



*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

О.И. Черепанов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

ТОМСК – 2005

Федеральное агентство по образованию

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра информационно-измерительной техники

О.И. Черепанов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИДЕН- ТИФИКАЦИИ СИСТЕМ

Учебное пособие

2005

Корректор: Осипова Е.А.

Черепанов О.И.

Элементарные основы теории идентификации систем: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2005. – 211 с.

© Черепанов О.И., 2005

© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	8
1 Математические основы моделирования систем	
управления. Классификация задач	9
1.1 Основные понятия теории систем управления	9
1.2 Классификация математических моделей систем управления	11
1.3 Классификация задач теории систем	
управления и предмет теории идентификации систем	13
1.4 Описание и анализ непрерывных линейных систем	
управления с помощью дифференциальных уравнений	14
1.5 Анализ выходных процессов в линейных системах	
управления, описываемых дифференциальными	
уравнениями	22
Контрольные вопросы	31
1.6 Многомерные детерминированные системы управления	31
1.6.1 Описание соединений многомерных систем	
(матричные уравнения соединений)	35
1.7 Анализ связей вход-состояние и вход-выход (решение	
уравнений линейных систем)	38
1.7.1 Принцип суперпозиции	38
1.7.2 Законы изменения вектора состояний и вектора	
выходного сигнала для стационарной системы	42
1.7.3 Алгоритм решения задачи анализа выходных	
процессов в многомерных системах	42
Контрольные вопросы	45
1.8 Устойчивость, управляемость и наблюдаемость	45
1.8.1 Одномерные детерминированные системы	
управления, устойчивость	45
1.8.2 Критерии устойчивости [1–3]	46
1.8.3 Многомерные системы управления. Устойчивость.	47
1.8.4 Критерии устойчивости	48
Контрольные вопросы	49
2 Многомерные системы. Пространство состояний,	
управляемость, наблюдаемость, линейные	
преобразования [2]	50
2.1 Пространство состояний	50

2.2	Линейные преобразования	50
2.3	Каноническое преобразование	52
2.4	Прямое определение собственных векторов	53
2.5	Алгоритм определения собственных векторов, основанный на методе Крылова.....	55
	Контрольные вопросы	57
2.6	Каноническое преобразование – процедура диагонализации..	58
2.7	Управляемость.....	59
2.8	Критерии управляемости систем	60
2.8.1	Критерий Гильберта для канонических систем	60
2.8.2	Критерий управляемости для случая, когда имеются кратные собственные значения матрицы A	63
2.8.3	Критерий управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}	65
2.8.4	Управляемость по выходу	67
	Контрольные вопросы	68
2.9	Наблюдаемость.....	68
2.10	Критерии наблюдаемости канонических систем	69
2.10.1	Критерий наблюдаемости Гильберта.....	69
2.10.2	Критерий наблюдаемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}	72
	Контрольные вопросы	74
3	Связь между представлением моделей систем управления в пространстве состояний и представлением с помощью передаточных функций.....	75
3.1	Получение моделей в пространстве состояний по скалярным передаточным функциям	75
3.2	Получение скалярных передаточных функций на основе дискретных моделей в пространстве состояний	77
3.3	Получение скалярных передаточных функций на основе непрерывных моделей в пространстве состояний.....	80
	Контрольные вопросы	81
4	Элементы теории планирования эксперимента	82
4.1	Математическая постановка задачи планирования экспериментов.....	82
4.2	Регрессионные модели экспериментов и их статистический анализ	83

4.3 Метод максимального правдоподобия	86
4.4 Метод наименьших квадратов (метод максимального правдоподобия) в случае косвенного измерения нескольких величин.....	88
Контрольные вопросы	92
4.5 Теорема Гаусса–Маркова. Построение оптимальных планов эксперимента. Полнофакторный эксперимент типа 2^3	93
4.6 Построение оптимальных планов экспериментов	95
4.7 Факторные планы. Этапы планирования	100
4.7.1 Основные этапы планирования эксперимента [8]	100
Контрольные вопросы	101
4.8 Полный факторный эксперимент при трех факторах. Матрица плана, обработка результатов, проверка адекватности.....	102
Контрольные вопросы	105
5 Идентификация с помощью регрессионных методов [2]	106
5.1 Статическая задача идентификации для системы с одним выходом	107
5.2 Задача идентификации статической многомерной системы (несколько входов и несколько выходов)	108
5.3 Регрессионная идентификация многомерных линейных динамических систем	110
Контрольные вопросы	113
5.4 Регрессионная идентификация нелинейных моделей с использованием линеаризации.....	113
Контрольные вопросы	117
6 Идентификация последовательными регрессионными методами [2].....	118
6.1 Последовательная идентификация системы с одним выходом и одним входом (скалярный случай).....	118
Контрольные вопросы	121
6.2 Последовательная идентификация статической многомерной системы с одним выходом и несколькими входами [2]	121
6.3 Последовательная регрессия в случае нелинейных базисных функций (система с одним выходом и несколькими входами)	128

Контрольные вопросы	129
7 Идентификация систем методом квазилинеаризации [2]..	130
7.1 Идентификация непрерывных систем методом квазилинеаризации	130
7.2 Идентификация дискретных систем методом квазилинеаризации	136
Контрольные вопросы	137
8 Чувствительность показателя качества управления к ошибкам идентификации параметров	138
8.1 Вычисление матриц чувствительности по расчетным данным	140
Контрольные вопросы	145
8.2 Чувствительность показателя качества управления к ошибкам идентификации параметров	145
8.3 Вычисление матриц чувствительности для оптимального показателя качества	147
9 Идентификация параметров систем методом стохастической аппроксимации [2]	151
9.1 Процедура идентификации параметров систем методом стохастической аппроксимации	151
9.2 Получение начальных оценок для запуска алгоритма идентификации методом стохастической аппроксимации ..	155
Контрольные вопросы	157
10 Идентификация параметров систем методом обучения [2].....	158
10.1 Идентификация стационарных процессов	158
10.2 Последовательная процедура распознавания образов для идентификации нелинейных систем.....	162
10.2.1 Алгоритм последовательного обучения	164
Контрольные вопросы	165
11 Основы идентификации методом инвариантного погружения	166
11.1 Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина	166
Контрольные вопросы	172

11.2 Постановка задачи идентификации состояния и параметров непрерывной системы методом инвариантного погружения [2, 10].....	173
11.3 Алгоритм решения задачи идентификации состояния и параметров непрерывной системы методом инвариантного погружения [2, 9].....	176
Контрольные вопросы	179
Литература	180
Контрольные работы	181
Контрольная работа 1. Линейные преобразования, диагонализация, устойчивость, управляемость, наблюдаемость, получение передаточных функций систем	181
Контрольная работа 2. Метод максимального правдоподобия. Полнофакторный эксперимент: обработка результатов и проверка адекватности	201

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс лекций по методам идентификации систем подготовлен главным образом на основе известных монографий Д. Гропа [2], Э. Сэйджа и Д. Мелсы [2, 10]. Однако, для более полного понимания основных идей и методов идентификации, представляется целесообразным включение в пособие и кратких сведений по теории систем управления и методу максимального правдоподобия, который тесно связан с методами идентификации, а также теории моделирования систем и методам планирования экспериментов (физических или компьютерных) [1, 3–9].

В данном пособии задача идентификации понимается в узком смысле слова: предполагается, что структура и класс модели, описывающей некоторую реальную систему, известны и проблема сведена к определению коэффициентов модели.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ (задачи описания и анализа непрерывных линейных систем управления с помощью дифференциальных уравнений)

Методы решения задач теории управления описаны, например, в учебном пособии [1], которое рекомендовано в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений.

1.1 Основные понятия теории систем управления

Системой управления называют совокупность устройства управления и объекта управления (см. рис. 1.1), результатом действия которой является достижение заранее поставленной *цели управления*.

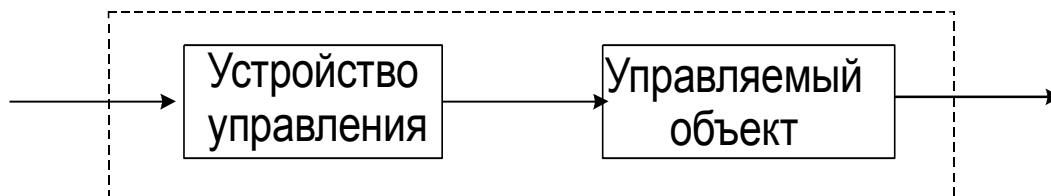


Рис. 1.1 – Общая схема системы управления

Примерами цели управления могут служить: движение объекта (самолета, снаряда, спутника) по заданной траектории, достижение заданного уровня знаний при обучении, извлечение максимальной прибыли в задачах управления производством и т.п.

Управляющее устройство решает следующие задачи:

- 1) сбор информации о состоянии объекта;
- 2) обработка информации;
- 3) передача информации;
- 4) генерация команд управления.

Функциональная схема системы управления приведена на рис. 1.2. Каждый блок этой схемы соответствует определенной функции управляющего устройства.

Функциональная схема наполняется более конкретным содержанием в зависимости от предметной области, для которой разрабатывается система управления. На рис. 1.3. приведены примеры

функциональных схем управления углом тангажа самолета, управления производством, управления процессом обучения.

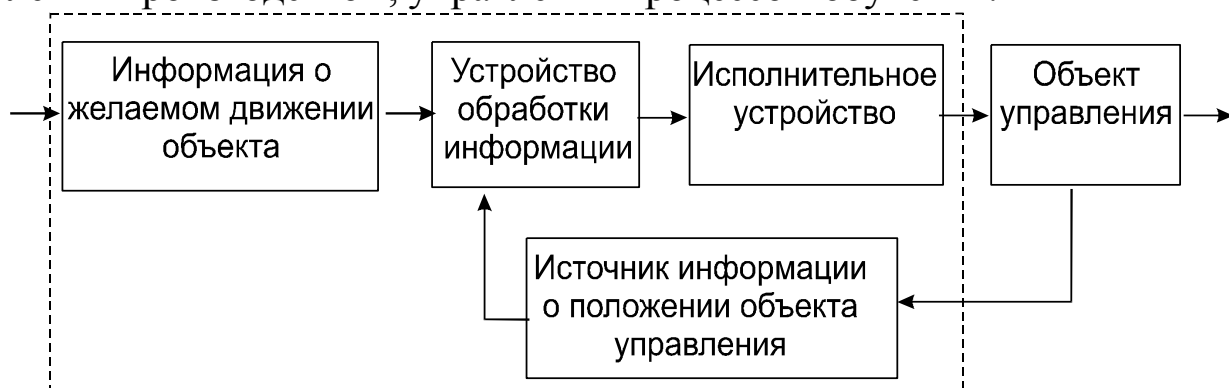


Рис. 1.2 – Функциональная схема управляющего устройства

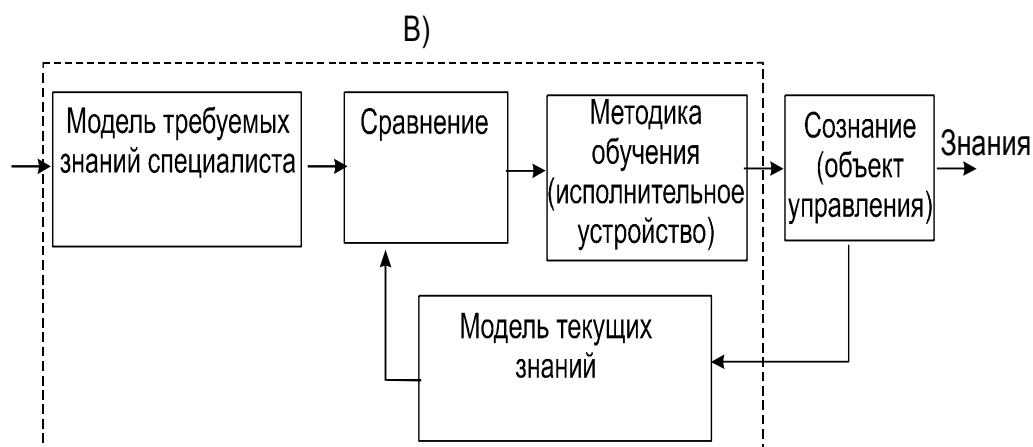
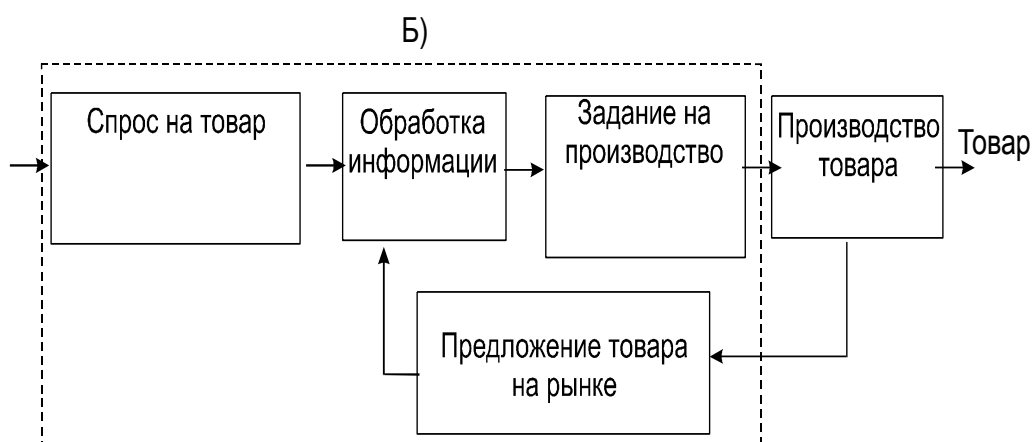
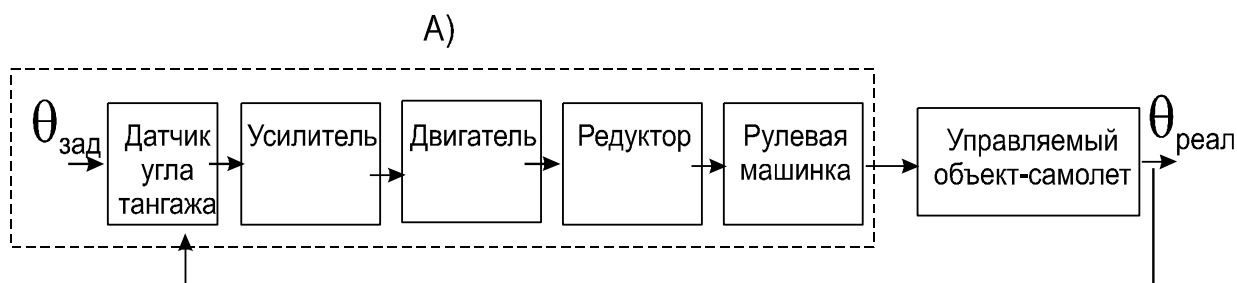


Рис. 1.3 – Примеры схем систем управления самолетом А), производством Б), процессом обучения В)

Общим принципом проектирования систем управления является **принцип обратной связи**. Заключается он в том, что *управление объектом осуществляется на основе сбора информации о заданном, требуемом движении объекта, информации о действительном текущем движении объекта, сравнения требуемого и действительного движений для определения ошибки, выработки такого управления, которое приводит к устранению ошибки с течением времени и достижению конечной цели управления.*

1.2 Классификация математических моделей систем управления

Математической моделью системы управления называют пару «*оператор системы и модель внешних воздействий*».

Оператором системы называют закон, по которому система управления преобразует входное (внешнее) воздействие g в выходной сигнал x . Соответствующая схема математической модели системы управления приведена на рис. 1.4.

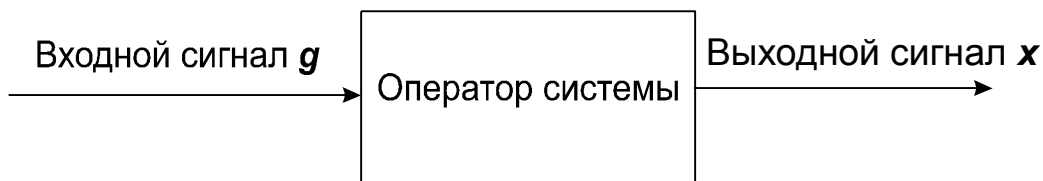


Рис. 1.4 – Схема математической модели системы управления

По **виду оператора** систем математические модели систем управления разделяют на следующие классы:

1. линейные и нелинейные;
2. непрерывные, дискретные, непрерывно-дискретные;
3. нестационарные и стационарные;
4. детерминированные и стохастические;
5. одномерные и многомерные;
6. системы с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Внешние воздействия подразделяют следующим образом:

- 1) непрерывные воздействия, которые описываются функциями непрерывного аргумента, и дискретные воздействия, которые описываются соответственно функциями дискретной переменной;
- 2) детерминированные и случайные воздействия;
- 3) одномерные внешние воздействия, когда система имеет один входной сигнал, и многомерные воздействия.

Таким образом, для определения типа конкретной системы надо указать шесть классов, к которым относится оператор системы и три признака, характеризующие внешнее воздействие. Например, характеристика некоторой системы по классификационным признакам может быть такой:

линейная непрерывная нестационарная детерминированная одномерная система с сосредоточенными параметрами при непрерывных детерминированных многомерных внешних воздействиях.

Названия классов операторов рассмотрим на примере описания систем управления дифференциальными или разностными уравнениями.

Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями, тогда как нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Непрерывные системы описывают дифференциальными уравнениями, дискретные системы – конечно-разностными уравнениями, а непрерывно-дискретные – дифференциально-разностными уравнениями.

Стационарные системы описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а нестационарные системы описывают уравнениями с переменными коэффициентами.

Коэффициенты в уравнениях детерминированных систем являются детерминированными величинами или функциями времени.

Стохастические системы описываются стохастическими уравнениями.

Одномерные системы имеют один входной и один выходной сигнал.

Многомерными системами считают системы, у которых суммарное количество входных и выходных сигналов больше двух.

Системы с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а для описания систем с распределенными параметрами используются дифференциальные уравнения в частных производных.

1.3 Классификация задач теории систем управления и предмет теории идентификации систем

Основными в теории систем управления являются три следующих задачи:

1. **Задача анализа:** при заданном операторе системы и известном входном воздействии установить закон изменения во времени выходного сигнала (см. рис. 1.5, а).

2. **Задача синтеза:** для заданного (желаемого) выходного сигнала найти входной сигнал и неизвестный оператор системы (неопределенные параметры оператора), рис. 1.5, б.

3. **Задача идентификации:** по заданному входному воздействию и заданному (измеренному) выходному сигналу найти неизвестный оператор системы (см. рис. 1.5, в).

Предмет теории идентификации [2]. В широком смысле слова *предметом теории идентификации* является *определение математических моделей реальных систем (в том числе – систем управления) по результатам экспериментальных исследований*. При решении задач идентификации систем в широком смысле слова априорная (до опыта) информация о системе либо вообще отсутствует, либо крайне мала. Исследователь имеет дело в полном смысле слова с задачей «черного ящика». В этом случае для идентификации системы требуется решение таких задач, как определение класса модели, оценка стационарности, линейности, детерминированности и т.д. В этом случае задача идентификации, по сути, превращается в проблему общей теории систем.

При решении задач **идентификации в узком смысле** предполагается, что известны структура и класс моделей, описывающих реальную систему. Тогда, например, в совсем узком смысле

слова, задача идентификации может быть сведена к определению коэффициентов модели.

Вначале мы коротко рассмотрим основы решения задачи описания и анализа линейных непрерывных систем управления. Из известных [1] форм математического описания непрерывных систем с помощью дифференциальных уравнений, переходных функций, интегральных и спектральных преобразований будем рассматривать первый метод, описание с помощью дифференциальных уравнений.

Задачи **анализа** линейных систем подразделяют на следующие виды:

- 1) основная задача анализа – это анализ выходных процессов;
- 2) анализ устойчивости;
- 3) анализ чувствительности;
- 4) анализ управляемости;
- 5) анализ наблюдаемости;

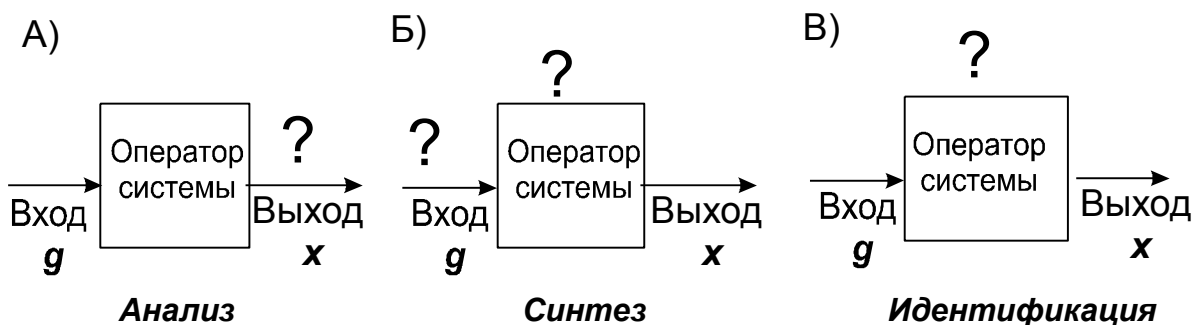


Рис. 1.5 – Основные задачи теории систем управления

1.4 Описание и анализ непрерывных линейных систем управления с помощью дифференциальных уравнений

1.4.1 Описание сигналов. Сигналы, которые действуют в системах управления, описываются различными функциями времени. Среди множества таких функций выделяются два типичных сигнала: импульсное, чрезвычайно кратковременное воздействие, и продолжительное постоянное воздействие. Импульсное воздействие описывается дельта-функцией, а для описания продолжи-

тельных постоянных воздействий используют единичную функцию.

1. Дельта-функция определяется формулой:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)dt = \begin{cases} f(\tau+0), & \tau \in [a,b) \\ 0, & \tau \notin [a,b) \end{cases}, \quad (1.1)$$

которая справедлива для любой кусочно-непрерывной функции $f(t)$.

Производные от дельта-функции определяются формулой:

$$\int_a^b f(t)\delta^{(k)}(t-\tau)dt = \begin{cases} (-1)^k f^{(k)}(\tau+0), & \tau \in [a,b) \\ 0, & \tau \notin [a,b) \end{cases}, \quad (1.2)$$

где $f(t)$ – любая функция, которая имеет кусочно-непрерывные производные k -го порядка.

2. Ступенчатая единичная функция (единичный скачок) имеет вид:

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases} \quad (1.3)$$

Момент τ в этих формулах соответствует моменту приложения к системе управления входного воздействия (см. рис. 1.6).

Дельта-функция и единичная функция (типовые сигналы) связаны следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi - \tau) d\xi = \eta(t - \tau). \quad (1.4)$$

Таким образом, дельта-функцию можно интерпретировать как производную от единичной функции.

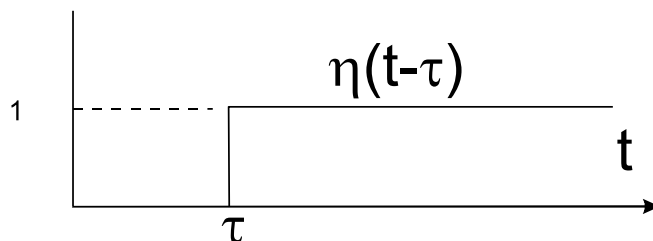


Рис. 1.6 – Единичная функция: момент τ – момент входного воздействия

1.4.2 Описание систем управления. Для описания непрерывных процессов в системах управления используют обыкновенные

дифференциальные уравнения с соответствующими начальными условиями. Если входной сигнал задан (известен как некоторая функция времени), то выходной сигнал может быть найден как решение обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего поведение системы.

Линейная одномерная непрерывная нестационарная система управления описывается дифференциальным уравнением вида:

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) x(t) = b_m(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0(t) g(t) \quad (1.5)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}_0, \quad (1.6)$$

где $g(t)$ – входной сигнал; $x(t)$ – выходной сигнал; t – время; $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t), b_m(t), b_{m-1}(t), \dots, b_0(t)$ – переменные коэффициенты уравнения, заданные функции времени; n и m – порядки старших производных выходного и входного сигналов соответственно; t_0 – момент начала моделирования (функционирования системы).

Если коэффициенты модели (1.5) постоянны, то система управления называется **линейной стационарной** и описывается уравнением:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 g(t). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.5) часто записывают в операторной форме:

$$D(p, t)x(t) = M(p, t)g(t), \quad (1.8)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – символ дифференцирования по времени, а $D(p, t)$ и $M(p, t)$ – дифференциальные операторы левой и правой частей уравнения (1.5) соответственно:

$$D(p, t) = a_n(t)p^n + a_{n-1}(t)p^{n-1} + \dots + a_1(t)p + a_0(t), \quad (1.9)$$

$$M(p, t) = b_m(t)p^m + b_{m-1}(t)p^{m-1} + \dots + b_1(t)p + b_0(t).$$

Уравнение (1.7) для стационарной системы в операторной форме имеет вид:

$$D(p)x(t) = M(p)g(t), \quad (1.10)$$

где

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$M(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

Операторной форме записи уравнений для стационарной системы соответствует способ изображения таких систем на структурных схемах, который иллюстрирует рис. 1.7.

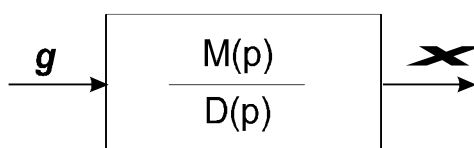


Рис. 1.7 – Структурная схема стационарной системы управления

Сложные системы управления, как правило, можно представить в виде соединений из элементарных типовых звеньев.

1.4.3 Описание типовых звеньев систем управления

1. **Усилительное звено** (рис. 1.8) описывается следующим уравнением:

$$x(t) = K(t)g(t), \quad (1.11)$$

где $K(t)$ – коэффициент усиления, в общем случае – заданная функция времени. Коэффициент усиления стационарного звена $K(t) = K = \text{const}$ – величина постоянная.

Примерами усилительных звеньев могут служить трансформатор (рис. 1.8, б) и редуктор (рис. 1.8, в). Напряжение на выходе трансформатора связано с входным напряжением соотношением: $U_{\text{вых}}(t) = KU_{\text{вх}}(t)$. При работе редуктора угловые скорости ω_1 входного и ω_2 выходного вала связаны соотношением

$$\omega_2 = \frac{n_1}{n_2} \omega_1 = K(t) \omega_1, \quad K(t) = \frac{n_1}{n_2}, \quad \text{где } n_1, n_2 - \text{соответствующие ко-}$$

личества зубьев шестерен.

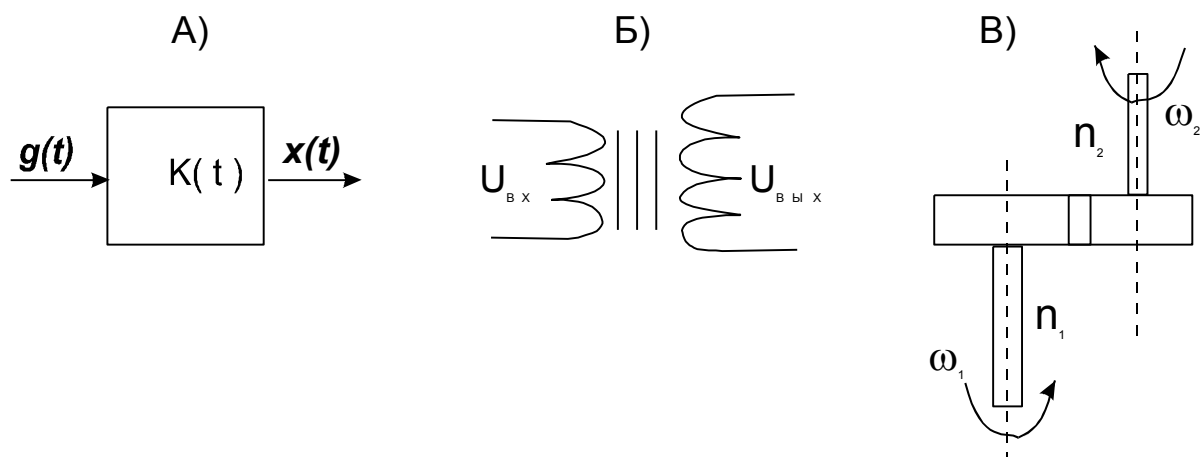


Рис. 1.8 – Общая схема усилительного звена (а), трансформатор как усилительное звено (б), редуктор – пример усилительного звена (в)

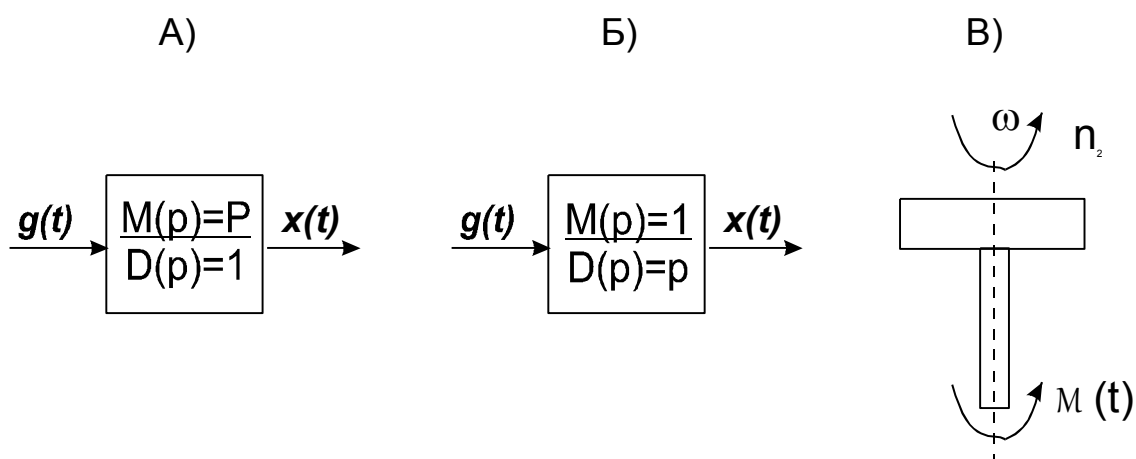


Рис. 1.9 – Дифференцирующее звено (а), интегрирующее звено (б), вращение диска под действием крутящего момента $M(t)$ – пример интегрирующего звена (в)

2. Дифференцирующее звено вырабатывает выходной сигнал, равный производной по времени от входного сигнала и описывается следующим уравнением:

$$x(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad (1.12)$$

или в операторной форме (см. рис. 1.9, а):

$$pg(t) = x(t). \quad (1.13)$$

3. Интегрирующее звено вырабатывает выходной сигнал, который является результатом интегрирования входного сигнала. Оно описывается уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t), \quad (1.14)$$

или в операторной форме (см. рис. 1.9, б):

$$g(t) = px(t), \quad x(t) = \frac{1}{p}g(t). \quad (1.15)$$

Примером может служить вращение из состояния покоя диска радиуса R и массой m с моментом инерции

$$J = \int_0^R r^2 (2\pi h r \rho dr) = \frac{1}{2} (\pi h R^2 \rho) R^2 = \frac{m}{2} R^2 \quad \text{относительно центральной}$$

оси под действием крутящего момента внешних сил M (рис. 1.9, в). Уравнение вращательного движения имеет вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M, \quad \omega(t_0) = 0. \quad \text{Отсюда следует, что } \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J}, \text{ и если введем}$$

новые обозначения переменных $x(t) = \omega$, $g(t) = \frac{M}{J}$, то получим уравнение вида (1.16), (1.15)

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t), \quad x(t) = \frac{1}{p}g(t).$$

4. *Звено чистого запаздывания:*

$$x(t) = g(t - \gamma), \quad (1.16)$$

где γ — постоянная запаздывания выходного сигнала относительно входного.

5. *Апериодическое звено* описывается уравнением:

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t), \quad (1.17)$$

где T — положительная действительная константа, которую называют постоянной времени. В операторной форме это уравнение имеет вид:

$$(Tp + 1)x(t) = g(t). \quad (1.18)$$

На структурных схемах апериодическое звено изображается так, как показано на рис. 1.10, а.

Примером апериодического звена может служить электрическая схема с последовательным соединением резистора с сопротивлением R и конденсатора емкости C , приведенная на рис. 1.10, б. Будем считать, что в начальный момент времени конденсатор не заряжен.

Составим дифференциальное уравнение, которое описывает зависимость напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе от времени и параметров схемы при условии подачи на вход управляющего сигнала $U_{\text{вх}}$, который описывается ступенчатой единичной функцией времени.

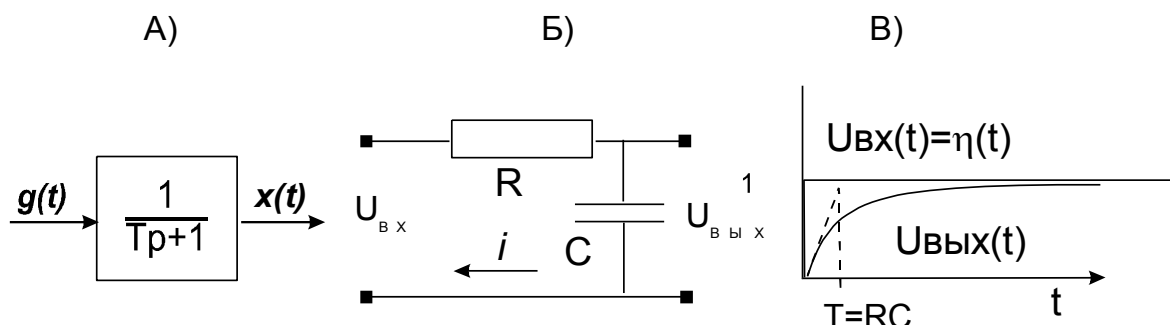


Рис. 1.10 – Структурная схема аperiodического звена (а), пример аperiodического звена (б) в виде простейшей электрической схемы, качественная зависимость выходного напряжения аperiodического звена от времени при постоянном единичном входном сигнале (в)

На основании второго закона Кирхгофа (падение напряжения в цепи равно сумме падений напряжения в последовательно соединенных элементах цепи) и определения силы тока при разрядке конденсатора, имеем следующие уравнения и начальные условия, описывающие поведение системы:

$$U_{\text{вых}}(t) + I(t)R = U_{\text{вх}}(t),$$

$$I(t) = C \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt}, \quad (1.19)$$

$$U_{\text{вых}}(t_0) = U_{\text{вых}}(0) = 0, \quad U_{\text{вх}}(t) = \eta(t - t_0) = \eta(t).$$

Эти соотношения приводят к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$RC \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t), \quad (1.20)$$

$$U_{\text{вых}}(0) = 0, \quad U_{\text{вх}}(t) = \eta(t - t_0) = \eta(t).$$

Введем следующие обозначения:

$$T = RC, \quad x(t) = U_{\text{вых}}(t), \quad g(t) = U_{\text{вх}}(t).$$

В итоге получаем уравнение вида (1.17)

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t), \quad T = RC, \quad g(t) = \eta(t).$$

При ступенчатом единичном внешнем воздействии решением этого уравнения является функция

$$x(t) = U_{\text{вых}}(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad T = RC, \quad t \geq 0. \quad (1.21)$$

График выходного сигнала приведен на рис. 1.10, в. Видим, что выходной сигнал действительно описывается непериодической функцией, отсюда и название звена.

6. Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t), \quad (1.22)$$

где T – положительная действительная константа, которая называется постоянной времени, а ξ – коэффициент демпфирования, $|\xi| < 1$.

В операторной форме это уравнение имеет вид:

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)x(t) = g(t). \quad (1.23)$$

На структурных схемах апериодическое звено изображается так, как показано на рис. 1.11, а.

Примером колебательного звена является схема с последовательным соединением катушки с известной индуктивностью L , резистора с сопротивлением R и конденсатора емкости C , приведенная на рис. 1.11б. Пусть в начальный момент времени конденсатор не заряжен и тока в цепи нет.

