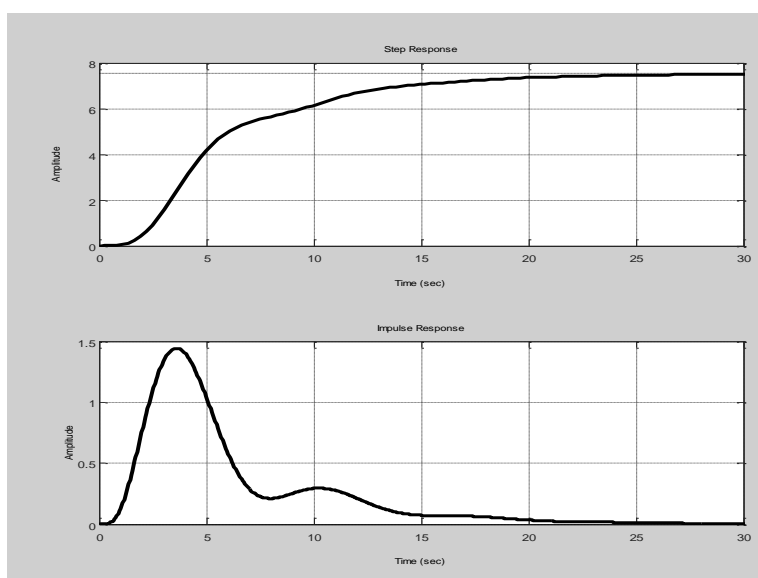


Рис. 4.1

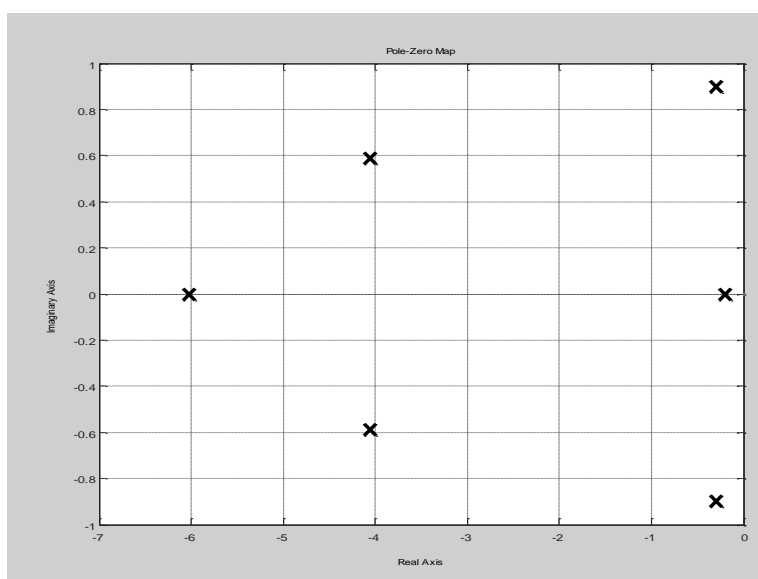


Рис. 4.2

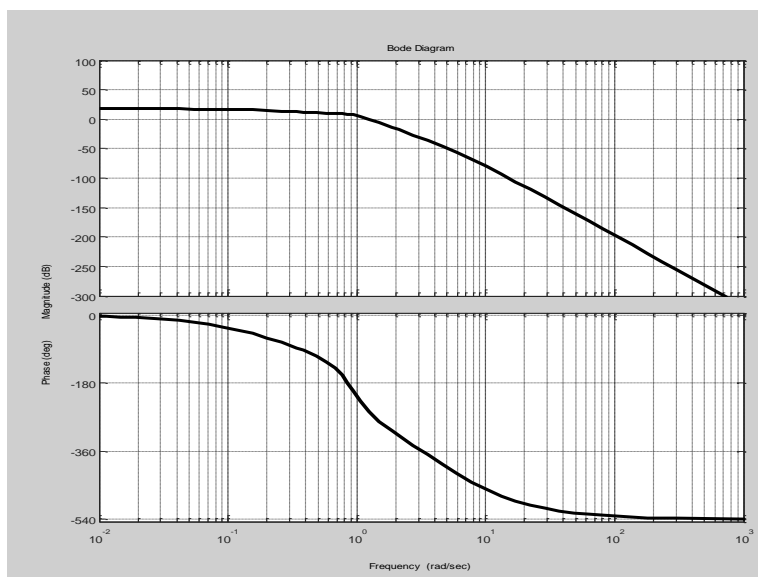


Рис. 4.3

Делаем вывод, что ОУ является устойчивым объектом 6-го порядка и предположительно имеет доминирующие полюсы.

**Производим последовательную декомпозицию и понижаем порядок объекта управления.** Начиная с этого этапа, все вычисления должны производиться с неокругленными численными значениями. В противном случае, накопление погрешности в ходе вычислений приведет к неудовлетворительному результату синтеза. Поэтому, далее нужно избегать ввода чисел с клавиатуры (за исключением ПФ новых объектов, которые не получаются преобразованием ранее введенных). В рабочей области MATLAB следует перейти от краткого представления чисел, которое установлено по умолчанию (четыре десятичные цифры после запятой), к полному представлению. Делаем это командой

```
>> format long
```

Определяем вектор полюсов ОУ

```
>> WP=pole(Wou)
```

```
WP =
```

```
-6.01715486658712  
-4.05503509352782 + 0.58632627350873i  
-4.05503509352782 - 0.58632627350873i  
-0.30002323516314 + 0.89998722723280i  
-0.30002323516314 - 0.89998722723280i
```

-0.20000120330368

Очевидно, что найдены шесть коней: два вещественных полюса первого порядка и два полюса второго порядка (под полюсом второго порядка здесь понимается пара комплексно-сопряженных корней характеристического полинома). Таким образом, ПФ ОУ может быть представлена в виде

$$W(p) = k \cdot \sum_{i=1}^2 W_i^{\text{н.ап.}}(p) \cdot \sum_{j=1}^2 W_j^{\text{н.кол.}}(p),$$

где  $k$  – коэффициент передачи ОУ;

$$W_i^{\text{н.ап.}}(p) = \frac{1}{T_i^{\text{ап.}} p + 1} - i\text{-я нормированная ПФ апериодического звена первого порядка (соответствует полюсу первого порядка);}$$

$$W_j^{\text{н.кол.}}(p) = \frac{1}{T_j^2 p^2 + 2\xi T_j p + 1} - j\text{-я нормированная ПФ колебательного звена (соответствует полюсу второго порядка).}$$

Определяем в MATLAB указанные нормированные ПФ:

```
>> w1n=tf([1], [1/-wp(1) 1])
```

Transfer function:

```
1
-----
0.1662 s + 1
```

Передаточную функцию  $W_2^{\text{н.кол.}}(p)$  определяем в два этапа: вначале получаем ненормированную ПФ  $w_2(p)$ , а затем нормируем её делением всех коэффициентов знаменателя на свободный член. Итак,

```
>> w2=tf([1], [1 -wp(2)])*tf([1], [1 -wp(3)])
Warning: Transfer function has complex coefficients.
> In tf.tf at 197
Warning: Transfer function has complex coefficients.
> In tf.tf at 197
```

Transfer function:

```
1
-----
s^2 + 8.11 s + 16.79
```

Образуем векторы с коэффициентами числителя и знаменателя  $W_2(p)$ .

```
>> [w2ch, w2zn]=tfdata(w2, 'v')
```

w2ch =

```
0    0    1
```

W2zn =

1.0000000000000000 8.11007018705564 16.78708810874883

Нормируем вектор коэффициентов знаменателя.

```
>> W2znN=W2zn/W2zn(3)
```

W2znN =

0.05956959262511 0.48311357720396 1.0000000000000000

Определяем  $W_2^{\text{н.кол.}}(p)$  как

```
>> W2N=tf(W2ch, W2znN)
```

Transfer function:

1

-----  
0.05957 s^2 + 0.4831 s + 1

Аналогично определяем остальные нормированные ПФ.

```
>> W3=tf([1], [1 -WP(4)])*tf([1], [1 -WP(5)])
```

Warning: Transfer function has complex coefficients.

> In tf.tf at 197

Warning: Transfer function has complex coefficients.

> In tf.tf at 197

Transfer function:

1

-----  
s^2 + 0.6 s + 0.9

```
>> [W3ch, W3zn]=tfdata(W3,'v')
```

W3ch =

0 0 1

W3zn =

1.0000000000000000 0.60004647032627 0.89999095081994

```
>> W3znN=W3zn/W3zn(3)
```

W3znN =

1.11112228305067 0.66672500404543 1.0000000000000000

```
>> W3N=tf(W3ch, W3znN)
```

Transfer function:

1

-----  
1.111 s^2 + 0.6667 s + 1

```
>> W4N=tf([1], [1/-WP(6) 1])
```

Transfer function:

1

-----



5 s + 1

Нормирование полиномов знаменателя приводит к последовательно-декомпозированной канонической форме записи ПФ ОУ:

$$W_{\text{oy}}(p) = \frac{7,523}{(0.1662 p + 1)(0.05957 p^2 + 0.4831 p + 1)(1.111 p^2 + 0.6667 p + 1)(5 p + 1)}.$$

Нужно заметить, что получить такую форму записи непосредственно в рабочей области MATLAB нельзя. Там может быть получена последовательно-декомпозированная zpk-форма:

```
>> zpk(Wou)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
136.7818
```

```
-----  
(s+6.017) (s+0.2) (s^2 + 8.11s + 16.79) (s^2 + 0.6s + 0.9)
```

В отчете (или пояснительной записке) необходимо приводить все основные ПФ как в канонической или канонической последовательно-декомпозированной форме, так и в форме, генерируемой MATLAB.

Для проверки правильности декомпозиции образуем в MATLAB произведение:

```
>> WW=7.523*W1N*W2N*W3N*W4N
```

```
Transfer function:
```

```
7.523
```

```
-----  
0.055 s^6 + 0.821 s^5 + 4.285 s^4 + 9.244 s^3 + 8.264 s^2 + 6.316 s + 1
```

Полученная ПФ совпадает с исходной ПФ ОУ, что указывает на правильность декомпозиции.

Выделим доминирующие полюсы  $W(p)$ . Очевидно, что полюсы

```
-0.30002323516314 + 0.89998722723280i  
-0.30002323516314 - 0.89998722723280i  
-0.20000120330368
```

являются доминирующими, так как их вещественные части не сильно различаются между собой (менее чем в 10 раз), и в то же время все они более чем на порядок меньше вещественных частей полюсов

```
-6.01715486658712  
-4.05503509352782 + 0.58632627350873i  
-4.05503509352782 - 0.58632627350873i
```

которыми допустимо пренебречь. Такой критерий доминирования полюсов можно найти, например, в [8]. В [2] для доминирования считается достаточным отличие вещественных частей как минимум в 5 раз (тем более, в нашем случае указанные полюса являются доминирующими). После отбрасывания недоминирующих полюсов ОУ будет иметь ПФ пониженного порядка

$$W_{\text{oy}}^{\text{д}}(p) = \frac{7,523}{(1.111 p^2 + 0.6667 p + 1)(5 p + 1)},$$

а синтезированный регулятор окажется более простым.

Задаем в tf-форме упрощенную модель ОУ, имеющую только доминирующие полюса исходной модели:

```
>> Woud=7.523*W3N*W4N
```

Transfer function:

7.523

-----  
5.556 s^3 + 4.445 s^2 + 5.667 s + 1

Сравниваем две модели ОУ:  $w_{\text{oy}}(p)$  и  $w_{\text{oy}}^{\text{д}}(p)$ . Соответствующие графики даны на рис. 4.4 и 4.5 (жирные линии соответствуют  $w_{\text{oy}}^{\text{д}}(p)$ ).

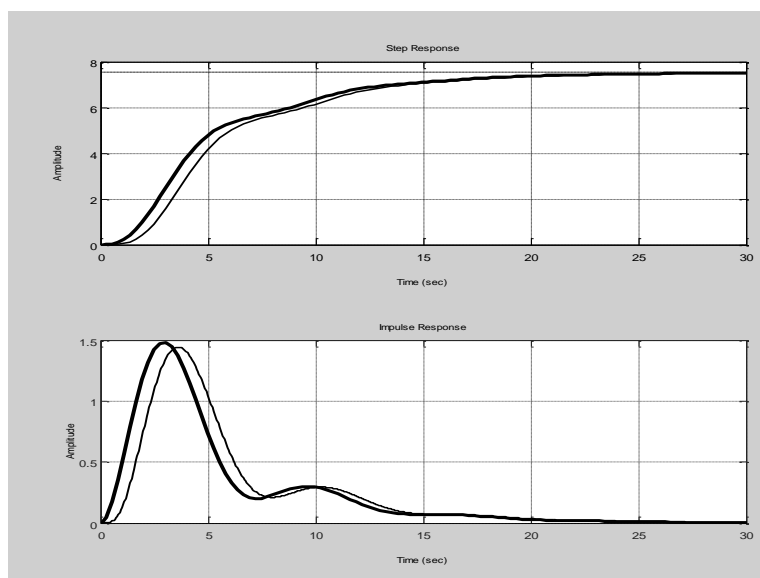


Рис. 4.4

Видимые отличия в динамических и частотных характеристиках объясняются понижением порядка ОУ и являются приемлемыми.

Формируем ПФ отбрасываемого объекта с неучитываемой динамикой

$$W_{\text{HD}}(p) = \frac{1}{(0.1662 p + 1)(0.05957 p^2 + 0.4831 p + 1)}.$$

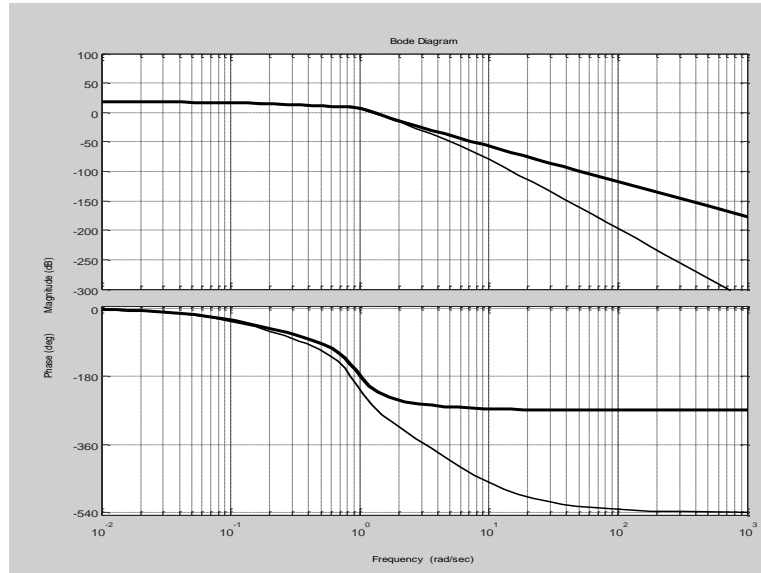


Рис. 4.5

Задаем эту ПФ в рабочей области MATLAB:

```
>> Wnd=W1N*W2N
```

Transfer function:

1

```
-----
0.0099 s^3 + 0.1399 s^2 + 0.6493 s + 1
```

Строим карту распределения полюсов упрощенного ОУ. Карта для ПФ  $W_{\text{HD}}(p)$  показана на рис. 4.6.

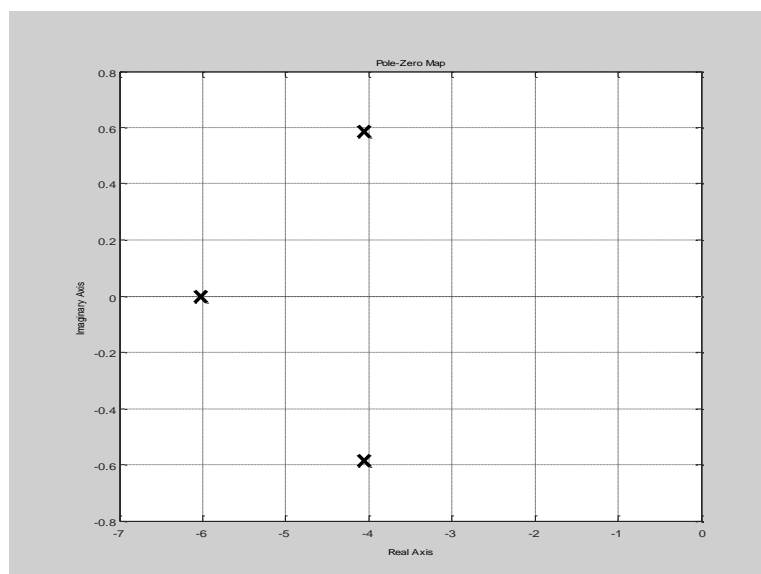


Рис. 4.6

Очевидно, что отображены именно те полюсы, которыми было решено пренебречь.

### Этап 2. Определение желаемой ДПФ замкнутой САУ

Вначале определяем желаемую ПФ эквивалентной непрерывной системы (непрерывного аналога дискретной замкнутой системы). Эта ПФ в данном примере и в задании, оговоренном в разделе 4.2, задается в виде:

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{1/k_{\text{oc}}}{T_{\text{ж}}^2 p^2 + 2pT_{\text{ж}}\xi + 1},$$

где  $k_{\text{oc}}$  – коэффициент передачи звена обратной связи,  $\xi = \sqrt{2}/2$  – оптимальный коэффициент демпфирования колебаний.

Желаемая ПФ эквивалентной прямой цепи (то есть ОУ и эквивалентного непрерывного регулятора) замкнутой системы определяется как

$$W_{\text{ж}}^{\text{пц}}(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{1 - W_{\text{ж}}(p)W_{\text{oc}}(p)},$$

что следует из известной формулы для ПФ замкнутой САУ.

Постоянная времени  $T_{\text{ж}}$  определяет быстродействие САУ и подлежит выбору с учетом свойств ОУ. Величина  $T_{\text{ж}}$  выбирается так, чтобы полюса  $W_{\text{ж}}^{\text{пц}}(p)$  лежали бы правее полюсов  $W_{\text{нд}}(p)$  (тогда неучитываемая динамика ОУ не сильно скажется на свойствах САУ), но левее полюсов  $W_{\text{оу}}^{\text{д}}(p)$ . Последнее означает, что свободные процессы в САУ будут затухать быстрее процессов в отдельно взятом ОУ. Этим определяется некоторое форсирование ОУ, что на практике приемлемо не всегда и не для всех объектов. Поскольку физическая природа ОУ в данной работе не рассматривается и эксплуатационные ограничения на его координаты не задаются, то такой подход приемлем (в практическом смысле такой расчет можно трактовать как расчет для режима малых отклонений, при том что большие отклонения могут отрабатываться при ограничении выхода регулятора). Таким образом, выбор  $T_{\text{ж}}$  будем делать из усло-

вия: вещественная часть самого левого полюса  $W_{\text{ж}}^{\text{пл}}(p)$  должна быть в 3–4 раза меньше вещественной части самого правого полюса  $W_{\text{нд}}(p)$ .

Вводим ПФ звена обратной связи.

```
>> Woc=tf([2.345], [0.274 1])
```

```
Transfer function:
      2.345
-----
0.274 s + 1
```

Задаем постоянную времени  $T_{\text{ж}} = 1,5$  с.

```
>> Tg=1.5
```

```
Tg =
```

```
1.5000
```

Вводим  $W_{\text{ж}}(p)$ .

```
>> Wg=tf([1/2.345], [Tg^2 Tg*2^0.5 1])
```

```
Transfer function:
      0.4264
-----
2.25 s^2 + 2.121 s + 1
```

Определяем  $W_{\text{ж}}^{\text{пл}}(p)$ . Эта ПФ содержит одинаковые и близкие нули и полюсы (полюсы НЧ, скомпенсированные нулями регулятора), которые в данном случае подлежат сокращению. Наиболее удобно сразу определять минимальную реализацию этой ПФ, задавая допуск для удаления нуля и полюса на уровне 0,1 (величина этого допуска может в отдельных случаях уточняться, для чего критерием служит получение результирующей ПФ 2-го порядка).

```
>> Wgpc=minreal(Wg/(1-Wg*Woc), 0.1)
```

```
Transfer function:
      0.1895
-----
s^2 + 1.118 s
```

```
>> pole(Wgpc)
```

```
ans =
```

```
0
-1.1184
```

Сравнивая полюс, имеющий значение -1.1184, с полюсами  $W_{\text{нд}}(p)$

```
-6.01715486658712
-4.05503509352782 + 0.58632627350873i
-4.05503509352782 - 0.58632627350873i
```

делаем вывод, что оговоренное выше условие выполняется, и следовательно, значение  $T_{\text{ж}}$  выбрано правильно.