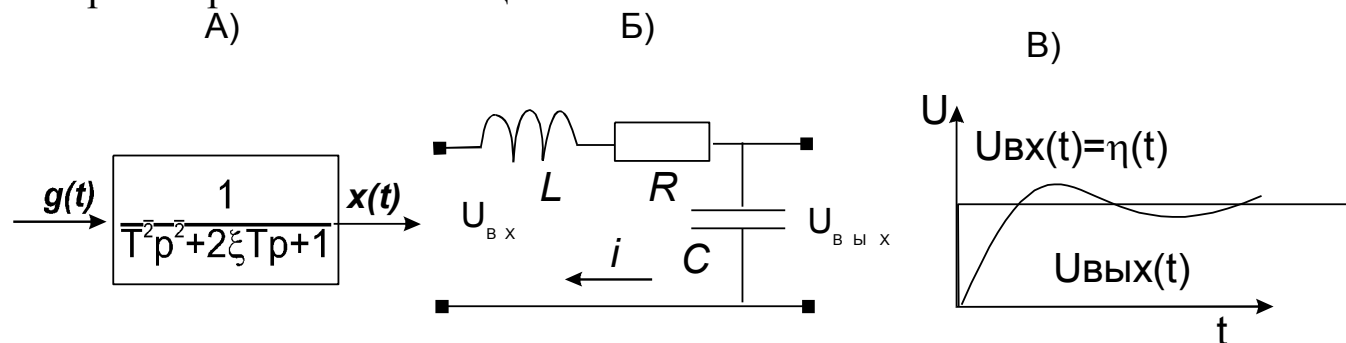


Рис. 1.11 – Колебательное звено (а), пример колебательного звена (б), пример выходного сигнала колебательного звена при постоянном единичном входном сигнале (в)

Составим, как и в предыдущем примере, дифференциальное уравнение, которое описывает зависимость напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе от времени и параметров схемы при подаче на вход сиг-

нала $U_{\text{вх}}$, который описывается ступенчатой единичной функцией времени.

На основании второго закона Кирхгофа, определения тока конденсатора, напряжения на индуктивности, имеем уравнения и начальные условия:

$$\begin{aligned} L \frac{dI(t)}{dt} + I(t)R + U_{\text{ВЫХ}}(t) &= U_{\text{ВХ}}(t), \\ I(t) &= C \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t_0) = U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0, \quad U_{\text{ВХ}}(t) = \eta(t - t_0) = \eta(t).$$

Эти соотношения приводят к уравнению второго порядка:

$$LC \frac{d^2 U_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВХ}}(t), \quad (1.25)$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0, \quad U_{\text{ВХ}}(t) = \eta(t - t_0) = \eta(t).$$

Введем следующие обозначения:

$$T = \sqrt{LC}, \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad x(t) = U_{\text{ВЫХ}}(t), \quad g(t) = U_{\text{ВХ}}(t) = \eta(t). \quad (1.26)$$

В итоге получаем уравнение вида (1.22).

При ступенчатом единичном внешнем воздействии, в случае комплексных корней характеристического уравнения с отрицательной действительной частью, решением этого уравнения при нулевых начальных условиях будет функция (выходной сигнал), график которой приведен на рис. 1.11в. Мы видим, что выходной сигнал представляет затухающие колебания в окрестности нового состояния равновесия.

1.5 Анализ выходных процессов в линейных системах управления, описываемых дифференциальными уравнениями

Задачи *анализа* линейных систем подразделяют на следующие виды:

- 1) основная задача анализа – это анализ выходных процессов;
- 2) анализ устойчивости;
- 3) анализ чувствительности;
- 4) анализ управляемости;

5) анализ наблюдаемости.

Для анализа выходных процессов в стационарных и нестационарных линейных системах управления при тех или иных внешних воздействиях, необходимо найти решение дифференциального уравнения. Прежде чем рассмотреть алгоритм поиска решений, необходимо отметить, что, проанализировав выходные процессы в моделируемой системе при единичном ступенчатом внешнем воздействии, можно определить основные показатели качества системы.

К основным показателям, которые характеризуют переходные процессы в системе управления (рис. 1.12), относятся следующие.

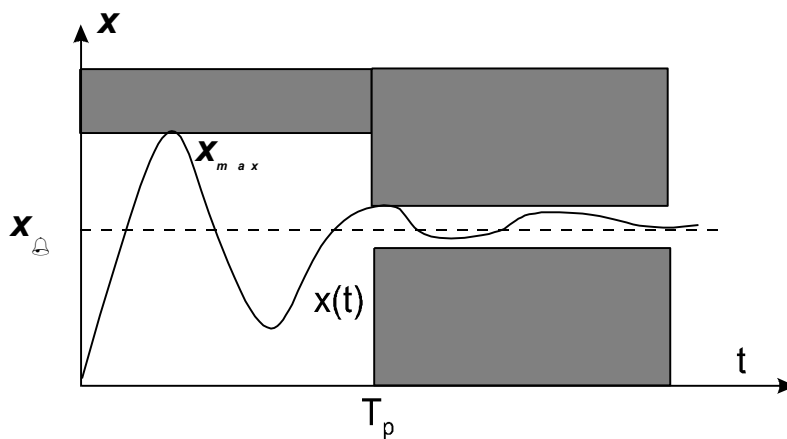


Рис. 1.12 – Показатели качества системы управления

1. Статическое отклонение $x_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.
2. Максимальное отклонение $x_{\max}$.
3. Время переходного процесса T_p , которое определяется как наименьшее время, по истечении которого выполняется равенство $|x(t) - x_{\infty}| < \Delta$, где Δ – наперед заданная величина.

4. Перерегулирование $\sigma = \frac{x_{\max} - x_{\infty}}{x_{\infty}} 100\%$, $x_{\infty} \neq 0$.

5. Число колебаний выходного сигнала за время переходного процесса.

При проектировании систем управления считается, что система удовлетворяет требованиям по качеству, если все перечис-

ленные показатели качества не превышают заранее заданных значений.

Теперь рассмотрим основы теории дифференциальных уравнений, которые позволяют найти реакцию системы для широкого класса внешних воздействий.

Рассмотрим дифференциальное уравнение линейной стационарной системы

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 g(t) \quad (1.27)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}_0, \quad (1.28)$$

(здесь $g(t)$ – входной сигнал; $x(t)$ – выходной сигнал; t – время; $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ – коэффициенты уравнения).

Решение уравнения (1.27) находят на основе **принципа суперпозиции**: выходной сигнал, вызванный суммой внешних воздействий (здесь – включая и начальные условия), равен сумме выходных сигналов, обусловленных каждым из воздействий в отдельности. На этом основании решение уравнения (1.27) представляют в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t). \quad (1.29)$$

Под **свободным движением** $x_{св}(t)$ понимается движение системы при отсутствии внешних воздействий и **ненулевых начальных условиях**, то есть решение однородного уравнения с неоднородными начальными условиями:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = 0; \quad (1.30)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}_0.$$

Иными словами – свободным движением называется движение системы, выведенной в начальный момент из состояния равновесия и предоставленной самой себе. При нулевых начальных условиях свободное движение отсутствует.

Под **вынужденным движением** $x_{вын}(t)$ подразумевается движение системы, обусловленное **внешним воздействием при**

нулевых начальных условиях. Вынужденное движение возможно только при действии ненулевого внешнего воздействия. На этих соображениях и основан алгоритм анализа выходных процессов в таких системах управления.

Итак, пусть система описывается уравнением (1.27) с соответствующими начальными условиями, и пусть задан входной сигнал (правая часть уравнения (1.27)). Требуется найти выходной сигнал $x(t)$. Решение находят следующим образом.

1. На первом этапе определяют **свободное движение**, решая **однородное** уравнение (1.30) с заданными (в общем случае – неоднородными) начальными условиями. Для этого:

- составляют характеристическое уравнение;
- находят его корни и записывают, как показано далее, искомое решение однородного уравнения в общем виде;
- из начальных (неоднородных) условий определяются неизвестные постоянные для **свободного движения**.

2. На следующем шаге находят вынужденное движение, решая неоднородное уравнение (1.27). Для этого:

- используя уже найденные при определении свободного движения корни характеристического уравнения, записывают вновь общее решение однородного уравнения, в котором произвольные постоянные вновь считаются неизвестными;
- находят частное решение неоднородного уравнения; неизвестные коэффициенты в общем выражении для частного решения находят, подставив его в уравнение (1.27) и приравняв коэффициенты соответствующих функций в левой и правой частях уравнения;
- записывают общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения с неизвестными коэффициентами и найденного частного решения;
- из начальных условий находят неизвестные постоянные и записывают окончательное выражение решения неоднородного уравнения (1.27).

Алгоритм поиска общего решения, в соответствии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, представляет собой последовательность описанных далее шагов.

Для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \\ + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 g(t)$$

характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Если все корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Если среди корней характеристического уравнения есть действительный корень λ_j кратности k , то ему в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = (b_1 + b_2 t + \dots + b_k t^{k-1}) e^{\lambda_j t},$$

где $b_1, b_2, \dots, b_k$ – произвольные постоянные.

Если среди корней характеристического уравнения есть пара комплексных сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, то ей в общем решении соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = (d_1 \cos \beta_j t + d_2 \sin \beta_j t) e^{\alpha_j t},$$

где d_1, d_2 – произвольные постоянные.

Паре $\alpha_j \pm i\beta_j$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица) комплексно-сопряженных корней кратности k соответствует слагаемое вида:

$$x_j(t) = [(f_1 + f_2 t + \dots + f_k t^{k-1}) \cos \beta_j t + (h_1 + h_2 t + \dots + h_k t^{k-1}) \sin \beta_j t] e^{\alpha_j t},$$

где $f_1, f_2, \dots, f_k; h_1, h_2, \dots, h_k$ – произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения находится методом подбора или методом вариации произвольных постоянных.

В частности, если правая часть уравнения (1.27) имеет вид:

$$g(t) = [R_q(t) \cos \beta t + P_l(t) \sin \beta t] e^{\alpha t},$$

где $R_q(t), P_l(t)$ – полиномы степени q, l соответственно, α, β – заданные числа, то частное решение ищется в виде:

$$x_h(t) = t^s [Q_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t] e^{\alpha t},$$

где $m = \max(q, l)$, $Q_m(t)$, $T_m(t)$ – полиномы степени m с неопределенными коэффициентами, а показатель степени определяется следующим образом:

$s=0$, если число $(\alpha+i\beta)$ не совпадает ни с одним из корней характеристического многочлена;

$s=k$, если число $(\alpha+i\beta)$ совпадает с корнем характеристического многочлена кратности k .

Пример 1.1. Найти свободное, вынужденное движение и выходной сигнал колебательного звена, описываемого дифференциальным уравнением и начальными условиями вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = g, \quad g(t) = 2e^{3t}, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 3, \quad t \geq 0.$$

1. Находим свободное движение, решая уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 3, \quad t \geq 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет корни

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Произвольные постоянные для свободного движения находим из начальных условий:

$$x(0) = 1, \Rightarrow c_1 + c_2 = 1,$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 3, \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 3 \Rightarrow c_1 = -1, \quad c_2 = 2.$$

Следовательно, свободное движение системы описывается функцией:

$$x_c(t) = -e^t + 2e^{2t}.$$

2. Находим вынужденное движение, решая неоднородное уравнение с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2e^{3t}, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad t \geq 0.$$

- Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$, как и общее решение однородного уравнения

$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$, уже найдены, но постоянные считаем неизвестными.

- Находим частное решение неоднородного уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$x_h(t) = Ae^{3t},$$

где A – произвольная постоянная. Подставляя это решение в исходное уравнение, получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 2e^{3t}, \quad x_h(t) = Ae^{3t} \Rightarrow 9Ae^{3t} - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 2e^{3t}, \Rightarrow A = 1.$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$x_h(t) = e^{3t}.$$

- Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + e^{3t}.$$

- Находим произвольные постоянные для общего решения неоднородного уравнения с однородными начальными условиями:

$$x(0) = 0, \Rightarrow c_1 + c_2 + 1 = 0,$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0, \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 3 = 0 \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = -2.$$

Следовательно, вынужденное движение системы описывается функцией:

$$x_{\text{вын}}(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

Наконец, выходной сигнал описывается формулой:

$$x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t) = -e^t + 2e^{2t} + e^t - 2e^{2t} + e^{3t} = e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

Пример 1.2. Найти свободное, вынужденное движение и выходной сигнал системы, которая описывается дифференциальным уравнением третьего порядка и начальными условиями вида:

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} - 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = g(t), \quad g(t) = e^t \eta(t),$$

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2}(0) = 2, \quad t \geq 0.$$

1. Находим свободное движение, решая уравнение

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} - 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0,$$

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2}(0) = 2, \quad t \geq 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет один действительный корень кратности $k=3$:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения надо искать в виде:

$$x_c(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t.$$

Из начальных условий находим c_1 , c_2 и c_3 для свободного движения:

$$x(0) = 1, \Rightarrow [(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t] \Big|_{t=0} = 1 \Rightarrow c_1 = 1,$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0, \Rightarrow [(c_2 + 2c_3 t) e^t + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t] \Big|_{t=0} = 0, \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, \Rightarrow c_2 = -1,$$

$$\frac{d^2 x(0)}{dt^2} = 2, \Rightarrow [2c_3 e^t + (c_2 + 2c_3 t) e^t + (c_2 + 2c_3 t) e^t + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t] \Big|_{t=0} = 2, \Rightarrow$$

$$2c_3 = 2, \Rightarrow c_3 = 1.$$

Следовательно, свободное движение системы описывается функцией:

$$x_c(t) = t^2 e^t.$$

2. Находим вынужденное движение, решая неоднородное уравнение с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} - 3 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t,$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2}(0) = 0, \quad t \geq 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, как и общее решение однородного уравнения $x_0(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t$, уже найдены. Постоянные c_1 , c_2 и c_3 считаем неизвестными.

Находим частное решение неоднородного уравнения. Параметры правой части уравнения, входного сигнала $g(t) = e^t$, то

есть показатель степени предэкспоненциального полинома $q=0$, характеристика частоты колебаний $\beta=0$, действительная часть показателя экспоненты $\alpha=1$, так что число $\alpha+i\beta$ совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda=1$ кратности $k=3$, следовательно, задаем $s=3$, $m=0$ и частное решение разыскиваем в виде

$$x_H(t) = At^3 e^t.$$

Находим производные от предполагаемого частного решения неоднородного уравнения

$$\dot{x}_H(t) = At^3 e^t + 3At^2 e^t, \quad \ddot{x}_H(t) = 6At^2 e^t + 6Ate^t + At^3 e^t,$$

$$\ddot{x}_H(t) = 9At^2 e^t + 18Ate^t + At^3 e^t + 6Ae^t.$$

Подставим найденные производные в неоднородное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_H(t) =, \quad \ddot{x}_H(t) =, \\ (9At^2 e^t + 18Ate^t + At^3 e^t + 6Ae^t) - 3(6At^2 e^t + 6Ate^t + At^3 e^t) + \\ + 3(At^3 e^t + 3At^2 e^t) - At^3 e^t = e^t, \Rightarrow 6Ae^t = e^t, \Rightarrow A = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$x_H(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

Общее решение неоднородного уравнения теперь записываем в виде:

$$x_{\text{общ}}(t) = x_0(t) + x_H(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

Определяем постоянные c_1 , c_2 и c_3 из однородных начальных условий для вынужденного движения:

$$x_{\text{общ}}(0) = 0, \quad \frac{dx_{\text{общ}}}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2 x_{\text{общ}}}{dt^2}(0) = 0, \Rightarrow$$

$$x_{\text{общ}}(0) = [(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{1}{6} t^3) e^t] \Big|_{t=0} = 0, \Rightarrow c_1 = 0;$$

$$\dot{x}_{\text{общ}}(0) = [(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{1}{6} t^3) e^t + (c_2 + 2c_3 t + \frac{3}{6} t^2) e^t] \Big|_{t=0} = 0, \Rightarrow c_2 = 0;$$

$$\ddot{x}_{\text{общ}}(0) = [(c_3 t^2 + \frac{1}{6} t^3) e^t + (2c_3 t + \frac{3}{6} t^2) e^t + (2c_3 t + \frac{3}{6} t^2) e^t + (2c_3 + \frac{6}{6} t) e^t] \Big|_{t=0} = 0, \Rightarrow c_3 = 0.$$

Наконец, находим выходной сигнал как сумму *свободного* и *вынужденного* движений системы:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t) = t^2 e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой система управления?
2. Опишите функциональную схему систем управления.
3. Классификация систем управления.
4. Охарактеризуйте основные задачи расчета систем управления.
5. Дайте определение предмета теории идентификации в широком и узком смысле слова.
6. Приведите классификацию систем управления по виду математической модели.
7. Какими уравнениями описывается нестационарная линейная система управления.
8. Что представляет собой операторная форма записи уравнений нестационарной и стационарной систем управления.
9. Опишите основные элементарные звенья, из которых состоят системы управления.
10. Перечислите основные показатели качества системы управления и поясните их смысл.
11. Опишите алгоритм поиска общего решения уравнений одномерной стационарной системы управления.

1.6 Многомерные детерминированные системы управления

(описание и анализ непрерывных линейных систем управления с помощью дифференциальных уравнений [1])

Основы математического моделирования многомерных систем управления рассмотрим, следуя работе [1]. В отличие от одномерных систем, в многомерных системах не по одному входу и выходу, а имеется r входов и k выходов. Поэтому математическая

модель системы управления характеризуется тем, что входные, промежуточные и выходные сигналы описываются векторными функциями скалярного аргумента – времени, связи между которыми описываются **дифференциальными уравнениями первого порядка**.

Входные сигналы, промежуточные сигналы и выходные сигналы многомерных систем (см. рис. 1.13) представляют соответствующими векторными функциями $\vec{g}(t)$, $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ вида:

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_r(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_k(t) \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где $\vec{g}(t)$ – вектор размерности r входных сигналов, $\vec{x}(t)$ – вектор размерности n промежуточных сигналов, $\vec{y}(t)$ – вектор размерности k выходных сигналов.

Многомерную систему можно рассматривать как соединение из $r \times k$ таких одномерных систем, каждая из которых связывает один из r входов с одним из k выходов.

Многомерная нестационарная система управления описывается

1) обыкновенными дифференциальными (первого порядка) уравнениями состояния

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{g}(t) \quad (1.32)$$

с начальными условиями

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (1.33)$$

2) и уравнениями (алгебраическими) выходов

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t), \quad (1.34)$$

где $\vec{g}(t)$ – вектор размерности r , $\vec{x}(t)$ – вектор размерности n , $\vec{y}(t)$ – вектор размерности k , $A(t)$ – квадратная матрица размерности $n \times n$, $B(t)$ – прямоугольная матрица размерности $n \times r$, $C(t)$ – квадратная матрица размерности $k \times n$.

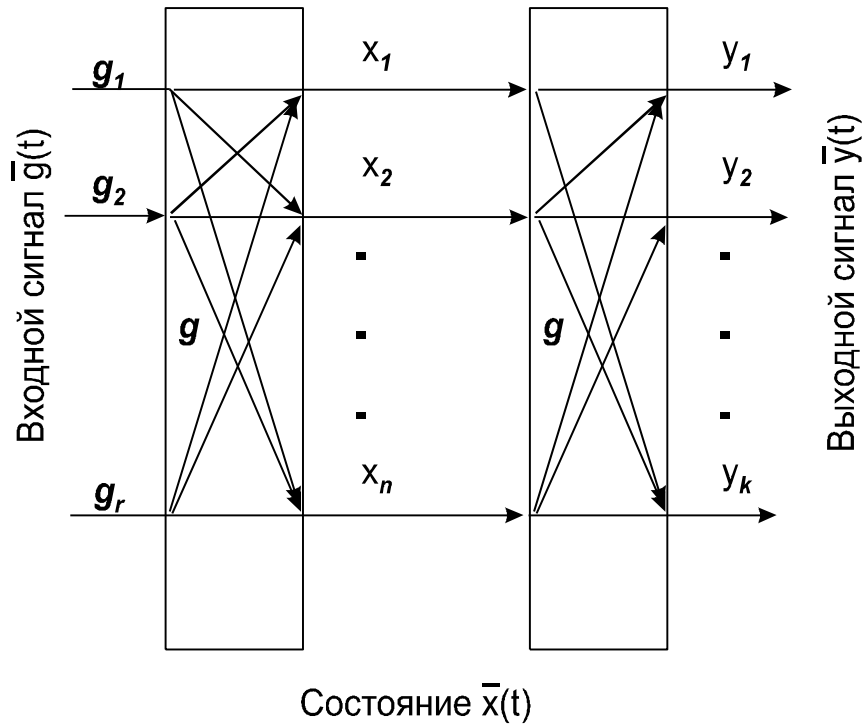


Рис. 1.13 – Многомерная система управления характеризуется r -мерным вектором входных сигналов $\vec{g}(t)$, n -мерным вектором состояний $\vec{x}(t)$, k -мерным вектором выходных сигналов $\vec{y}(t)$

Так же как и в случае одномерной системы управления, многомерная система называется **нестационарной**, если элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ являются функциями времени, и система называется **многомерной стационарной**, если эти матрицы от времени не зависят: $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$.

Пример 1.3. Записать в матричной форме уравнения состояния и выхода многомерной системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + g_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 - 3g_1, \quad y_1 = x_2.$$

Из этих уравнений устанавливаем, что «размерность» вектора входных сигналов $r=1$, размерность вектора промежуточных сигналов $n=2$, «размерность» вектора выходных сигналов $k=1$. Запишем матричные уравнения, соответствующие исходным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} g_1, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Уравнения состояния и выхода многомерной системы

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + z = 2g_1, \quad y_1 = x - 2z,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3z = g_2, \quad y_2 = \frac{dx}{dt},$$

записать в матричной форме.

Из этих уравнений устанавливаем размерность вектора входных сигналов $r=2$, размерность вектора выходных сигналов $k=2$.

Для понижения порядка исходных уравнений введем следующие обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \frac{dz}{dt}.$$

Тогда исходная система уравнений второго порядка заменяется эквивалентной системой уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2 - x_3 + 2g_1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_2 - 3x_3 + g_2, \end{aligned} \quad \begin{aligned} y_1 &= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4, \\ y_2 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4. \end{aligned}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B(t)} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

1.6.1 Описание соединений многомерных систем (матричные уравнения соединений)

Если математическая модель многомерной системы управления записана в виде уравнений (1.32)–(1.34), то она полностью характеризуется тремя матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$. Так же как и в случае одномерных систем, две многомерные системы могут образовать **параллельное и последовательное соединения**, а также **соединение с обратной связью**. Эти типы соединений показаны на рис. 1.14.

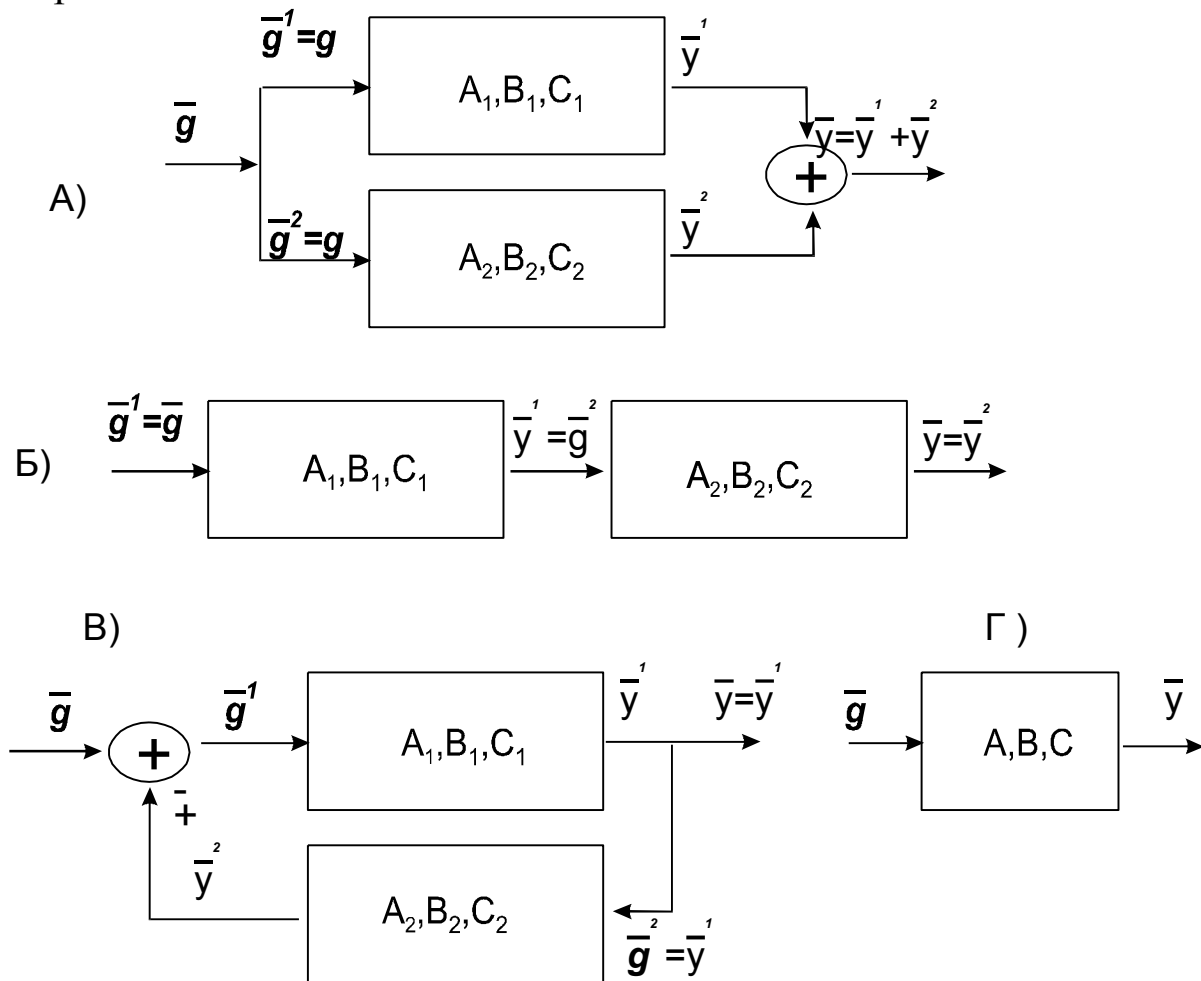


Рис. 1.14 – Параллельное (а) и последовательное (б) соединения многомерных систем, соединение с обратной связью (в), схема эквивалентной системы (г)

Пусть обе системы, которые образуют то или иное соединение, описываются следующими матричными уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}^1(t) &= A_1(t)\bar{x}^1(t) + B_1(t)\bar{g}^1(t), & \bar{y}^1(t) &= C_1(t)\bar{x}^1(t), \\ \dot{\bar{x}}^2(t) &= A_2(t)\bar{x}^2(t) + B_2(t)\bar{g}^2(t), & \bar{y}^2(t) &= C_2(t)\bar{x}^2(t),\end{aligned}\quad (1.35)$$

где $\bar{x}^1(t)$, $\bar{g}^1(t)$, $\bar{y}^1(t)$ – векторы состояния, входной сигнал и вектор выходных сигналов первой системы (размерность r_1 , n_1 , k_1 соответственно), $\bar{x}^2(t)$, $\bar{g}^2(t)$, $\bar{y}^2(t)$ – векторы состояния, входной сигнал и вектор выходных сигналов второй системы (размерности r_2 , n_2 , k_2), матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – соответствующие матрицы уравнений. Здесь верхний индекс вектора означает **номер вектора**, а нижние индексы, как и ранее, будем использовать для обозначения **номера компоненты вектора**. Нижний индекс у матриц обозначает **номер матрицы**.

Рассмотрим задачу: по уравнениям вида (1.35) двух систем записать матричные уравнения различных соединений, то есть уравнения эквивалентной системы.

Рассмотрим уравнения параллельного соединения. При параллельном соединении входной сигнал (вектор) поступает одновременно на оба элемента, а выходной сигнал является результатом суммирования выходных сигналов (тоже векторов) элементов. Поэтому необходимым условием является то, что размерности векторов входных и выходных сигналов исходных элементов и эквивалентной системы должны совпадать:

$$\bar{g} = \bar{g}^1 = \bar{g}^2, \quad r = r_1 = r_2, \quad \bar{y} = \bar{y}^1 + \bar{y}^2, \quad k = k_1 = k_2.$$

Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и вектор состояния $\bar{x}(t)$ эквивалентной системы получаются в результате «склейки» матриц и векторов состояний элементов:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}}_{B(t)} \bar{g}(t), \quad \bar{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

Таким образом, уравнения системы, эквивалентной параллельному соединению элементов (1.14), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{g}(t), \quad \bar{y}(t) = C(t)\bar{x}(t), \quad \bar{y}(t) = \bar{y}^1(t) + \bar{y}^2(t), \quad \bar{g}(t) = \bar{g}^1(t) = \bar{g}^2(t), \\ \bar{x}(t) &= \begin{pmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}, \quad C(t) = (C_1(t) \quad C_2(t)), \end{aligned} \quad (1.37)$$

причем размерности матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ равны соответственно $(n_1 + n_2)(n_1 + n_2)$, $(n_1 + n_2)(r_1)$, $k_1(n_1 + n_2)$.

Пример 1.5. Пусть дано уравнение первой системы

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad y_1^1 = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix}, \quad n_1 = 2, \quad r_1 = 2, \quad k_1 = 1,$$

$A_1(t), \quad B_1(t), \quad C_1(t)$

и дано уравнение второй системы

$$\frac{d}{dt} x_1^2(t) = (1) x_1^2(t) + (1 \quad -2) \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad y_1^2 = (3) x_1^2(t), \quad n_2 = 1, \quad r_2 = 2, \quad k_2 = 1,$$

$A_2(t) = 1, \quad B_2(t) = (1 \quad -2), \quad C_2(t) = 3.$

Требуется записать уравнение эквивалентной системы. Убеждаемся, что необходимые условия для параллельного соединения выполняются: $r_1 = r_2 = 2$, $k_1 = k_2 = 1$.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ x_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ x_1^2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad y_1^1 = (0 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ x_1^2(t) \end{pmatrix},$$

$A(t), \quad B(t), \quad C(t),$

$$n = n_1 + n_2 = 3, \quad r = r_1 = r_2 = 2, \quad k = k_1 = k_2 = 1.$$

В окончательном виде имеем:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{g}(t), \quad \bar{y}_1^1 = C(t)\bar{x}(t),$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ x_1^2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C(t) = (0 \quad 1 \quad 3).$$

Уравнения последовательного соединения и уравнения соединений с обратной связью устанавливаются аналогичным образом [1], хотя преобразования более громоздки.

1.7 Анализ связей вход-состояние и вход-выход (решение уравнений линейных систем)

1.7.1 Принцип суперпозиции

Для линейных многомерных систем

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{g}(t), \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0, \\ \vec{y}(t) &= C(t)\vec{x}(t)\end{aligned}\tag{1.38}$$

справедлив принцип суперпозиции: эффект (изменение состояния системы), вызванный воздействием на систему нескольких внешних воздействий равен сумме эффектов от каждого из таких воздействий в отдельности. В силу линейности уравнения выходов (1.34) этот же принцип справедлив и для выходного сигнала.

Закон изменения вектора состояний системы представляют в виде суммы *свободного* и *вынужденного* движения системы:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{св}(t) + \vec{x}_{вын}(t).\tag{1.39}$$

Точно так же выходной сигнал представляют суммой сигналов, соответствующих свободному и вынужденному движениям системы:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{св}(t) + \vec{y}_{вын}(t).\tag{1.40}$$

Под *свободным движением* подразумевается движение системы при *ненулевых начальных условиях* и отсутствующем (нулевом) входном воздействии

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \neq 0, \quad \vec{g}(t) = 0.\tag{1.41}$$

При нулевых начальных условиях свободное движение отсутствует: $\vec{x}_{св}(t) = 0$.

Под *вынужденным движением* системы $\vec{x}_{вын}(t)$ и соответствующим выходным сигналом $\vec{y}_{вын}(t)$ подразумевается реакция системы на *ненулевое* внешнее воздействие при нулевых начальных условиях:

$$\vec{g}(t) \neq 0, \quad \vec{x}(t_0) = 0.\tag{1.42}$$

Таким образом, свободное и вынужденное движение системы определяется решением однородных уравнений состояния

при ненулевых начальных условиях и неоднородных уравнений состояния при нулевых начальных условиях.

Для нестационарных многомерных линейных систем, которые описываются уравнениями (1.38), законы изменения во времени вектора состояний $\vec{x}(t)$ и вектора выходного сигнала $\vec{y}(t)$ определяются следующими формулами:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau, \quad (1.43)$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, \tau)$ – **переходная матрица**, которую называют также **матрицей Коши**. В решении (1.43) первые слагаемые соответствуют свободному движению системы, вторые – вынужденному.

Переходная матрица является решением уравнения:

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad (1.44)$$

с начальным условием

$$\Phi(\tau, \tau) = E, \quad (1.45)$$

где E – единичная матрица.

В решении (1.43) нам известны все величины и пока неясно главным образом одно: как находится переходная матрица $\Phi(t, \tau)$. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим **общий алгоритм решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений** [1].

Первый шаг. Необходимо найти решение однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующих исходной задаче (1.38):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t), \quad \{\text{Исходное уравнение } \dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{g}(t)\}. \quad (1.46)$$

Общее решение однородной системы записывается в виде:

$$\vec{x}_O(t) = \varphi(t)\vec{c} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}^i(t), \quad (1.47)$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ – вектор произвольных постоянных, $\varphi(t) = (\vec{\varphi}^1(t), \vec{\varphi}^2(t), \dots, \vec{\varphi}^n(t))$ (верхний индекс – номер вектора) –

фундаментальная матрица. Каждый столбец фундаментальной матрицы является решением однородной системы. Это значит, что выполняются равенства:

$$\dot{\vec{\varphi}}^i(t) = A(t)\vec{\varphi}^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1.48)$$

или то же самое в матричной форме записи:

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t).$$

К вопросу о том, как найти линейно-независимые решения однородной системы, следовательно, и фундаментальную матрицу вернемся несколько позже.