Таким образом,

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{0,4264}{2,25 p^2 + 2,121 p + 1}.$$

Далее определим желаемую ДПФ замкнутой дискретной САУ  $w_{\text{ж}}(z)$  как дискретный аналог  $w_{\text{ж}}(p)$ , формируемый с использованием экстраполятора нулевого порядка.

Выбираем период дискретизации  $T_{\text{д}}$  по правилу  $T_{\text{д}} = T_{\text{ж}} / (4 \dots 8)$ , которое основывается на теореме Котельникова. В отчете по заданию (в записке к курсовой работе или проекту) необходимо привести подробное обоснование выбора  $T_{\text{д}}$ , если автор претендует на оценку «отлично». Берем значение  $T_{\text{д}} = 0,2$  с.

```
>> Wgz=c2d(Wg, 0.2)
```

```
Transfer function:
0.003558 z + 0.003341
-----
z^2 - 1.812 z + 0.8281
```

```
Sampling time: 0.2
```

Отобразим карту распределения нулей и полюсов этой ДПФ. Она показана на рис. 4.7.

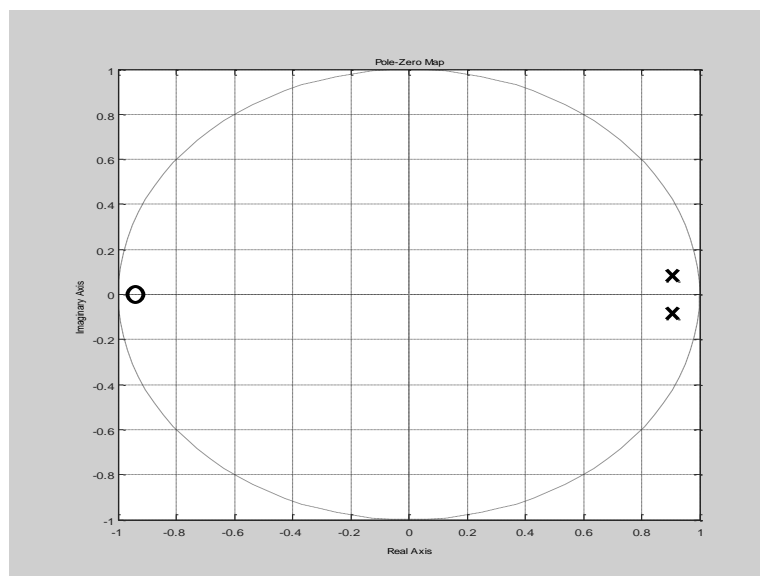


Рис. 4.7

Естественно, что нули и полюсы  $W_{\text{ж}}(z)$  лежат внутри круга единичного радиуса, что указывает на минимально-фазовость и устойчивость САУ.

Выясним, удовлетворяет ли полученная ДПФ требованию робастности САУ (смотри раздел 4.1). Для этого определим ДПФ приведенной непрерывной части прямой цепи системы  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПНЧ}}(z)$  с упрощенным ОУ:

```
>> Wpnср =c2d(Woud,0.2)

Transfer function:
0.001732 z^2 + 0.006646 z + 0.001599
-----
z^3 - 2.814 z^2 + 2.667 z - 0.8521
Sampling time: 0.2
>> zpk(Wpnср)

Zero/pole/gain:
0.001732 (z+3.579) (z+0.2579)
-----
(z-0.9608) (z^2 - 1.853z + 0.8869)
```

Карта расположения нулей и полюсов этой ДПФ дана на рис. 4.8.

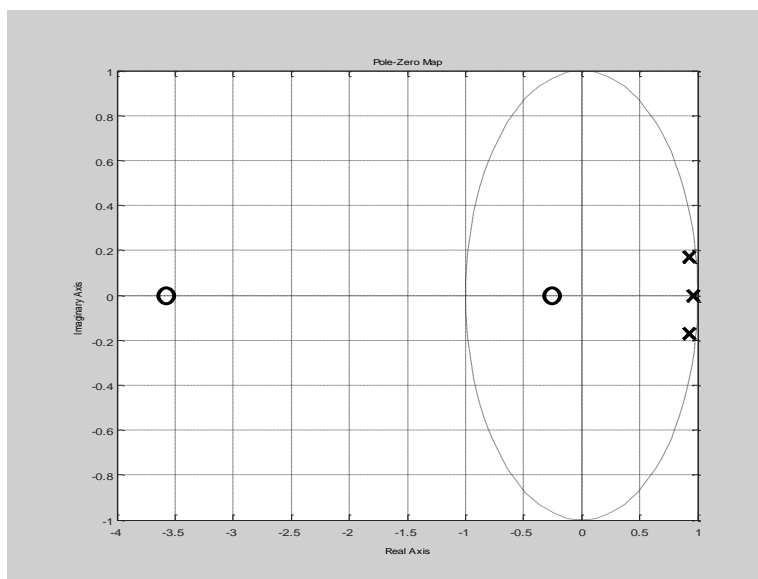


Рис. 4.8

Очевидно, что ДПФ ПНЧ прямой цепи имеет ноль со значением -3.579, который выходит за пределы круга единичного радиуса на  $z$ -плоскости (это означает, что  $W_{\text{ПНЧ}}^{\text{ПНЧ}}(z)$  является неминимально-фазовой). Как показано в разделе 4.1, для обеспечения грубости регулятора желаемая ДПФ замкнутой системы также должна содержать этот ноль. Это означает, что ноль ПНЧ не будет компенсироваться равным по величине полюсом регулятора, который, при неидеальной реализации,

обусловил бы неустойчивость системы. Введем указанный ноль умножением желаемой ДПФ на ДПФ звена с требуемым нулем и скорректированным коэффициентом передачи. Для этого определим вектор нулей ДПФ ОУ:

```
>> z=zero(Wpncp)

z =

-3.57920709863815
-0.25790397824043
```

Далее определим векторы нулей и полюсов желаемой ДПФ САУ  $w_{\text{ж}}(z)$ :

```
>> a=zero(Wgz)

a =

-0.93906119346345

>> b=pole(Wgz)

b =

0.90598552615384 + 0.08567112548321i
0.90598552615384 - 0.08567112548321i
```

Образуем векторы коэффициентов  $w_{\text{ж}}(z)$ :

```
>> [c, d]=tfdata(Wgz, 'v')

c =

0 0.00355793107162 0.00334111499837

d =

1.000000000000000 -1.81197105230768 0.82814931534181
```

Определим обобщенный коэффициент передачи  $K$  ДПФ  $w_{\text{ж}}(z)$ :

```
>> K=-(c(3)/d(3))*(b(1)*b(2))/(a(1))

K =

0.00355793107162
```

Определим скорректированную желаемую ДПФ замкнутой САУ  $w_{\text{ж.л}}(z)$ :

```
>> Wgz1=zpk([a(1) z(1)], [b(1) b(2)], K/(1-z(1)), 0.2)
```

```
Zero/pole/gain:
0.00077698 (z+0.9391) (z+3.579)
-----
(z^2 - 1.812z + 0.8281)
```

```
Sampling time: 0.2
```



Обобщенный коэффициент передачи скорректирован при вводе  $W_{ж.1}(z)$  в соответствии с известной формулой, выражающей теорему о конечном значении оригинала:

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z).$$

Из данной формулы следует, что внесение в изображение  $X(z)$  нуля  $z_1$  (введением сомножителя  $(z - z_1)$ ) требует введения коэффициента  $1/(1 - z_1)$  для сохранения значения  $x(\infty)$ . Соответственно, введение полюса  $p_1$ , при помощи деления  $X(z)$  на  $(z - p_1)$ , требует введения коэффициента  $(1 - p_1)$ .

Итак, проверим, как изменились динамические свойства модели желаемой ДПФ замкнутой САУ. Для этого построим, используя LTI-Viewer, переходные характеристики  $w_{ж}(z)$  и  $w_{ж.1}(z)$ . Они показаны на рис. 4.9.

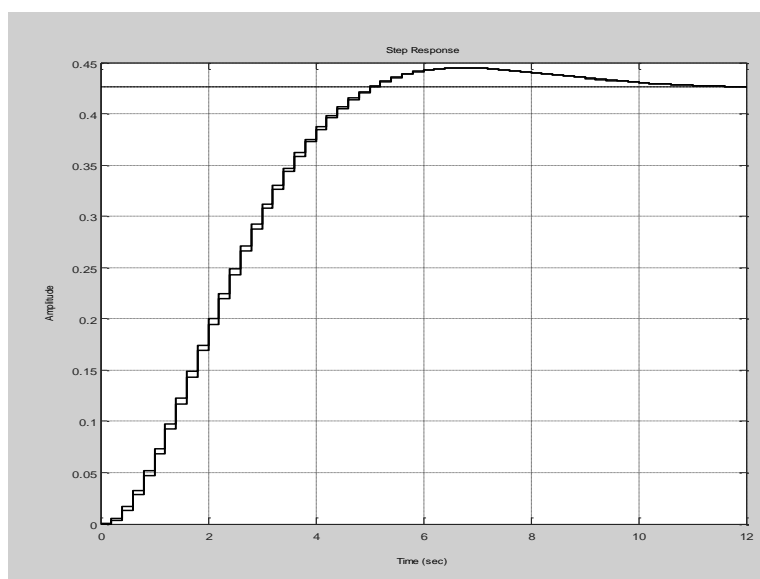


Рис. 4.9

Очевидно, что введение нуля незначительно изменило свойства модели.

Далее рассмотрим вопрос о реализуемости регулятора. Как следует из формулы (4.3), ЦР реализуем, если разность степеней полиномов знаменателя и числителя желаемой ДПФ замкнутой САУ не меньше разности степеней полиномов знаменателя и числителя эквивалентной ДПФ ОУ. В данном примере это

условие не выполняется. Поэтому введем дополнительный полюс в желаемую ДПФ замкнутой системы. Очевидно, что этот полюс должен лежать внутри окружности единичного радиуса на  $z$ -плоскости, то есть должен определять устойчивую моду свободного движения, которая к тому же не должна быть доминирующей (иначе говоря, эта мода не должна сильно изменять характер переходного процесса). Таким образом, вводимый полюс должен располагаться значительно ближе к началу координат по отношению к имеющимся полюсам желаемой ДПФ замкнутой системы. Введем, к примеру, полюс  $p_3 = -0,01$ . Для этого модифицируем команду, которая использовалась выше для введения нуля ДПФ и введем ДПФ  $W_{ж.2}(z)$ .

```
> Wgz2=zpk([a(1) z(1)], [b(1) b(2) -0.01], K*(1+0.01)/(1-z(1)), 0.2)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
0.00078475 (z+0.9391) (z+3.579)
```

```
-----  
(z+0.01) (z^2 - 1.812z + 0.8281)
```

```
Sampling time: 0.2
```

Смотрим, как изменилась желаемая динамика системы. Для этого строим переходные характеристики, соответствующие  $W_{ж}(p)$ ,  $W_{ж}(z)$ ,  $W_{ж.1}(z)$  и  $W_{ж.2}(z)$ . Результат – на рис. 4.10.

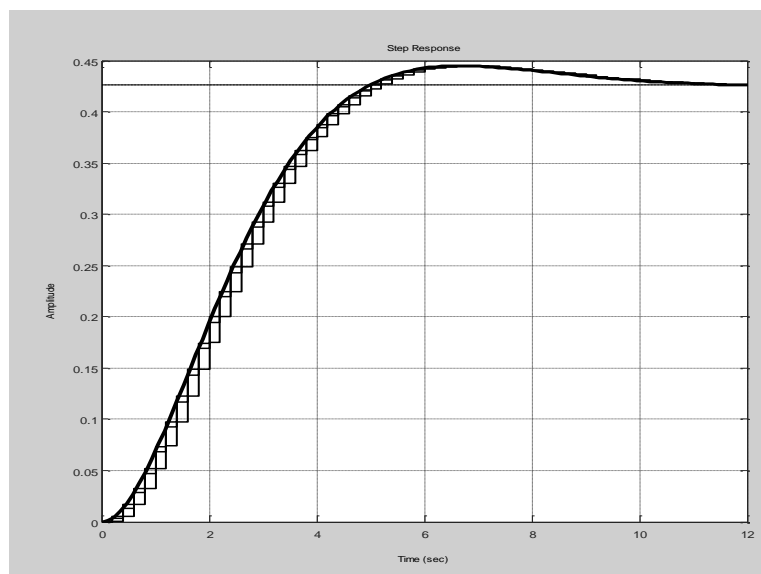


Рис. 4.10

Допустимо считать, что переходные характеристики отличаются незначительно, и следовательно, модификация желаемой ДПФ замкнутой САУ введением дополнительного нуля и полюса сделана достаточно корректно. Далее для расчетов будем использовать  $W_{ж.2}(z)$ .

#### Этап 4. Синтез цифрового регулятора

Дискретная ПФ ЦР определяется формулой (4.2). Чтобы воспользоваться этой формулой, нужно предварительно задать в MATLAB ДПФ приведенной непрерывной части САУ  $w_{пнч}(z)$ . Другие необходимые ДПФ были заданы выше. Учтем, что в состав приведенной непрерывной части входит экстраполятор нулевого порядка, ОУ и звено обратной связи. Поэтому определяем в MATLAB ДПФ:

```
>> Wpnc=c2d(Woud*Woc,0.2)
```

```
Transfer function:
```

```
0.0006499 z^3 + 0.006034 z^2 + 0.005055 z + 0.0003812
```

```
-----  
z^4 - 3.296 z^3 + 4.023 z^2 - 2.138 z + 0.4107
```

```
Sampling time: 0.2
```

В качестве  $W_{ж}(z)$  используем скорректированную ДПФ  $w_{ж.2}(z)$ .

```
>> Wr=minreal(Wgz2/(Wpncp-Wgz2*Wpnc))
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
0.45308 (z-0.9608) (z-0.4819) (z+0.9391) (z^2 - 1.853z + 0.8869)
```

```
-----  
(z-1) (z-0.7621) (z-0.5341) (z+0.2586) (z+0.01132)
```

```
Sampling time: 0.2
```

Правильность расчета ДПФ ЦР проверим в ходе математического моделирования САУ.

#### Этап 5. Математическое моделирование САУ

Моделируем САУ с использованием компонента Simulink системы MATLAB [5]. Схема моделирования, показанная на рис. 4.11, содержит замкнутую САУ с экстраполятором нулевого порядка и параллельно включенное эталонное звено с ДПФ  $w_{ж}(p)$ , необходимое для сравнения переходных

процессов. Вместо  $w_{\text{ж}}(p)$  можно было бы использовать  $w_{\text{ж}}(z)$ ,  $w_{\text{ж.1}}(z)$  или  $w_{\text{ж.2}}(z)$ , так как различия в динамике этих объектов несущественны. Однако проще сравнивать процессы одного типа, в данном случае непрерывные (а точнее, моделируемые, как непрерывные).

На рис. 4.11 видно, что в качестве ОУ использовано звено с неупрощенной ПФ  $w_{\text{оу}}(p)$ . На рис. 4.12 показаны получаемые в ходе моделирования процессы: кривая 1 – для эталонного звена, кривая 2 – для синтезированной САУ.

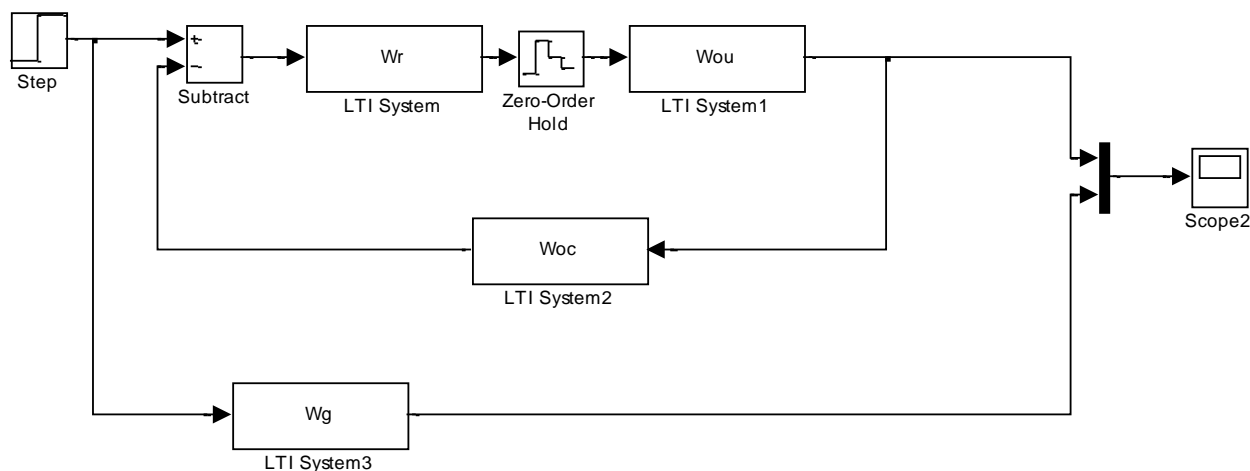


Рис. 4.11

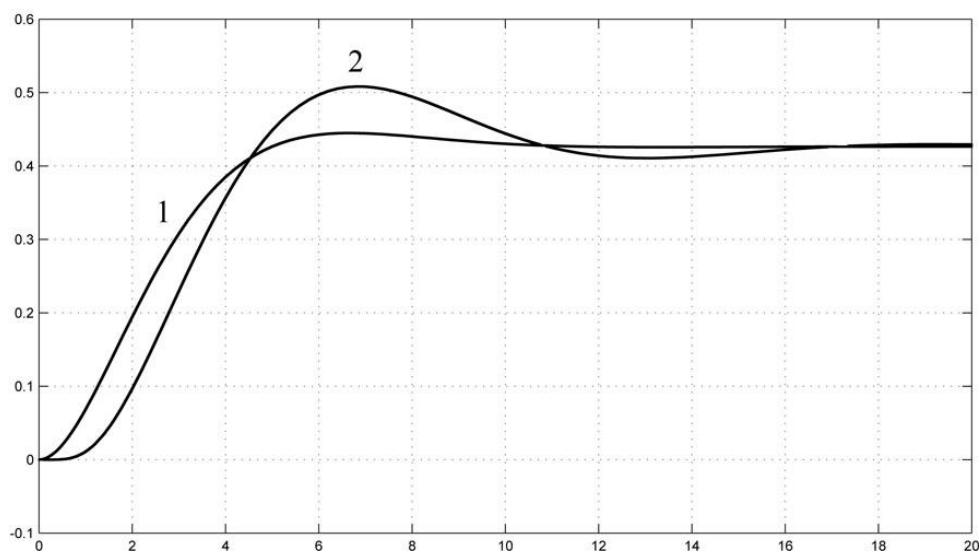


Рис. 4.12

Очевидно, что немоделируемая динамика проявляется в виде несколько увеличенной колебательности переходной характеристики САУ. Заменяем

$w_{oy}(p)$  на упрощенную ПФ пониженного порядка  $w_{oy}^{\lambda}(p)$ . Получаем новую модель, представленную на рис. 4.13.