Второй шаг. Методом вариации произвольных постоянных отыскивается общее решение неоднородной системы. Искомое решение представляется в виде:

$$\vec{x}(t) = \varphi(t)\vec{c}(t), \quad (1.49)$$

где вектор-функция $\vec{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T$ – новая неизвестная пока функция, которую требуется найти. Подставим $\vec{x}(t) = \varphi(t)\vec{c}(t)$ в неоднородную систему уравнений (1.38), получим уравнение

$$\dot{\varphi}(t)\vec{c}(t) + \varphi(t)\dot{\vec{c}}(t) = A(t)\varphi(t)\vec{c}(t) + B(t)\vec{g}(t). \quad (1.50)$$

Учитывая, что фундаментальная матрица по определению удовлетворяет уравнению $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$, получим:

$$\varphi(t)\dot{\vec{c}}(t) = B(t)\vec{g}(t) \Rightarrow \dot{\vec{c}}(t) = \varphi^{-1}(t)B(t)\vec{g}(t). \quad (1.51)$$

Обратная матрица $\varphi^{-1}(t)$ существует, так как $\det(\varphi(t)) \neq 0$ (определитель Вронского) в силу того, что столбцы фундаментальной матрицы линейно независимы. Интегрируя соотношения (1.51), находим векторную функцию $\vec{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T$ с точностью до неизвестных постоянных $\vec{c}^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)^T$:

$$\vec{c}(t) = \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau + \vec{c}^0. \quad (1.52)$$

В результате общее решение неоднородной системы получаем в виде:

$$\vec{x}(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau + \varphi(t)\vec{c}_0. \quad (1.53)$$

Третий шаг. Теперь необходимо найти частное решение неоднородной системы, которое должно удовлетворять начальным условиям $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Подставляя в это равенство решение (1.53), получим уравнение относительно неизвестных постоянных:

$$\vec{x}(t_0) = \varphi(t_0)\vec{c}^0 = \vec{x}_0. \quad (1.54)$$

Отсюда следует, что

$$\vec{c}^0 = \varphi^{-1}(t_0)\vec{x}_0. \quad (1.55)$$

Тогда для общего решения исходной неоднородной системы уравнений имеем следующую формулу:

$$\vec{x}(t) = \varphi(t)\varphi^{-1}(t_0)\vec{c}_0 + \int_{t_0}^t \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau. \quad (1.56)$$

Введя обозначение $\Phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$, получаем с учетом (1.56) формулы (1.43):

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau,$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\vec{x}(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\vec{g}(\tau)d\tau.$$

(1.43 повторно)

Умножим равенства $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$ (1.48) справа на матрицу $\varphi^{-1}(\tau)$ (обратную к $\varphi(\tau)$), получим уравнение $\dot{\varphi}(t)\varphi^{-1}(\tau) = A(t)\varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$. Так как $\dot{\varphi}(t)\varphi^{-1}(\tau) = \frac{\partial \dot{\varphi}(t)\varphi^{-1}(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t}$, получаем уравнение (1.54):

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau). \quad (1.44 \text{ повторно})$$

При $t = \tau$ для переходной матрицы получаем равенство $\Phi(\tau, \tau) = \varphi(\tau)\varphi^{-1}(\tau) = E$, то есть начальное условие (1.45):

$$\Phi(\tau, \tau) = E. \quad (1.45 \text{ повторно})$$

1.7.2 Законы изменения вектора состояний и вектора выходного сигнала для стационарной системы

Как мы уже говорили, многомерная стационарная система управления описывается уравнениями состояния

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{g}(t) \quad (1.57)$$

с начальными условиями

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (1.58)$$

и алгебраическими уравнениями выходов

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t), \quad (1.59)$$

где $\vec{g}(t)$ – вектор размерности r , $\vec{x}(t)$ – вектор размерности n , $\vec{y}(t)$ – вектор размерности k , A – квадратная матрица размерности $n \times n$, B – прямоугольная матрица размерности $n \times r$, C – квадратная матрица размерности $k \times n$. В отличие от нестационарных систем, коэффициенты этих матриц постоянны.

Векторы состояния и выхода такой системы определяются формулами

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)B\vec{g}(\tau)d\tau, \quad (1.60)$$

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) = C\Phi(t)\vec{x}(t_0) + C \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)B\vec{g}(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t-\tau)$ – **переходная матрица** стационарной системы, которая зависит от разности $(t-\tau) = \eta$. Решение уравнения вида (1.44) в этом случае имеет вид:

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} = \Phi(t-\tau) = \Phi(\eta).$$

1.7.3 Алгоритм решения задачи анализа выходных процессов в многомерных системах

Алгоритм решения задачи анализа выходных процессов рассмотрим на примере **стационарной** системы управления

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{g}(t) \quad (1.61)$$

с начальными условиями

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (1.62)$$

и алгебраическими уравнениями выходов

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t). \quad (1.63)$$

Для анализа выходных процессов необходимо осуществить два шага:

1) найти переходную матрицу. Для этого можно использовать метод (назовем его первым способом решения), основанный на определении фундаментальной матрицы, метод, основанный на применении теоремы разложения Сильвестра, и метод, основанный на применении теоремы Кэли–Гамильтона;

2) по известной переходной матрице и приведенным ранее формулам найти законы изменения состояния выходного сигнала.

Рассмотрим алгоритм поиска переходной матрицы $\Phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$, основанный на предварительном определении фундаментальной матрицы $\varphi(t)$.

Этот алгоритм включает следующие действия.

1. Необходимо найти корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (1.64)$$

где E – единичная матрица.

2. Для каждой компоненты вектора состояний $\vec{x}(t)$ записывают общее решение однородной системы в виде:

$$\vec{x}_0(t) = c_1\vec{\varphi}^1(t) + c_2\vec{\varphi}^2(t) + \dots + c_n\vec{\varphi}^n(t). \quad (1.65)$$

На этом этапе произвольные постоянные для каждой компоненты вектора состояний считаются различными. При этом используются известные правила записи общего решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения, которые мы уже обсуждали.

3. Полученные выражения подставляются в однородные уравнения системы. Для каждой компоненты вектора состояний $\vec{x}(t)$ записать общее решение.

4. Неизвестные коэффициенты при одинаковых функциях независимой переменной t приравниваются между собой. Последующее решение полученной системы уравнений позволяет выразить часть неизвестных постоянных через другие, так что неизвестными остаются только n констант. При этом зачастую оказывается достаточно рассмотреть первые $n-1$ уравнение.

5. Записывается общее решение, зависящее от этих n постоянных, что позволяет выписать фундаментальную матрицу $\varphi(t)$, а затем и переходную $\Phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$.

Пример 1.6. Дана система уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + 2x_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1 + 3x_2 + g.$$

Найти переходную матрицу. Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Находим корни характеристического уравнения:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1.$$

2. Формулы общего решения задачи для каждой из компонент в этом случае имеют вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t},$$

$$x_2(t) = B_1 e^{5t} + B_2 e^{-t}.$$

3. Подстановка общего решения в первое уравнение задачи дает следующее уравнение:

$$5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} + 2B_1 e^{5t} + 2B_2 e^{-t}.$$

4. На том основании, что для выполнения равенства необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых экспонентах были равны, получаем систему:

$$4C_1 = 2B_1, \quad -2C_2 = 2B_2, \quad \Rightarrow B_1 = 2C_1, \quad B_2 = -C_2.$$

5. В результате для общего решения имеем следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} & C_2 e^{-t} \\ 2C_1 e^{5t} & -C_2 e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varphi}^1(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}^2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь не сложно записать выражение для фундаментальной и обратной к ней матрицы:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varphi}^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Используя формулу для переходной матрицы, получаем:

$$\Phi(t, \tau) = \varphi(t) \vec{\varphi}^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5\tau} & e^{-5\tau} \\ 2e^{-\tau} & -e^{-\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)} & e^{5(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{5(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{5(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Приведите в общем виде уравнения многомерной системы управления.
2. Дайте определение стационарной и нестационарной многомерной системы управления.
3. Получите уравнения параллельного соединения многомерных систем.
4. Сформулируйте принцип суперпозиции.
5. Дайте определение свободного и вынужденного движения многомерной системы.
6. Дайте определение фундаментальной матрицы.
7. Дайте определение переходной матрицы.
8. Опишите алгоритм решения задачи анализа выходных процессов для стационарных многомерных систем с помощью фундаментальной матрицы.

1.8 Устойчивость, управляемость и наблюдаемость

1.8.1 Одномерные детерминированные системы управления, устойчивость

Рассмотрим одномерную детерминированную стационарную систему управления, которая описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 g(t); \quad (1.66)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}_0.$$

Выходной сигнал представляется в виде суммы сигналов, соответствующих свободному и вынужденному движению системы:

$$x(t) = x_C(t) + x_{вн}(t), \quad (1.67)$$

где свободному движению соответствует решение однородного уравнения (1.66) при ненулевых начальных данных, а вынужденному движению соответствует решение неоднородного уравнения при однородных (нулевых) начальных данных.

Определение 1. Одномерная система управления называется асимптотически устойчивой по начальным данным, если при ненулевых, но ограниченных начальных условиях свободное движение системы $x_C(t)$ ограничено при всех $t \in [t_0, +\infty)$ и при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} x_C(t) = 0$.

Определение 2. Одномерная система управления называется устойчивой по входным данным, если при любом ограниченном внешнем воздействии $g(t)$ вынужденное движение системы описывается ограниченной при любых значениях времени $t \in [t_0, +\infty)$ функцией $x_{вын}(t)$.

Если система устойчива и по входным данным и по входу, то используют более краткий термин – *устойчивая система управления*.

1.8.2 Критерии устойчивости [1–3]

Критерий 1. Для того чтобы система (1.66) была устойчива по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы корни $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) соответствующего ей характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (1.68)$$

имели отрицательные действительные части:

$$\alpha_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 1.6. Проверить, устойчива ли система, дифференциальное уравнение которой имеет вид:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = b_0 g(t).$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет кратный отрицательный корень $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$. Оба корня меньше нуля. Следовательно, система устойчива по начальным данным.

Пример 1.7. Проверить, устойчива ли система, дифференциальное уравнение которой имеет вид:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = b_0 g(t).$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$, из которых второй меньше нуля. Следовательно, система не устойчива по начальным данным.

Критерий 2. Проверить, отрицательны ли действительные части корней характеристического уравнения, не вычисляя его корни, можно по критерию **Рауса–Гурвица**.

Для устойчивости системы (1.66) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы при условии $a_n > 0$ угловые миноры Δ_i матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

были положительны: $\Delta_i > 0$, $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$ и т.д.

Отсутствующие коэффициенты (с отрицательными индексами) заменяются нулями.

1.8.3 Многомерные системы управления. Устойчивость.

Рассмотрим многомерную стационарную систему управления, которая описывается уравнениями состояния и начальными условиями вида:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A(t)\vec{x}(t) + B(t)\vec{g}(t); \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Определение 1. Многомерная система управления называется асимптотически устойчивой, если при ненулевых, но ограниченных

начальных состояниях свободное движение системы $\vec{x}_C(t)$ ограничено при всех $t \in [t_0, +\infty)$ и при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}_C(t)\| = 0$.

1.8.4 Критерии устойчивости

Критерий 1. Для того чтобы система (1.70) была асимптотически устойчива необходимо и достаточно, чтобы корни $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) соответствующего ей характеристического уравнения

$$\det|A - \lambda E| = 0 \quad (1.71)$$

имели отрицательные действительные части:

$$\alpha_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Критерий 2. Проверить, отрицательны ли действительные части корней характеристического уравнения (1.71), не вычисляя его корни, можно также по критерию *Рауса–Гурвица*. Для этого сначала надо записать выражение для определителя (1.71) в виде полинома, а затем проверить знаки угловых миноров соответствующей матрицы коэффициентов.

Пример 1.8. Проверить устойчивость системы, заданной уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_1 + 3x_2 + g_1. \end{aligned}$$

Матрица A здесь имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Составляем характеристическое матричное уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Оба корня этого уравнения действительные, и они имеют разные знаки $\lambda_1 = 5 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$. Следовательно, система не является устойчивой.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение устойчивости системы управления по начальным данным.
2. Какая система называется устойчивой по входу?
3. Сформулируйте критерии устойчивости одномерных систем управления.
4. Сформулируйте критерии устойчивости многомерных систем.

2 МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ [2]

2.1 Пространство состояний

Системы управления могут быть описаны системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. Производные по времени в этих уравнениях определяют динамические свойства систем. Любое обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка можно преобразовать в систему из n дифференциальных уравнений первого порядка. Система из n дифференциальных уравнений первого порядка полностью определена, если заданы все коэффициенты уравнений и n начальных условий. Начальные условия, так же как и вектор состояния, будем рассматривать как n -мерные векторы $\vec{x}(t_0)$, $\vec{x}(t)$, которые полностью определяют состояние системы в начальный момент времени t_0 и последующие моменты времени. При этом предполагается, что все входные или возмущающие воздействия известны и заданы на всем интервале моделирования $t \in [t_0, T]$. Вектор $\vec{x}(t_0)$ называется *вектором состояния* системы в момент времени t_0 , а его компоненты – *переменными состояниями*. Векторное дифференциальное уравнение относительно вектора $\vec{x}(t)$ называют уравнением состояния динамической системы.

2.2 Линейные преобразования

В качестве вектора, который характеризует состояние системы (вектора состояний), можно рассматривать любой вектор, образованный различными комбинациями n переменных состояния. Новый вектор состояния можно определить как результат следующих линейных преобразований.

Рассмотрим линейную систему, которая описывается векторным уравнением состояния:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t), \quad (2.1)$$

где $\vec{x}(t)$ – n -мерный вектор состояния, $\vec{u}(t)$ – вектор входных сигналов или возмущающих воздействий, независимые компоненты которого в общем случае являются функциями времени; A , B – матрицы коэффициентов системы.

Из переменных состояния различными способами можно построить вектор состояния. Для этого можно использовать линейное преобразование уравнения (2.1). Тогда преобразованный вектор состояния $\vec{x}^*(t)$ является линейной комбинацией из n компонент вектора $\vec{x}(t)$:

$$\vec{x}^*(t) = \psi^{-1} \vec{x}(t), \quad (2.2)$$

где ψ – матрица преобразования, а $\vec{x}^*(t)$ – преобразованный вектор состояния.

Преобразование (2.2) приводит к новому уравнению состояния

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = A^* \vec{x}^*(t) + B^* \vec{u}(t), \quad (2.3)$$

в котором

$$A^* = \psi^{-1} A \psi, \quad (2.4)$$

$$B^* = \psi^{-1} B. \quad (2.5)$$

Эти преобразования возможны только в том случае, когда существует обратная матрица ψ^{-1} . Следует отметить, что ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией одной или нескольких других переменных состояния.

Собственные значения матрицы A в исходном уравнении совпадают с собственными значениями матрицы A^* в преобразованном уравнении (2.2), так как они являются решением характеристического уравнения. Действительно, пусть λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – собственное число матрицы A , то есть $\det(A - \lambda_i E) = 0$. Рассмотрим характеристическое уравнение для преобразованной системы (2.3):

$$\begin{aligned} \det(A^* - \lambda_i^* E) &= \det(\psi^{-1} A \psi - \lambda_i^* E) = \det(\psi^{-1} A \psi - \lambda_i^* \psi^{-1} E \psi) = \\ &= \det(\psi^{-1}) \det(A - \lambda_i^* E) \det(\psi) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следовательно, собственные числа матриц A и A^* совпадают:

$$\lambda_i^* = \lambda_i. \quad (2.7)$$

Пример 2.1. Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

собственные числа которой найдем из уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10,$$

$$\lambda_i = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2.$$

Преобразуем исходную систему с помощью матрицы $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Обратная матрица имеет вид $\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Тогда

преобразованная система соответственно имеет вид:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = A^* \vec{x}^*(t), \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A^*

$$\det(A^* - \lambda^* E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda^* & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 - \lambda^* \end{vmatrix} = (3 - \lambda^*)(4 - \lambda^*) - 2 = \lambda^{*2} - 7\lambda^* + 10,$$

$$\lambda_i^* = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \lambda_i \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2.$$

Видим, что они равны собственным значениям матрицы A .

2.3 Каноническое преобразование

Среди различных линейных преобразований уравнения (2.1) особую роль играет каноническое преобразование, когда в качестве матрицы преобразования применяется матрица собственных векторов V . Она получается из решения однородного линейного уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t), \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Решение этой однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= v_{11}e^{\lambda_1 t} + v_{12}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{1n}e^{\lambda_n t}, \\
x_2(t) &= v_{21}e^{\lambda_1 t} + v_{22}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{2n}e^{\lambda_n t}, \\
&\dots\dots\dots, \\
x_n(t) &= v_{n1}e^{\lambda_1 t} + v_{n2}e^{\lambda_2 t} + \dots + v_{nn}e^{\lambda_n t},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \vec{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \vec{v}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \vec{v}^n e^{\lambda_n t} = V\{e^{\lambda t}\}, \\
\text{где } \{e^{\lambda t}\} &= \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix} = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \dots, \vec{v}^n\}.$$

Чтобы выполнить каноническое преобразование, необходимо тем или иным способом найти собственные векторы для матрицы A .

2.4 Прямое определение собственных векторов

Продифференцируем решение (2.9) линейного уравнения по времени:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lambda_1 \vec{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \vec{v}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n \vec{v}^n e^{\lambda_n t}. \tag{2.11}$$

С другой стороны, подстановка решения (2.9) в однородное уравнение (2.8) дает:

$$\dot{\vec{x}}(t) = AV\{e^{\lambda t}\} = A\{\vec{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \vec{v}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \vec{v}^n e^{\lambda_n t}\}. \tag{2.12}$$

Сравнивая выражения (2.11), (2.12), замечаем, что должны выполняться равенства:

$$\lambda_i \vec{v}^i e^{\lambda_i t} = A\vec{v}^i e^{\lambda_i t}. \tag{2.13}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что если все собственные значения различны, то должны выполняться равенства:

$$(A - \lambda_i E)\vec{v}^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.14}$$

Таким образом, собственные векторы $\vec{v}^i$ могут быть определены из уравнения (2.13). Каждый собственный вектор может быть определен с точностью до некоторой постоянной. Поэтому обычно для каждого собственного вектора полагают, что первая

или последняя его компонента равна единице, а остальные компоненты находят из оставшихся $(n-1)$ уравнений.

Пример 2.2. Пусть матрица A многомерной системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для определения собственных векторов сначала вычислим собственные значения матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Далее используем уравнение (2.14) для первого собственного вектора и собственного числа $\lambda_1 = -1$:

$$\lambda_1 E \bar{v}^1 = A \bar{v}^1 \Rightarrow -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -v_1^1 \\ -v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 + 2v_2^1 \\ 4v_1^1 + 3v_2^1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} -2v_1^1 &= 2v_2^1, \\ -4v_1^1 &= 4v_2^1, \Rightarrow v_1^1 = -v_2^1. \end{aligned}$$

Теперь выбираем произвольно одну из компонент первого собственного вектора, например, полагая $v_1^1 = 1$. Тогда получим:

$$\bar{v}^1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Точно также найдем второй собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 5$:

$$\lambda_2 E \bar{v}^2 = A \bar{v}^2 \Rightarrow 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5v_1^2 \\ 5v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^2 + 2v_2^2 \\ 4v_1^2 + 3v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} 4v_1^2 &= 2v_2^2, \\ -4v_1^2 &= -2v_2^2, \Rightarrow 2v_1^2 = v_2^2. \end{aligned}$$

Вновь произвольно выбираем одну из компонент второго собственного вектора. Например, положим $v_1^2 = 1$. Тогда получим:

$$\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, сформируем матрицу собственных векторов, которая и является матрицей канонического преобразования исходной линейной системы управления:

$$V = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.5 Алгоритм определения собственных векторов, основанный на методе Крылова

Этот алгоритм имеет перед только что рассмотренным способом преимущество в скорости. Кроме того, метод применим как в случае различных, так и одинаковых собственных чисел.

Первый шаг метода также заключается в определении собственных значений матрицы A .

Второй шаг. Определяем коэффициенты c_i следующего полинома:

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - c_0). \quad (2.15)$$

Третий шаг. Определяем произвольно вспомогательный n -мерный вектор $\vec{d}_1$, например, так, что

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Четвертый шаг. Определяем еще $n-1$ векторов $\vec{d}_i$ по формулам:

$$\vec{d}_2 = A\vec{d}_1, \quad \vec{d}_3 = A\vec{d}_2, \dots, \quad \vec{d}_n = A\vec{d}_{n-1}. \quad (2.17)$$

Пятый шаг. Определяем элементы собственного вектора $\vec{v}^i$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{v}^i &= \sum_{k=1}^n p_{ik} \vec{d}_{n-k+1}, \\ p_{i1} &= 1, \\ p_{i,j} &= \lambda_i p_{i,j-1} - c_{n-j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, n; \\ \lambda_i p_{in} - c_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Последнее равенство здесь используется только как дополнительный способ проверки вычислений.

Если матрица A имеет вид (коагулированная матрица):

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & E & & \\ 0 & & & \\ \hline \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

то очень быстрый алгоритм вычисления собственных векторов и матрицы канонического преобразования строится с помощью матрицы Вандермонда:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Нетрудно заметить, что обратная матрица V^{-1} существует только тогда, когда все собственные числа различны.

Пример 2.3. Рассмотрим применение метода Крылова на предыдущем примере. Пусть матрица A имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Собственные значения матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Определяем коэффициенты c_i :

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (-1)^2(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (-1)^2(\lambda^2 - c_1\lambda - c_0) \Rightarrow c_0 = 5, c_1 = 4.$$

Определяем вспомогательный вектор $\vec{d}_1$ размерности $n=2$:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определяем $n-1=1$ векторов $\vec{d}_i$ по формулам:

$$\vec{d}_2 = A\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_3 = A\vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n = A\vec{d}_{n-1},$$

Теперь находим коэффициенты p_i :

$$p_{11} = 1,$$

$$p_{12} = (-1)p_{11} - c_1 = -1 - 4 = -5,$$

$$p_{21} = 1,$$

$$p_{22} = (5)p_{21} - c_1 = 5 - 4 = 1.$$

Находим собственные векторы:

$$\vec{v}^1 = p_{11}\vec{d}_2 + p_{12}\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}^2 = p_{21}\vec{d}_2 + p_{22}\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Если теперь нормализовать собственные векторы так, чтобы первая компонента равнялась единице (а это можно делать, так как собственные векторы в любом случае определяются с точностью до произвольной постоянной), то получим тот же результат, который мы уже получили в предыдущем примере:

$$\vec{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое пространство состояний?
2. Что такое линейное преобразование линейной системы и при каких ограничениях на матрицу преобразований оно возможно?
3. Докажите, что линейное преобразование не изменяет собственных чисел линейной системы управления.
4. Дайте определение канонического преобразования линейной системы.
5. Опишите алгоритм прямого определения собственных векторов.
6. Опишите процедуру определения собственных векторов на основе метода Крылова.

2.6 Каноническое преобразование – процедура диагонализации

Определим следующую диагональную матрицу, элементами которой являются собственные числа матрицы A линейной системы:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \quad (2.21)$$

Произведение матрицы канонического преобразования V на диагональную матрицу Λ будет равно:

$$V\Lambda = \{\lambda_1 \vec{v}^1, \lambda_2 \vec{v}^2, \dots, \lambda_n \vec{v}^n\}. \quad (2.22)$$

Учитывая формулу (2.13) $\lambda_i \vec{v}^i e^{\lambda_i t} = A \vec{v}^i e^{\lambda_i t}$, получаем на основании (2.22):

$$V\Lambda = A\{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \dots, \vec{v}^n\} = AV. \quad (2.23)$$

Умножим последнее равенство слева на обратную матрицу V^{-1} . Получаем:

$$V^{-1}V\Lambda = V^{-1}AV \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV. \quad (2.24)$$

Мы видим, что умножение матрицы A на матрицу канонического преобразования и обратную к ней матрицу приводит к диагонализации матрицы A при условии, что все собственные значения матрицы A различны.

Используем матрицу V в качестве матрицы преобразования линейной системы управления (ее уравнений), получим с учетом формулы (2.24):

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda \vec{x}^* + B^* \vec{u}, \quad B^* = V^{-1}B. \quad (2.25)$$

В скалярной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + b_{11}^* u_1 + b_{12}^* u_2 + \dots + b_{1m}^* u_m, \\ \dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + b_{21}^* u_1 + b_{22}^* u_2 + \dots + b_{2m}^* u_m, \\ &\dots, \\ \dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + b_{n1}^* u_1 + b_{n2}^* u_2 + \dots + b_{nm}^* u_m. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Таким образом, каноническое преобразование линейной системы приводит к системе уравнений состояния, в которой каждая производная по времени от канонической переменной зависит только от соответствующей канонической переменной состояния и входных сигналов.

Пример 2.4. Рассмотрим пример диагонализации уравнения

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Каноническое преобразование выполняется следующим образом:

$$\Lambda = V^{-1}AV.$$

В предыдущих примерах мы уже получили для такой матрицы A собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, собственные векторы и матрицу преобразования V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь обратную матрицу V^{-1} :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим диагональную матрицу Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda = V^{-1}AV &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы видим, что диагональная матрица действительно представляет собой матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы A :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.7 Управляемость

Понятия наблюдаемости и управляемости – дуальные (двойственные) понятия, которые были впервые введены Калма-

ном в 1960 г. Эти понятия рассматриваются обычно совместно, хотя в теории идентификации понятие наблюдаемости более важно.

Определение. Система является управляемой, если из любого состояния $\vec{x}(t_0)$ она может быть переведена в любое другое желаемое состояние $\vec{x}(t_1)$ за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в результате приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\vec{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.

Схема на рис. 2.1. иллюстрирует понятие управляемости. Изображенная здесь система не является управляемой, так как управляющее входное воздействие $\vec{u}(t)$ влияет не на все переменные состояния, а значит, не всякое желаемое состояние достижимо за счет управляющих воздействий.

Известные критерии управляемости (и, соответственно, наблюдаемости) систем основаны на анализе канонических уравнений состояния и на полиномиальном разложении матричной экспоненты e^{At} .

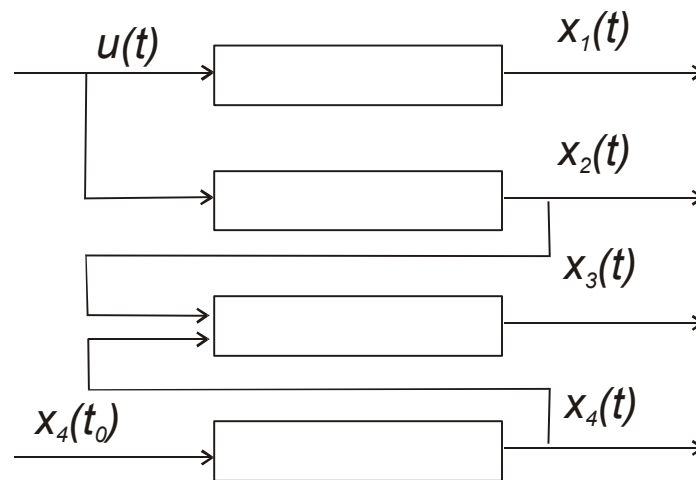


Рис. 2.1 – Пример неуправляемой системы

2.8 Критерии управляемости систем

2.8.1 Критерий Гильберта для канонических систем

Для применения основанного на этом критерии метода оценки управляемости линейная система должна быть предварительно приведена к канонической форме, которая удобна тем, что

взаимное влияние канонических переменных состояния в ней отсутствует (однородная система уравнений после диагонализации такова, что каждое уравнение может быть решено независимо от других).

Критерий управляемости Гильберта. Система, заданная каноническими уравнениями:

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda \vec{x}^* + B^* \vec{u}, \quad (2.27)$$

управляема, если ни одна из строк матрицы B^ не является нулевой. Для управляемости в каждой строке системы (2.27) должен быть хотя бы один не равный нулю элемент. Отсюда следует, что если матрица B содержит хотя бы одну нулевую строку, то система неуправляема!*

Описанная схема исследования управляемости на основе приведения системы к канонической форме эффективна только в том случае, когда исходная матрица системы A имеет n различных собственных значений. Это ограничение можно отчасти преодолеть, используя каноническое преобразование Жордана.

Сформулированный критерий Гильберта основан на соответствующей теореме, которая доказывается следующим образом.

Доказательство [2] теоремы об управляемости.

1. Рассмотрим вначале утверждение теоремы о том, что если одна (или несколько строк) матрицы B^* нулевая, то система неуправляема. Запишем каноническую систему уравнений в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + \sum_{j=1}^m b_{1j}^* u_j, \\ \dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + \sum_{j=1}^m b_{2j}^* u_j, \\ &\dots, \\ \dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + \sum_{j=1}^m b_{nj}^* u_j. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из этой формы представления канонических уравнений очевидно, что если какая-либо строка матрицы B^* нулевая

($b_{ij}^* = 0, j = 1, 2, \dots, m$), то никакой выбор управления $\vec{u}(t)$ не может повлиять на соответствующую каноническую переменную.

2. Для доказательства управляемости при ненулевых строках матрицы B^* вспомним, что решение канонической системы можно представить матричной экспонентой, и с учетом того, что матрица канонической системы – диагональная матрица Λ , его можно записать в скалярной форме так:

$$x_i^*(t) = e^{\lambda_i t} x_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n, \Rightarrow$$

$$x_i^*(t_1) = e^{\lambda_i t_1} x_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_{ij}^* u_j(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Теперь рассмотрим самый простой случай, когда число входов равно n , то есть матрица B квадратная. Если кроме того все строки B^* линейно независимы, то проще всего потребовать постоянства управления внутри интервала интегрирования (положить равным неизвестным постоянным $u_j(t) = c_j, j = 1, 2, \dots, n$) и, решая n уравнений вида (2.29) относительно этих постоянных, найти соответствующее управление.

Теперь рассмотрим случай, когда система имеет только один вход. Тогда решение канонических уравнений имеет вид:

$$x_i^*(t_1) = e^{\lambda_i t_1} x_i^*(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda_i(t_1-\tau)} b_{i1}^* u_1(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.30)$$

Заметим, что любой интервал $t_1 - t_0$ можно разделить на n подынтервалов $t_n - t_{n-1}, t_{n-1} - t_{n-2}, \dots, t_1 - t_0$. Тогда интеграл в уравнении (2.30) превращается в сумму из n интегралов. Управление можно задать как n постоянных, но различных значений на этих интервалах. В результате мы получим n однотипных уравнений с n неизвестными значениями управления u на каждом таком временном подынтервале, которые должны удовлетворять n произвольным значениям $x_i(t_1)$. Таким образом, и в этом случае задача решается.

Пример 2.5. Вновь рассмотрим систему

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы A (см. предыдущие примеры) собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, матрица преобразования V имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица V^{-1} :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица Λ :

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B^* :

$$B^* = V^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что каноническая система имеет вид:

$$\dot{x}_1^*(t) = -x_1^*(t),$$

$$\dot{x}_2^*(t) = 5x_1^*(t) + u(t).$$

Из этих уравнений видно, что никакое управление не может повлиять на первую каноническую переменную, следовательно, такая система неуправляема.

2.8.2 Критерий управляемости для случая, когда имеются кратные собственные значения матрицы A

Приведение к канонической форме и, соответственно, диагонализацию системы нельзя осуществить в том случае, когда имеются кратные собственные значения матрицы A , то есть не все её собственные значения различны [3]. Тем не менее, матрица системы A может быть преобразована к **канонической жордановой форме**, которая, например, в случае, когда первое собственное значение имеет кратность 3, имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 = \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 = \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_5 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Здесь верхняя диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ называется

блочно *Жордана*.

Матрица A неприводима к жордановой форме, если минимальный многочлен матрицы и характеристическое уравнение совпадают. Здесь под минимальным многочленом подразумевается уравнение минимального порядка из уравнений вида:

$$A^q + \alpha_{q-1}A^{q-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0E = 0,$$

а характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0,$$

λ – собственные значения матрицы A .

Матрица J может содержать на главной диагонали столько блоков Жордана, сколько имеется кратных корней.

Для того, чтобы система была управляемой, в этом случае необходимо, чтобы хотя бы один элемент матрицы B в строке, которая соответствует нижней строке каждого блока Жордана, и хотя бы один элемент матрицы B в каждой другой строке был отличен от нуля.

Основной недостаток критериев управляемости, основанных на каноническом преобразовании системы в том, что требуется вычисление собственных значений и собственных векторов. Следствием этого является то, что с ростом размерности системы очень быстро нарастает объем вычислений для проверки управляемости.

2.8.3 Критерий управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}

Этот критерий предложен Калманом. К преимуществам этого критерия следует отнести то, что отпадает необходимость канонизации системы и определения собственных векторов, а также то, что критерий применим к системам с кратными собственными значениями матрицы A .

Для проверки управляемости Калман предложил использовать решение уравнения состояния, которое дает следующее выражение для вектора состояний в некоторый момент времени t_1 :

$$\vec{x}(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

Изменив пределы интегрирования, на основании (4.32) можно записать:

$$\vec{x}(t_0) = e^{A(t_0-t_1)}\vec{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Всегда можно или положить $\vec{x}(t_1) = 0$ и рассмотреть первое из следующих уравнений, или же рассматривать второе уравнение:

$$\vec{x}(t_0) = \int_{t_1}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau, \quad \text{или} \quad (2.34)$$

$$\vec{x}(t_0) - e^{A(t_0-t_1)}\vec{x}(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} B \vec{u}(\tau) d\tau.$$

В соответствии с теоремой Кэли–Гамильтона любая квадратная матрица A размерности $n \times n$ удовлетворяет своему собственному многочленному уравнению порядка n :

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i. \quad (2.35)$$

Поэтому любое многочленное матричное уравнение порядка $(n+r) > n$ можно представить в виде многочленного матричного уравнения порядка $(n+r-1) > n-1$, то есть на единицу меньшего порядка:

$$A^{n+r} = A^r A^n = A^r \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i A^i = P_{n+r-1}(A). \quad (2.36)$$

Теперь заметим, что по определению матричной экспоненты имеет место формула:

$$e^{At} = E + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (2.37)$$

На основании теоремы Сильвестра этот результат справедлив и для бесконечных степенных рядов матрицы A . Поэтому матричную экспоненту можно представить в виде:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i. \quad (2.38)$$

Скалярные коэффициенты $\gamma_i(t)$ – конечные величины для любого конечного значения времени t и любой матрицы A .

Используя такое представление для матричной экспоненты в уравнении (2.34), получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_0) &= \int_{t_1}^{t_0} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t_0 - \tau) A^i B \bar{u}(\tau) d\tau \quad \text{или} \\ \bar{x}(t_0) - e^{A(t_0 - t_1)} \bar{x}(t_1) &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_{t_1}^{t_0} \gamma_i(t_0 - \tau) \bar{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Введем следующие обозначения.

$$M = [B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B]; \quad (2.40)$$

$$\vec{w}_i = \int_{t_1}^{t_0} \gamma_i(t_0 - \tau) \bar{u}(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad (2.41)$$

$$W = \begin{bmatrix} \vec{w}_0 \\ \vec{w}_1 \\ \dots \\ \vec{w}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

где M – «матрица» размерности $n \times (n \times m)$, w_i – вектор размерности m , W – «вектор» размерности $(n \times m)$.

Теперь уравнение (2.37) представим в виде:

$$\bar{x}(t_0) = MW. \quad (2.43)$$

Теперь можно сформулировать критерий управляемости на основе разложения матричной экспоненты:

Линейная система управляема, если ранг матрицы M в уравнении (2.43) равен n .

Если система управления имеет только один вход, то матрица B представляет собой вектор-столбец. В этом случае только что сформулированный критерий означает, что для управляемости должна существовать обратная матрица M^{-1} .

Пример 2.6. Оценим управляемость уже рассмотренной ранее системы на основе разложения матричной экспоненты.

Пусть система задана матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу M :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad M = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы M линейно зависимы, следовательно, ранг матрицы M меньше $n=2$. Поэтому система неуправляема.

2.8.4 Управляемость по выходу

Рассмотренные ранее критерии относятся к критериям управляемости по состоянию. В теории управления выделяют также критерии управляемости системы по выходу. Напомним, что для линейных систем уравнение выхода имеет вид:

$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t),$$

где $\vec{y}(t)$ – q -мерный вектор выходных сигналов, C – матрица размерности $q \times n$, $q < n$.

Определение. Система является управляемой по выходу, если из любого состояния с выходом $\vec{y}(t_0)$ она может быть переведена в любое другое желаемое состояние с выходом $\vec{x}(t_1)$ за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в результате приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\vec{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.

Критерий управляемости по выходу аналогичен критерию управляемости по состоянию. Система управляема по выходу, если ранг матрицы

$$M^* = [CAB, CA^2B, \dots, CA^{n-1}B] \quad (2.44)$$

равен q , то есть размерности вектора выходного сигнала.

Контрольные вопросы

1. Разъясните суть процедуры диагонализации.
2. К каким наиболее существенным изменениям приводит процедура диагонализации линейной системы управления?
3. Дайте определение управляемой системы.
4. Сформулируйте критерий управляемости Гильберта.
5. Сформулируйте критерий управляемости для случая кратных собственных значений матрицы A .
6. Сформулировать критерий управляемости на основе разложения матричной экспоненты.
7. Дайте определение управляемости по выходу.
8. Сформулируйте критерий управляемости по выходу.