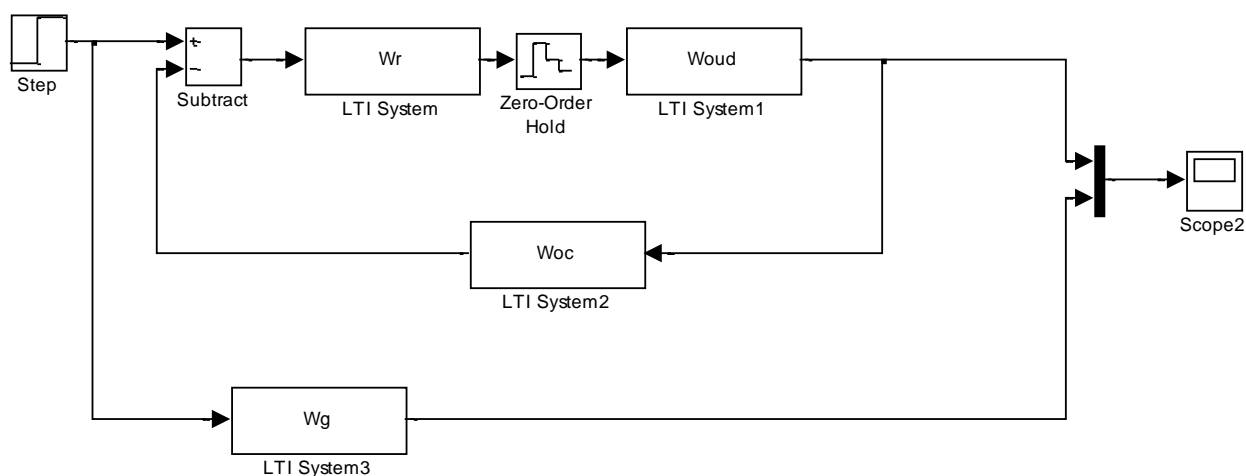


Рис. 4.13

Производя моделирование заново, получаем процессы, показанные на рис. 4.14: кривая 1 – для эталонного звена, кривая 2 – для синтезированной САУ.

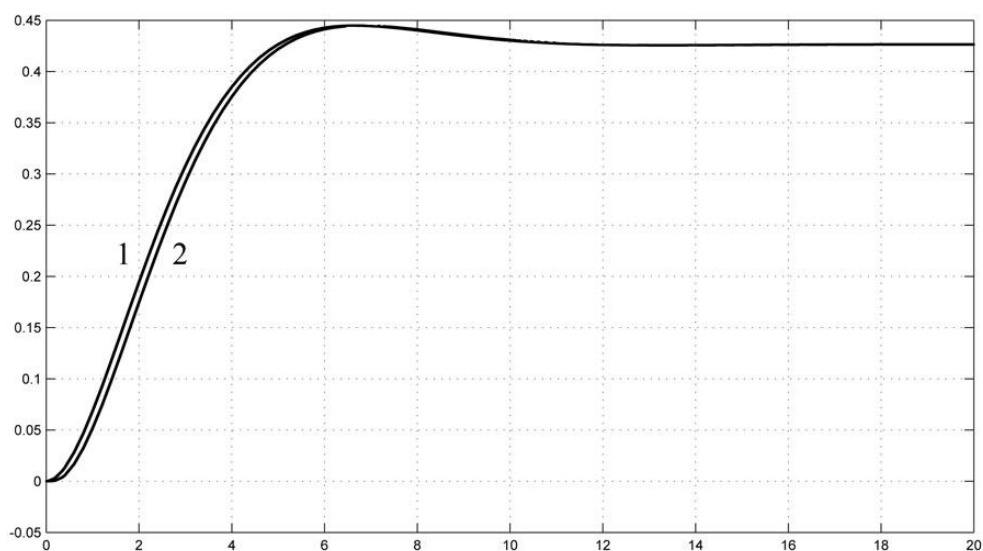


Рис. 4.14

Очевидно, что переходная характеристика САУ в еще большей мере приближена к эталонной, нежели на рис. 4.14. В то же время в данной работе не задан формальный критерий приближения процессов и его приемлемое численное значение. Поэтому допустимо считать, что кривые на рис. 4.14 до-

статочно близки, чтобы заключить, что расчеты произведены правильно, а расхождение на рис. 4.12 – приемлемый компромисс между сложностью регулятора и качеством синтеза.

Далее необходимо осуществить прямую реализацию ЦР в виде рекурсивного цифрового фильтра (БИХ-фильтра). С этой целью определяем в рабочей области векторы коэффициентов ДПФ ЦР  $w_p(z)$ .

```
>> [b,a]=tfdata(Wr,'v')
```

```
b =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
0.45307868681954 -1.06779891510397 0.42068090089960 0.74334051755571 -  
0.72342981934316
```

```
Column 6
```

```
0.17473222108949
```

```
a =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
1.0000000000000000 -2.02630569808294 1.08643776472682 0.04592122975878 -  
0.10486173988163
```

```
Column 6
```

```
-0.00119155652094
```

Фактически, ПФ ЦР

```
>> Wr
```

```
Transfer function:
```

```
0.4531 z^5 - 1.068 z^4 + 0.4207 z^3 + 0.7433 z^2 - 0.7234 z + 0.1747
```

```
-----
```

```
z^5 - 2.026 z^4 + 1.086 z^3 + 0.04592 z^2 - 0.1049 z - 0.001192
```

```
Sampling time: 0.2
```

представляется в форме, характерной для цифровых БИХ-фильтров:

$$W_p(p) = \frac{0,4531 - 1,068 z^{-1} + 0,4207 z^{-2} + 0,7433 z^{-3} - 0,7234 z^{-4} + 0,1747 z^{-5}}{1 - 2,026 z^{-1} + 1,086 z^{-2} + 0,04592 z^{-3} - 0,1049 z^{-4} - 0,001192 z^{-5}}.$$

Задание параметров прямой реализации полученного ЦФ осуществляется посредством векторов коэффициентов **a** и **b**, как это показано на рис. 4.15.

Проверка правильности задания структуры ЦР производится сравнением получаемых процессов с теми, что были получены ранее. Для модели, представленной на рис. 4.15, получаем графики, показанные на рис. 4.16: кривая 1 – для эталонного звена, кривая 2 – для синтезированной САУ.