2.9 Наблюдаемость

Понятие наблюдаемости – двойственное к понятию управляемости. Управляемость предполагает, что любая переменная состояния должна реагировать на входной сигнал, управление. Наблюдаемость означает, что всякое изменение состояния системы будет сопровождаться изменением измеряемого на выходе сигнала.

Определение. *Если все состояния системы можно определить по вектору выходного сигнала, то эта система наблюдаема.*

Если же какое-то состояние не влияет на выходной сигнал, то это означает, что мы имеем дело с ненаблюдаемой системой. Пример ненаблюдаемой системы приведен на рис. 2.2.

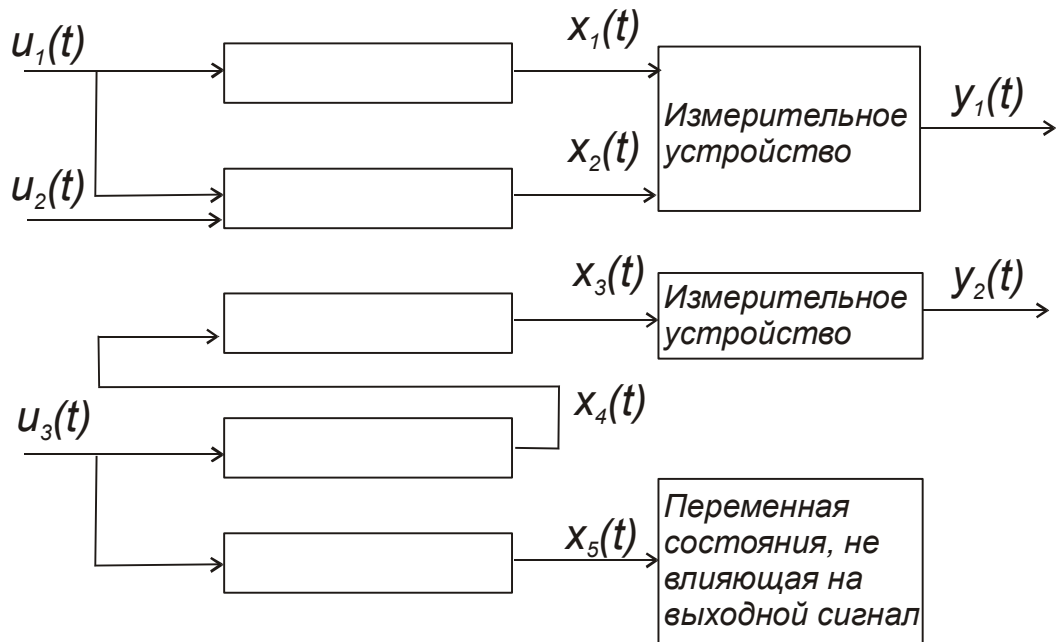


Рис. 2.2 – Пример ненаблюдаемой системы

Ненаблюдаемая система не может быть полностью идентифицирована, так как невозможно определить параметры модели, соответствующие ненаблюдаемым состояниям.

Критерии наблюдаемости систем также основаны на анализе канонических уравнений состояния и на полиномиальном разложении матричной экспоненты e^{At} .

2.10 Критерии наблюдаемости канонических систем

2.10.1 Критерий наблюдаемости Гильберта

Критерий наблюдаемости Гильберта также может быть применен после приведения уравнений линейной системы управления к каноническому виду, то есть после применения процедуры диагонализации. Подход аналогичен исследованию управляемости линейной системы.

Рассмотрим линейную систему, канонические уравнения которой имеют вид:

$$\dot{\vec{x}}^* = \Lambda \vec{x}^* + B^* \vec{u}, \quad \vec{y} = C^* \vec{x}^*(t), \quad C^* = CV, \quad (2.45)$$

(V – матрица собственных векторов).

Критерий наблюдаемости Гильберта: система, заданная каноническими уравнениями, *наблюдаема, если ни один из столбцов матрицы C^* не является нулевым, то есть на выходной сигнал влияют все компоненты вектора преобразованных переменных состояния $\vec{x}^*$.*

Если матрица C^ содержит хотя бы один нулевой столбец, то система ненаблюдаема.*

Для доказательства этого утверждения рассмотрим диагонализруемую систему с различными собственными значениями, которая задана в дискретной форме:

$$\begin{aligned}\vec{x}(k+1) &= \varphi \vec{x}(k) + B\vec{u}(k), \\ \vec{y}(k) &= C\vec{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{2.46}$$

где φ – диагональная матрица размера $(n \times n)$ с различными элементами, $\vec{x}$, $\vec{u}$, $\vec{y}$ – векторы размерности n, m, q , ($q \leq n$) соответственно.

Введем в рассмотрение измеримую скалярную величину z , которую определим как скалярное произведение вектора выходного сигнала $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ на вспомогательный вектор $\vec{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ следующим образом:

$$z = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_q y_q.\tag{2.47}$$

Компоненты вектора $\vec{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ выберем так, чтобы все элементы вектора $\vec{w}C$ не были равны нулю.

Теперь подставим в выражение (2.47) для скаляра z выражение для вектора выходного сигнала из уравнения выходов. В результате получим:

$$\begin{aligned}z(k) &= \vec{w}C\vec{x}(k) = \vec{d}\vec{x}(k) = d_1 x_1(k) + d_2 x_2(k) + \dots + d_n x_n(k), \\ \vec{d} &= \vec{w}C = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad d_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Здесь все компоненты вектора состояний $\vec{x}$ влияют на измеряемый скаляр z .

Теперь рассмотрим задачу определения n компонент вектора состояний $\vec{x}$ из уравнений (2.48) на основании измерений величины z . Понятно, что для этого нужно осуществить n измерений этой величины в n различных моментов времени. Обозначим результаты этих измерений через $z(k+r)$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Тогда, используя уравнения состояния системы и уравнения (2.48),

получим для определения вектора состояний систему из n независимых уравнений вида:

$$\begin{aligned} z(k) &= \vec{d}\vec{x}(k), \\ z(k+1) &= \vec{d}\vec{x}(k+1) = \vec{d}\varphi\vec{x}(k) + \vec{d}Bu(k), \\ z(k+2) &= \vec{d}\vec{x}(k+2) = \vec{d}\varphi\vec{x}(k+1) + \vec{d}Bu(k+1) = \vec{d}\varphi^2\vec{x}(k) + \vec{d}\varphi Bu(k) + \vec{d}Bu(k+1), \\ &\dots \\ z(k+r) &= \vec{d}\vec{x}(k+r) = \vec{d}\varphi^r\vec{x}(k) + \vec{d}\sum_{\nu=0}^{r-1}\varphi^\nu Bu(k+r-\nu), \quad \varphi^0 = E, \quad r=0,2,\dots,n-1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Теперь введем n -мерный вектор измерений $\vec{Z}(k) = \{z(k), z(k+1), \dots, z(k+n-1)\}$. С учетом этих обозначений уравнения (2.49) можно записать в матричной форме:

$$\vec{Z}(k) = P\vec{x}(k) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \vec{u}(k+\nu), \quad (2.50)$$

где $P = \begin{pmatrix} \vec{d} \\ \vec{d}\varphi \\ \dots \\ \vec{d}\varphi^{n-1} \end{pmatrix}$ – матрица размера $(n \times n)$, числа λ_i определяются из (2.49).

Управления $\vec{u}(k+i)$ в этом уравнении могут быть измерены. Если матрица φ диагональная и содержит разные элементы, то строки матрицы P линейно независимы, а значит существует и обратная матрица P^{-1} . В таком случае векторы $\vec{x}(k)$ можно найти из уравнения (2.50), если измерены векторы $\vec{u}(k+i)$ и $\vec{Z}(k)$. Если в уравнении (2.50) нет какой-либо компоненты x_i вектора состояний, никакой информации об этих компонентах не содержится и в значениях $\vec{Z}(k)$ или $\vec{y}(k)$. Поэтому и определить состояние системы на основании измерений величины $\vec{y}(k)$ невозможно. В этом случае вектор $\vec{d}$ является вектором, в котором число ненулевых компонент не превышает $(n-1)$. Тогда матрица P вырожденная, обратную матрицу для вычисления $\vec{x}(k)$ найти не удастся.

Пример 2.7. Рассмотрим систему

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad \vec{y} = C\vec{x},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 1).$$

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, матрица преобразования V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки наблюдаемости находим матрицу C^* :

$$C^* = CV = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 3).$$

Так как первый столбец матрицы C^* нулевой, то система ненаблюдаема.

2.10.2 Критерий наблюдаемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты e^{At}

Этот критерий наблюдаемости подобен критерию управляемости на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

Рассмотрим систему с уравнениями состояния и выходов обычного вида:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad \vec{y} = C\vec{x}(t). \quad (2.51)$$

Примем, что вектор входных сигналов может быть измерен. Кроме того, если вектор управления равен нулю, то это не может повлиять на наблюдаемость системы. Поэтому в целях упрощения анализа положим $\vec{u}(t) = 0$. Используя представление решения уравнения состояния с помощью матричной экспоненты, можем записать для выходного сигнала равенство:

$$\vec{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0). \quad (2.52)$$

Воспользуемся выражением для матричной экспоненты в виде:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i. \quad (2.53)$$

С помощью этого равенства представим выходной сигнал в виде:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t-t_0) C A^i \bar{x}(t_0). \quad (2.54)$$

Определим следующий вектор (строку) $\bar{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t_0), \gamma_1(t-t_0), \dots, \gamma_{n-1}(t-t_0)\}$. Кроме того, введем обозначение:

$L = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T)$ – матрица размера $n \times (q \times n)$.

С учетом этих обозначений уравнение (2.54) можно представить в виде:

$$\bar{y}(t) = \bar{\Gamma} L^T \bar{x}(t_0). \quad (2.55)$$

Необходимо заметить, что вектор $\bar{\Gamma} = \{\gamma_0(t-t_0), \gamma_1(t-t_0), \dots, \gamma_{n-1}(t-t_0)\}$ будет иметь различные значения в различные моменты времени t при одинаковом t_0 . Отсюда следует, что для однозначного определения состояния системы в некоторый момент времени t_0 необходимо, чтобы матрица L имела ранг n . **Итак, линейная система наблюдаема, если ранг матрицы L в уравнении (2.55) равен n .**

Пример 2.8. Рассмотрим систему с двумя переменными состояниями, одним измеряемым выходным сигналом, и такую, что матрица L имеет два линейно зависимых столбца:

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & 3l_1 \\ l_2 & 3l_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнение вида (7.11) имеет вид:

$$\begin{aligned} y(t) &= (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\gamma_0, \gamma_1) \begin{pmatrix} l_1 x_1 + l_2 x_2 \\ 3l_1 x_1 + 3l_2 x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \gamma_0(l_1 x_1 + l_2 x_2) + 3\gamma_1(l_1 x_1 + l_2 x_2). \end{aligned}$$

Так как матрица L не зависит от времени, то состояния x_1, x_2 определить однозначно нельзя. В выходном сигнале они всегда будут зашифрованы в виде комбинации $(l_1 x_1 + l_2 x_2)$, которую не удастся разделить, в какие бы моменты времени ни проводились измерения выходного сигнала.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение наблюдаемой системы.
2. Сформулируйте критерий наблюдаемости Гильберта.
3. Сформулируйте критерий наблюдаемости на основе разложения матричной экспоненты.

3 СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1 Получение моделей в пространстве состояний по скалярным передаточным функциям

Рассмотрим представление системы с помощью передаточных функций, связывающих выходной сигнал системы с одной входной переменной. Если система имеет несколько входных сигналов, то необходимо вводить несколько передаточных функций. Рассмотрим Z -преобразование дискретных передаточных функций.

Напомним некоторые основные определения.

Изображением функции $f(k)$ (см., например, 1) дискретного аргумента называется функция комплексной переменной z вида:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k}.$$

Функция-оригинал находится по изображению с помощью формулы:

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где C – контур, внутри которого находятся все особые точки функции $F(z)$.

Под передаточной функцией линейной стационарной системы далее подразумевается функция комплексного переменного:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z)}{u(z)}, \quad (3.1)$$

где z^{-1} – оператор сдвига, который удовлетворяет условию $z^{-i} y_k = y_{k-i}$.

Представление в виде (3.1.) соответствует равенству:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m). \quad (3.2)$$

В свою очередь, уравнение (3.2) соответствует представлению системы в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= \Phi \bar{x}(k-1) + \Gamma \bar{u}(k-1), \\ y(k) &= C \bar{x}(k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где матрицы Φ , Γ , C есть матрицы вида:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}; \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \vec{\beta}, \quad C = \{1, 0, \dots, 0\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пример 3.1. Рассмотрим систему, которая задана передаточной функцией вида:

$$G(z) = \frac{0,6z}{z^2 - 1,6z + 1} = \frac{0,6z^{-1}}{1 - 1,6z^{-1} + z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{y(z)}{u(z)}.$$

Здесь через u обозначен входной, через y – выходной сигнал системы.

Для записи по этим соотношениям дискретной модели в пространстве состояний запишем выражения для матриц Φ и Γ . Получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +1,6 \end{pmatrix}; \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1,6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1,6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,96 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате получим следующие уравнения системы:

$$\bar{x}(k) = \Phi \bar{x}(k-1) + \Gamma \bar{u}(k-1), \Rightarrow$$

$$x_1(k) = x_2(k-1) + 0,6u(k-1),$$

$$x_2(k) = -1,6x_1(k-1) + 1x_2(k-1) + 0,96u(k-1),$$

$$y(k) = x_1(k).$$

3.2 Получение скалярных передаточных функций на основе дискретных моделей в пространстве состояний

Для наблюдаемой системы, линейная модель которой задана в пространстве состояний, передаточная функция модели может быть получена в результате преобразования модели в пространстве состояний в коагулированную форму. Рассмотрим случай, когда модель задана в дискретной форме.

Пусть в пространстве состояний задана дискретная модель системы с уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \bar{w}(k+1) &= \psi \bar{w}(k) + \Omega u(k), \\ y(k) &= D \bar{w}(k), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\bar{w}$ – вектор состояний системы, u – скалярный входной сигнал (управление), y – скалярный выходной сигнал.

Рассмотрим уравнения, по которым может быть получена дискретная передаточная функция, соответствующая системе (3.6), которая предполагается известной. Итак, будем искать передаточную функцию, соответствующую системе (3.6) в виде:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3.7)$$

(напомним, что z^{-1} – оператор сдвига, который удовлетворяет условию $z^{-i} y_k = y_{k-i}$).

Заметим, что для систем вида (3.7) должно выполняться условие $m \leq n$, поэтому будем рассматривать крайний случай $m = n$.

Тогда для дискретной модели соотношение (3.7) эквивалентно равенству:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) &= b_1 u(k-1) + \\ &+ b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для наблюдаемой системы (3.6) справедливо утверждение о том, что её преобразование к коагулированной форме может быть выполнено с помощью матрицы преобразования T , которая имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} D \\ D\psi \\ \dots \\ D\psi^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Преобразованная модель (3.6) в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}^*(k+1) &= \psi^* \bar{w}^*(k) + \Omega^* u(k), \\ y(k) &= D^* \bar{w}^*(k), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\bar{w}^*$, ψ^* , Ω^* , D^* – переменные состояния и матрицы, полученные в результате преобразований $\bar{w}$, ψ , Ω , D в уравнениях (3.6) соответственно. Эти величины определяются формулами:

$$\psi^* = T\psi T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}; \quad (3.11)$$

$$\bar{w}^* = T\bar{w}; \quad (3.12)$$

$$\Omega^* = T\Omega; \quad (3.13)$$

$$D^* = DT^{-1}. \quad (3.14)$$

Коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_n$ находятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^* \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ \Omega_n^* \end{pmatrix} = \alpha \Omega^*. \quad (3.15)$$

Пример 3.2. Рассмотрим систему, которая задана следующей моделью в пространстве состояний:

$$\vec{w}(k+1) = \psi \vec{w}(k) + \Omega u(k), \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = (2, 1),$$

$$y(k) = D\vec{w}(k).$$

Найдем матрицу T :

$$T = \begin{pmatrix} D \\ D\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем также обратную матрицу T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти матрицу $\psi^* = T\psi T^{-1}$:

$$\begin{aligned} \psi^* = T\psi T^{-1} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 40 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица Ω^* равна:

$$\Omega^* = T\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^* равна:

$$D^* = DT^{-1} = (2 \ 1) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} (8 \ 0) = (1 \ 0).$$

Нетрудно увидеть, что матрица $\psi^* = T\psi T^{-1}$ имеет коагулированную форму. Из выражения для этой матрицы находим, что

$$a_1 = -4, \quad a_2 = -5.$$

Аналогичным образом находим коэффициенты b_1, b_2 :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \Omega^* = T\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^* \\ \Omega_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$G(z) = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 4z^{-1} - 5z^{-2}} = \frac{y(z)}{u(z)}.$$

3.3 Получение скалярных передаточных функций на основе непрерывных моделей в пространстве состояний

Способ получения передаточной функции на основе непрерывной модели в пространстве состояний рассмотрим на примере применения преобразования Лапласа к уравнениям стационарной линейной системы с одним входом и одним выходом. Эти уравнения после применения к ним преобразования Лапласа имеют вид:

$$\begin{aligned} s\bar{x}(s) &= A\bar{x}(s) + Bu(s), \\ y(s) &= C\bar{x}(s). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь s – параметр преобразования Лапласа $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$, $\bar{x}(s)$ – трансформанта Лапласа вектора состояний $\bar{x}(t)$, $u(s)$ – трансформанта Лапласа входного сигнала $u(t)$, $y(s)$ – трансформанта Лапласа скалярного выходного сигнала $y(t)$.

Из первого уравнения (3.16) следует, что

$$\begin{aligned} (sE - A)\bar{x}(s) &= Bu(s), \Rightarrow \bar{x}(s) = (sE - A)^{-1}Bu(s), \\ y(s) &= C(sE - A)^{-1}Bu(s) = . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, для передаточной функции имеет место формула:

$$\begin{aligned} (sE - A)\bar{x}(s) &= Bu(s), \Rightarrow \bar{x}(s) = (sE - A)^{-1}Bu(s), \\ G(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = C(sE - A)^{-1}B. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В отличие от дискретной модели, этот метод получения передаточной функции для непрерывной модели не может быть напрямую реализован с помощью компьютерной модели, так как параметр преобразования S – непрерывная комплексная переменная. Но аналитический вывод передаточной функции таким способом для систем малой размерности очень прост, что и иллюстрирует следующий пример.

Пример 3.3. Получить передаточную функцию, используя преобразование Лапласа линейной системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y = x_1(t) \Rightarrow y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

В пространстве трансформант Лапласа эти уравнения имеют вид:

$$s \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(s),$$

$$y(s) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}.$$

Отсюда для передаточной функции имеем следующее выражение:

$$s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(s), \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} u(s), \quad y(s) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+3)+2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s+3)+2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 9 \\ 9s \end{pmatrix} = \frac{9}{s^2 + 3s + 2}.$$

Контрольные вопросы

1. Получение моделей в пространстве состояний по заданным скалярным передаточным функциям.

2. Получение скалярных передаточных функций на основе дискретной модели в пространстве состояний.

3. Получение скалярных передаточных функций на основе непрерывной модели в пространстве состояний.

4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1 Математическая постановка задачи планирования экспериментов

Следуя результатам работ [4, 5], рассмотрим основы теории планирования экспериментов. Пусть контролируемые переменные $\vec{x}$, которые описывают состояние моделируемой системы, при функционировании этой системы преобразуются в выходную переменную $\vec{y}$. Эксперимент с системой или моделью системы заключается в том, что контролируемой переменной $\vec{x}$ последовательно присваиваются некоторые значения $\vec{\xi}$, для которых получаются соответствующие значения выходной переменной $\vec{y}$.

Пусть точная аналитическая зависимость между переменными $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неизвестна, и пусть цель экспериментов – оценка этой зависимости. Такая постановка задачи типична для многих исследований. От выбора значений контролируемой переменной $\vec{x}$, то есть величин $\vec{\xi}$, и количества опытов, в значительной степени зависит точность оценки этой неизвестной зависимости $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Набор значений $\vec{\xi}$, которые принимает в ходе эксперимента контролируемая переменная $\vec{x}$, и представляет собой **план имитационного эксперимента**.

Эксперимент, для которого множество Θ возможных значений $\vec{\xi}$ содержит не менее двух различных элементов, называется **активным**, так как в этом случае экспериментатор может управлять выбором элементов из множества Θ , подчиняя этот выбор каким-то своим целям. Если множество Θ не определено или состоит из одного элемента, то эксперимент называется пассивным.

Математическая постановка задачи планирования эксперимента такова. Пусть заданы два множества объектов: $\{x\} = F_1$ и $\{y\} = F_2$ и предполагается, что существует (пока не известный) оператор $A: F_1 \rightarrow F_2$, преобразующий множество $\{x\} = F_1$ в $\{y\} = F_2$, $y = Ax$. Многие прикладные задачи заключаются в том,

чтобы восстановить неизвестный оператор A по экспериментальным данным.

В результате эксперимента объекту $\vec{x}$ ставится в соответствие некоторое значение $\hat{y} = \hat{A}x$, которое из-за погрешностей эксперимента отличается от точного значения $y = Ax$. При восстановлении оператора A экспериментатор априори выбирает некоторое множество операторов $\bar{A}$, определенных на $\{x\} = F_1$. Предполагается, что среди операторов в $\bar{A}$ можно найти оператор $\bar{A}_0$, близкий к A . Задачей оптимального планирования эксперимента и является поиск оператора $\bar{A}_0$.

Если искомый оператор A – функция, известная с точностью до конечного числа неизвестных параметров (коэффициентов), то задача сводится к классической задаче планирования **регрессионных** экспериментов. Смысл, который вкладывается в термин *регрессионный*, поясним несколько позже.

4.2 Регрессионные модели экспериментов и их статистический анализ

Рассмотрим основные положения теории планирования эксперимента, изложенные в [3–7]. Пусть выходная переменная y зависит от контролируемых переменных $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. В результате выполнения n имитационных экспериментов будет получен вектор $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$, который зависит от матрицы

$$F = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь первый индекс i – номер эксперимента, j – номер переменной, так что x_{ij} – значение j -й контролируемой переменной в i -м эксперименте.

В теории планирования экспериментов вектор $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$ называется вектором результатов измерения, а матрица F называется матрицей плана эксперимента.

При постановке экспериментов принимается априори (лат. a priori – из предшествующего, до опыта) предположение, что зависимость между выходной и управляемыми переменными имеет вид:

$$y = f(\vec{x}, \vec{\theta}), \quad (4.2)$$

причем функция $f(\vec{x}, \vec{\theta})$ считается известной с точностью до конечного числа неизвестных параметров (коэффициентов) $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. Другими словами, вид функции также задается исследователем априори. Например, эта функция может быть задана в виде полинома, тригонометрической функции и т.п.

Из-за погрешностей эксперимента, влияния случайных факторов, вектор результатов измерений $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$ и матрица плана F связаны не точной зависимостью (4.2), а стохастической зависимостью

$$y^{(i)} = f(\vec{x}^{(i)}, \vec{\theta}) + \mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где $y^{(i)}$ – измеренная в i -м эксперименте величина y (выходной сигнал), $\mu^{(i)}$ – случайная ошибка «измерений» этой величины в i -м эксперименте, $\vec{x}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}\}$.

Следуя основам теории измерений, примем предположение о том, что *случайные ошибки распределены по нормальному закону*, то есть плотность вероятности распределения случайной величины x есть

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Это предположение называют также **основной гипотезой** теории измерений. Принятие этого предположения означает, что средние значения ошибок, т.е. математическое ожидание случайной ошибки измерений $\mu^{(i)}$, равно нулю ($E(\mu^{(i)}) = 0$), ошибки в разных опытах некоррелированы ($E(\mu^{(i)}, \mu^{(j)}) = 0$ при $i \neq j$), и дисперсия $D(\mu^{(i)}) = (\sigma^{(i)})^2$, где $\sigma^{(i)}$ – стандартное отклонение (разброс) случайной величины.

Учитывая, что $E(\mu^{(i)}) = 0$, выражение (4.3) запишем в виде:

$$E(y^{(i)}) = \eta(\vec{x}^{(i)}, \theta) = f(\vec{x}^{(i)}, \theta), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В теории планирования эксперимента функция $\eta(\bar{x}^{(i)}, \theta) = f(\bar{x}^{(i)}, \theta)$ называется *поверхностью* (имеется в виду её графическое изображение) *отклика* или *функцией регрессии*.

Задача регрессионного анализа заключается в том, чтобы оценить значения $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ по выборке экспериментальных значений $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$. Наиболее изученным в теории планирования экспериментов является случай, когда функция $f(\bar{x}, \vec{\theta})$ линейна по параметрам $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. В этом случае зависимость $\vec{y} = \vec{f}(\bar{x}, \vec{\theta})$ имеет вид:

$$y^{(i)} = \vec{f}(\bar{x}^{(i)})\vec{\theta} + \mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Здесь функция $\vec{f}(\bar{x}) = \{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})\}$ рассматривается как заданная векторная непрерывная функция своих аргументов.

Наконец, частным случаем зависимости (4.4) является случай, когда выходной сигнал y линейно зависит не только от коэффициентов (параметров) $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, но и контролируемые переменные также линейно входят в правую часть (4.4). Тогда выражение (4.4) преобразуется к виду:

$$y^{(i)} = \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \dots + \theta_m x_m^{(i)} + \mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5a)$$

В матричной форме записи это уравнение имеет вид:

$$\vec{y} = F\vec{\theta} + \vec{\mu} \quad (\vec{\mu} = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(n)}\}). \quad (4.5b)$$

Здесь F – матрица вида (4.1) размером $n \times m$ (k – количество параметров).

Теперь рассмотрим линейные оценки значений параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, которые получаются на основе экспериментов и имеют вид:

$$\tilde{\vec{\theta}} = T\vec{y}, \quad (4.6)$$

где T – матрица размера $m \times n$.

Оценка $\tilde{\vec{\theta}}$ называется **наилучшей линейной несмещенной оценкой**, если она имеет наименьшие дисперсии $D(\theta_i) = (\sigma_i)^2$ среди всех оценок вида (4.6). Естественно, возникает вопрос, как найти матрицу T и наилучшую линейную несмещенную оценку? Ответ дает теорема Гаусса–Маркова и её следствия. Но прежде

чем перейти к их изучению, рассмотрим общие основы теории наблюдений (см., например, [3–7]), необходимые для лучшего понимания методов статистического анализа регрессионных экспериментов.

4.3 Метод максимального правдоподобия

Пусть целью экспериментов является измерение некоторой величины x (скалярный случай). Пусть истинное значение этой величины равно x_0 . Будем пока считать, что это точное значение измеряемой величины известно. Тогда ошибка наблюдения будет равна $\delta = x - x_0$. Примем предположение, что *как случайные ошибки измерения, так и результаты измерений неизвестной величины x распределены по нормальному закону*. Мы уже говорили, что это предположение называют также *основной гипотезой* теории измерений. Тогда плотность вероятности распределения величины x есть

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

с математическим ожиданием, равным истинному значению x_0 , и дисперсией $D(x) = \sigma^2$. Это значит, что результат отдельного измерения является элементом бесконечного множества измерений (его называют генеральной совокупностью), которые выполняются в одинаковых условиях со средней ошибкой σ (равноточные измерения). Среднее арифметическое этой совокупности равно математическому ожиданию x_0 , то есть истинному значению измеряемой величины. На практике количество наблюдений ограничено. Поэтому ряд $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ экспериментальных значений измеряемой величины x рассматривается как случайная выборка из генеральной совокупности. Здесь верхний индекс (n) означает номер опыта, в котором измерена неизвестная величина x . Закономерен вопрос: как распорядиться такой выборкой, чтобы наиболее точно оценить истинное значение x_0 измеряемой величины, когда оно неизвестно, и достоверность полученного результата? Ответ является итогом следующих рассуждений.

Так как результаты измерений можно рассматривать как взаимно независимые, то плотность вероятности реализации в n экспериментах всей выборки $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ равна произведению плотностей вероятностей реализации каждого отдельного измерения:

$$\begin{aligned} p(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) &= p(x^{(1)})p(x^{(2)}) \dots p(x^{(n)}) = \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - x_0)^2\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Напомним, что наша цель – оценить неизвестное истинное значение x_0 и при этом обеспечить минимальную среднюю ошибку σ , где $D(x) = \sigma^2$ – дисперсия. Это значит, что нас интересуют экстремумы плотности вероятности (4.7), которую теперь будем рассматривать как функцию двух переменных x_0 и σ . Понятно, что наибольшую точность оценки неизвестной величины по результатам измерений (выборки) $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ при минимальной погрешности σ может обеспечить выбор x_0 , при котором будут выполнены необходимые условия экстремума функции

$$p(x_0, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - x_0)^2\right). \quad (4.8)$$

Таковыми условиями, как это следует из курса математического анализа, в нашем случае будут условия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_0} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - x_0) = 0, \\ \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - x_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, в свою очередь, что выборке $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$, которая реализовалась в n экспериментах, будет поставлено в соответствие наибольшее значение плотности вероятности $p(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = p(x_0, \sigma)$ при

$$x_0 = x_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)} \quad (4.10)$$

и любом значении σ , а также при

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - x_0)^2 \quad (4.11)$$

и любом значении x_0 .

Иными словами, при нормальном законе распределения ошибок измерения, наиболее вероятной оценкой измеряемой величины x_0 является среднее арифметическое выборки $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$, а наилучшей оценкой средней ошибки определения величины x_0 является среднеквадратическое отклонение.

Метод, которым получены формулы (4.10)–(4.11), называют *методом максимального правдоподобия*.

4.4 Метод наименьших квадратов (метод максимального правдоподобия) в случае косвенного измерения нескольких величин

Рассмотрим поставленную ранее задачу экспериментального определения коэффициентов в уравнении (модели) (4.4). Сформулируем задачу следующим образом. Пусть целью экспериментов является определение m неизвестных параметров (коэффициентов) $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, которые непосредственным измерениям не поддаются, по результатам измерений величины $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$ в n экспериментах. Компоненты векторной функции $\vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\}$ как функции управляемых (контролируемых) переменных $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ при каждом заданном в i -м эксперименте наборе значений компонент вектора $\vec{x}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}\}$ образуют матрицу $f(\vec{x})$ размера $n \times m$ с элементами следующего вида:

$$\{f_{ij}\} = \{f_j(\vec{x}^{(i)})\} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^{(1)}) & f_2(\vec{x}^{(1)}) & \dots & f_m(\vec{x}^{(1)}) \\ f_1(\vec{x}^{(2)}) & f_2(\vec{x}^{(2)}) & \dots & f_m(\vec{x}^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(\vec{x}^{(n)}) & f_2(\vec{x}^{(n)}) & \dots & f_m(\vec{x}^{(n)}) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Напомним, что здесь индекс i означает номер эксперимента, а индекс j соответствует номеру компоненты вектора параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. Под результатами измерений далее можно по-

нимать как результаты измерений в каких-то физических экспериментах, так и результаты имитационного моделирования, в которых роль измеряемой величины $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$ будет играть величина выходного сигнала.

Теперь уравнение (модель) (4.4) запишем в виде:

$$\sum_{j=1}^m f_{ij} \theta_j = y^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.13)$$

Эту систему нельзя непосредственно разрешить относительно неизвестных θ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$), так как правые части вместо точных значений $y_0^{(i)}$ содержат результаты измерений этих величин $y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)}$ со случайными ошибками $\mu^{(i)}$. Можно сформулировать проблему оценки коэффициентов θ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$) и следующим образом: какие преобразования нужно выполнить с уравнениями (4.13), чтобы по результатам измерений $y^{(i)} = y_0^{(i)} + \mu^{(i)}$, содержащим случайные ошибки, получить максимально достоверную оценку истинных значений коэффициентов этих уравнений? Оказывается, если количество опытов n больше количества неизвестных m ($n > m$), то по результатам $y^{(i)}$ измерений на основании принципа наибольшего правдоподобия можно найти такую совокупность значений $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$, которая с наибольшей вероятностью удовлетворяет уравнениям вида (4.13). С этой целью вновь примем предположение о нормальном распределении плотности вероятности случайных величин $y^{(i)}$:

$$p(y^{(i)}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y^{(i)} - y_0^{(i)})^2\right), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.14)$$

Понятно, что предполагаемые истинные значения $y_0^{(i)}$ измеряемых величин $y^{(i)}$ в точности удовлетворяют уравнениям (4.13) $\sum_{j=1}^m f_{ij} \theta_j = y_0^{(i)}$, в которых «зашифрованы» и точные значения коэффициентов θ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$). С учетом этого обстоятель-

ства для плотности вероятности случайной выборки $\vec{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}$ из (4.14) следует выражение:

$$\begin{aligned} p(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) &= p(y^{(1)})p(y^{(2)})\dots p(y^{(n)}) = \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_{ij}\theta_j)^2\right), \quad (i=1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Теперь эту функцию будем рассматривать как функцию многих переменных θ_j , ($j=1,2,\dots,m$):

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_{ij}\theta_j)^2\right).$$

Эта величина достигает максимума при выполнении необходимых условий экстремума функции многих переменных, то есть при условии одновременного обращения в нуль всех ей частных производных по θ_k , ($k=1,2,\dots,m$).

На этом основании приходим к следующей системе уравнений:

$$-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \theta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \sum_{j=1}^m f_{ij}\theta_j) f_{ik} = 0, \quad (k=1,2,\dots,m). \quad (4.16)$$

Отсюда следует система уравнений относительно θ_j , ($j=1,2,\dots,m$) вида:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f_{ij} f_{ik} \right) \theta_j &= \sum_{i=1}^n f_{ik} y^{(i)}, \quad (k=1,2,\dots,m), \text{ или} \\ \sum_{j=1}^m c_{kj} \theta_j &= b_k \quad \text{где} \quad c_{kj} = c_{jk} = \sum_{i=1}^n f_{ik} f_{ij} = \sum_{i=1}^n f_{ij} f_{ik}, \\ b_k &= \sum_{i=1}^n f_{ik} y^{(i)}, \quad (k=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,m). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Напомним, что здесь f_{ik} , ($i=1,\dots,n; j=1,\dots,m$) – элементы матрицы $f(\vec{x})$.

Заметим, что в системе (4.13) число уравнений n не равно числу неизвестных m . Более того, интуитивно мы ожидаем, что чем больше уравнений (а каждому соответствует одно измерение величины y), тем точнее должна получаться оценка для коэффициентов, но тогда неясно, какое из возможных решений этой си-

системы принимать за «хорошую» оценку коэффициентов. В уравнениях (4.17) эти проблемы сняты: число уравнений равно числу неизвестных, матрица коэффициентов симметрична относительно главной диагонали, что также является существенным достоинством.

Итак, в качестве наиболее вероятной оценки коэффициентов θ_j по результатам измерений, содержащих случайные погрешности, следует брать не прямое решение системы уравнений (4.13), а решение «сконструированных» из неё уравнений (4.17). Условие максимального правдоподобия в этом случае совпадает с условием минимума суммы квадратов ошибок:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y^{(i)})^2 - \sum_{j=1}^m \theta_j \sum_{i=1}^n f_{ij} y^{(i)}. \quad (4.18)$$

Поэтому метод и называется *методом наименьших квадратов*.

Пример 4.1. Рассмотрим следующий пример [3]. Пусть по результатам пяти измерений получена система уравнений типа (4.13) следующего вида:

$$\begin{cases} 4,91\theta_1 - 59,0\theta_2 = -339,8; \\ 2,72\theta_1 - 2,7\theta_2 = -47,5; \\ 0,05\theta_1 + 32,4\theta_2 = 262,5; \\ -2,91\theta_1 + 27,7\theta_2 = 152,9; \\ -4,77\theta_1 + 1,4\theta_2 = -27,9, \end{cases}$$

где правые части – результат измерений. Чтобы получить уравнения вида (4.17) вычислим четыре коэффициента c_{ij} . Итак,

$$c_{11} = \sum_{i=1}^5 f_{i1} f_{i1} = (4,91)^2 + (2,72)^2 + (0,05)^2 + (2,91)^2 + (4,77)^2 = 62,73;$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^5 f_{i1} f_{i2} = 4,91(-59,0) + 2,72(-2,7) + 0,05 \cdot 32,4 + (-2,91)27,7 + (-4,77)1,4 = -382,7;$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^5 f_{i2} f_{i2} = (59,0)^2 + (2,7)^2 + (32,4)^2 + (27,7)^2 + (1,4)^2 = 5307,3.$$

Найдем правые части новых уравнений:

$$b_1 = \sum_{i=1}^5 f_{i1}y^{(i)} = 4,91(-339,8) + 2,72(-47,5) + \\ + 0,05(262,5) + (-2,91)152,9 + (-4,77)(-27,9) = 2096,3;$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^5 f_{i2}y^{(i)} = (-59,0)(-339,8) + (-2,7)(-47,5) + \\ + 32,4(262,5) + 27,7 \cdot 152,9 + 1,4(-27,9) = -32877,7.$$

В итоге имеем следующую систему уравнений относительно θ_1, θ_2 :

$$\begin{cases} 62,73\theta_1 - 382,7\theta_2 = 2096,3; \\ -382,7\theta_1 + 5307,3\theta_2 = -32877,7. \end{cases}$$

Решение дает следующие значения: $\theta_1 = 7,81$ и $\theta_2 = 6,76$.

Посмотрим, какие значения коэффициентов были бы получены, если бы была предпринята попытка (ошибочная!) оценить их по данным двух первых измерений. Решим по правилу Крамера систему:

$$\begin{cases} 4,91\theta_1 - 59,0\theta_2 = -339,8; \\ 2,72\theta_1 - 2,7\theta_2 = -47,5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4,91 & -59,0 \\ 2,72 & -2,7 \end{vmatrix} = -4,91 \cdot 2,7 + 2,72 \cdot 59,0 = +147,223;$$

$$\Delta_{\theta_1} = \begin{vmatrix} -339,8 & -59,0 \\ -47,5 & -2,7 \end{vmatrix} = +339,8 \cdot 2,7 - 47,5 \cdot 59,0 = -1885,04;$$

$$\Delta_{\theta_2} = \begin{vmatrix} 4,91 & -339,8 \\ 2,72 & -47,5 \end{vmatrix} = -4,91 \cdot 47,5 + 2,72 \cdot 339,8 = +691,31;$$

$$\theta_1 = -12,8; \theta_2 = 4,69.$$

Это решение довольно сильно отличается от наиболее вероятной оценки.

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи планирования эксперимента?

2. Что называется вектором результатов измерений и матрицей плана эксперимента?
3. Дайте определение функции отклика.
4. Что называется наилучшей линейной несмещенной оценкой?
5. Разъясните основные положения метода максимального правдоподобия.

4.5 Теорема Гаусса–Маркова. Построение оптимальных планов эксперимента. Полнофакторный эксперимент типа 2^3

При обосновании *метода наименьших квадратов* для получения наиболее правдоподобных оценок величин $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ в уравнениях (4.4), зависящих от случайных ошибок, на основании результатов n экспериментов по измерению величин $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ было принято предположение о том, что случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Однако доказано, что оценки по методу наименьших квадратов имеют минимальную погрешность независимо от типа распределения. Доказательство этого факта и способ получения наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов в уравнениях вида (4.4) дает теорема Гаусса–Маркова [4,3].

Теорема Гаусса–Маркова. 4.1. Для линейной модели вида (4.4)

$$y^{(i)} = \vec{f}(\vec{x}^{(i)})\vec{\theta} + \mu^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

наилучшей линейной несмещенной оценкой является оценка

$$\tilde{\vec{\theta}} = M^{-1}\vec{Y}, \quad (4.19)$$

где M – квадратная матрица размера $m \times m$, которая вычисляется по формуле

$$M = \sum_{i=1}^n \omega_i \vec{f}(\vec{x}^{(i)}) \vec{f}^T(\vec{x}^{(i)}). \quad (4.20a)$$

(здесь надо отличать векторные функции

$\vec{f}(\vec{x}^{(i)}) = \{f_1(\vec{x}^{(i)}), f_2(\vec{x}^{(i)}), \dots, f_m(\vec{x}^{(i)})\}$) от матрицы

$f(\vec{x}^{(i)}) = \{f_{ij} = f_j(\vec{x}^{(i)})\}$).

Предполагается, что M – неособенная матрица. Если воспользоваться представлением уравнений (4.4) в виде (4.13), (4.12), то для вычисления элементов матрицы M имеем формулы

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^n \omega_i f_j(x^{(i)}) f_k(x^{(i)}), \quad (j, k = 1, \dots, m). \quad (4.20b)$$

Вектор правых частей в (4.19) вычисляется по формуле:

$$\vec{Y} = \sum_{i=1}^n \omega_i y^{(i)} \vec{f}(\vec{x}^{(i)}), \quad \omega_i = \frac{1}{(\sigma_i)^2}. \quad (4.21a)$$

Для компонент вектора $\vec{Y}$ эта формула имеет вид:

$$Y_j = \sum_{i=1}^n \omega_i y^{(i)} f_j(\vec{x}^{(i)}), \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (4.21b)$$

Матрицу M называют **информационной матрицей**, а полученную таким образом оценку значений $\tilde{\theta}$ называют оценкой по методу *наименьших квадратов*.

Матрица вариаций оценки $\tilde{\theta}$ равна

$$V(\tilde{\theta}) = M^{-1}. \quad (4.22)$$

Оценка (4.19) справедлива для случая, когда дисперсии ошибок $D(\theta_i) = (\sigma_i)^2$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ экспериментов заданы. Для случая, когда дисперсия неизвестна, имеет место [4,3] обобщение теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Для линейной модели вида (4.4) с равными дисперсиями ошибок $(\sigma_i)^2 = \sigma^2$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ при $n > m$ наилучшей линейной несмещенной оценкой является оценка

$$\tilde{\theta} = M^{-1} \vec{Y}, \quad (4.23)$$

где

$$M = \sum_{i=1}^n f(\vec{x}^{(i)}) f^T(\vec{x}^{(i)}), \quad \det M \neq 0, \quad \text{или}$$

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^n f_j(\vec{x}^{(i)}) f_k(\vec{x}^{(i)}), \quad (j, k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\vec{Y} = \sum_{i=1}^n y^{(i)} \vec{f}(\vec{x}^{(i)}), \quad \text{или} \quad Y_j = \sum_{i=1}^n y^{(i)} f_j(\vec{x}^{(i)}), \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Несмещенной оценкой для дисперсии σ^2 будет следующая

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \tilde{\theta} \bar{f}(\bar{x}^{(i)}))^2}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \sum_{j=1}^m \tilde{\theta}_j f_j(\bar{x}^{(i)}))^2}{n-m}. \quad (4.24)$$

Для линейной модели (4.5) на основании этой теоремы имеем формулы:

$$\tilde{\theta} = (F^T F)^{-1} F^T \bar{Y}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(\bar{Y} - F \tilde{\theta})(\bar{Y} - F \tilde{\theta})^T}{n-m}. \quad (4.26)$$

4.6 Построение оптимальных планов экспериментов

Теоремы 4.1 и 4.2 дают экспериментатору способ получения наилучших несмещенных оценок – способ оценки точности результатов **пассивных** экспериментов при некотором фиксированном наборе значений контролируемых переменных. Но эти же теоремы показывают, что точность оценки параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ испытуемой модели зависит от информационной матрицы M . Эта матрица, в свою очередь, зависит от того, какие именно значения контролируемых переменных будут заданы экспериментатором в каждом отдельном эксперименте, то есть определяется множеством точек $\{x^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N\}$. Набор этих точек и определяет план эксперимента.

Для построения теории планирования эксперимента требуется более строгое определение.

Дискретным или точечным планом [4] эксперимента

$$\xi_N = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, \dots, & x^{(n)} \\ p_1, \dots, & p_n \end{matrix} \right\} \quad (4.27)$$

называют вероятностную меру, сосредоточенную в точках $\{x^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N\}$ с весами $\{p_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, где

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i = r_i / N, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.28)$$

r_i — число повторений точки $x^{(i)}$ в последовательности $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}\}$.

Так как точность оценки параметров $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ зависит от выбора точек $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}\}$, то возникает задача выбора такого дискретного плана ξ_N , который бы обеспечивал *оптимальные* в каком-то смысле оценки этих параметров. В результате возникает задача нелинейной дискретной оптимизации, для которой в большинстве случаев точное решение получить не удастся. Чаще всего используют следующий выход из ситуации. Вместо задачи дискретной оптимизации решается задача непрерывной оптимизации. Это делается за счет смягчения ограничений (4.28) и построения непрерывного плана эксперимента.

Непрерывным планом эксперимента называется план вида

$$\xi = \begin{Bmatrix} x^{(1)}, \dots, & x^{(n)} \\ p_1, \dots, & p_n \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

где

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.30)$$

Если на множестве непрерывных планов (4.29) удастся найти оптимальный ξ^* план, то для применения этих результатов в конкретных экспериментах его «округляют» до дискретного плана ξ_N^* . Каковы же критерии оптимальности, которые используются в теории планирования эксперимента?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к определению линейной модели

$$\sum_{j=1}^m f_{ij} \theta_j = y^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.31)$$

и запишем выражение для информационной матрицы *планируемых* экспериментов следующего вида:

$$M = M(\xi) = M_{jk} = \sum_{i=1}^n p_i f_j(x^{(i)}) \bar{f}_k(x^{(i)}) \sigma_i^{-2}, \quad (j, k = 1, \dots, m). \quad (4.32)$$

Относительно информационной матрицы (4.32) принимается существенно важное допущение, что для всех рассматриваемых

мых планов ξ определитель $\det(M(\xi)) \neq 0$. Следует обратить внимание также на то, что по сравнению с формулой (4.20b) для *пассивных* экспериментов в теореме 4.1, здесь под знаком суммы появился множитель p_i . Смысл этой величины для *планируемого активного* эксперимента прост. Эта величина означает вероятность (для дискретного плана – относительную частоту повторений) экспериментов в одной и той же точке $x^{(i)}$, которая необходима для обеспечения оптимальности плана. Понятно, что в выражении информационной матрицы *реализованных* экспериментов эта величина была равна единице для каждой конкретной экспериментальной точки $x^{(i)}$. Для планируемого оптимального эксперимента эта величина, вообще говоря, должна быть найдена исходя из условий оптимальности.

Предположим, что мы выбрали какой-либо функционал Φ , значение которого зависит от значений коэффициентов информационной матрицы M . Пусть также в качестве критерия оптимальности плана принято условие достижения максимума этого функционала. Тогда план

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} \Phi(M(\xi)) \quad (4.32)$$

(читай – значение аргумента ξ , при котором достигается максимум величины Φ) называется Φ -оптимальным. Функционал Φ и условие (4.32) называют критерием оптимальности плана.

Существует много разновидностей критериев Φ -оптимальности, которые определяются конкретным видом функционала Φ . Наиболее часто используют два из них.

План

$$\xi^* = \arg \max_{\xi} (\det(M(\xi))) \quad (4.33)$$

называется D-оптимальным (от слова детерминант). При D-оптимальном планировании экспериментов минимизируется объем области рассеяния наилучших линейных оценок неизвестных параметров $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ модели (4.4).

План

$$\xi^* = \arg \min_{\xi} (tr(M^{-1}(\xi))) \quad (4.34)$$

называется А-оптимальным (читай – обратная информационная матрица имеет минимальный след). Такой план обеспечивает минимальную суммарную дисперсию наилучших линейных оценок неизвестных параметров $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$.

Таким образом, чтобы построить оптимальный план эксперимента для модели (4.4) необходимо выбрать критерий оптимальности плана вида (4.32) и решить соответствующую задачу оптимизации. Это достаточно сложная задача, но для некоторых частных видов моделей эта задача решена и можно воспользоваться уже имеющимися результатами, которые основаны на следующей теореме.

Пусть контролируемые переменные $x \in X$, где X – компактное подмножество евклидова пространства R^k . Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. – теорема Кифера–Вольфовица. Для модели вида (4.4) непрерывный план ξ^* является D-оптимальным тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\max_{x \in X} \lambda(x) d(x, \xi^*) = \max_{x \in X} \lambda(x) f^T(\bar{x}) M^{-1}(\xi^*) f(\bar{x}) = m, \quad (4.35)$$

где $\lambda(x)$ – величина, обратная дисперсии наблюдений в точке $\bar{x}$. Информационные матрицы всех D-оптимальных планов совпадают и для них $d(x^{(i)}, \xi^*) = m$.

Некоторые примеры оптимальных планов. Критерий (4.35), благодаря своей простоте, позволяет легко строить D-оптимальные планы для многих относительно простых моделей.

Пример 4.2. Тригонометрическая функция отклика. Рассмотрим, например модель функции отклика в виде тригонометрического ряда порядка k :

$$\eta(x, \theta) = \theta_0 + \sum_{j=1}^k (\theta_j \cos(jx) + \omega_j \sin(jx)), \quad x \in X = [0, 2\pi] \quad (4.36)$$

и предположим, что измерения одинаково точны.

На основе критерия (4.35) доказано, что для модели (4.36) D-оптимальным является план вида

$$\xi^* = \left\{ \begin{matrix} x^{(1)}, \dots, & x^{(n)} \\ \frac{1}{n}, \dots, & \frac{1}{n} \end{matrix} \right\}, \quad x^{(i)} = 2\pi(i-1)/n, \quad n \geq 2k+1. \quad (4.37)$$

Пример 4.3. Непрерывный D-оптимальный план для полиномиальной функции регрессии на отрезке $[-1,1]$. Пусть теперь базисные функции имеют вид

$$f_i(x) = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.38)$$

С помощью таких функций можно с заданной точностью на заданном отрезке описать любую другую гладкую функцию. Основой для построения в этом случае D-оптимальных непрерывных планов является следующая теорема [4,3].

Теорема 4.4. Непрерывный D-оптимальный план для полиномиальной функции (1.38) на отрезке $[-1,1]$ единственен и сосредоточен с равными весами $1/m$ в точках, которые являются корнями полинома

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} P_m(x), \quad (4.39)$$

где $P_m(x) = 2^{-2} \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{(2m-2s)!}{s!(m-s)!(m-2s)!} x^{m-2s}$ – полином Лежандра степени m .

Пример 4.4. Полный факторный план. Ортогональным планом называется план с матрицей вида (4.1), все элементы которой равны ± 1 , и при этом столбцы ортогональны. Напомним, что i -я строка матрицы содержит координаты точки $x^{(i)}$ для i -ого эксперимента.

Для линейной модели наблюдений

$$\vec{y} = F\vec{\theta} + \vec{\mu} \quad (\vec{\mu} = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(n)}\},$$

когда множество планирования имеет вид $X = [-1,1]$, D-оптимальным планом является *ортогональный план*. Такой план оказывается одновременно и A-оптимальным.

Примером ортогонального плана может служить *полный факторный план*, сосредоточенный во всех вершинах k -мерного единичного куба с равными весами 2^{-m} . При больших значениях m полные факторные планы не используются, так как количество точек 2^m , в которых необходимо проводить эксперименты, растет слишком быстро с ростом m . Поэтому вместо таких планов применяют дробные факторные планы.

4.7 Факторные планы. Этапы планирования

Факторное планирование применяют с целью построения экономичных планов эксперимента для оценки неизвестных коэффициентов полиномиальных функций. Рассмотрим схему эксперимента, в котором результаты измерений зависят от контролируемых переменных $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, которые при факторном планировании называют факторами. Каждый фактор x_i может принимать конечное число s_i значений. Эти значения называют уровнями фактора. В качестве функции регрессии (модели) при $s_i = 2$ обычно рассматривают полином степени $m \leq k$ (т.е. степень полинома не выше, чем количество факторов). Такая функция регрессии в общем случае имеет вид:

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_k) = \theta_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i x_i + \sum_{i < j} \theta_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \theta_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \quad (4.40)$$

Параметр θ_0 называют общим средним, коэффициенты θ_i , ($i = 1, 2, \dots, k$) называют главными эффектами, θ_{ij} – эффектами двухфакторного взаимодействия, $\theta_{i_1 i_2 \dots i_m}$ – эффектами m -факторных взаимодействий. Чаще всего используются линейные и неполные квадратичные функции регрессии:

$$\begin{aligned} \eta(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \theta_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \\ \eta(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \theta_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i x_i + \sum_{i < j} \theta_{ij} x_i x_j. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Факторный план называется полным факторным планом, если измерения производятся по одному для каждой возможной комбинации уровней фактора. Число экспериментов в полном факторном плане равно $s_1 s_2 \dots s_k$.

4.7.1 Основные этапы планирования эксперимента [8]

1. Формулировка цели исследования, выдвижение основных гипотез, выявление параметров модели и контролируемых переменных (факторов), влияющих на поведение объекта.

2. Выбор (гипотеза) функции отклика.
3. Выбор интервала изменения факторов в процессе экспериментирования.
4. Составление комбинаций уровней факторов, при которых проводятся исследования системы.
5. Определение количества повторений каждого опыта и общего числа опытов.
6. Выбор порядка проведения опытов.
7. Статистическая обработка результатов экспериментов.
8. Анализ результатов, построение модели, проверка адекватности.

Выбор интервалов изменения факторов в эксперименте [8]. При планировании экспериментов применяют кодированные переменные. Это позволяет записывать план эксперимента в виде матриц, элементами которых являются единицы или же знаки «+» и «-», которые соответствуют максимальным и минимальным уровням факторов. К кодированным переменным переходят в результате замены:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{0i}}{\Delta \bar{x}_i},$$

где x_i – кодированная переменная (значение фактора), $\bar{x}_{0i}$ – значение основного уровня фактора в физических (натуральных) единицах, $\bar{x}_i$ – значение фактора в натуральных единицах. Вводят также полуинтервал варьирования фактора:

$$\Delta \bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i\max} - \bar{x}_{i\min}}{2},$$

где $\bar{x}_{i\max}$, $\bar{x}_{i\min}$ – максимальное и минимальное значения фактора в физических единицах.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Гаусса–Маркова и ее обобщения.
2. Запишите выражение для информационной матрицы линейной относительно коэффициентов функции отклика модели (случай с равными дисперсиями), а также формулу несмещенной

оценки для дисперсии. Выведите из них соответствующие формулы для классической линейной модели.

3. Дайте определение дискретного плана эксперимента.
4. Какой план эксперимента называется Φ -оптимальным?
5. Какой план эксперимента называется D-оптимальным?
6. Какой план эксперимента называется A-оптимальным?
7. Опишите основные этапы планирования эксперимента.
8. Как осуществляется переход к кодированным переменным?

4.8 Полный факторный эксперимент при трех факторах. Матрица плана, обработка результатов, проверка адекватности

В качестве функции отклика при полном факторном эксперименте для случая трех факторов рассматривается следующий полином:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (4.42)$$

Общее количество опытов при этом будет $N = 2^k = 2^3$. После того, как в реальной физической задаче такого типа будет сделан переход к кодированным переменным, которые теперь могут принимать значения «+1» и «-1», условия экспериментов записывают в виде матрицы планирования, которая для трех факторов записана в виде таблицы 4.1. ([8]).

Таблица 4.1 ([8]) – Факторный план: матрица планирования 2^3

Матрица планирования 2^3											
№ точечек плана	Факторы								Выходной сигнал		
	X_0 , j=0	X_1 , j=1	X_2 , j=2	X_3 , j=3	$X_0 X_1$, j=4	$X_1 X_2$, j=5	$X_2 X_3$, j=6	$X_1 X_2 X_3$, j=7	y'_i , p=1	y''_i , p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y'_1	y''_1	$\bar{y}_1$
2	+	-	+	+	-	-	+	-	y'_2	y''_2	$\bar{y}_2$
3	+	+	-	+	-	+	-	-	y'_3	y''_3	$\bar{y}_3$
4	+	-	-	+	+	-	-	+	y'_4	y''_4	$\bar{y}_4$

Окончание табл. 4.1

Матрица планирования 2^3											
№ точки плана	Факторы								Выходной сигнал		
	X_0 , j=0	X_1 , j=1	X_2 , j=2	X_3 , j=3	X_0X_1 , j=4	X_1X_2 , j=5	X_2X_3 , j=6	$X_1X_2X_3$, j=7	y'_i , p=1	y''_i , p=2	$\bar{y}_i$
5	+	+	+	-	+	-	-	-	y'_5	y''_5	$\bar{y}_5$
6	+	-	+	-	-	+	-	+	y'_6	y''_6	$\bar{y}_6$
7	+	+	-	-	-	-	+	+	y'_7	y''_7	$\bar{y}_7$
8	+	-	-	-	+	+	+	-	y'_8	y''_8	$\bar{y}_8$

Строки этой матрицы соответствуют номеру эксперимента, а первые три столбца дают план изменения контролируемых переменных (факторов). Столбец для «фиктивной» переменной x_0 предназначен для последующей оценки свободного члена b_0 . Значение x_0 равно «+1» и постоянно во всех опытах. Столбцы для выходной переменной содержат результаты повторных (многократных) измерений этой величины. Для обеспечения высокой достоверности результатов требуется значительное число повторений.

Важно то, что полный факторный эксперимент относится к числу *ортогональных планов*. Преимущество в том, что это резко упрощает расчет коэффициентов регрессии.

1. Вместо прямого решения системы нормальных уравнений используют следующие простые расчетные формулы для коэффициентов регрессии:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} \bar{y}_i}{N}, \quad (4.43)$$

где j – номер фактора, N – количество опытных точек в плане, i – номер опытной точки в плане (номер строки). Величина

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{p=1}^r \bar{y}_{ip}}{r} \quad (4.44)$$

дает средний отклик (выходной сигнал) по числу повторений опытов в точке с номером i (r – число повторных опытов). При

варьировании каждого фактора на двух уровнях в пределах «+1», «-1» вычисления сводятся к тому, что элементы столбца для выходной переменной суммируются с учетом поправки на знак в столбце соответствующего фактора, а затем делятся на количество опытных точек в плане.

2. Так же просто определяются и дисперсии (построчные) для каждой из опытных точек i :

$$(\sigma_i)^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{p=1}^r (y_{ip} - \bar{y}_i)^2. \quad (4.45)$$

3. После этого находится так называемая дисперсия воспроизводимости:

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i)^2 = \frac{1}{N(r-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^r (y_{ip} - \bar{y}_i)^2. \quad (4.46)$$

4. По критерию Кочрена проверяется однородность дисперсий. Для этого вычисляется отношение максимальной построчной дисперсии к дисперсии воспроизводимости:

$$G = ((\sigma_i)^2 \max) / S^2(y). \quad (4.47)$$

По таблицам определяют значение критерия Кочрена для степеней свободы $f_{i\max}=r-1$ и $f_i=N$ для уровня значимости $\alpha=5\%$. Если $G_{\text{tabl}} > G$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается.

5. По Т-критерию Стьюдента проверяется значимость коэффициентов модели. Для этого находится дисперсия коэффициентов регрессии:

$$S^2(b_j) = \frac{1}{Nr} S^2(y). \quad (4.48)$$

По таблицам определяют критическое значение $T_{\text{кр}}$ критерия Стьюдента для степеней свободы $f=N(r-1)$ и уровня значимости $\alpha=5\%$. По этому значению строят интервал длиной $r\Delta b_j$, $\Delta b_j = T_{\text{кр}} S(b_j)$, где $\Delta b_j = T_{\text{кр}} S(b_j)$ – половина длины доверительного интервала. Если абсолютная величина коэффициента $|b_j| > \Delta b_j$, то коэффициент считается значащим (им нельзя пренебречь).

6. Проверяют **адекватность** модели на основе критерия Фишера. С этой целью вычисляют дисперсию адекватности:

$$S^2_{ad} = \frac{r}{N-m} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{\bar{y}}_i)^2, \quad (4.49)$$

где m – количество членов аппроксимирующего полинома, учитывая и свободный член, а $\hat{\bar{y}}_i$ – значение функции отклика, вычисленное по принятой функции регрессии (аппроксимирующему полиному). После этого вычисляют значение критерия Фишера $F = \frac{S^2_{ad}}{S^2(y)}$. Из таблиц находят критическое значение критерия

Фишера $F_{кр}$ для степеней свободы $F_{ad}=N-m$ и $f_k=N(r-1)$ и заданного уровня значимости α . При выполнении условия $F < F_{кр}$ модель признается адекватной.

7. Вычисляют коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{\bar{y}}_i)^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \right)}, \quad (4.50)$$

где $\bar{y}$ – среднее значение y_i . Значение этого коэффициента находится в пределах $0 \leq R \leq 1$. Если значения R близки к нулю, то коэффициенты регрессии не вносят вклада в изучаемую зависимость. Если же коэффициент R близок к единице, то принятое уравнение регрессии полностью описывает результаты эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Запишите выражение для матрицы плана полнофакторного эксперимента 2^3 .

2. Запишите выражение для информационной матрицы полнофакторного эксперимента 2^3 .

3. Докажите ортогональность матрицы плана полнофакторного эксперимента 2^3 .

4. Получите формулы для расчета коэффициентов полнофакторного эксперимента 2^3 , исходя из общих формул расчета коэффициентов линейной модели на основе метода максимального правдоподобия.

5 ИДЕНТИФИКАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕГРЕССИОННЫХ МЕТОДОВ [2]

Регрессионные методы идентификации, основанные на процедурах метода максимального правдоподобия, обладают, в частности, следующими достоинствами. Они применимы:

- 1) для идентификации линейных и нелинейных процессов;
- 2) идентификации систем по нескольким входам одновременно;
- 3) позволяют осуществлять идентификацию в реальном масштабе времени;
- 4) в отличие от методов идентификации с помощью специальных сигналов, регрессионные методы основаны на измерении входных и выходных сигналов, которые можно осуществить в процессе нормального функционирования идентифицируемой системы.

При проведении измерений сигналов для идентификации системы регрессионными методами предполагается, что параметры системы в течение времени идентификации остаются стационарными. Время идентификации, то есть интервал времени, в течение которого проводятся измерения входных и выходных сигналов, выбирается (должен быть) не менее величины mT , где m – количество идентифицируемых параметров системы, T – период повторения измерений.

В задачах, в которых требуется идентифицировать $(m+1)$ коэффициентов в n совместных уравнениях вида

$$x_j = a_{0j} + a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

при условии, что одни и те же управления u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) присутствуют во всех уравнениях, все коэффициенты a_{ij} могут быть идентифицированы за $(m+1)$ интервал измерений. В этом случае идентификация всех коэффициентов может быть выполнена одновременно.

Для идентификации требуется накопление данных о состояниях системы не менее чем на $(m+1)$ интервале измерений. На i -м интервале регрессионная идентификация основывается на данных измерений на интервалах с номерами от $(i-m-p)$ ($p \geq 0$) до i -го.

Если идентифицируемых параметров более одного, то при вычислении параметров регрессии потребуется относительно трудоемкая процедура обращения матриц. В этом случае зачастую удастся использовать рекуррентные формулы реализации регрессионных методов, которые позволяют избежать обращения матриц.

5.1 Статическая задача идентификации для системы с одним выходом

Задача идентификации статической системы с одним выходом фактически уже рассмотрена нами ранее. Линейная статическая (и коэффициенты модели, и состояние явно от времени не зависят) система с одним выходом и несколькими входами (рис. 5.1) описывается уравнением:

$$x^{(i)} = \theta_1 u_1^{(i)} + \theta_2 u_2^{(i)} + \dots + \theta_m u_m^{(i)} + \mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1a)$$

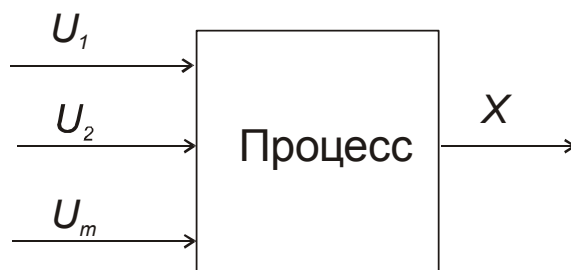


Рис. 5.1 – Схема системы с одним выходом

В матричной форме записи это уравнение имеет вид:

$$\vec{x} = U\vec{\theta} + \vec{\mu} \quad (\vec{\mu} = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(n)}\}). \quad (5.1b)$$

$$U = (U_{ij} = U_j^{(i)}) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_m^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & \dots & u_m^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Используя n измерений величин входного сигнала $u_j^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) и выходного сигнала $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), можно определить m коэффициентов модели θ_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Для наилучшей линейной несмещенной оценки коэффициентов модели имеют место формулы:

$$\tilde{\theta} = (U^T U)^{-1} \bar{X} = (U^T U)^{-1} U^T \bar{x}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(\bar{x} - U\tilde{\theta})(\bar{x} - U\tilde{\theta})^T}{n - m}. \quad (5.3)$$

Формально для идентификации требуется, по крайней мере, **(m+1)** измерение, а для адекватной идентификации требуется, чтобы выполнялось условие **n >> m**. При этом система в течение периода измерений предполагается стационарной.

5.2 Задача идентификации статической многомерной системы (несколько входов и несколько выходов)

Рассмотрим многомерную статическую систему, которая имеет **m** входов и **n** выходов (схема приведена на рис. 5.2).

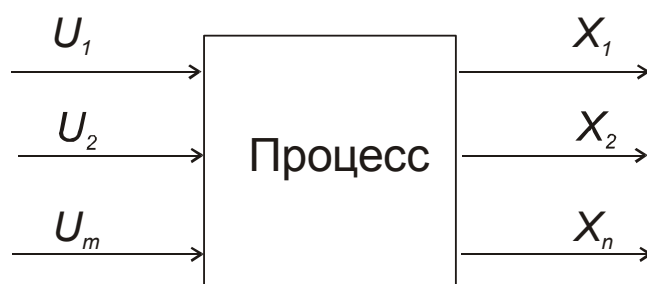


Рис. 5.2 – Схема многомерной статической системы

Такая система может быть описана системой уравнений вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_{11}u_1 + \dots + \theta_{1j}u_j + \dots + \theta_{1m}u_m, \\ &\dots, \\ x_i &= \theta_{i1}u_1 + \dots + \theta_{ij}u_j + \dots + \theta_{im}u_m, \\ &\dots, \\ x_n &= \theta_{n1}u_1 + \dots + \theta_{nj}u_j + \dots + \theta_{nm}u_m. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \Theta \vec{u}, & \vec{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, & \vec{u} &= \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \\ \Theta &= \begin{pmatrix} \theta_{11} & \dots & \theta_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n1} & \dots & \theta_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\theta}_1 \\ \dots \\ \vec{\theta}_n \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Заметим, что произвольная i -я строка системы уравнений (5.4) в точности соответствует уже рассмотренному случаю системы с несколькими входами и одним выходом с номером i . Каждую такую строку системы (5.4) можно записать в виде:

$$x_i = \theta_{i1}u_1 + \dots + \theta_{ij}u_j + \dots + \theta_{im}u_m \Rightarrow x_i = \vec{u} \vec{\theta}_i, \quad \vec{\theta}_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im}\}. \quad (5.6)$$

Обозначим через r количество измерений, которые осуществляются с целью идентификации параметров системы, причем должно выполняться ограничение $r \geq m+1$. Для указания номера измерения (опыта) будем, как и ранее, использовать верхний индекс, заключенный в скобки. Теперь введем векторы результатов измерений выходного сигнала

$$\vec{x}_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(r)}\}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.7)$$

(верхний индекс – номер измерения, нижний индекс – номер выходного сигнала) и матрицу плана измерений

$$U = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_m^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(r)} & u_2^{(r)} & \dots & u_m^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}^{(1)} \\ \dots \\ \vec{u}^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

В соответствии с принятой моделью системы (5.4), (5.5) и принятыми обозначениями, векторы результатов измерений должны удовлетворять матричному уравнению или, что то же самое, системе уравнений, вида:

$$\begin{aligned}\vec{x}_i &= U \vec{\theta}_i, \\ x_i^{(\mu)} &= \vec{u}^{(\mu)} \vec{\theta}_i \quad (\mu=1, 2, \dots, r).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Наилучшие оценки коэффициентов модели, соответствующие методу максимального правдоподобия, могут быть получены по формуле:

$$\tilde{\vec{\theta}}_i = (U^T U)^{-1} U^T \vec{x}_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{im}\}, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.10)$$

Заметим, что для всех значений $i=1, 2, \dots, r$ используется одна и та же матрица плана (матрица измерений) U . Это означает, что

по одной совокупности из $r > m + 1$ измерений могут быть идентифицированы все $(n \times m)$ значения матрицы коэффициентов модели Θ .

Кроме того, следует заметить, что запись решения системы (5.9) в виде формулы (5.10), предполагающей обращение информационной матрицы $M^{-1} = (U^T U)^{-1}$, вовсе не означает, что поиск обратной матрицы – единственный способ решения системы (5.9). Эта запись чрезвычайно удобна в теоретических исследованиях, но существуют разные методы решения больших систем алгебраических уравнений. В частности, для решения уравнений (5.9) может оказаться эффективным и алгоритм исключения неизвестных по методу Гаусса, который неплохо работает для систем с несколькими правыми частями. Система (9) представляет собой именно такую систему: матрица коэффициентов при неизвестных остается неизменной, а правые части изменяются.

5.3 Регрессионная идентификация многомерных линейных динамических систем

Как известно, многомерная линейная динамическая система описывается матричным уравнением вида:

$$\dot{\vec{x}} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{u}, \quad \vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \quad (5.11)$$

 ($\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – n -мерный вектор состояний, $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – m -мерный вектор управления). Простейшая дискретная модель, соответствующая этому уравнению, имеет вид:

$$\vec{x}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)} + B\vec{u}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.12)$$

где производная по времени заменена приближенным равенством

$$\left. \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right|_{t=t_k} \cong \frac{\vec{x}(t_k + \Delta t) - \vec{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t_{k+1}) - \vec{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\Delta t},$$

$t_k = k\Delta t$, $t_0 = 0$, (k – номер шага по времени). Здесь мы снова ввели верхний индекс в скобках, чтобы выделить таким образом индекс, использованный для обозначения момента измерений векторов входного сигнала (контролируемых переменных) и измеряемого вектора состояний (выходного сигнала). В уравнении (5.12) матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cong E + \Delta t \alpha, \quad (5.13)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \cong \Delta t \beta.$$

Теперь определим новый вектор размерности $(n+m)$, компонентами которого будут измеренные в моменты времени $t_k = k\Delta t$ компоненты векторов состояния и управления:

$$\vec{w}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}\} = \{w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}, w_{n+1}^{(k)}, w_{n+2}^{(k)}, \dots, w_{n+m}^{(k)}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Наряду с этим вектором, введем матрицу Φ , компонентами которой являются неизвестные пока (требующие идентификации) элементы матриц A и B :

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}, b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}, b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,n}, \phi_{1,n+1} & \dots & \phi_{1,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n,1} & \dots & \phi_{n,n}, \phi_{n,n+1} & \dots & \phi_{n,n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \dots \\ \vec{\Phi}_n \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Используя эти новые обозначения, уравнения (5.12) можно записать в виде:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \Phi \vec{w}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.16)$$

Рассмотрим строку с произвольным номером i уравнений (5.16), то есть уравнение для компоненты вектора $\vec{x}^{(k+1)}$ с номером i . Эта строка имеет вид:

$$x_i^{(k+1)} = \vec{\Phi}_i \vec{w}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (5.17)$$

$$x_i^{(k+1)} = a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)} + b_{i1}u_1^{(k)} + b_{i2}u_2^{(k)} + \dots + b_{im}u_m^{(k)}.$$

С учетом уже использованных обозначений, это уравнение имеет вид:

$$x_i^{(k+1)} = \phi_{i,1}w_1^{(k)} + \phi_{i,2}w_2^{(k)} + \dots + \phi_{i,n}w_n^{(k)} + \phi_{i,n+1}w_{n+1}^{(k)} + \dots + \phi_{i,n+m}w_{n+m}^{(k)} \quad (5.18)$$

Напомним, что в уравнении (5.18) неизвестными величинами являются $(n+m)$ элементов ϕ_{ij} i – й строки матрицы Φ , а (если использовать терминологию теории планирования эксперимента) величины $x_i^{(k+1)}$ представляют собой компоненты измеряемого вектора выходного сигнала, величины $w_j^{(k)}$ – измеряемые, а значит, и известные, значения базисных функций.