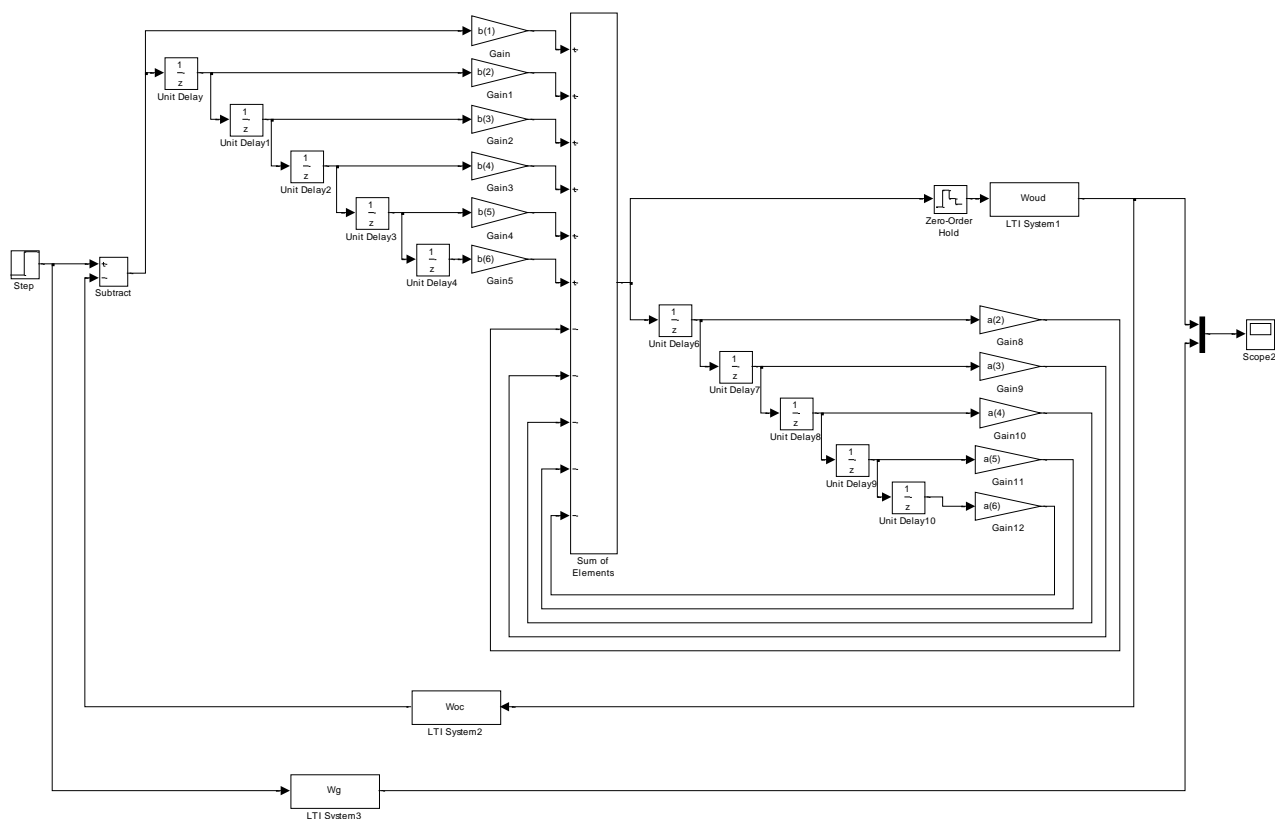


Рис. 4.15

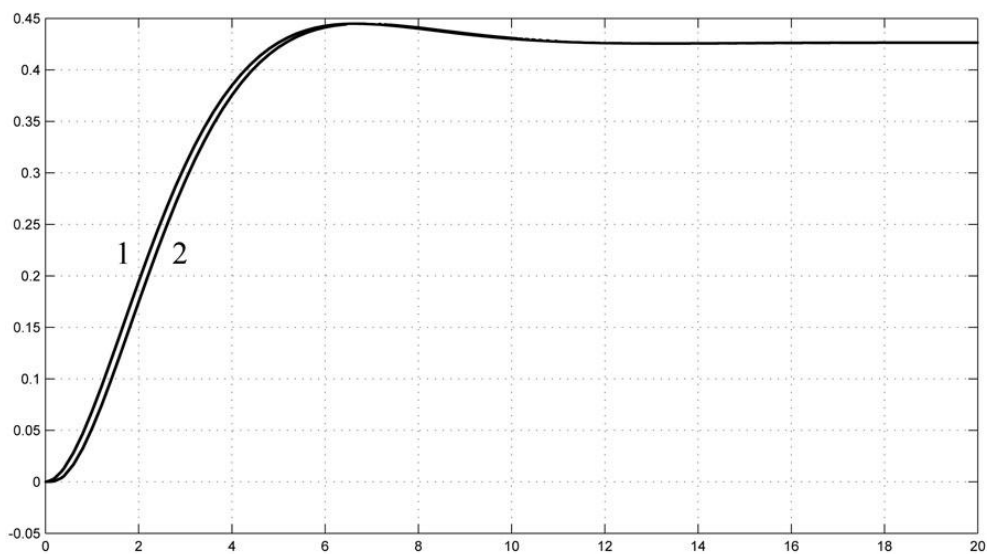


Рис. 4.16

Очевидно, что эти графики практически совпадают с теми, что показаны на рис. 4.14. Это означает, что прямая реализация ЦР осуществлена правильно. Проверим, насколько робастным, по отношению к вариации коэффициентов своей ДПФ, получился регулятор. Для этого округлим коэффициенты ДПФ ЦР с точностью до  $1/256$  (8 двоичных разрядов после запятой).

```
>> aa=round(a*256)/256
```

```
aa =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
1.0000000000000000 -2.027343750000000 1.085937500000000 0.046875000000000 -
0.105468750000000
```

```
Column 6
```

```
0
```

```
>> bb=round(b*256)/256
```

```
bb =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
0.453125000000000 -1.066406250000000 0.421875000000000 0.742187500000000 -
0.722656250000000
```

```
Column 6
```

```
0.175781250000000
```

Определим ДПФ регулятора с округленными коэффициентами:

```
>> Wrr=tf(bb,aa,0.2)
```

```
Transfer function:
```

```
0.4531 z^5 - 1.066 z^4 + 0.4219 z^3 + 0.7422 z^2 - 0.7227 z + 0.1758
```

```
-----
z^5 - 2.027 z^4 + 1.086 z^3 + 0.04688 z^2 - 0.1055 z
```

```
Sampling time: 0.2
```

Произведем моделирование САУ с «округленным» регулятором. Схема моделирования подобна рис. 4.13. Результат – на рис. 4.17.

На рис. 4.17 показаны кривые: 1 – для эталонного звена, 2 – для САУ с секционированным регулятором.

Очевидно, что система стала неустойчивой. Такой же результат дает моделирование с цифровым фильтром в прямой реализации и «округленным» регулятором (схема подобна рис. 4.15).



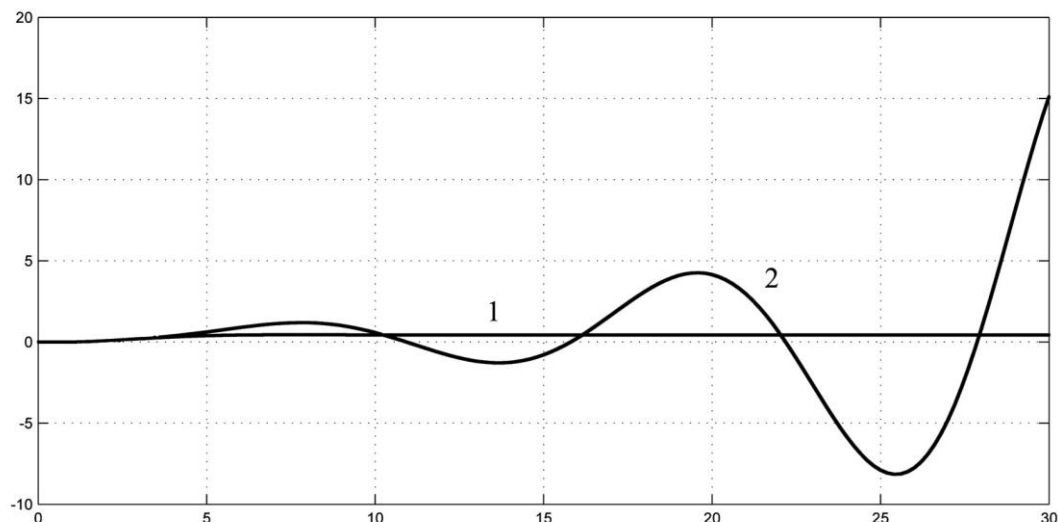


Рис. 4.17

Отсюда следует, что регулятор, синтезированный с учетом требования робастности (можно сказать, фундаментальной робастности) и представленный в виде единого недекомпозированного звена, робастности вычислительной (или реализационной) пока не обеспечивает. Осуществим декомпозицию регулятора, представив его в виде последовательного соединения секций второго порядка.

```
>> [svp,k]=tf2sos(b,a)
```

```
svp =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
1.0000000000000000 -0.96078920792802 0 1.0000000000000000
0.01132233790985
1.0000000000000000 0.45711702625073 -0.45257506484552 1.0000000000000000 -
0.27550153700305
1.0000000000000000 -1.85309044293339 0.88691219365908 1.0000000000000000 -
1.76212649898974
```

```
Column 6
```

```
0
-0.13808657997045
0.76212649898988
```

```
k =
```

```
0.45307868681954
```

Округлим коэффициенты ДПФ секций регулятора с той же точностью, как это делалось выше с коэффициентами единого регулятора.

```
>> svpr=round(svp*256)/256
```

```
svpr =
```

```
Columns 1 through 5
```

```
1.0000000000000000 -0.9609375000000000 0 1.0000000000000000
0.0117187500000000
1.0000000000000000 0.4570312500000000 -0.4531250000000000 1.0000000000000000 -
0.2773437500000000
1.0000000000000000 -1.8515625000000000 0.8867187500000000 1.0000000000000000 -
1.7617187500000000
```

```
Column 6
```

```
0
-0.1367187500000000
0.7617187500000000
```

```
>> kr=round(k*256)/256
```

```
kr =
```

```
0.4531250000000000
```

Теперь осуществим прямую реализацию секционированного регулятора и произведем моделирование, согласно схеме, показанной на рис. 4.18. Переходный процесс показан на рис. 4.19: кривая 1 – для эталонного звена, кривая 2 – для САУ с секционированным регулятором.

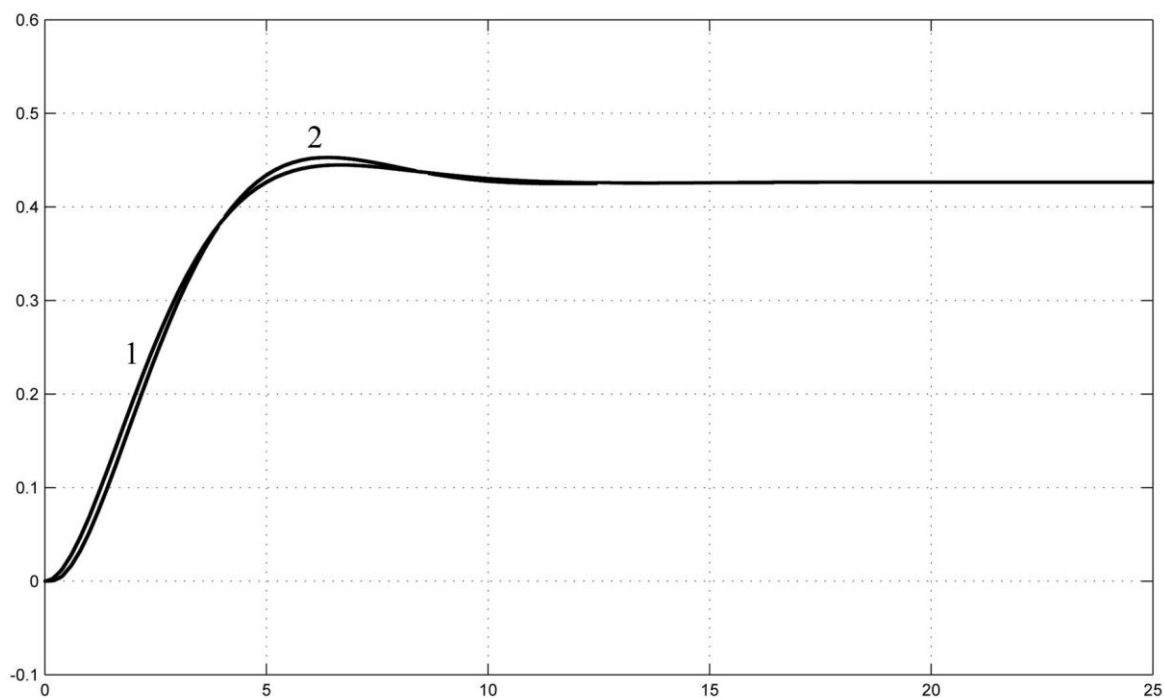


Рис. 4.19



Очевидно, что теперь система не только устойчива, но и очень близка по свойствам к системе с «неокругленным» регулятором. Округление практически не повлияло на её свойства. Это означает, что система робастна (груба).

Таким образом, цифровой регулятор, обеспечивающий робастность САУ, должен иметь матрицу коэффициентов **svp**, а его реализация должна осуществляться в соответствии с рис. 4.18. Заметим, что если бы регулятор рассчитывался без учета условия робастности, сформулированного в разделе 4.1, то его секционирование не привело бы к желаемому результату.