Проделанный переход от уравнений вида (5.12) к уравнениям (5.17), (5.18) линейной многомерной динамической системы позволяет применить для её идентификации метод максимального правдоподобия. С этой целью предпримем следующие действия. Выполним серию из $r \geq n + m + 1$ измерений величины i -й компоненты $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(\mu)}, \dots, x_i^{(r)}$, ($\mu = 0, 1, \dots, r$) вектора выходного сигнала и такую же серию измерений значений всех компонент вектора

$$\begin{aligned} \vec{w}^{(\mu)} &= \{x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \dots, x_n^{(\mu)}, u_1^{(\mu)}, u_2^{(\mu)}, \dots, u_m^{(\mu)}\} = \\ &= \{w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}, \dots, w_n^{(\mu)}, w_{n+1}^{(\mu)}, \dots, w_{n+m}^{(\mu)}\}, (\mu = 0, 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Тогда, как следствие уравнения (18) для i -й компоненты вектора выходного сигнала, может быть записана следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} x_i^{(k-r+1)} &= \phi_{i,1}w_1^{(k-r)} + \phi_{i,2}w_2^{(k-r)} + \dots + \phi_{i,n+m}w_{n+m}^{(k-r)}, \\ &\dots, \\ x_i^{(k-r+\mu+1)} &= \phi_{i,1}w_1^{(k-r+\mu)} + \phi_{i,2}w_2^{(k-r+\mu)} + \dots + \phi_{i,n+m}w_{n+m}^{(k-r+\mu)}, \quad \mu = 1, 2, \dots, r, \quad (5.19) \\ &\dots, \\ x_i^{(k+1)} &= \phi_{i,1}w_1^{(k)} + \phi_{i,2}w_2^{(k)} + \dots + \phi_{i,n+m}w_{n+m}^{(k)}. \end{aligned}$$

Система (5.19) записана в предположении, что вся серия измерений выполняется до момента времени $(k+1)$ включительно. Ясно, что должны быть выполнены условия $k \geq r$, $r \geq n + m + 1$.

Теперь введем в рассмотрение r -мерный вектор $\vec{\chi}_i^{(k+1)}$:

$$\vec{\chi}_i^{(k+1)} = \{x_i^{(k+1, k-r+1)}, x_i^{(k+1, k-r+2)}, \dots, x_i^{(k+1, k-r+\mu+1)}, \dots, x_i^{(k+1, k+1)}\},$$

компонентами которого являются величины x_i , измеренные в r моментов времени, предшествовавших моменту $(k+1)$, и $r \times (n+m)$ матрицу $W^{(k)}$ результатов измерений вида:

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} w_1^{(k,1)} & w_2^{(k,1)} & \dots & w_{n+m}^{(k,1)} \\ w_1^{(k,2)} & w_2^{(k,2)} & \dots & w_{n+m}^{(k,2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(k,r)} & w_2^{(k,r)} & \dots & w_{n+m}^{(k,r)} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (5.19) можно записать в матричной форме:

$$\vec{\chi}_i^{(k+1)} = W^{(k)} \vec{\Phi}_i. \quad (5.20)$$

Отсюда для i -й строки матрицы коэффициентов модели Φ имеем оценку по методу максимального правдоподобия вида:

$$\vec{\Phi}_i = (W^{(k)T} W^{(k)})^{-1} W^{(k)T} \vec{\chi}_i^{(k+1)}. \quad (5.21)$$

Нетрудно заметить, что для идентификации многомерной системы требуется запоминать совокупности из $2r$ измерений вектора $\vec{x}$ и r измерений вектора управления $\vec{u}$.

Контрольные вопросы

1. Для идентификации каких систем пригоден метод максимального правдоподобия?
2. Опишите процесс (метод) регрессионной идентификации статической системы с одним выходом и несколькими входами.
3. Опишите процесс (метод) регрессионной идентификации статической системы с несколькими выходами и несколькими входами.
4. Опишите процесс (метод) регрессионной идентификации многомерной линейной динамической системы.

5.4 Регрессионная идентификация нелинейных моделей с использованием линеаризации

Нередко задача идентификации сводится к определению параметров (коэффициентов) априорно заданной нелинейной аналитической модели процесса, предложенной на основании теоретических соображений. До сих пор мы рассматривали методы

идентификации моделей, *линейных относительно неизвестных параметров (коэффициентов)*, но с произвольными *базисными функциями*. В этой связи целесообразно уточнить, что под *нелинейной моделью* следует понимать математическую модель, в которой выходной сигнал *нелинейным образом зависит от параметров*. В таких случаях для идентификации параметров может оказаться полезной линеаризация модели, например, путем разложения описывающей процесс функции в ряд Тэйлора. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие применение этого подхода.

Пример 5.1 [2]. Пусть на основе теоретических соображений предложена следующая нелинейная модель некоторого процесса:

$$y = a_0 + a_1 x_1 x_2^3 + a_2 x_2 \exp(-a_3 \frac{x_1^2}{x_3}) + \frac{a_4 x_4}{\sqrt{1 - a_5 x_5^2}}. \quad (5.22)$$

Прежде всего, введем новые переменные, чтобы несколько упростить запись:

$$\varphi_1 = x_1 x_2^3, \quad \varphi_2 = x_2, \quad \varphi_3 = -\frac{x_1^2}{x_3}, \quad \varphi_4 = x_4, \quad \varphi_5 = x_5. \quad (5.23)$$

Тогда уравнение модели преобразуется к следующему виду:

$$y = a_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 \exp(a_3 \varphi_3) + \frac{a_4 \varphi_4}{\sqrt{1 - a_5 \varphi_5^2}}. \quad (5.24)$$

Предположим, что приращения переменных $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\varphi_4, \Delta\varphi_5$ в окрестности некоторого исходного состояния $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ малы. Напомним, что экспериментатор сам распоряжается выбором значений контролируемых переменных, при которых проводятся измерения выходного сигнала, и может добиться малости их приращений. Правда, это сужает диапазон применимости результатов идентификации.

Теперь можно линеаризовать уравнение модели (5.24), разлагая его в ряд Тэйлора:

$$\begin{aligned} \Delta y = & a_1 \Delta\varphi_1 + a_2 \Delta\varphi_2 \exp(a_3 \varphi_3) + a_2 a_3 \varphi_2 \exp(a_3 \varphi_3) \Delta\varphi_3 + \\ & + \frac{a_4 \Delta\varphi_4}{\sqrt{1 - a_5 \varphi_5^2}} + \frac{a_4 a_5 \varphi_4 \varphi_5 \Delta\varphi_5}{\sqrt{(1 - a_5 \varphi_5^2)^3}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Множители перед приращениями контролируемых переменных будем рассматривать как неизвестные коэффициенты модели и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \quad b_2 = a_2 \exp(a_3 \varphi_3), \quad b_3 = a_2 a_3 \varphi_2 \exp(a_3 \varphi_3), \\ b_4 &= \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5 \varphi_5^2}}, \quad b_5 = \frac{a_4 a_5 \varphi_4 \varphi_5}{\sqrt{(1 - a_5 \varphi_5^2)^3}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Тогда линеаризованное уравнение модели примет следующий вид:

$$\Delta y = b_1 \Delta \varphi_1 + b_2 \Delta \varphi_2 + b_3 \Delta \varphi_3 + b_4 \Delta \varphi_4 + b_5 \Delta \varphi_5. \quad (5.27)$$

Коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 этой линейной модели могут быть идентифицированы методами линейной регрессии. Далее, по известным выражениям (5.26), можно восстановить значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 исходной модели. Эти коэффициенты последовательно восстанавливаются с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \quad \frac{b_2}{b_3} = a_3 \varphi_2, \quad b_2 = a_2 \exp(a_3 \varphi_3), \quad b_5 = b_4 a_5 \varphi_4 \varphi_5, \\ b_4 &= \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5 \varphi_5^2}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

в которых значения контролируемых переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ известны.

Постоянная a_0 также может быть теперь восстановлена, так как по результатам измерений известны не только приращения Δy , но и значения выходного сигнала y .

Пример 5.2 [2]. Некоторые модели, которые определяются экспоненциальными выражениями, легко идентифицируются методами линейной регрессии. Рассмотрим аналитическую модель вида:

$$y = a e^{bx}, \quad (5.29)$$

где a, b – неизвестные параметры. В результате логарифмирования получим:

$$\ln y = \ln a + bx. \quad (5.30)$$

Вводя новые обозначения, получаем линейную модель, которая легко идентифицируется методом линейной регрессии:

$$Y = A + bx, \quad Y = \ln y, \quad A = \ln a. \quad (5.40)$$

Пример 5.3 [8]. Применение линеаризации для идентификации модели процесса тонкого точения [8] по результатам многофакторного эксперимента.

Рассмотрим постановку задачи о построении математической модели процесса тонкого точения торсионных валов, которая нужна для оптимизации технологии обработки [8]. Основной характеристикой изделия в этом случае является шероховатость поверхности (профиля) вала после обработки. Функцией качества является среднеарифметическое отклонение профиля (шероховатость поверхности) Ra вала после обработки. Основными факторами, от которых зависит среднеарифметическое отклонение Ra , является подача S , скорость резания V и глубина резания t .

На этом основании было принято предположение, что для оптимизации качества обработки требуется установить оптимальные значения факторов S , V и t , которые обеспечивают минимальное значение среднеарифметического отклонения профиля

$$Ra = f(S, V, t). \quad (5.41)$$

На этапе предварительного изучения особенностей производства валов было установлено, что пределы изменения факторов таковы:

$$\begin{aligned} S &= 0,64 \div 0,198 \text{ мм/об}, \\ V &= 64,5 \div 161 \text{ м/мин}, \\ t &= 0,05 \div 0,5 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

На этапе выдвижения гипотез при построении модели принято предположение, что связь шероховатости поверхности и факторов, определяющих режим резания, можно описать зависимостью вида:

$$Ra = C_0 V^{b_1} S^{b_2} t^{b_3}, \quad (5.43)$$

где C_0 , b_1 , b_2 , b_3 – неизвестные параметры (коэффициенты) модели.

Зависимость (5.43) нелинейна, но она легко сводится к линейному виду, если её прологарифмировать:

$$\ln(Ra) = \ln(C_0) + b_1 \ln(V) + b_2 \ln(S) + b_3 \ln(t). \quad (5.44)$$

Далее были использованы следующие обозначения:

$$\tilde{y} = \ln(Ra), \quad b_0 = \ln(C_0), \quad \tilde{x}_1 = V, \quad \tilde{x}_2 = S, \quad \tilde{x}_3 = t.$$

В результате гипотеза (5.43), то есть предлагаемая для проверки математическая модель зависимости среднеарифметического отклонения профиля от режима обработки, приобретает следующий вид:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 \ln(\tilde{x}_1) + b_2 \ln(\tilde{x}_2) + b_3 \ln(\tilde{x}_3). \quad (5.45)$$

Для записи плана эксперимента независимые размерные переменные $\tilde{x}_i$ преобразуются в кодированные безразмерные переменные x_i по следующей формуле:

$$x_i = \frac{2(\ln \tilde{x}_i - \ln \tilde{x}_{i\max})}{(\ln \tilde{x}_{i\max} - \ln \tilde{x}_{i\min})} + 1. \quad (5.46)$$

Для оценки коэффициентов модели был применен полнофакторный эксперимент вида 2^3 . По результатам эксперимента была построена адекватная модель процесса тонкого точения [2].

Контрольные вопросы

1. Как осуществляется линеаризация при идентификации нелинейных систем?
2. Приведите пример линеаризации нелинейной системы.

6 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕГРЕССИОННЫМИ МЕТОДАМИ [2]

Последовательные регрессионные методы применимы к линейным и нелинейным стационарным системам. По сравнению с рассмотренными ранее методами регрессионной идентификации, эти методы требуют меньших затрат компьютерной памяти и времени счета. Тот факт, что эти методы являются *последовательными*, снимают часть вычислительных проблем по *обращению информационной матрицы*. Это дает возможность применения таких методов для идентификации многомерных систем.

Методы последовательной регрессии применимы только к процессам, которые можно считать стационарными на m (не менее!) временных интервалов, в течение которых осуществляется идентификация m неизвестных параметров системы.

6.1 Последовательная идентификация системы с одним выходом и одним входом (скалярный случай)

Скалярная линейная статическая (коэффициенты модели и состояние явно от времени не зависят) система описывается уравнением:

$$x^{(k)} = \theta u^{(k)} + \mu^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Здесь $x^{(k)}$ – измеряемый выходной сигнал, $\mu^{(k)}$ – шум (случайная ошибка) измерений, $k = 0, 1, \dots, n$ – номер временного интервала измерений (номер «опыта»). Задача идентификации неизвестного параметра θ системы может быть решена уже известным нам методом наименьших квадратов (максимального правдоподобия).

Запишем расчетные формулы, используя идеологию метода наименьших квадратов. В этом методе минимизируется величина среднеквадратического отклонения

$$J_r = \sum_{k=1}^r q^{(k)} (x^{(k)} - \tilde{\theta}^r u^{(k)})^2. \quad (6.2)$$

Здесь верхний индекс, взятый в скобки, – номер измерения, $\tilde{\theta}^r$ – оценка коэффициента модели θ , полученная в результате серии из r измерений, $q^{(k)}$ – весовой коэффициент, который может быть принят равным единице, а может быть использован для того, чтобы повысить удельный вес отдельных измерений в оценке значения коэффициента θ .

Из условия минимума величины J_r следует, что

$$\frac{dJ_r}{d\tilde{\theta}^r} = -2 \sum_{k=1}^r q^{(k)} u^{(k)} (x^{(k)} - \tilde{\theta}^r u^{(k)}) = 0. \quad (6.3)$$

Отсюда имеем оценку коэффициента

$$\tilde{\theta}^r = \frac{\sum_{k=1}^r q^{(k)} u^{(k)} x^{(k)}}{\sum_{k=1}^r q^{(k)} u^{(k)2}}. \quad (6.4)$$

Оценка $\tilde{\theta}^r$ коэффициента θ может быть получена и последовательным способом. При этом результат такой последовательной оценки величины θ после r измерений будет совпадать с оценкой по формуле (6.4). Рассмотрим соответствующий процесс. Первое измерение дает в соответствии с формулой (6.4) оценку

$$\tilde{\theta}^1 = \frac{q^{(1)} u^{(1)} x^{(1)}}{q^{(1)} u^{(1)2}}. \quad (6.5)$$

После второго измерения уточненная оценка коэффициента θ , в соответствии с формулой (6.4), будет такова:

$$\tilde{\theta}^2 = \frac{q^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} + q^{(2)} u^{(2)} x^{(2)}}{q^{(1)} u^{(1)2} + q^{(2)} u^{(2)2}}. \quad (6.6)$$

Но теперь формулу (6.6) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 - \tilde{\theta}^1 \frac{q^{(1)} u^{(1)2} + q^{(2)} u^{(2)2}}{q^{(1)} u^{(1)2} + q^{(2)} u^{(2)2}} + \frac{q^{(1)} u^{(1)} x^{(1)} + q^{(2)} u^{(2)} x^{(2)}}{q^{(1)} u^{(1)2} + q^{(2)} u^{(2)2}} = \\ &= \tilde{\theta}^1 + \frac{q^{(1)} u^{(1)} (x^{(1)} - \tilde{\theta}^1 u^{(1)}) + q^{(2)} u^{(2)} (x^{(2)} - \tilde{\theta}^1 u^{(2)})}{q^{(1)} u^{(1)2} + q^{(2)} u^{(2)2}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Теперь подставим в формулу (6.7) выражение (6.5) для $\tilde{\theta}^1$:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + \frac{q^{(1)}u^{(1)}\left(x^{(1)} - \frac{q^{(1)}u^{(1)}x^{(1)}}{q^{(1)}u^{(1)2}}u^{(1)}\right) + q^{(2)}u^{(2)}\left(x^{(2)} - \frac{q^{(1)}u^{(1)}x^{(1)}}{q^{(1)}u^{(1)2}}u^{(2)}\right)}{q^{(1)}u^{(1)2} + q^{(2)}u^{(2)2}} \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + \frac{0 + q^{(2)}u^{(2)}\left(x^{(2)} - \frac{q^{(1)}u^{(1)}x^{(1)}}{q^{(1)}u^{(1)2}}u^{(2)}\right)}{q^{(1)}u^{(1)2} + q^{(2)}u^{(2)2}} \Rightarrow \\ \tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + \frac{q^{(2)}u^{(2)}(x^{(2)} - \tilde{\theta}^1 u^{(2)})}{q^{(1)}u^{(1)2} + q^{(2)}u^{(2)2}}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Продолжая этот процесс, получим, что в результате некоторого измерения с номером r , оценка коэффициента θ может быть получена по формуле:

$$\tilde{\theta}^r = \tilde{\theta}^{r-1} + p^r q^{(r)} u^{(r)} (x^{(r)} - \tilde{\theta}^{r-1} u^{(r)}), \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}^0 &= 0, \\ \frac{1}{p^1} &= q^{(1)}u^{(1)2}, \\ \frac{1}{p^2} &= q^{(1)}u^{(1)2} + q^{(2)}u^{(2)2} = \frac{1}{p^1} + q^{(2)}u^{(2)2}, \\ \frac{1}{p^r} &= \sum_{k=1}^r q^{(k)}u^{(k)2} = \frac{1}{p^{r-1}} + q^{(r)}u^{(r)2}, \quad r > 1.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Формулы (6.9), (6.10), с одной стороны, дают такое же значение оценки коэффициента модели θ по результатам r измерений, что и оценка (6.4) по методу наименьших квадратов (если не считать некоторой разницы в результате округления при компьютерных расчетах).

С другой стороны, схема (6.9), (6.10) может быть признана предпочтительной, так как здесь расчеты ведутся по рекуррентным формулам и не требуется хранить результаты всех предыдущих измерений, а только результаты обработки одного предыдущего измерения.

Контрольные вопросы

1. Опишите алгоритм идентификации нелинейных одномерных систем методом линеаризации.
2. Опишите процесс идентификации методом последовательной регрессии системы с одним входом и одним выходом.

6.2 Последовательная идентификация статической многомерной системы с одним выходом и несколькими входами [2]

Рассмотрим многомерную статическую систему, которая имеет m входов и один выход. Такая система описывается уравнением вида:

$$x^{(k)} = \theta_1 u_1^{(k)} + \theta_2 u_2^{(k)} + \dots + \theta_m u_m^{(k)} + \mu^{(k)}. \quad (6.11)$$

Здесь $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – параметры, требующие идентификации, $x^{(k)}$ – скалярный выходной сигнал, полученный в результате k -го измерения, $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}$ – соответствующие измерения, а $\mu^{(k)}$ – шум измерений.

В векторной форме уравнение (6.11) имеет вид:

$$x^{(k)} = (\vec{\theta}, \vec{u}^{(k)}) + \mu^{(k)}, \quad (6.12)$$

$$\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \quad \vec{u}^{(k)} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}\}.$$

Вновь воспользуемся методом наименьших квадратов. Минимизируем величину среднеквадратического отклонения

$$J_r = \sum_{k=1}^r q^{(k)} \left(x^{(k)} - (\vec{\tilde{\theta}}^r, \vec{u}^{(k)}) \right)^2. \quad (6.13)$$

Здесь вновь верхний индекс, взятый в скобки, – номер измерения, $\vec{\tilde{\theta}}^r$ – оценка вектора коэффициентов модели $\vec{\theta}$, полученная в результате серии из r измерений, $q^{(k)}$ – весовой коэффициент.

Из условия минимума величины J_r следует, что оценка $\vec{\tilde{\theta}}^r$ должна удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_r}{\partial \tilde{\theta}_j^r} = 0, \Rightarrow -2 \sum_{k=1}^r q^{(k)} \bar{u}^{(k)} \otimes \left(x^{(k)} - \left(\tilde{\theta}^r, \bar{u}^{(k)} \right) \right) &= 0, \Rightarrow \\ (P^r)^{-1} \tilde{\theta}^r &= \sum_{k=1}^r q^{(k)} \bar{u}^{(k)} x^{(k)}, \quad (P^r)^{-1} = \sum_{k=1}^r q^{(k)} \bar{u}^{(k)} \otimes \bar{u}^{(k)}, \quad (6.14) \\ (P^r)_{ij}^{-1} &= \sum_{k=1}^r q^{(k)} u_i^{(k)} u_j^{(k)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\theta}^r = P^r \sum_{k=1}^r q^{(k)} x^{(k)} \bar{u}^{(k)}. \quad (6.15)$$

Однако уравнение (6.14) может быть записано и в следующем виде:

$$(P^r)^{-1} \tilde{\theta}^r = \sum_{k=1}^{r-1} q^{(k)} \bar{u}^{(k)} x^{(k)} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} x^{(r)}. \quad (6.16)$$

Для первого слагаемого в правой части этого уравнения имеет место равенство:

$$\sum_{k=1}^{r-1} q^{(k)} \bar{u}^{(k)} x^{(k)} = (P^{r-1})^{-1} \tilde{\theta}^{r-1}. \quad (6.17)$$

Тогда из уравнения (6.16) следует:

$$(P^r)^{-1} \tilde{\theta}^r = (P^{r-1})^{-1} \tilde{\theta}^{r-1} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} x^{(r)}. \quad (6.18)$$

Теперь это уравнение представим в виде:

$$\begin{aligned} (P^r)^{-1} \tilde{\theta}^r &= (P^{r-1})^{-1} \tilde{\theta}^{r-1} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \left(x^{(r)} - \left(\bar{u}^{(r)}, \tilde{\theta}^{r-1} \right) \right) + \\ &+ q^{(r)} \left(\bar{u}^{(r)} \otimes \bar{u}^{(r)} \right) \tilde{\theta}^{r-1} = (P^r)^{-1} \tilde{\theta}^{r-1} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \left(x^{(r)} - \left(\bar{u}^{(r)}, \tilde{\theta}^{r-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

В свою очередь, из этого уравнения следует:

$$\tilde{\theta}^r = \tilde{\theta}^{r-1} + (P^r) q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \left(x^{(r)} - \left(\bar{u}^{(r)}, \tilde{\theta}^{r-1} \right) \right). \quad (6.20)$$

Формула (6.20) представляет собой рекуррентную формулу вычисления коэффициентов модели $\tilde{\theta}^r$.

Для расчета коэффициентов модели по формуле (6.20) необходимо получить и рекуррентные формулы вычисления матриц (P^r) . Для получения этих формул можно использовать лемму об обращении матриц [2]. Воспользуемся определением (6.14) матрицы P^r и представим эту формулу в виде:

$$\begin{aligned} (P^r)^{-1} &= \sum_{k=1}^r q^{(k)} \bar{u}^{(k)} \otimes \bar{u}^{(k)} = \sum_{k=1}^{r-1} q^{(k)} \bar{u}^{(k)} \otimes \bar{u}^{(k)} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \bar{u}^{(r)} \Rightarrow \\ (P^r)^{-1} &= (P^{r-1})^{-1} + q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \bar{u}^{(r)}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Последнее слагаемое в этой формуле представим в виде:

$$q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \bar{u}^{(r)} = \vec{H}^r \otimes \vec{H}^r = \sqrt{q^{(r)}} \bar{u}^{(r)} \otimes \sqrt{q^{(r)}} \bar{u}^{(r)}. \quad (6.22)$$

Тогда формулу (6.21) можно записать в виде:

$$(P^r)^{-1} = (P^{r-1})^{-1} + \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)}. \quad (6.23)$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу P^r . В результате получим:

$$E = P^r (P^{r-1})^{-1} + P^r \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)}. \quad (6.24)$$

Теперь полученное таким образом равенство умножим на P^{r-1} справа. В результате получим выражение:

$$P^{r-1} = P^r + P^r \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)} P^{r-1}. \quad (6.25)$$

Умножим теперь это выражение справа на $\vec{H}^{(r)}$. В итоге получим:

$$\begin{aligned} P^{r-1} \vec{H}^{(r)} &= P^r \vec{H}^{(r)} + P^r \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)} = \\ &= P^r \vec{H}^{(r)} (1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)}). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Теперь это последнее выражение умножим на величину

$$(1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)})^{-1} \vec{H}^{(r)} P^{r-1}.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} P^{r-1} \vec{H}^{(r)} \otimes (1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)})^{-1} \vec{H}^{(r)} P^{r-1} &= \\ = P^r \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)} P^{r-1}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Подстановка в эту формулу выражения (6.25) для $P^r \vec{H}^{(r)} \otimes \vec{H}^{(r)} P^{r-1}$ дает:

$$P^{r-1} \vec{H}^{(r)} \otimes (1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)})^{-1} \vec{H}^{(r)} P^{r-1} = P^{r-1} - P^r. \quad (6.28)$$

Таким образом, для вычисления матриц P^r имеет место рекуррентная формула:

$$P^r = P^{r-1} - P^{r-1} \vec{H}^{(r)} \otimes (1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)})^{-1} \vec{H}^{(r)} P^{r-1}. \quad (6.29)$$

При вычислении матриц P^r по этой формуле не требуется выполнять обращения матриц $((1 + \vec{H}^{(r)} P^{r-1} \vec{H}^{(r)})^{-1} - \text{скаляр})$.

Осталась не определенной матрица P^0 . Эта начальная оценка может быть произвольной [2], но для улучшения сходимости лучше брать в качестве P^0 величину

$$(P^0) = \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (P^0)^{-1} \rightarrow 0, \quad \bar{\theta}^0 = 0. \quad (6.30)$$

Итак, для вычисления коэффициентов модели $\tilde{\theta}^r$ на очередной итерации с номером r и матриц (P^r) имеют место рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^r &= \tilde{\theta}^{r-1} + (P^r) q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \otimes \left(x^{(r)} - (\bar{u}^{(r)}, \tilde{\theta}^{r-1}) \right), \\ (P^r) &= (P^{r-1}) - (P^{r-1}) \bar{H}^{(r)} \left(1 + \bar{H}^{(r)} (P^{r-1}) \bar{H}^{(r)} \right)^{-1} \bar{H}^{(r)} (P^{r-1}), \\ \bar{H}^{(r)} &= \sqrt{q^{(r)}} \bar{u}^{(r)}, \\ (P^0) &= \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Значение ε выбирается обычно между 10 и максимально допустимым для конкретной ЭВМ значением, но так, чтобы значение $1/\varepsilon$ было больше машинного нуля. Вычисления показывают, что выбор ε , за исключением оценок в первом приближении, слабо влияет на конечные оценки коэффициентов модели.

Пример 6.1. Рассмотрим систему

$$x = \theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 \quad (6.32)$$

с неизвестными параметрами, $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}$, для которой в результате двух экспериментов при заданном управлении $\bar{u}^{(1)} = \{4, 3\}$, $\bar{u}^{(2)} = \{1, 2\}$ получены соответствующие значения выходного сигнала $x^{(1)} = 11$, $x^{(2)} = 4$. Уравнение (6.32) дает следующую систему:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \theta_1 u_1^{(1)} + \theta_2 u_2^{(1)} = \theta_1 \cdot 4 + \theta_2 \cdot 3 = 11, \\ x^{(2)} &= \theta_1 u_1^{(2)} + \theta_2 u_2^{(2)} = \theta_1 \cdot 1 + \theta_2 \cdot 2 = 4. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Решение 1 («непоследовательная» идентификация). Сначала решим задачу методом **максимального правдоподобия**, полагая $q^{(k)} = 1$, $k = 1, 2$. Для этого вычисляем информационную матрицу:

$$M = (P^2)^{-1} = \sum_{k=1}^2 \bar{u}^{(k)} \otimes \bar{u}^{(k)} \Rightarrow (P^2)_{ij}^{-1} = \sum_{k=1}^2 u_i^{(k)} u_j^{(k)} \Rightarrow (P^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица равна:

$$(P^2) = \frac{1}{221-196} \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ -14 & 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ -14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вектор правых частей имеет вид:

$$X_j = \sum_{k=1}^2 x^{(k)} u_j^{(k)} \Rightarrow \vec{X} = \{48, 41\}.$$

Отсюда имеем следующую оценку коэффициентов $\tilde{\theta} = \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\}$ по методу максимального правдоподобия:

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ -14 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 41 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\theta}_1 = 2, \tilde{\theta}_2 = 1.$$

Решение 2 (последовательная идентификация). Теперь решим эту задачу методом последовательной идентификации, в соответствии с которым расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^r &= \tilde{\theta}^{r-1} + (P^r) q^{(r)} \bar{u}^{(r)} \left(x^{(r)} - (\bar{u}^{(r)}, \tilde{\theta}^{r-1}) \right), \\ (P^r) &= (P^{r-1}) - (P^{r-1}) \vec{H}^{(r)} \left(1 + \vec{H}^{(r)} (P^{r-1}) \vec{H}^{(r)} \right)^{-1} \vec{H}^{(r)} (P^{r-1}), \\ \vec{H}^{(r)} &= \sqrt{q^{(r)}} \bar{u}^{(r)}, \\ (P^0) &= \frac{1}{\varepsilon} E, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Определим векторы:

$$\vec{H}^r = \sqrt{q^{(r)}} \bar{u}^{(r)} \Rightarrow \vec{H}^1 = \{4, 3\}, \vec{H}^2 = \{1, 2\}.$$

Положим $\varepsilon = 10^{-5}$. Чтобы найти первую оценку коэффициентов («нулевая» равна 0, $\vec{\theta}^0 = 0$) находим матрицу (P^1) :

$$\begin{aligned}
(P^1) &= (P^0) - (P^0) \bar{H}^{(1)} \otimes (1 + \bar{H}^{(1)} (P^0) \bar{H}^{(r)})^{-1} \bar{H}^{(1)} (P^0) \Rightarrow, \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^1 &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \{4,3\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \{4,3\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \{4,3\} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \frac{25}{\varepsilon} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\varepsilon + 25}{\varepsilon} \right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 25} \right) \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\varepsilon + 25} \right) \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\varepsilon + 25} \right) \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon + 25} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon + 25 - 16 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 25 - 9 \end{pmatrix} \cong 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Теперь находим первую оценку коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{\theta}}^1 &= \tilde{\bar{\theta}}^0 + (P^1) q^{(1)} \bar{u}^{(1)} (x^{(1)} - (\bar{u}^{(r)}, \tilde{\bar{\theta}}^0)) = \bar{0} + (P^1) \bar{u}^{(1)} (x^{(1)}) \Rightarrow \\
\tilde{\bar{\theta}}^1 &= 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 11 = 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 11 = \\
&= 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} 44\varepsilon \\ 33\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,76 \\ 1,32 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Чтобы найти вторую оценку коэффициентов (первая есть $\bar{\theta}^1 = \{1,76; 1,32\}$), находим матрицу (P^2) :

$$\begin{aligned}
(P^2) &= (P^1) - (P^1) \bar{H}^{(2)} \otimes (1 + \bar{H}^{(2)} (P^1) \bar{H}^{(2)})^{-1} \bar{H}^{(2)} (P^1) \Rightarrow, \\
\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 &= 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} - 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \\
&\otimes \left(1 + \{1,2\} 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \{1,2\} 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} = \\
&= 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} - 16 \cdot 10^6 \begin{pmatrix} \varepsilon - 15 \\ 2\varepsilon + 20 \end{pmatrix} \otimes \left(1 + \{1,2\} 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon - 15 \\ 2\varepsilon + 20 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon - 15 \\ 2\varepsilon + 20 \end{pmatrix} = \\
&= 4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon + 9 & -12 \\ -12 & \varepsilon + 16 \end{pmatrix} - \frac{16 \cdot 10^6}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon + 25))} \begin{pmatrix} (\varepsilon - 15)^2 & 2(\varepsilon - 15)(\varepsilon + 10) \\ 2(\varepsilon - 15)(\varepsilon + 10) & 4(\varepsilon + 10)^2 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + 16 \cdot 10^6 (5\varepsilon+25) \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} - 16 \cdot 10^6 \begin{pmatrix} (\varepsilon-15)^2 & 2(\varepsilon-15)(\varepsilon+10) \\ 2(\varepsilon-15)(\varepsilon+10) & 4(\varepsilon+10)^2 \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \\
&= \frac{4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + 16 \cdot 10^6 \begin{pmatrix} 5(\varepsilon+5)(\varepsilon+9) - (\varepsilon-15)^2 & -60(\varepsilon+5) - 2(\varepsilon-15)(\varepsilon+10) \\ -60(\varepsilon+5) - 2(\varepsilon-15)(\varepsilon+10) & 5(\varepsilon+5)(\varepsilon+16) - 4(\varepsilon+10)^2 \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \\
&= \frac{4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + 16 \cdot 10^6 \begin{pmatrix} 4\varepsilon^2 + 100\varepsilon & -50\varepsilon - \varepsilon^2 \\ -50\varepsilon - \varepsilon^2 & \varepsilon^2 + 25\varepsilon \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \\
&= \frac{4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + 16 \cdot 10^6 \varepsilon \begin{pmatrix} 4\varepsilon+100 & -50-\varepsilon \\ -50-\varepsilon & \varepsilon+25 \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \\
&= \frac{4 \cdot 10^3 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + 16 \cdot 10^1 \begin{pmatrix} 4\varepsilon+100 & -50-\varepsilon \\ -50-\varepsilon & \varepsilon+25 \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \\
&= 16 \cdot 10^1 \frac{25 \begin{pmatrix} \varepsilon+9 & -12 \\ -12 & \varepsilon+16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\varepsilon+100 & -50-\varepsilon \\ -50-\varepsilon & \varepsilon+25 \end{pmatrix}}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} = \frac{160}{(1 + 4 \cdot 10^3 (5\varepsilon+25))} \begin{pmatrix} 29\varepsilon+325 & -350-\varepsilon \\ -350-\varepsilon & 26\varepsilon+425 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В результате имеем:

$$(P^2) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 \cong \begin{pmatrix} 0,52 & -0,56 \\ -0,56 & 0,68 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим вторую оценку коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^2 &= \tilde{\theta}^1 + (P^2) q^{(2)} \bar{u}^{(2)} \left(x^{(2)} - \left(\bar{u}^{(2)}, \tilde{\theta}^1 \right) \right), \Rightarrow \\
\tilde{\theta}^2 &= \begin{pmatrix} 1,76 \\ 1,32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,52 & -0,56 \\ -0,56 & 0,68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \left(4 - \{1,76; 1,32\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} 1,76 \\ 1,32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,52 - 1,12 \\ -0,56 + 1,36 \end{pmatrix} (4 - 4,4) = \begin{pmatrix} 1,76 \\ 1,32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} 0,4 = \begin{pmatrix} 1,76 + 0,24 \\ 1,32 - 0,32 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\tilde{\theta}^2 &\cong \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Итак, вторая итерация дает практически точное значение коэффициентов модели, что и должно было получиться в данном случае, так как в этом модельном случае погрешности «измере-

ний» были равны нулю, а при округлении промежуточных результатов ошибки были незначительны.