## ГЛАВА 5

### ИЗБРАННЫЕ ОБЪЕКТЫ СИСТЕМЫ MATLAB

В настоящем разделе кратко описываются отдельные функции, команды и другие средства системы MATLAB, а точнее, пакета Control System Toolbox, входящего в эту систему и ориентированного на задачи автоматического управления. Этот пакет позволяет оперировать с особыми LTI-объектами (или LTI-моделями). Аббревиатура LTI образована от linear, time-invariant models, то есть линейные модели с постоянными параметрами. Рассмотрение LTI-объектов ограничивается одномерным случаем. Рассматриваются только те средства, которые используются в примерах, приводимых в настоящем пособии. Более полное описание этих и других объектов можно найти в MATLAB Help, а также в [6]. Объекты располагаются ниже в алфавитном порядке. Следует напомнить, что принятому в отечественной литературе обозначению « $p$ » для комплексной переменной преобразования Лапласа соответствует обозначение « $s$ » в англоязычной литературе и в MATLAB.

#### **c2d**

Дискретизирует непрерывный LTI-объект.

Синтаксис:

```
sysd = c2d(sys, Ts)
```

```
sysd = c2d(sys, Ts, method)
```

```
[sysd, G] = c2d(sys, Ts, method)
```

**sysd = c2d(sys, Ts)** дискретизирует непрерывную систему с экстраполятором нулевого порядка на входе с периодом дискретизации **Ts**.

**sysd = c2d(sys, Ts, method)** дискретизирует непрерывную систему, в соответствии со специфицированным методом дискретизации, с периодом дискретизации **Ts**. Возможны следующие спецификации:

'**zoh**' — дискретизация с экстраполятором нулевого порядка;

'**foh**' — дискретизация с экстраполятором первого порядка;

'tustin' – билинейное преобразование непрерывной системы (преобразование Тастина);

'prewarp' – преобразование Тастина с изменением масштаба частоты;

'matched' – метод согласования нулей и полюсов.

В качестве примера зададим непрерывную систему записью  $W=tf([1],[0.35\ 0.67\ 1])$ . Дискретизируем её тремя разными методами.

```
>> W1=c2d(W,0.1,'zoh')
```

```
Transfer function:
0.01338 z + 0.01256
-----
z^2 - 1.8 z + 0.8258
```

```
>> W2=c2d(W,0.1,'foh')
```

```
Transfer function:
0.004536 z^2 + 0.01728 z + 0.004122
-----
z^2 - 1.8 z + 0.8258
```

```
>> W3=c2d(W,0.1,'tustin')
```

```
Transfer function:
0.006477 z^2 + 0.01295 z + 0.006477
-----
z^2 - 1.801 z + 0.8264
```

Динамические характеристики систем показаны на рис. 5.1.

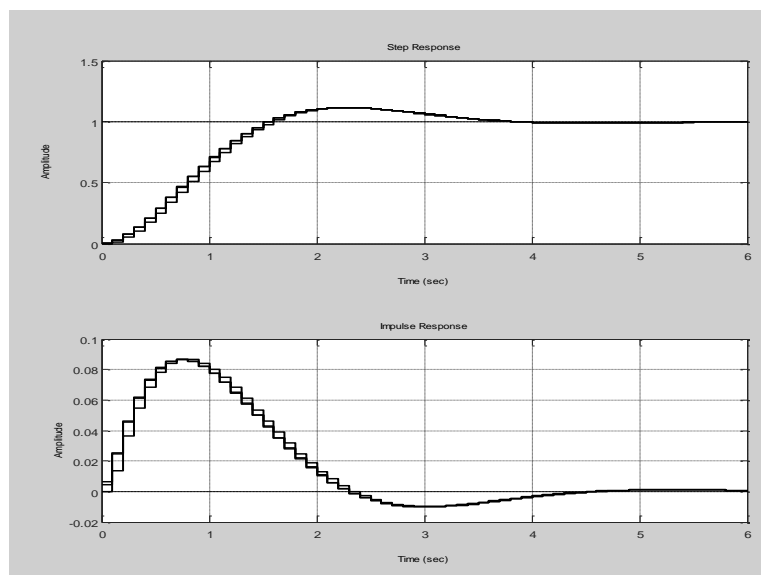


Рис. 5.1

Очевидно, что ПХ практически совпадают, и можно было бы заключить, что методы эквивалентны. Однако частотные характеристики демонстрируют значительно большие различия, что следует из рис. 5.2.

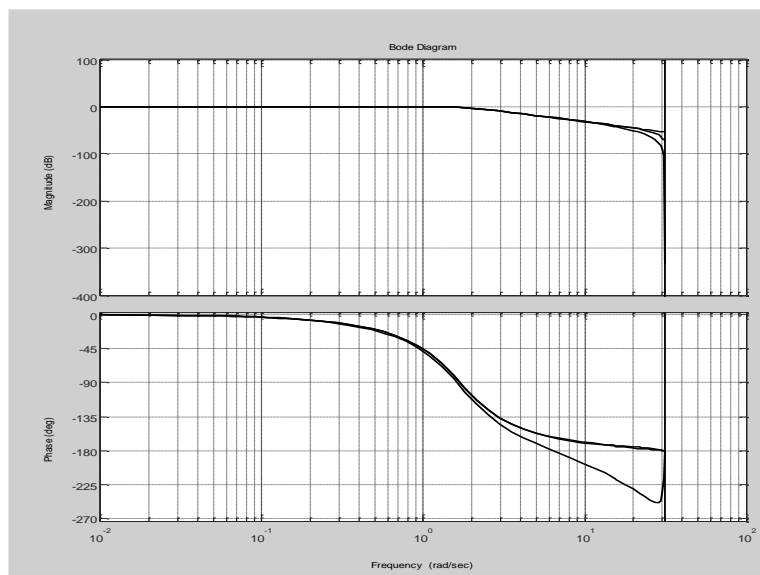


Рис. 5.2

Различия особенно заметны вблизи частоты Найквиста. Отсюда ясно, что наиболее адекватный метод дискретизации должен выбираться в контексте конкретной задачи.

## LTI Viewer

Графический интерфейс для просмотра характеристик LTI-объектов. Позволяет исследовать динамические и частотные характеристики, а также карту расположения нулей и полюсов. Позволяет выводить до 6 графиков одновременно. Вызывается из рабочей области MATLAB командой `ltiview` либо через меню Start (смотри слева внизу) как Start/Toolboxes/Control System/LTI Viewer. При работе с LTI Viewer'ом важно вначале выбрать LTI-объект, а затем выбрать набор характеристик для просмотра. Выбор объекта осуществляется через File/Import. Если какой-либо объект требуется удалить, то нужно сделать Edit/Delete Systems, выбрать из списка объект и нажать Delete. Выбор требуемых характеристик производится как Edit/Plot Configurations, затем выбирается количество и характер расположения графиков и выбираются виды характери-

стик. Чаще всего используются характеристики: Step – переходная характеристика, Impulse – импульсная переходная функция, Bode – логарифмические частотные характеристики и Pole/Zero – карта расположения нулей и полюсов.

Необходимо отметить, что просматривать графики характеристик LTI-объектов можно и без обращения к LTI Viewer'у. Например, набрав команду **step(w)**, можно просмотреть переходную характеристику, а набрав **bode(w)**, – логарифмическую амплитудно-частотную и логарифмическую фазо-частотную характеристики объекта с ПФ **w**.

## minreal

Минимальная реализация LTI-объекта.

Синтаксис:

```
sysr = minreal(sys)
```

```
sysr = minreal(sys, tol)
```

**sysr = minreal(sys)** определяет минимальную реализацию ПФ за счет сокращения одинаковых нулей и полюсов.

**sysr = minreal(sys, tol)** позволяет сокращать нули и полюсы, совпадающие с задаваемой точностью. По умолчанию  $\text{tol} = \sqrt{\text{eps}}$ , где  $\text{eps}$  – точность вычислений с плавающей запятой. Чем большее значение ошибки задается, тем ниже может оказаться порядок ПФ.

*Пример.* Задана ПФ **n**:

$$\frac{10 s^3 + 45 s^2 + 50 s + 15}{s^5 + 7.25 s^4 + 18.88 s^3 + 22 s^2 + 11.63 s + 2.25}$$

Запись **n1=minreal(n)** возвращает ПФ пониженного порядка **n1**:

$$\frac{10}{s^2 + 2.75 s + 1.5}$$

## pole

Вычисляет полюсы LTI-объекта.

Синтаксис:

```
p = pole(sys)
```



Возвращает вектор полюсов системы. Например, задав систему  $W(p) = 1/(0,25 p^2 + 0,7 p + 1)$  как **w=tf([1],[0.25 0.7 1])**, набираем **p=pole(w)** и получаем

```
p =
-1.4000 + 1.4283i
-1.4000 - 1.4283i
```

## round

Производит округление до ближайшего целого числа.

Синтаксис:

```
y = round(x)
```

Например, округлим число 2,378. Запишем в рабочей области MATLAB **y=round(2.378)** и получим **y = 2**.

## tf

Определяет разновидность LTI-объекта – tf-объект, то есть передаточную функцию (transfer function), или преобразует LTI-объект в tf-форму.

Синтаксис:

```
sys = tf(num,den)
sys = tf(num,den,Ts)
sys = tf(M)
sys = tf('s')
sys = tf('z',Ts)
tfsys = tf(sys)
```

**sys = tf(num,den)** создает ПФ непрерывного линейного динамического объекта с полиномом в числителе, определенном вектором коэффициентов **num** и полиномом в знаменателе, определенном вектором коэффициентов **den**. Например, **w=tf([10],[0.5 1])** определяет ПФ

$$W(p) = \frac{10}{0,5 p + 1}.$$

**sys = tf(num,den,Ts)** создает ДПФ линейного дискретного объекта с периодом дискретизации **Ts**. Полином числителя ДПФ задается вектором ко-

эффицентов **num**, полином знаменателя – вектором коэффициентов **den**. Например, **h=tf([0.175 0],[1 1.318 0.493],0.1)** определяет ПФ

$$H(z) = \frac{0,175 \cdot z}{z^2 - 1,318 \cdot z + 0,493}.$$

**sys = tf(m)** создает безынерционное звено со статическим коэффициентом передачи **m**. Например, **k=tf(7.5)** создает звено с  $k = 7,5$ .

**sys = tf('s')** определяет tf-объект, трактуемый как переменную **sys** (формально – это ПФ), пригодную для задания рациональных функций, интерпретируемых MATLAB, как ПФ аргумента **s**. Это позволяет задавать ПФ в дробно-рациональном представлении. Например, последовательно задавая **s=tf('s')**, а затем **G=5\*s/(0.25\*s+1)**, определим ПФ

$$G(p) = \frac{5p}{0,25p + 1}.$$

**sys = tf('z',Ts)** определяет tf-объект, трактуемый как переменную **sys** (формально – это дискретная передаточная функция), пригодную для задания рациональных функций, интерпретируемых MATLAB, как ДПФ аргумента **z** с периодом дискретизации **Ts**. Например, последовательно задавая **z=tf('z',0.1)**, а затем **v=z/(z-1)**, определим ДПФ  $V(z) = \frac{z}{z-1}$  с периодом дискретизации 0,1 с.

**tfsys = tf(sys)** преобразует линейный динамический объект **sys**, заданный ранее, например в zpk-форме (смотри ниже), в объект **tfsys**, представленный в tf-форме. К примеру, имеется объект **Q**, представленный в последовательно-декомпозированной форме

$$\frac{0.5(z^2 - 0.12z + 0.4)}{(z+0.03293)(z^2 - 0.1129z + 0.3037)}$$

Перейдем к tf-форме **Q**, задав **Q=tf(Q)**, и получим

$$\frac{0.5z^2 - 0.06z + 0.2}{z^3 - 0.08z^2 + 0.3z + 0.01}$$

**tf2sos**

Осуществляет преобразование коэффициентов ДПФ системы в коэффициенты секций второго порядка.

Синтаксис:

```
[sos,g] = tf2sos(b,a)
```

```
[sos,g] = tf2sos(b,a,'order')
```

```
[sos,g] = tf2sos(b,a,'order','scale')
```

Простейшая форма `[sos,g] = tf2sos(b,a)` возвращает 6-столбцовую матрицу `sos`, каждая строка которой содержит коэффициенты ДПФ секции второго порядка. Вектор `b` содержит коэффициенты числителя, а вектор `a` – коэффициенты знаменателя ДПФ декомпозируемой системы. Дополнительно выводится коэффициент передачи `g` (gain), добавляемый к ДПФ, составленной из секций второго порядка. Вектор-строка матрицы `sos` имеет вид  $[b_2 \ b_1 \ b_0 \ 1 \ a_1 \ a_0]$ , где коэффициенты соответствуют следующей форме записи ДПФ:

$$V(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}.$$

*Пример.* Пусть определены векторы коэффициентов числителя (`v1`) и знаменателя (`v2`) ДПФ некой системы:

`v1 =`

```
0          0.00064990212955      0.00603414877275
0.00505497569770    0.00038124009877
```

`v2 =`

```
1.0000000000000000    -3.29582381807413      4.02347437751525    -
2.13764533834348    0.41068181296159
```

Определяем функцию `[sos,k]=tf2sos(v1,v2)` и получаем:

`sos =`

```
Columns 1 through 5
0          1.0000000000000000      8.36303969749988
1.0000000000000000    -1.44273337514071
```

```

1.0000000000000000      0.92166410381889      0.07014334215246
1.0000000000000000    -1.85309044293342
Column 6
0.46304675468182
0.88691219365911

```

```

k =
6.499021295533231e-004

```

Форма записи `[sos,g] = tf2sos(b,a,'order')` позволяет задавать последовательность включения секций второго порядка, а форма `[sos,g] = tf2sos(b,a,'order','scale')` дополнительно управляет распределением коэффициента усиления между секциями. Эти формы актуальны для вычислений с фиксированной запятой. Для ознакомления с ними рекомендуется обратиться к руководству по системе MATLAB, а также к [7].

## tfdata

Извлечение данных о ПФ.

Синтаксис:

```

[num,den] = tfdata(sys,'v')
[num,den,Ts] = tfdata(sys,'v')

```

`[num,den] = tfdata(sys,'v')` возвращает вектор коэффициентов числителя ПФ `num` и вектор коэффициентов знаменателя `den`.

`[num,den,Ts] = tfdata(sys,'v')` возвращает вектор коэффициентов числителя ДПФ `num`, вектор коэффициентов знаменателя `den` и период дискретизации `Ts`. Например, извлечем информацию о параметрах дискретного объекта `H=tf([5 -0.6 2],[10 -0.8 3 0.1], 0.2)`. Для этого запишем `[n,d,T]=tfdata(H,'v')` и получим

```

n =
      0      5.0000     -0.6000      2.0000
d =
  10.0000     -0.8000      3.0000      0.1000
T =
    0.2000

```

**zero**

Вычисляет нули LTI-объекта.

Синтаксис:

```
z = zero(sys)
```

```
[z,gain] = zero(sys)
```

**z = zero(sys)** возвращает вектор нулей системы. Например, задав систему  $W(p) = (p^2 + 0,5p + 1)/(0,25p^2 + 0,7p + 1)$  как **W=tf([1 0.5 1],[0.25 0.7 1])**, набираем **z=zero(W)** и получаем

```
z =  
-0.2500 + 0.9682i  
-0.2500 - 0.9682i
```

**[z,gain] = zero(sys)** возвращает вектор нулей и обобщенный коэффициент усиления системы (см. формулу (2.16)). Для системы, заданной в предыдущем примере, набрав **[z,gain]=zero(W)**, получаем

```
z =  
-0.2500 + 0.9682i  
-0.2500 - 0.9682i  
gain =  
40
```

**zpk**

Определяет разновидность LTI-объекта – zpk-объект, то есть передаточную функцию в форме zero-pole-gain, или преобразует LTI-объект, заданный в иной форме, в zpk-форму.

Синтаксис:

```
sys = zpk(z,p,k)
```

```
sys = zpk(z,p,k,Ts)
```

```
sys = zpk(M)
```

```
sys = zpk('s')
```

```
sys = zpk('z',Ts)
```

```
zsys = zpk(sys)
```

**sys = zpk(z,p,k)** задает ПФ непрерывного объекта с нулями, определяемыми вектором **z**, полюсами, определяемыми вектором **p** и обобщенным коэффициентом усиления **k**. Получаемая ПФ соответствует формуле

$$W(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)},$$

где  $K$  – обобщенный коэффициент усиления системы,  $z_i$  – нули, а  $p_i$  – полюсы непрерывной системы.

Например, запись **F=zk([-0.05 -0.7],[-0.5 -2 -1],10)** определяет объект с ПФ

$$F(p) = 10 \frac{(p + 0,05)(p + 0,7)}{(p + 0,5)(p + 2)(p + 1)}.$$

**sys = zk(z,p,k,Ts)** задает ДПФ дискретного объекта с нулями, определяемыми вектором **z**, полюсами, определяемыми вектором **p**, обобщенным коэффициентом усиления  $k$  и периодом дискретизации **Ts**. Получаемая ПФ соответствует формуле

$$W(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)},$$

где  $K$  – обобщенный коэффициент усиления системы,  $z_i$  – нули, а  $p_i$  – полюсы дискретной системы.

Например, запись **D=zk([-0.03 -0.6],[-0.4 -0.5 -0.7],15,0.1)** задает следующую ДПФ дискретного объекта

$$D(z) = 15 \frac{(z + 0,03)(z + 0,6)}{(z + 0,4)(z + 0,5)(z + 0,7)}$$

с периодом дискретизации 0,1 с.

**sys = zk(M)** задает статический коэффициент передачи безынерционного звена. Например, **k=zk(12.5)** задает звено с коэффициентом  $k = 12,5$ .

**sys = zk('s')** определяет **zk**-объект, трактуемый как переменную **sys** (формально – это ПФ), пригодную для задания рациональных функций, интерпретируемых MATLAB, как ПФ аргумента **s**, автоматически преобразуе-

мые в `zpk`-форму. Это позволяет задавать ПФ в дробно-рациональном представлении и сразу получать эти ПФ в последовательно-декомпозированном виде. Например, задавая `s=zpk('s')`, а затем определяя ПФ  $\bar{w} = (0.05*s^2 + s + 1) / (0.07*s^3 + 0.4*s^2 + s + 1)$ , получим

$$\frac{0.71429 (s+18.94) (s+1.056)}{(s+2.163) (s^2 + 3.551s + 6.604)}$$

`sys = zpk('z',Ts)` определяет `zpk`-объект, трактуемый как переменную `sys` (формально – это ПФ), пригодную для задания рациональных функций, интерпретируемых MATLAB, как ДПФ аргумента `z` с периодом дискретизации `Ts`, автоматически преобразуемые в `zpk`-форму. Например, зададим `z=zpk('z',0.01)`, а затем определим дробно-рациональную ДПФ дискретной системы  $\bar{w} = (0.3*z^2 - 0.05*z + 1) / (z^3 - 0.1*z^2 + 0.4*z + 0.001)$ . Получим

$$\frac{0.3 (z^2 - 0.1667z + 3.333)}{(z+0.002498) (z^2 - 0.1025z + 0.4003)}$$

`zsys = zpk(sys)` преобразует LTI-объект в `zpk`-форму. Например, зададим объект в `tf`-форме как `h=tf([5 -0.6 2],[10 -0.8 3 0.1],0.2)`:

$$\frac{5 z^2 - 0.6 z + 2}{10 z^3 - 0.8 z^2 + 3 z + 0.1}$$

Сделаем преобразование `H1=zpk(H)` и получим

$$\frac{0.5 (z^2 - 0.12z + 0.4)}{(z+0.03293) (z^2 - 0.1129z + 0.3037)}$$

Следует подчеркнуть, что в данном разделе приведены не все возможные формы записи описываемых команд и функций. Как уже указывалось выше, для более детального знакомства необходимо обратиться к руководству по системе MATLAB и специальной литературе.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2003. – 572 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
3. Иванов Ю. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы., 1983. – 336 с.
4. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 542 с.
5. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб: Питер, 2002. – 528 с.
6. Медведев В. С., Потемкин В. Г. Control System Toolbox. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.
7. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
8. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
9. Ципкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 968 с.
10. Ципкин Я. З. Основы теории автоматических систем. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – 560 с.
11. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – М.: Филин, 1996. – 712 с.