6.3 Последовательная регрессия в случае нелинейных базисных функций (система с одним выходом и несколькими входами)

Такая система, как уже говорилось, описывается уравнением вида:

$$x^{(k)} = \theta_1 f_1(\vec{v}^{(k)}) + \theta_2 f_2(\vec{v}^{(k)}) + \dots + \theta_m f_m(\vec{v}^{(k)}) + \mu^{(k)},$$

$$\vec{v}^{(k)} = \{v_1^{(k)}, \dots, v_p^{(k)}\}. \quad (6.34)$$

Здесь $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – параметры, требующие идентификации, $x^{(k)}$ – скалярный выходной сигнал, полученный в результате k -го измерения, $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_p^{(k)}$ – измеренные значения компонент вектора управления, $f_1(\vec{v}^{(k)}), f_2(\vec{v}^{(k)}), \dots, f_m(\vec{v}^{(k)})$ – соответствующие значения нелинейных базисных функций, а $\mu^{(k)}$ – шум измерений. В частности, при использовании уравнений полиномиальной регрессии для системы с двумя входами базисные функции могут иметь вид:

$$f_1(v_1, v_2) = v_1, \quad f_2(v_1, v_2) = (v_1)^2, \quad f_3(v_1, v_2) = (v_1)^3,$$

$$f_4(v_1, v_2) = v_2, \quad f_5(v_1, v_2) = (v_2)^2, \quad f_6(v_1, v_2) = (v_2)^3. \quad (6.35)$$

Задача идентификации такой системы очень просто сводится к задаче линейной регрессии. Достаточно ввести обозначения

$$f_1(\vec{v}) = u_1, \quad f_2(\vec{v}) = u_2, \dots, f_m(\vec{v}) = u_m, \quad (6.36)$$

чтобы для идентификации такой системы практически без всяких изменений использовать алгоритм последовательной идентификации линейных систем.

Определенные трудности идентификации таких систем связаны с плохой обусловленностью информационных матриц систем с нелинейными базисными функциями. Кроме того, в этом случае число базисных функций зачастую больше количества входов, следовательно, возрастает и размерность информационной матрицы по сравнению со случаем линейных базисных функций.

Контрольные вопросы

1. Опишите процесс последовательной регрессионной идентификации статической многомерной системы с одним выходом и несколькими входами.
2. Каковы особенности последовательной идентификации в случае применения нелинейных базисных функций?

7 ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ МЕТОДОМ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ [2]

Метод квазилинеаризации [2] предложили Р. Беллман и Р. Калаба. Этот метод основан на сведении нелинейной краевой задачи к линейной нестационарной задаче. При этом предполагается, что идентифицируемые параметры постоянны, по крайней мере, на интервале моделирования системы. Кроме того, тип нелинейности, то есть вид нелинейных уравнений идентифицируемой системы, также предполагается известным априорно. Если идентифицируемые параметры меняются относительно медленно по сравнению со скоростью сходимости алгоритма идентификации, то такая нестационарность параметров системы также может быть учтена. Как и для большинства методов линеаризации, не только скорость сходимости решения, но успех решения задачи вообще, существенно зависит от выбора начального приближения для идентифицируемых параметров.

7.1 Идентификация непрерывных систем методом квазилинеаризации

Нелинейная непрерывная система описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}). \quad (7.1)$$

Здесь t – время, $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}) = \{f_1(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}), \dots, f_n(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta})\}$ – нелинейная векторная функция заданного вида с неизвестными параметрами (то есть вид функции для каждой компоненты этого вектора известен), $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$ – вектор параметров системы, которые требуется идентифицировать, $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ – измеряемый вектор состояний системы, $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_m\}$ – также измеряемый вектор управления.

Из теории дифференциальных уравнений мы знаем, что для решения уравнений (7.1) необходимо задать соответствующие начальные условия. Однако задачи идентификации, в частности, отличаются тем, что начальные условия, вообще говоря, неиз-

вестны, так как момент времени начала измерений с целью идентификации не совпадает с моментом начала функционирования системы. Тем не менее, вопрос о восстановлении начальных условий решается далее в соответствии с общим алгоритмом решения задачи идентификации. Функции $x_j = x_j(t)$ должны быть подчинены $n+r$ граничным условиям, заданным измеряемыми (известными) функциями $x_i(t_j) = \bar{x}_i(t_j)$ в одни и те же или различные моменты времени.

В скалярной форме уравнение (7.1) имеет вид:

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\theta}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

Еще r дополнительных ограничений получают из условия стационарности идентифицируемых параметров, что дает следующие уравнения для ограничений:

$$\dot{\bar{\theta}} = 0, \quad (7.3)$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= 0, \\ \dot{\theta}_2 &= 0, \\ &\dots, \\ \dot{\theta}_r &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Примером такого нелинейного уравнения может служить следующее:

$$\dot{x}(t) = \theta_1 (x(t))^3 + \theta_2 u(t), \quad (7.5)$$

где $x(t), u(t), \theta_1, \theta_2$ – скалярная переменная состояния, управление и компоненты вектора идентифицируемых параметров соответственно.

Системы уравнений (7.1), (7.4) можно объединить и записать в виде:

$$\dot{\bar{z}}(t) = \bar{\psi}(\bar{z}(t), \bar{u}(t)), \quad (7.6)$$

где вектор $\bar{z}(t)$ равен

$$\bar{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t), z_{n+1}, \dots, z_{n+r}\} = \{x_1(t), \dots, x_n(t), \theta_1, \dots, \theta_r\},$$

вектор $\bar{\psi}$ в правой части есть вектор

$$\bar{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t), \psi_{n+1}(t), \dots, \psi_{n+r}(t)\} = \{f_1(t), \dots, f_n(t), 0, \dots, 0\}.$$

Теперь предположим, что известна некоторая оценка вектора $\bar{z}^\mu$ в некотором приближении с номером (μ). Тогда оценку

этого вектора в следующем приближении $(\mu+1)$ можно получить, используя разложение правой части уравнения (7.6) в ряд Тэйлора в окрестности значений $\bar{z}^\mu$. Ограничиваясь только линейными членами ряда, из уравнения (7.6) можно получить следующее уравнение:

$$\dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) = \vec{\psi}^{\mu+1}(\bar{z}^{\mu+1}(t), \vec{u}(t)) = \vec{\psi}^\mu(\bar{z}^\mu(t), \vec{u}(t)) + \frac{\partial \vec{\psi}^\mu}{\partial \bar{z}} (\bar{z}^{\mu+1}(t) - \bar{z}^\mu(t)), \quad (7.7)$$

где $\frac{\partial \vec{\psi}^\mu}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^\mu}$ есть матрица, элементами которой являются

частные производные вида $\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^\mu}$. В результате про-

изошло одно существенное изменение задачи: уравнение (7.7) **линейно** относительно уточненной оценки $\bar{z}^{\mu+1}$ вектора $\bar{z}$. Следовательно, его теперь можно записать в матричной форме:

$$\dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) = A^\mu \bar{z}^{\mu+1}(t) + \vec{V}^\mu, \quad (7.8)$$

где приняты следующие обозначения: матрица A^μ есть матрица

вида $A^\mu = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^\mu}$, $A_{ij}^\mu = \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial z_j} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}^\mu}$, а вектор $\vec{V}^\mu$ опреде-

лен следующим образом:

$$\vec{V}^\mu = \vec{\psi}^\mu - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^\mu = \vec{\psi}^\mu - A^\mu \bar{z}^\mu.$$

Еще раз напомним, что уравнения (7.8), в отличие от исходных уравнений (7.1), представляют собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение системы (7.8), как известно, имеет вид:

$$\bar{z}^{\mu+1}(t) = \Phi^{\mu+1}(t, t_0) \bar{z}^{\mu+1}(t_0) + \vec{q}^{\mu+1}(t), \quad (7.9)$$

где $\Phi^{\mu+1}(t, t_0)$ – переходная матрица, которая определяет общее решение однородного уравнения (7.8), а $\vec{q}^{\mu+1}(t)$ – частное решение этого уравнения.

Переходная матрица удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Phi}^{\mu+1}(t, t_0) = A^\mu \Phi^{\mu+1}(t, t_0), \quad \Phi^{\mu+1}(t_0, t_0) = E. \quad (7.10)$$

Частное решение $\bar{q}^{\mu+1}(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\bar{q}}^{\mu+1}(t) = \bar{\psi}^{\mu}(\bar{z}^{\mu}, t) - A^{\mu}\bar{z}^{\mu}(t) + A^{\mu}\bar{q}^{\mu+1}(t), \quad \bar{q}^{\mu+1}(t_0) = 0. \quad (7.11)$$

Вектор начальных условий $\bar{z}^{\mu+1}(t_0)$ в уравнении (7.9) задается так, чтобы удовлетворять уравнениям:

$$x_j(t_i) = \bar{\Phi}_j^{\mu+1}(t_i, t_0)\bar{z}^{\mu+1}(t_0) + q_j^{\mu+1}(t_i). \quad (7.12)$$

Здесь вектор $\bar{\Phi}_j^{\mu+1}(t_i, t_0)$ – это j -я строка матрицы Φ , величины $x_j(t_i)$ – это наблюдаемые, доступные измерению и по результатам измерений известные значения n компонент вектора $\bar{x}(t)$. Так как из уравнений (7.12) необходимо определить $(n+r)$ компонент вектора начальных условий $\bar{z}^{\mu+1}(t_0)$, то требуется не менее $(n+r)$ измерений величин $x_j(t_i)$ в моменты времени t_i , чтобы иметь достаточное число уравнений в системе (7.12). В результате из системы уравнений (7.12) могут быть определены $(n+r)$ компонент вектора $\bar{z}^{\mu+1}(t_0) = \{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0), z_{n+1}, \dots, z_{n+r}\}^{\mu+1} = \{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), \theta_1, \dots, \theta_r\}^{\mu+1}$, среди которых будут определены и идентифицируемые параметры $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}^{\mu+1}$. Целесообразно подчеркнуть, что оценка этих параметров зависит от номера приближения $(\mu+1)$ (здесь имеет смысл говорить о номере итерации) в оценке величин $\bar{z}^{\mu+1}(t_0) = \{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0), z_{n+1}, \dots, z_{n+r}\}^{\mu+1}$. Итак, имея не менее чем $(n+r)$ измерений величин $x_j(t_i)$, можно найти все $\bar{z}^{\mu+1}(t_0) = \{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0), z_{n+1}, \dots, z_{n+r}\}^{\mu+1}$. Начальные значения $\bar{z}^{\mu+1}(t_0)$ зачастую включают в себя еще и случайные воздействия (шум). Тогда для сглаживания этих случайных воздействий можно применить метод максимального правдоподобия. В этом случае количество измерений v с необходимостью должно быть значительно больше числа идентифицируемых параметров: $v \gg (n+r)$. При этом целесообразнее использовать последовательный алгоритм регрессионного анализа, чтобы избежать процедуры обращения матриц.

Вновь вернемся к уравнениям (7.7), (7.8), записанным в виде:

$$\dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) = \frac{\partial \bar{\psi}^{\mu}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{\mu+1}(t) + \bar{\psi}^{\mu}(\bar{z}^{\mu}(t), \bar{u}(t)) - \frac{\partial \bar{\psi}^{\mu}}{\partial \bar{z}} \bar{z}^{\mu}(t). \quad (7.13)$$

В сущности, это уравнение представляет собой запись итерационного процесса, в результате которого при $\mu=1,2,\dots$ последовательно уточняется решение нелинейного уравнения (7.1). Для осуществления (старта) такого уточнения необходимо задать начальное («нулевое») приближение

$$\begin{aligned}\bar{z}^{\mu=0}(t_0) &= \{z_1^{\mu=0}(t_0), \dots, z_1^{\mu=0}(t_0), z_1^{\mu=0}, \dots, z_1^{\mu=0}\} = \\ &= \{x_1^{\mu=0}(t_0), \dots, x_1^{\mu=0}(t_0), \theta_1^{\mu=0}, \dots, \theta_1^{\mu=0}\},\end{aligned}\quad (7.14)$$

которое включает начальную оценку значений измеряемого сигнала $\{x_1^{\mu=0}(t_0), \dots, x_1^{\mu=0}(t_0)\}$, а также начальную оценку идентифицируемых параметров $\{\theta_1^{\mu=0}, \dots, \theta_1^{\mu=0}\}$. Мы видим, что в процессе итерационных уточнений могут быть восстановлены параметры системы и начальные условия, при которых система начала функционировать.

Вычислительные затраты на реализацию алгоритма достаточно велики, так как может потребоваться не только большое количество измерений, но и необходимое число итераций может оказаться достаточно большим.

Пример 7.1. Рассмотрим несколько подробнее пример нелинейной системы, которая описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = \theta_1(x(t))^3 + \theta_2 u(t), \quad (7.15)$$

где $u(t)$ – измеряемый входной сигнал, $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}$ – вектор идентифицируемых параметров.

Сформируем вектор

$$\bar{z} = \{x, \theta_1, \theta_2\}. \quad (7.16)$$

Оценка вектора $\bar{z}^{\mu+1}(t)$ ($\mu+1$ – номер итерации) методом квазилинеаризации будет результатом решения уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) &= \vec{\psi}^{\mu}(\bar{z}^{\mu}(t), \vec{u}(t)) + \frac{\partial \vec{\psi}^{\mu}}{\partial \bar{z}} (\bar{z}^{\mu+1}(t) - \bar{z}^{\mu}(t)) = \\ &\begin{pmatrix} \theta_1 x^3 + \theta_2 u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mu} + \begin{pmatrix} 3\theta_1 x^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu} \begin{pmatrix} x^{\mu+1} - x^{\mu} \\ \theta_1^{\mu+1} - \theta_1^{\mu} \\ \theta_2^{\mu+1} - \theta_2^{\mu} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (7.17)$$

Это уравнение теперь запишем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}^{\mu+1}(t) &= A^\mu \bar{z}^{\mu+1}(t) + \bar{V}^\mu(t) = \\ &= \begin{pmatrix} 3\theta_1 x^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu \begin{pmatrix} x^{\mu+1} \\ \theta_1^{\mu+1} \\ \theta_2^{\mu+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 x^3 + \theta_2 u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\mu - \begin{pmatrix} 3\theta_1 x^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu \begin{pmatrix} x^\mu \\ \theta_1^\mu \\ \theta_2^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид:

$$\bar{z}^{\mu+1}(t) = \Phi(t, t_0) \bar{z}^{\mu+1}(t_0) + \bar{q}^{\mu+1}(t). \quad (7.19)$$

Переходная матрица (матрица Коши) $\Phi^{\mu+1}(t, t_0)$ должна в произвольный момент времени t_i удовлетворять уравнению:

$$\dot{\Phi}^{\mu+1}(t_i, t_0) = \begin{pmatrix} 3\theta_1 x^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu \Phi^{\mu+1}(t_i, t_0), \quad \Phi^{\mu+1}(t_0, t_0) = E. \quad (7.20)$$

Вектор начальных значений $\bar{z}^{\mu+1}(t_0)$ теперь находят, задав априорно моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4 (более трех, по числу идентифицируемых параметров – компонент вектора $\bar{z} = \{x, \theta_1, \theta_2\}$) и измерив в эти моменты времени выходной сигнал $x(t_i)$. Соответствующая система уравнений для определения начальных значений $\bar{z}^{\mu+1}(t_0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi_{11}^{\mu+1}(t_1, t_0) x^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_1, t_0) \theta_1^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_1, t_0) \theta_2^{\mu+1}(t_0) + q_1^{\mu+1}(t_1), \\ x(t_2) &= \Phi_{11}^{\mu+1}(t_2, t_0) x^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_2, t_0) \theta_1^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_2, t_0) \theta_2^{\mu+1}(t_0) + q_1^{\mu+1}(t_2), \\ x(t_3) &= \Phi_{11}^{\mu+1}(t_3, t_0) x^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_3, t_0) \theta_1^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_3, t_0) \theta_2^{\mu+1}(t_0) + q_1^{\mu+1}(t_3), \\ x(t_4) &= \Phi_{11}^{\mu+1}(t_4, t_0) x^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_4, t_0) \theta_1^{\mu+1}(t_0) + \Phi_{12}^{\mu+1}(t_4, t_0) \theta_2^{\mu+1}(t_0) + q_1^{\mu+1}(t_4). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Используя уравнения (7.21), теперь можно идентифицировать методом последовательной регрессии параметры $x^{\mu+1}(t_0), \theta_1^{\mu+1}, \theta_2^{\mu+1}$, выбрав предварительно начальные приближения для идентифицируемых величин $x(t_0), \theta_1, \theta_2$.

7.2 Идентификация дискретных систем методом квазилинеаризации

Алгоритм идентификации дискретных систем методом квазилинеаризации является следствием метода идентификации непрерывных нелинейных систем.

Рассмотрим нелинейную дискретную систему вида:

$$\vec{x}(k+1) = \vec{f}(\vec{x}(k), \vec{u}(k), \vec{\theta}, k), \quad kT = t. \quad (7.22)$$

Здесь $k=1, 2, \dots, \nu$ – номер момента (промежутка) времени, $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}, k) = \{f_1(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}, k), \dots, f_n(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\theta}, k)\}$ – заданная векторная функция (нелинейная) с неизвестными параметрами, $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$ – вектор параметров системы, которые требуется идентифицировать, $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ – измеряемый вектор состояний системы, $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_m\}$ – также измеряемый вектор управления. Функции $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ удовлетворяют **(n+r)** граничным условиям, то есть заданы **(n+r)** значений скалярных функций $x_j(i)$ (i – номер промежутка времени, j – номер компоненты вектора).

Введем вектор $\vec{z}$ с компонентами $\vec{z} = \{z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+r}\} = \{x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_r\}$. Мы будем рассматривать стационарные системы, поэтому примем, что $\{\theta_1(k+1), \dots, \theta_r(k+1)\} = \{\theta_1(k), \dots, \theta_r(k)\}$. С учетом новых обозначений, уравнение (7.22) преобразуется к виду:

$$\vec{z}(k+1) = \vec{\lambda}(\vec{z}(k), \vec{u}(k), k), \quad (7.23)$$

$$\vec{\lambda}(\vec{z}(k), \vec{u}(k), \vec{\theta}, k) = \begin{pmatrix} \vec{f}(\vec{z}(k), \vec{u}(k), \vec{\theta}, k) \\ \vec{\theta}(k) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что известно некоторое приближение $\vec{z}^\mu(k)$ с номером μ к решению уравнения (7.23). Правую часть уравнения (7.23) разложим в ряд Тэйлора в окрестности этого состояния. Тогда из уравнения (7.23) получим следующее:

$$\vec{z}^{\mu+1}(k+1) = \vec{\lambda}^\mu(\vec{z}^\mu(k), \vec{u}(k), k) + \left(\frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial \vec{z}} \right)^\mu (\vec{z}^{\mu+1}(k) - \vec{z}^\mu(k)). \quad (7.24)$$

Это уравнение запишем в виде:

$$\begin{aligned}\bar{z}^{\mu+1}(k+1) &= B(k)\bar{z}^{\mu+1}(k) + \bar{w}^{\mu}(k), \\ B(k) &= \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{z}} \right)^{\mu},\end{aligned}\tag{7.25}$$

$$\bar{w}^{\mu}(k+1) = \bar{\lambda}^{\mu}(\bar{z}^{\mu}(k), \bar{u}(k), k) - \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{z}} \right)^{\mu} \bar{z}^{\mu}(k).$$

Уравнение (7.25) – линейное относительно $\bar{z}^{\mu+1}(k+1)$, $\bar{z}^{\mu+1}(k)$ уравнение с переменными коэффициентами. Алгоритм решения этого уравнения полностью аналогичен решению для непрерывной нелинейной системы. На этом основании можно записать:

$$\bar{z}^{\mu+1}(k) = \Phi^{\mu+1}(k, h)\bar{z}^{\mu+1}(h) + \bar{q}^{\mu+1}(k)).\tag{7.26}$$

Так же как в случае идентификации непрерывной системы, необходимо иметь начальные приближения для вектора параметров $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ и начальных значений $\{x_1, \dots, x_n\}$. Правильный выбор этих значений очень важен, так как от них зависит сходимость алгоритма, которая не гарантирована в случае, если начальные значения далеки от истинных значений.

Контрольные вопросы

1. Для идентификации каких систем применяется метод квазилинеаризации?
2. Какие параметры системы идентифицируются методом квазилинеаризации?
3. Объясните суть метода квазилинеаризации.

8 ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ К ОШИБКАМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

При решении задач идентификации, оценка $\tilde{\vec{\theta}}$ параметров системы в большинстве случаев отличается от их истинных значений $\vec{\theta}$ в силу воздействия случайных факторов, ошибок измерений, нестационарности параметров и других причин. По этим причинам необходимы оценки влияния разности (вариации) $\delta\vec{\theta}$ идентифицированного вектора параметров $\tilde{\vec{\theta}}$ и истинного значения этого вектора $\vec{\theta}$ на характеристики системы. Для получения такой оценки прежде всего должен быть введен некоторый **количественный показатель качества** $J(\vec{\theta}, \dots)$ (скаляр) управления системой. Мы будем рассматривать прежде всего зависимость показателя качества от точности идентификации параметров, поэтому другие аргументы функционала $J(\vec{\theta}, \dots)$ указывать не будем. Исследование разности (вариации) показателя качества $\delta J(\vec{\theta})$ приобретает особое значение в тех случаях, когда требуется добиться некоторого оптимального значения $J^*(\vec{\theta}, \dots)$ этого функционала. Для достижения этого оптимального значения, как правило, используют управление с обратной связью $F^*(\vec{\theta}, \dots)$, которое также будет чувствительно к ошибкам идентификации параметров. Здесь и далее символом $F(\vec{\theta}, \dots)$ будем обозначать матрицу коэффициентов усиления обратной связи, которая прямо или косвенно будет зависеть от точности идентификации параметров $\vec{\theta}$.

С учетом этих обстоятельств возникают два следующих вопроса.

1. Насколько фактический показатель качества $J(\tilde{\vec{\theta}})$ при использовании «ошибочной» стратегии управления, основанной на обратной связи $F^*(\tilde{\vec{\theta}})$, будет отличаться от заданного «истинного» показателя качества $J^*(\vec{\theta})$, рассчитанного по «истинным» параметрам системы $\vec{\theta}$?

2. Насколько можно улучшить показатель качества в сравнении с фактической величиной $J(\tilde{\theta})$, полученной при использовании «ошибочной» стратегии управления $F^*(\tilde{\theta})$, если известен истинный вектор параметров $\bar{\theta}$ и соответствующая истинная стратегия управления $F^*(\bar{\theta})$, которая обеспечивает достижение истинного оптимума $J^*(\bar{\theta})$ (рис. 8.1)?

Для оценки чувствительности показателя качества к ошибкам $\delta\bar{\theta}$ определения вектора параметров $\bar{\theta}$ вычисляют матрицу чувствительности σ расчетных и матрицу чувствительности σ^* оптимальных характеристик соответственно:

$$\sigma = \left. \frac{\partial J}{\partial \bar{\theta}} \right|_{J^*(\tilde{\theta})}, \quad F = F^*(\tilde{\theta}) = \text{const}. \quad (8.1)$$

$$\sigma^* = \left. \frac{\partial J^*}{\partial \bar{\theta}} \right|_{J^*(\bar{\theta})}, \quad F = F^*(\bar{\theta}) = \text{const}. \quad (8.2)$$

Разность показателей качества $J(\bar{\theta}) - J^*(\tilde{\theta}) \sim \sigma$ пропорциональна матрице чувствительности σ расчетных (идентифицированных) характеристик, а разность показателей качества, соответствующих истинным значениям оцениваемых параметров, $J(\bar{\theta}) - J^*(\bar{\theta}) \sim \sigma^*$ пропорциональна матрице чувствительности σ^* оптимальных характеристик.

На рис. 8.1 показан пример, иллюстрирующий взаимосвязь этих величин для скалярной системы $\dot{x} = \theta x + u$ с обратной связью $u = -Fx$. При одинаковой стратегии управления F результат управления, соответствующий истинным значениям θ , будет отличаться от управления, соответствующего идентифицированным параметрам $\tilde{\theta}$. Разность $J(\theta) - J^*(\tilde{\theta}) \sim \sigma$, а величина $J(\theta) - J^*(\theta) \sim \sigma^*$.

Для оценки функций чувствительности на практике используют только данные идентификации $\tilde{\theta}$ (фактические параметры), тогда как истинный вектор параметров $\bar{\theta}$ остается неизвестным.

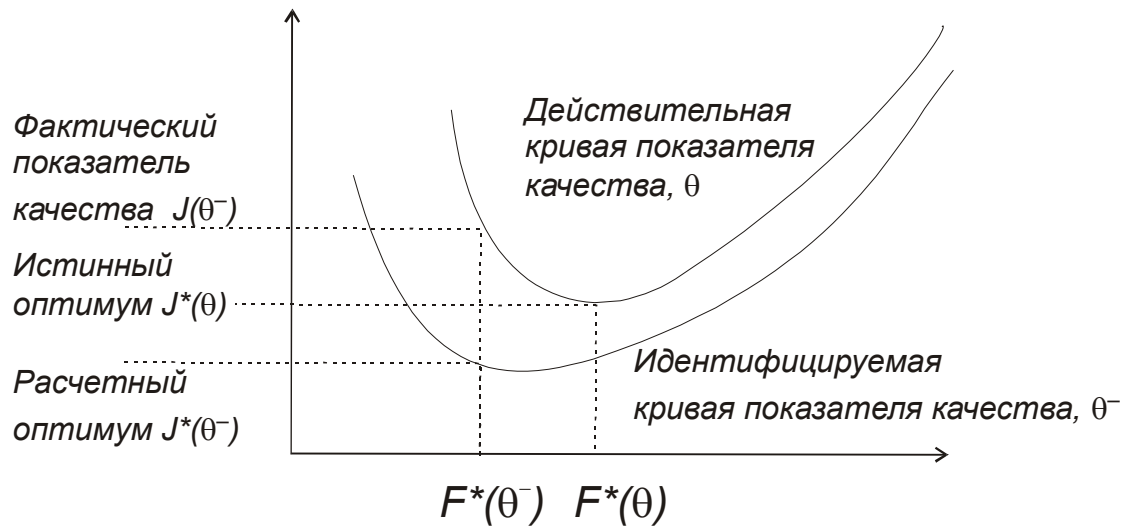


Рис. 8.1 – Зависимость показателя качества от управления и ошибок идентификации параметров в скалярном случае

8.1 Вычисление матриц чувствительности по расчетным данным

Вычислим матрицу чувствительности $\sigma = \left. \frac{\partial J}{\partial \bar{\theta}} \right|_{J^*(\tilde{\theta})}$, с которой связана разность $J(\bar{\theta}) - J^*(\tilde{\theta})$. Для этого рассмотрим систему, которая задана матричными уравнениями вида:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \quad (8.3)$$

Пусть показатель качества управления задан соотношением:

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt. \quad (8.4)$$

В формулах (8.3), (8.4) Q , R – положительно определенные симметричные весовые матрицы, а матрицы A и B есть матрицы идентифицируемых параметров.

Примем также предположение об управлении с линейной обратной связью:

$$\bar{u}(t) = -F \bar{x}(t), \quad (8.5)$$

где F – матрица коэффициентов усиления отрицательной обратной связи.

Учитывая последнюю формулу, уравнения системы можно записать в виде:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - BF)\bar{x}(t). \quad (8.6)$$

Решение этой системы в форме матричной экспоненты, как известно, имеет вид:

$$\bar{x}(t) = \exp\{(A - BF)t\}\bar{x}_0. \quad (8.7)$$

Подставим полученные выражения для управления и вектора состояний в формулу для расчета показателя качества. В результате получим:

$$J = \bar{x}_0^T \left(\int_0^\infty \exp(\omega^T t) M \exp(\omega t) dt \right) \bar{x}_0. \quad (8.8)$$

Здесь матрица ω есть

$$\omega = A - BF, \quad (8.9)$$

а матрица M равна

$$M = Q + F^T R F. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.8) теперь можно записать в виде:

$$J = \text{tr}[S X_0], \quad (8.11)$$

где

$$S = \int_0^\infty \exp(\omega^T t) M \exp(\omega t) dt, \quad (8.12)$$

а матрица X равна

$$X = \bar{x}_0 \otimes \bar{x}_0^T. \quad (8.13)$$

Дифференцируя уравнение (8.11) по переменным, которые соответствуют идентифицируемым параметрам, получим:

$$\frac{\partial J}{\partial A} = X_0 \frac{\partial \text{tr}[S]}{\partial A} = \sigma. \quad (8.14)$$

Дифференцирование следа матрицы осуществляется в соответствии с формулой:

$$\frac{\partial J}{\partial A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial A_{11}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial A_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial A_{n1}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial A_{nm}} \end{pmatrix}.$$

Величина $\frac{\partial J}{\partial A} = \sigma$ в формуле (8.14) и есть расчетная чувствительность.

Теперь получим формулы, которые позволяют получить матрицу чувствительности как результат решения алгебраических уравнений. Для этого воспользуемся основным свойством матричных уравнений, в соответствии с которым решение матричного уравнения вида:

$$\alpha^T \eta + \eta \alpha + \mu = 0 \quad (8.15)$$

относительно неизвестной матрицы η дается формулой:

$$\eta = \int_0^{\infty} \exp(\alpha^T t) \mu \exp(\alpha t) dt, \quad (8.16)$$

при условии, что действительные части всех собственных значений матрицы α отрицательны.

На этом основании справедливо утверждение, что матрица S , определенная формулой (8.12), является решением матричного уравнения:

$$\omega^T S + S \omega + M = 0 \quad (8.17)$$

или, что то же самое, уравнения:

$$(A - BF)^T S + S(A - BF) + M = 0. \quad (8.18)$$

Теперь напомним, что нас интересует изменение показателя качества системы при малых изменениях идентифицируемых параметров. Так как идентифицируемые параметры определяются в нашем случае матрицей A , то рассмотрим к каким изменениям ΔS матрицы S приведут малые приращения ΔA (аналог вариации) матрицы A . При этом матрицу обратной связи F считаем постоянной. При малых изменениях уравнение вида (8.18) остается справедливым и для матриц $A + \Delta A$, $S + \Delta S$, так что имеет место уравнение:

$$(A + \Delta A - BF)^T (S + \Delta S) + (S + \Delta S)(A + \Delta A - BF) + M = 0. \quad (8.19)$$

Вычтем из этого уравнений предыдущее, получим:

$$(A - BF)^T \Delta S + \Delta S(A - BF) + \Delta A^T S + S \Delta A + (\Delta A \Delta S + \Delta S \Delta A) = 0.$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости по сравнению с линейными частями приращений ΔS , ΔA , получаем уравнение:

$$(A - BF)^T \Delta S + \Delta S(A - BF) + \Delta A^T S + S \Delta A = 0. \quad (8.20)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (8.15), если принять обозначения

$$\alpha = A - BF, \quad (8.21)$$

$$\eta = \Delta S, \quad (8.22)$$

$$\mu = \Delta A^T S + S \Delta A. \quad (8.23)$$

Решение этого матричного уравнения имеет вид:

$$\Delta S = \int_0^\infty \exp\{(A - BF)^T t\} [\Delta A^T S + S \Delta A] \exp\{(A - BF)t\} dt. \quad (8.24)$$

Теперь воспользуемся леммой Клейнмана [2], согласно которой

$$\frac{\partial J}{\partial A} = \frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta A} = \frac{\partial \Delta S X_0}{\partial \Delta A}, \quad (8.25)$$

а также правилами дифференцирования следа матрицы, в частности, равенством:

$$\frac{\partial(Ax B)}{\partial x} = A^T B^T \quad (\text{здесь } A, x, B - \text{матрицы}).$$

Матрицы X_0, A, B, S, F, M здесь рассматриваем как константы, не зависящие от приращения ΔA . На этом основании для производной $\frac{\partial J}{\partial A}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\partial J}{\partial A} = \frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta A} = \frac{\partial \Delta S X_0}{\partial \Delta A} = S \Delta S = S \int_0^\infty \exp\{(A - BF)t\} 2X_0 \exp\{(A - BF)^T t\} dt. \quad (8.26)$$

Примем следующее обозначение для интеграла в правой части этого равенства:

$$\Gamma = \int_0^\infty \exp\{(A - BF)t\} 2X_0 \exp\{(A - BF)^T t\} dt. \quad (8.27)$$

Заметим, что величина Γ является решением матричного уравнения

$$\omega^T \Gamma + \Gamma \omega + 2X_0 = 0, \quad \omega = (A - BF). \quad (8.28)$$

Итак, матрица чувствительности показателя качества может быть получена по формуле:

$$\frac{\partial J}{\partial A} = S \Gamma, \quad (8.29)$$

где *матрица Γ может быть получена как решение линейного матричного уравнения (8.28).*

Теперь рассмотрим вопрос о том, как найти матрицу S^* , которая характеризует чувствительность системы в окрестности оптимального показателя качества. Для этого рассмотрим изменения показателя качества, обусловленные малыми изменениями стратегии управления, которые характеризуется матрицами F и ΔF . С этой целью запишем уравнение (8.18) в виде:

$$(A - BF - B\Delta F)^T (S + \Delta S) + (S + \Delta S)(A - BF - B\Delta F) + M = 0,$$

$$M = Q + F^T R F.$$

Аналогично тому, как в уже рассмотренном случае, из этих уравнений следует уравнение вида:

$$(A - BF)^T \Delta S + \Delta S(A - BF) - \Delta F^T B^T S - SB\Delta F + \Delta F^T R F + F^T R \Delta F = 0. \quad (8.30)$$

В результате рассуждений, полностью аналогичных предыдущим, для приращений ΔS в этом случае получим формулу:

$$\Delta S = \int_0^\infty \exp(\omega^T t) [\Delta F^T (R F - B^T S) + (F^T R - S B) \Delta F] \exp(\omega t) dt =$$

$$= \int_0^\infty \exp(\omega^T t) [\Delta F^T (R F - B^T S) + (R F - B^T S)^T \Delta F] \exp(\omega t) dt. \quad (8.31)$$

Оптимальное управление определяется из условия:

$$\frac{\partial J}{\partial F} = \frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta F} = 0. \quad (8.32)$$

Тогда с учетом соотношения (8.31) и правил дифференцирования матриц из уравнений (8.32) следует формула выбора оптимальной стратегии:

$$F^* = R^{-1} B^T S^*. \quad (8.34)$$

Подставим выражение для $F = F^*$ из формулы (8.34) в уравнение (8.18). В результате получим алгебраическое матричное уравнение для расчета оптимальной матрицы S :

$$A^T S^* + S^* A + Q - S^* B R^{-1} B^T S^* = 0. \quad (8.35)$$

Таким образом, матрицу чувствительности σ в окрестности оптимальной стратегии $F = F^*$ можно определить из решения уравнений (8.28), (8.35):

$$\begin{aligned}\omega^T \Gamma + \Gamma \omega + 2X_0 &= 0, \quad \omega = (A - BF), \\ A^T S^* + S^* A + Q - S^* B R^{-1} B^T S^* &= 0.\end{aligned}\quad (8.28, 8.35)$$

Контрольные вопросы

1. От каких характеристик идентифицируемой системы зависит показатель качества?
2. Дайте определение матриц чувствительности.
3. Как рассчитываются матрицы чувствительности для систем с линейной обратной связью?

8.2 Чувствительность показателя качества управления к ошибкам идентификации параметров

Пример 8.1. Рассмотрим следующий пример [2]. Пусть система задана уравнением

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x} + B\vec{u}(t), \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

а показатель качества имеет вид:

$$J = \int_0^\infty (\vec{x}Q\vec{x} + \vec{u}R\vec{u})dt, \quad Q = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Пусть управление (обратная связь) задана линейным соотношением вида:

$$\vec{u} = -F\vec{x}, \quad F = (1 \quad 1).$$

Пусть матрица X_0 задана в следующем виде:

$$X_0 = \vec{x}_0 \otimes \vec{x}_0^T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с полученными ранее формулами матрица чувствительности равна $\frac{\partial J}{\partial A} = S\Gamma$, где матрица Γ определяется как решение уравнения

$$\omega^T \Gamma + \Gamma \omega + 2X_0 = 0, \quad \omega = (A - BF) \Rightarrow$$

$$(A - BF)^T \Gamma + \Gamma(A - BF) + 2X_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) \right]^T \Gamma + \Gamma \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) \right] + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] \Gamma + \Gamma \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Для матрицы S также имеем уравнение вида (8.18), из которого следует:

$$(A - BF)^T S + S(A - BF) + M = 0, \Rightarrow$$

$$(A - BF)^T S + S(A - BF) + Q + F^T R F \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] S + S \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1, 1) 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] S + S \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Запишем эти уравнения в развернутой форме, учитывая симметрию матриц Γ, S относительно диагонали. Для компонент матрицы Γ имеем уравнения:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3\Gamma_{12} & -3\Gamma_{22} \\ \Gamma_{11} - 4\Gamma_{12} & \Gamma_{12} - 4\Gamma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\Gamma_{12} & \Gamma_{11} - 4\Gamma_{12} \\ -3\Gamma_{22} & \Gamma_{12} - 4\Gamma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow$$

$$-6\Gamma_{12} + 2 = 0, \Rightarrow \Gamma_{12} = 1/3,$$

$$2\Gamma_{12} - 8\Gamma_{22} + 2 = 0, \Rightarrow \Gamma_{22} = 1/3,$$

$$\Gamma_{11} - 4\Gamma_{12} - 3\Gamma_{22} + 0 = 0, \Rightarrow \Gamma_{11} = 7/3.$$

Для компонент матрицы S имеют место уравнения:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \\
& \begin{pmatrix} -3S_{12} & -3S_{22} \\ S_{11} - 4S_{12} & S_{12} - 4S_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3S_{12} & S_{11} - 4S_{12} \\ -3S_{22} & S_{12} - 4S_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \\
& -6S_{12} + 2 = 0, \Rightarrow S_{12} = 1/3, \\
& 2S_{12} - 8S_{22} + 2 = 0, \Rightarrow S_{22} = 1/3, \\
& S_{11} - 4S_{12} - 3S_{22} + 1 = 0, \Rightarrow S_{11} = 4/3.
\end{aligned}$$

8.3 Вычисление матриц чувствительности для оптимального показателя качества

На основании определения матриц чувствительности $\sigma = \frac{\partial J}{\partial \vec{\theta}} \Big|_{J^*(\tilde{\theta})}$ и $\sigma^* = \frac{\partial J^*}{\partial \vec{\theta}} \Big|_{J^*(\vec{\theta})}$ можно записать следующие выражения для величин, характеризующих изменение показателя качества в окрестности оптимума:

$$\begin{aligned}
tr[\sigma \delta \vec{\theta}^T] &= J(\vec{\theta}) - J^*(\tilde{\theta}), \\
tr[\sigma^* \delta \vec{\theta}^T] &= J(\vec{\theta}) - J^*(\vec{\theta}),
\end{aligned} \tag{8.36}$$

где $J(\vec{\theta})$ – фактический показатель качества; $J^*(\tilde{\theta})$ – оптимальный показатель качества, который получается в результате расчетов при идентифицированных значениях параметров системы $\tilde{\theta}$; $J^*(\vec{\theta})$ – реально достижимый оптимум.

Из этих уравнений в свою очередь следует, что

$$tr[(\sigma - \sigma^*) \delta \vec{\theta}^T] = J^*(\vec{\theta}) - J^*(\tilde{\theta}). \tag{8.37}$$

Обозначим разность матриц чувствительности как новую матрицу Σ^*

$$\sigma - \sigma^* = \Sigma^*. \tag{8.38}$$

Матрица σ уже получена нами ранее. Матрицу Σ^* определим следующим образом. Предположим, что $J^*(\tilde{\theta})$ – оптимальное значение показателя качества J , которое соответствует иден-

тифицированным значениям матриц $\tilde{A}$, $\tilde{B}$. Уравнение (8.35) теперь представим в виде:

$$\tilde{A}^T \tilde{S}^* + \tilde{S}^* \tilde{A} + Q - \tilde{S}^* \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{S}^* = 0. \quad (8.39)$$

Отсюда определяем оптимальный показатель качества:

$$J^*(\tilde{\theta}) = J^*(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{tr}(\tilde{S} X_0), \quad (8.40)$$

где

$$X_0 = E(\tilde{x}_0 \otimes \tilde{x}_0). \quad (8.41)$$

Рассмотрим теперь изменение показателя качества $J^*(\tilde{\theta}, \tilde{F} + \Delta F)$, которое соответствует малому изменению стратегии управления ΔF . Соответствующее изменение $\Delta S'$ матрицы S^* должно удовлетворять уравнению (8.18), которое в этом случае приобретает вид:

$$[\tilde{A} - \tilde{B}(\tilde{F} + \Delta F)]^T (\tilde{S}^* + \Delta S') + (\tilde{S}^* + \Delta S') [\tilde{A} - \tilde{B}(\tilde{F} + \Delta F)] + Q + (\tilde{F} + \Delta F)^T R (\tilde{F} + \Delta F) = 0. \quad (8.42)$$

При этом новый показатель качества будет равен величине:

$$J^*(\tilde{\theta}, \tilde{F} + \Delta F) = \text{tr}[(\tilde{S}^* + \Delta S') X_0]. \quad (8.43)$$

Запишем уравнение (8.42) в развернутом виде, используя уже полученные нами ранее соотношения:

$$\tilde{A}^T \tilde{S}^* + \tilde{S}^* \tilde{A} + Q - \tilde{S}^* \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{S}^* = 0, \quad F^* = R^{-1} B^T S^*.$$

Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \tilde{A}^T \tilde{S}^* - \tilde{F}^T \tilde{B}^T \tilde{S}^* - \Delta F^T \tilde{B}^T \tilde{S}^* + \tilde{A}^T \Delta S' - \tilde{F}^T \tilde{B}^T \Delta S' - \Delta F^T \tilde{B}^T \Delta S' + \\ & + \tilde{S}^* \tilde{A} - \tilde{S}^* \tilde{B} \tilde{F} - \tilde{S}^* \tilde{B} \Delta F + \Delta S' \tilde{A} - \Delta S' \tilde{B} \tilde{F} - \Delta S' \tilde{B} \Delta F + \\ & + Q + \tilde{F}^T R \tilde{F} + \tilde{F}^T R \Delta F + \Delta F^T R \tilde{F} + \Delta F^T R \Delta F = 0, \\ & (F^* = R^{-1} B^T S^*, \quad R F^* = B^T S^*). \end{aligned}$$

Продолжая преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} & \tilde{A}^T \tilde{S}^* - S^* B R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{S}^* - \Delta F^T \tilde{B}^T \tilde{S}^* + \tilde{A}^T \Delta S' - \tilde{F}^T \tilde{B}^T \Delta S' - \underbrace{\Delta F^T \tilde{B}^T \Delta S'}_0 + \\ & + \tilde{S}^* \tilde{A} - S^* B^T R^{-1} \tilde{B} \tilde{S}^* - \tilde{S}^* \tilde{B} \Delta F + \Delta S' \tilde{A} - \Delta S' \tilde{B} \tilde{F} - \underbrace{\Delta S' \tilde{B} \Delta F}_0 + \\ & + Q + S^* B R^{-1} B^T \tilde{S}^* + \tilde{F}^T R \Delta F + \Delta F^T R \tilde{F} + \Delta F^T R \Delta F = 0. \end{aligned}$$

Если теперь вычесть из уравнения (8.42) уравнение (8.39) и пренебречь слагаемыми второго порядка малости, то получим следующее уравнение:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T \Delta S' + \Delta S'(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}) + \Delta F^T (R\tilde{F} - \tilde{B}^T \tilde{S}^*) + (\tilde{F}^T R - \tilde{S}^* \tilde{B}) \Delta F = 0. \quad (8.44)$$

Уравнение (8.44) записано в виде матричного уравнения $\alpha^T \eta + \eta \alpha + \mu = 0$, решение которого имеет вид

$$\eta = \int_0^\infty \exp(\alpha^T t) \omega \exp(\alpha t) dt, \text{ поэтому не составляет труда записать и}$$

выражение для матрицы $\Delta S'$.

Если теперь рассмотреть изменение показателя качества $J^*(\tilde{\theta} + \Delta\theta, \tilde{F}) = J^*(\tilde{A} + \Delta A, \tilde{F}) = \text{tr}[(\tilde{S}^* + \Delta S)X_0]$ при малом изменении ΔA матрицы A идентифицируемых параметров системы, то в уравнении (8.44) матрица S^* должна быть заменена соответствующей матрицей $\tilde{S}^* + \Delta S_A = \tilde{S}^* + \Delta S$. Тогда это уравнение приобретает вид:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T \Delta S' + \Delta S'(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}) + \Delta F^T [R\tilde{F} - \tilde{B}^T (\tilde{S}^* + \Delta S)] + \\ + [\tilde{F}^T R - (\tilde{S}^* + \Delta S)\tilde{B}] \Delta F = 0.$$

Вновь используем равенство $R\tilde{F}^* = \tilde{B}^T S^*$. Тогда из последнего уравнения следует:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T \Delta S + \Delta S(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}) + \Delta F^T \tilde{B} \Delta S + \Delta S \tilde{B} \Delta F = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Delta S' = - \int_0^\infty \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T t\} \{\Delta F^T \tilde{B} \Delta S + \tilde{B}^T \Delta S \Delta F\} \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})t\} dt. \quad (8.45)$$

При этом

$$\Delta S_A = \tilde{S}^* \Big|_{F=\text{const}, \Delta A}. \quad (8.46)$$

Теперь, используя условие минимума функционала качества, из (8.45) получим:

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial F} = \frac{\partial \{\text{tr} \Delta S' X_0\}}{\partial F} = -2B^T \Delta S_A \int_0^\infty \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T t\} X_0 \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})t\} dt = \\ = -2B^T \Delta S_A \Gamma. \quad (8.47)$$

В результате можно записать следующее соотношение, которое характеризует изменение показателя качества в окрестности оптимума в результате приращений матриц ΔA и ΔF :

$$\Delta J^* = J(A) - J^*(\tilde{A}) = \text{tr}(S\Gamma\Delta A^T + B^T\Delta S_A\Gamma\Delta F^T). \quad (8.48)$$

Величина ΔF здесь определяется формулой:

$$\Delta F = R^{-1}B^T\Delta S_A. \quad (8.49)$$

На этом основании из формулы (8.48) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial A} &= S^*\lambda = 4S^* \int_0^\infty \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})^T t\} \left\{ \frac{X_0}{2} - B\Delta F\Gamma - \Gamma\Delta F^T B^T \right\} \exp\{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})t\} dt = \\ &= -2B^T\Delta S_A\Gamma. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Матрица λ здесь вычисляется так же, как ранее вычислялись матрицы $\tilde{S}^*$, Γ .

9 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ [2]

Наряду с другими методами, для идентификации параметров линейных и нелинейных стационарных процессов применяется метод стохастической аппроксимации [2]. По существу этот метод представляет собой одну из модификаций метода градиентного спуска. Сходимость метода достигается на больших интервалах времени по сравнению с методами последовательной идентификации. Кроме того, градиентные методы, лежащие в основе метода стохастической аппроксимации, можно рассматривать так же как развитие метода Ньютона – классического метода поиска корней нелинейных уравнений.

9.1 Процедура идентификации параметров систем методом стохастической аппроксимации

Рассмотрим дискретную нелинейную стационарную систему управления, заданную уравнениями состояния вида:

$$x_k = \Phi(u_k, u_{k-1}, \dots, \vec{\theta}) \quad (9.1)$$

и уравнением выходов

$$y_k = x_k + v_k, \quad (9.2)$$

где x – переменная состояния, u – входная переменная (управление), y – выходной сигнал, v – шум (случайная ошибка) измерений, $\vec{\theta}$ – вектор идентифицируемых параметров, $\Phi(u_k, u_{k-1}, \dots, \vec{\theta})$ – заданная нелинейная в общем случае функция переменных состояния, входного сигнала и вектора неизвестных параметров.

Введем вектор

$$\vec{u} = \{u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-r}\}, \quad (9.3)$$

где r – количество измерений, предшествовавших моменту времени с номером k .

Уравнение (9.1) с учетом этих обозначений представим в виде:

$$x_k = \Phi(\vec{u}, \vec{\theta}). \quad (9.4)$$

Уточненная оценка вектора параметров $\vec{\theta}_{n+1}$ на некотором очередном шаге с номером (n) итерационного процесса получается в методе стохастической аппроксимации следующим образом:

$$\vec{\theta}_{n+1} = \vec{\theta}_n - \rho_n \vec{\psi}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.5)$$

где $\vec{\psi}_n$ – «корректирующая» функция, значение которой можно оценить по измерениям выходного сигнала y , а ρ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ – есть последовательность скалярных корректирующих коэффициентов (весовых множителей).

Величины ρ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ выбираются не произвольно, а с учетом следующих условий, которые основаны на теореме Дворецкого [2]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0, \quad (9.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho_k = \infty, \quad (9.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho_k^2 < \infty. \quad (9.8)$$

Из множества функций, удовлетворяющих условиям (9.6)–(9.8) можно выбрать, например, функцию вида:

$$\rho_k = \rho_1 / k, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Векторная функция $\vec{\psi}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, которая использована при записи уравнения (9.5), была предложена Кифером и Вольфовицем как функция-градиент. Эта функция выбирается следующим образом.

Для решения задачи идентификации методом стохастической аппроксимации введем следующий показатель качества идентификации:

$$J_k(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} (y_k - \Phi(\vec{u}_k, \vec{\theta}))^2 \quad (9.9)$$

($\vec{\theta}$ – «истинные» значения параметров, $\vec{\theta}_k$ – идентифицированные по предшествовавшей моменту времени k совокупности измерений значения параметров). «Физический» смысл этого показателя совершенно прозрачен: чем точнее идентифицированы параметры моделируемой системы $\vec{\theta}_k$, тем меньше модуль разности

между измеренным и рассчитанным по формуле (9.1) значением выходного сигнала y_k .

Теперь следующим образом определим функцию $\vec{\psi}_k$, $k=1,2,3,\dots$:

$$\vec{\psi}_k = \frac{\partial J_k(\tilde{\theta})}{\partial \tilde{\theta}_k} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial J_k(\tilde{\theta})}{\partial \theta_{1,k}} \\ \frac{\partial J_k(\tilde{\theta})}{\partial \theta_{2,k}} \\ \dots \\ \frac{\partial J_k(\tilde{\theta})}{\partial \theta_{m,k}} \end{array} \right\}, \quad (9.10)$$

где m , как ранее, – количество идентифицируемых параметров системы.

Используя выражение (9.9) для показателя качества и правила дифференцирования скалярной функции по векторному аргументу, получим следующее выражение для векторной функции $\vec{\psi}_k$, $k=1,2,3,\dots$:

$$\vec{\psi}_k = \frac{\partial J_k(\tilde{\theta})}{\partial \tilde{\theta}_k} = [\Phi(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k) - y_k] \frac{\partial \Phi(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} = [\Phi(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k) - y_k] \bar{g}_k(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k), \quad (9.11)$$

где введено новое обозначение $\frac{\partial \Phi(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k)}{\partial \tilde{\theta}_k} = \bar{g}_k(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k)$. Первый

сомножитель в правой части формулы (9.11) представляет собой скаляр (для системы со скалярным выходным сигналом, см. уравнение (9.1)), а второй – градиент скалярной функции $\Phi(\vec{u}_k, \tilde{\theta}_k)$, стоящей в правой части уравнения системы (9.1), вычисленный в пространстве идентифицируемых параметров. Используя правила дифференцирования скалярной функции по векторному аргументу, запишем выражение для градиента в развернутом виде:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k)}{\partial \bar{\theta}_k} = \bar{g}_k(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k) \Rightarrow$$

$$\bar{g}_k(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k)}{\partial \theta_{1,k}} \\ \frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k)}{\partial \theta_{2,k}} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \tilde{\bar{\theta}}_k)}{\partial \theta_{m,k}} \end{array} \right\}. \quad (9.12)$$

Следует отметить, что функция $\bar{\psi}_k$ может быть вычислена по результатам измерений величин y_k , u_k и **предыдущим** оценкам параметров системы $\tilde{\bar{\theta}}_k$.

Целесообразно напомнить, что физический смысл градиента скалярной функции заключается в том, что вектор-градиент показывает направление максимальной скорости роста функции. Так как в рассматриваемом случае нас интересует наименьшее значение функции цели (9.9), то есть минимальное отклонение расчетных и наблюдаемых значений выходного сигнала, двигаться при уточнении коэффициентов следует в направлении, противоположном градиенту этой функции. Этим обстоятельством и можно объяснить выбор знака «минус» в формуле (9.5).

Чтобы начать процесс идентификации, описываемый уравнением (9.5), необходимо иметь начальную оценку коэффициентов $\tilde{\bar{\theta}}_1$ и начальное значение числового параметра ρ_1 . Под начальной оценкой здесь подразумевается множество коэффициентов $\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, \dots, \theta_{m,1}$ в соответствии с обозначениями, принятыми при записи формулы (9.12). Если такая начальная оценка имеется, то дальнейший процесс идентификации можно рассматривать как последовательное уточнение параметров по формуле (9.5). Процесс идентификации можно проиллюстрировать на примере линейной системы:

$$x_k = (\bar{\theta}, \bar{u}_k) = \Phi(\bar{u}_k, \bar{\theta}). \quad (9.13)$$

В этом случае для функции $\bar{g}_k(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k)$ получим следующее выражение:

$$\bar{g}_k(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k) = \frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k)}{\partial \bar{\theta}_k}. \quad (9.14)$$

Отсюда, с учетом (9.13), следует

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_k &= [\Phi(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k) - y_k] \frac{\partial \Phi(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k)}{\partial \bar{\theta}_k} = [\Phi(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k) - y_k] \bar{g}_k(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k) = \\ &= [(\bar{u}_k, \bar{\theta}_k) - y_k] \bar{u}_k. \end{aligned} \quad (9.15)$$

9.2 Получение начальных оценок для запуска алгоритма идентификации методом стохастической аппроксимации

Для начала процедуры идентификации в качестве первой оценки можно принять, что $\bar{y}_1 = \bar{x}_1$ (здесь $\bar{y}_1$ – первые m измерений), а для первой оценки коэффициентов используется оценка

$$\bar{\theta}_1 = 0. \quad (9.16)$$

Тогда для линейной, например, системы вторая оценка получается по формуле:

$$\Delta \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1 = -\rho_k \bar{\psi}_k = \frac{[\tilde{y}_{m+1} - y_{m+1}]}{(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_1)} \bar{\mu}_1, \quad (9.17)$$

$$\tilde{y}_{m+1} = (\bar{u}_k, \bar{\theta}_k), \quad \bar{\mu}_1 \Leftrightarrow \bar{u}_1.$$

Оценка (расчетное значение) выходного сигнала $\tilde{y}_{m+1} = 0$ в том случае, если другая априорная оценка отсутствует.

В формуле (9.17) вместо $\bar{u}_1$, как было обозначено в предыдущем разделе, введено новое обозначение $\bar{\mu}_1 \Leftrightarrow \bar{u}_1$. Здесь под $\bar{\mu}_1$ подразумеваются базисные функции модели системы. Это можно проиллюстрировать следующим примером. Хотя функция $\Phi(u_k, u_{k-1}, \dots, \bar{\theta})$ в правой части уравнения (9.1) является, в общем случае, нелинейной функцией, это уравнение можно представить в линейной форме. Рассмотрим систему с уравнением:

$$x_{k+1} = \theta_1 x_k^2 + 2\theta_2 u_k^3.$$

Введем обозначение:

$$\vec{\mu}_k = \{x_k^2\} = 2u_k^3.$$

Тогда получаем линейную систему

$$x_{k+1} = \theta_1 \mu_{1,k} + \theta_2 \mu_{2,k}.$$

Нетрудно заметить, что уравнение (9.17) удовлетворяет уравнению (9.5), если для начального значения числового коэффициента ρ_1 принять выражение:

$$\rho_1 = \frac{1}{(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_1)} = \frac{1}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}. \quad (9.18)$$

Пример 9.1 [2]. Рассмотрим пример идентификации методом стохастической аппроксимации вектора параметров следующей скалярной системы:

$$\omega = (\vec{\theta}, \vec{u}) + v,$$

где v – случайная погрешность измерений.

Пусть имеются следующие результаты измерений:

$$\omega_1 = 11,3; \quad \omega_2 = 3,9; \quad \omega_3 = 3,11;$$

$$\vec{u}_1 = (4,3), \quad \vec{u}_2 = (1,2), \quad \vec{u}_3 = (2,-1).$$

Функция $\vec{\psi}_k$ в рассматриваемом случае равна:

$$\vec{\psi}_k = [(\vec{\tilde{\theta}}_k, \vec{u}_k) - \omega_k] \frac{\partial \Phi(\vec{u}_k, \vec{\tilde{\theta}}_k)}{\partial \vec{\tilde{\theta}}_k} = [(\vec{\tilde{\theta}}_k, \vec{u}_k) - \omega_k] \vec{u}_k.$$

В соответствии с (9.7) процесс идентификации описывается уравнением:

$$\vec{\tilde{\theta}}_{k+1} = \vec{\tilde{\theta}}_k - \rho_k \vec{\psi}_k = \vec{\tilde{\theta}}_k - \rho_k [(\vec{\tilde{\theta}}_k, \vec{u}_k) - \omega_k] \vec{u}_k.$$

Находим величину

$$\rho_1 = \frac{1}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)} = \frac{1}{(\vec{u}_1, \vec{u}_1)} = \frac{1}{25}, \quad \vec{g}_k = \vec{u}_k.$$

Принимаем, за отсутствием другой информации, что начальная оценка коэффициентов равна нулю $\vec{\tilde{\theta}}_1 = 0$, $\tilde{\omega}_1 = 0$. Используя такие начальные оценки, начинаем процесс идентификации, который дает последовательность оценок. Вторая оценка коэффициентов дает:

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{\omega_1 - \tilde{\omega}_1}{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1)} \tilde{u}_1 = \frac{11,3}{25} \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix},$$

$$\rho_j = \frac{\rho_1}{j}, \quad j = 2, 3, \dots$$

На следующем шаге получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_3 &= \tilde{\theta}_2 - \frac{\rho_1}{2} [(\tilde{\theta}_2, \tilde{u}_2) - \omega_2] \tilde{u}_2 = \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2 \cdot 25} \left(\begin{Bmatrix} 1,8 & 1,35 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} - 3,9 \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0,012 \\ 0,024 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,788 \\ 1,326 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Четвертая итерация дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_4 &= \tilde{\theta}_3 - \frac{\rho_1}{3} [(\tilde{\theta}_3, \tilde{u}_3) - \omega_3] \tilde{u}_3 = \begin{Bmatrix} 1,788 \\ 1,326 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3 \cdot 25} (-0,85) \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 1,788 \\ 1,326 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,026 \\ -0,013 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,814 \\ 1,313 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Продолжая процесс идентификации, мы будем получать уточненные оценки коэффициентов, все более близкие к их действительным значениям, которые в этом примере равны

$$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Опишите процесс идентификации методом стохастической аппроксимации.
2. Почему этот метод относят к классу градиентных методов?
3. Как выбирается начальная оценка коэффициентов?

10 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ МЕТОДОМ ОБУЧЕНИЯ [2]

От других методов идентификации метод последовательного обучения [2] отличается характеристиками сходимости. Сходимость этого метода несколько хуже, чем метода последовательной регрессии, но зачастую лучше, чем метода стохастической аппроксимации. Метод эффективен для идентификации систем с медленно изменяющимися параметрами.

10.1 Идентификация стационарных процессов

Рассмотрим систему со случайным входным сигналом $u(t)$, скалярным выходным сигналом $x(t)$ и импульсной реакцией $g(t)$. Входной и выходной сигналы – измеряемые функции. Выходной сигнал для такой системы при нулевых начальных условиях определяется интегралом свертки:

$$x(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad (10.1)$$

Напомним, что функцию $g(t)$ можно рассматривать как функцию-оригинал, изображение которой при применении преобразования Лапласа $X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$ к уравнениям линейной системы управления представляет собой передаточную функцию. В пространстве функций – трансформант Лапласа – уравнению (10.1) соответствует уравнение

$$X(s) = G(s) \cdot U(s),$$

где s – параметр преобразования.

Уравнение (10.1) в дискретной форме имеет вид:

$$x_j = \sum_{i=1}^N g_i u_{j-i}, \quad (10.2)$$

здесь j – номер некоторого текущего момента времени, в который выполняются измерения, $(j-i)$ – номера моментов времени, в которые выполнялись предыдущие измерения.

Задача идентификации состоит в том, чтобы найти неизвестные параметры системы g_i по результатам измерений величин x_j , u_{j-i} .

Определение величин g_i методом последовательного обучения осуществляется путем итерационных вычислений величин

$$\tilde{h}_1^{(j)}, \tilde{h}_2^{(j)}, \dots, \tilde{h}_N^{(j)}, \quad j = N+1, N+2, \dots \quad (10.3)$$

Эти величины должны последовательно приближаться к точным значениям оцениваемых параметров $g_1, g_2, \dots, g_N$ по мере увеличения количества итераций (здесь j – номер итерации). Будем отмечать волной сверху расчетную оценку выходного сигнала, полученную по результатам приближенной оценки параметров $\tilde{h}_1^{(j)}, \tilde{h}_2^{(j)}, \dots, \tilde{h}_N^{(j)}$ в результате j -й итерации. Тогда, на основании уравнения (10.2), можно записать равенство:

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^N \tilde{h}_i^{(j)} u_{j-i}. \quad (10.4)$$

Введем следующие векторы:

$$\vec{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}; \quad (10.5)$$

$$\vec{\tilde{h}}^{(j)} = \{\tilde{h}_1^{(j)}, \tilde{h}_2^{(j)}, \dots, \tilde{h}_N^{(j)}\}; \quad (10.6)$$

$$\vec{u}^{(j)} = \{u_{j-1}, u_{j-2}, \dots, u_{j-N}\}. \quad (10.7)$$

Теперь уравнения (10.2) и (10.4) запишем соответственно в виде:

$$x_j = (\vec{g}, \vec{u}^{(j)}), \quad (10.8)$$

$$\tilde{x}_j = (\vec{\tilde{h}}^{(j)}, \vec{u}^{(j)}). \quad (10.9)$$

Теперь рассмотрим следующий вектор приращений (поправка):

$$\Delta \vec{\tilde{h}}^{(j)} = \vec{\tilde{h}}^{(j+1)} - \vec{\tilde{h}}^{(j)}. \quad (10.10)$$

Этот вектор будем использовать для коррекции оценки параметров $\vec{\tilde{h}}^{(j+1)}$ на итерации с номером $(j+1)$ с учетом разности $(x_j - \tilde{x}_j)$ между измеренным x_j и «предсказанным» $\tilde{x}_j$ значениями выходного сигнала.

Для этого положим [2], что поправка $\Delta \vec{\tilde{h}}^{(j)}$ имеет вид:

$$\Delta \tilde{h}^{(j)} = (x_j - \tilde{x}_j) \frac{\bar{u}^{(j)}}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (10.11)$$

Применение этой формулы для оценки поправок приводит к тому, что если очередная оценка $\tilde{h}^{(j+1)} = \vec{g}$, то есть совпадает с истинным значением вектора оцениваемых параметров, то будут удовлетворяться и уравнения (10.9), (10.10). При этом из формулы (10.11) следует, что

$$(\bar{u}^{(j)}, \Delta \tilde{h}^{(j)}) = (x_j - \tilde{x}_j) \frac{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})} = (x_j - \tilde{x}_j). \quad (10.12)$$

Формулы (10.10) и (10.11) описывают процесс оценивания параметров системы управления методом последовательного обучения. Для получения оценки в первом приближении, то есть в начале процедуры оценивания, можно в уравнение (10.11) вместо x_j при $j=1$ подставить значение x_0 .

Сходимость процедуры оценивания параметров методом последовательного обучения с применением формул (10.10), (10.11) доказана, в частности, в работе [2]. Более того, сходимость обеспечивается и в том случае, если в эти формулы вводится коэффициент коррекции ошибки α :

$$\tilde{h}^{(j+1)} = \tilde{h}^{(j)} + \alpha(x_j - \tilde{x}_j) \frac{\bar{u}^{(j)}}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 < \alpha < 1. \quad (10.13)$$

Пример 10.1. Рассмотрим пример идентификации методом последовательного обучения вектора параметров скалярной системы, которую мы рассматривали в предыдущем примере:

$$\omega = (\vec{g}, \bar{u}) + v,$$

где v – случайная погрешность измерений.

Пусть имеются следующие результаты измерений:

$$\omega_1 = 11,3; \quad \omega_2 = 3,9; \quad \omega_3 = 3,11;$$

$$\bar{u}^{(1)} = (4,3), \quad \bar{u}^{(2)} = (1,2), \quad \bar{u}^{(3)} = (2,-1).$$

Как и ранее, за отсутствием другой информации, принимаем, что начальная оценка коэффициентов равна нулю $\tilde{h}^{(1)} = 0, \quad \tilde{\omega}_1 = 0$.

На основании уравнения (10.11)

$$\Delta \tilde{h}^{(j)} = (x_j - \tilde{x}_j) \frac{\bar{u}^{(j)}}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

получим следующие оценки параметров:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{h}^{(j)} &= (x_j - \tilde{x}_j) \frac{\bar{u}^{(j)}}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}, \Rightarrow \\ \tilde{h}^{(2)} &= (\omega_1 - 0) \frac{\bar{u}^{(1)}}{(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(1)})} = \frac{11,3}{25} \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнение (10.9) дает следующее расчетное значение выходного сигнала:

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{h}^{(2)} \bar{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1,8 & 1,35 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 4,5.$$

На следующем шаге получаем величину $\tilde{h}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(j+1)} &= \tilde{h}^{(j)} + (x_j - \tilde{x}_j) \frac{\bar{u}^{(j)}}{(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(j)})}, \Rightarrow \\ \tilde{h}^{(3)} &= \tilde{h}^{(2)} + (\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \frac{\bar{u}^{(2)}}{(\bar{u}^{(2)}, \bar{u}^{(2)})} = \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix} + \frac{3,9 - 4,5}{5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 1,35 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0,12 \\ 0,24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,68 \\ 1,11 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Вновь по формуле (27) получаем расчетное значение выходного сигнала:

$$\tilde{\omega}_3 = \tilde{h}^{(3)} \bar{u}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1,68 & 1,11 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2,25.$$

Получаем следующую уточненную оценку $\tilde{h}^{(4)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(4)} &= \tilde{h}^{(3)} + (\omega_3 - \tilde{\omega}_3) \frac{\bar{u}^{(3)}}{(\bar{u}^{(3)}, \bar{u}^{(3)})} = \begin{Bmatrix} 1,68 \\ 1,11 \end{Bmatrix} + \frac{3,11 - 2,25}{5} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \cong \\ &\cong \begin{Bmatrix} 1,68 \\ 1,11 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,32 \\ -0,17 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,94 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

По сравнению с методом стохастической аппроксимации, четвертая итерация дает более близкую оценку к точным значениям коэффициентов, которые в этом примере равны $\bar{g} = \{2, 1\}$.

10.2 Последовательная процедура распознавания образов для идентификации нелинейных систем

Вначале рассмотрим интеграл свертки для линейной системы с входным сигналом $x(t)$ и выходом $y(t)$:

$$z(t) = \int_0^t g_1(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (10.14)$$

где $g_1(\tau)$ – импульсная характеристика линейной системы.

Теперь рассмотрим нелинейную систему вида:

$$y(t) = z^2(t). \quad (10.15)$$

Выходную переменную $y(t)$ этой нелинейной системы будем рассматривать как произведение $z_1(t)$, $z_2(t)$ выходов двух линейных систем с параметрами $g_1(t)$, $g_2(t)$, каждая из которых описывается соотношением вида (10.14). В этом случае выходной сигнал нелинейной системы можно описать выражением:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g_1(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \int_0^t g_2(\tau_2)x(t-\tau_2)d\tau_2 = \\ &= \int_0^t \int_0^t g_1(\tau_1)g_2(\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Введем следующее обозначение:

$$\gamma_2(\tau_1, \tau_2) = g_1(\tau_1)g_2(\tau_2). \quad (10.17)$$

Теперь уравнение нелинейной системы представим в виде:

$$y(t) = \int_0^t \int_0^t \gamma_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \quad (10.18)$$

Далее будем рассматривать обобщение системы (10.18), считая, что правая часть этого уравнения задана в виде произвольной непрерывной нелинейной функцией $f[z(t)]$, то есть уравнение:

$$y(t) = f[z(t)]. \quad (10.19)$$

Теперь воспользуемся известными результатами математического анализа, согласно которым любую непрерывную функцию $f[z(t)]$ можно аппроксимировать полиномом степени m от $z(t)$, который сходится к $f[z(t)]$, а следовательно, в соответствии

с формулой (10.18), и к $y(t)$. Поэтому для уравнения (10.19) справедливо следующее приближение:

$$y_m(t) = f_m[z(t)], \quad (10.20)$$

где m – указывает порядок аппроксимирующего полинома.

Теперь определим следующие величины, которые соответствуют идентифицируемым параметрам (импульсным функциям) системы вида (10.18):

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau_1) &= g_1(\tau_1), & \gamma_2(\tau_1, \tau_2) &= g_1(\tau_1)g_2(\tau_2), \\ \dots, & & & \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\gamma_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = g_1(\tau_1)g_2(\tau_2) \dots g_k(\tau_k) = \prod_{j=1}^k g_j(\tau_j).$$

Тогда для произвольной правой части уравнений (10.18), (10.19) имеет место представление:

$$\begin{aligned} f_m[z(t)] &= a_1 \int_0^t \gamma_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + a_2 \int_0^t \int_0^t \gamma_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ a_m \overbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t}^m \gamma_m(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \dots x(t - \tau_m) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_m = \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \overbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t}^k \gamma_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \dots x(t - \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Наконец, это уравнение запишем в дискретной форме:

$$f_m[z(t)] \cong \sum_{k=1}^m \left(a_k \sum_{\mu_1}^n \dots \sum_{\mu_k}^n \gamma_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k} x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k} \right). \quad (10.23)$$

Здесь

$$x_{\mu_k} = x(t - \mu_k \Delta T), \quad (10.24)$$

ΔT – шаг дискретизации.

10.2.1 Алгоритм последовательного обучения

Чтобы теперь получить расчетные формулы, реализующие алгоритм идентификации нелинейной системы, которая может быть описана дискретной системой вида (10.23), запишем уравнения (10.23), используя уже хорошо знакомые понятия базисных функций, вернее их аналогов. Для этого введем вектор

$$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (10.25)$$

где $x_i = x(t - i\Delta T)$.

Напряду с вектором $\vec{x}$ введем вектор (аналог базисных функций) $\vec{\psi}_s$:

$$\vec{\psi}_s = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}. \quad (10.26)$$

Компоненты этого вектора имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \dots, \varphi_n = x_n; \\ \varphi_{n+1} &= x_1 x_1, \quad \varphi_{n+2} = x_1 x_2, \dots, \varphi_{n+n} = x_1 x_n; \\ \varphi_{2n+1} &= x_2 x_2, \quad \varphi_{2n+2} = x_2 x_3, \dots, \varphi_{2n+n-1} = x_2 x_n; \dots \end{aligned} \quad (10.27)$$

Количество s компонент вектора $\vec{\psi}_s$ определяется порядком r слагаемых, которые необходимо учесть в модели, и равно

$$s = \frac{(n+r)!}{n!r!} - 1. \quad (10.28)$$

Теперь используем выражение (10.23) правой части уравнения (10.20). Формулу (10.23) представим с учетом введенных обозначений в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^s \omega_i \varphi_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \omega_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \omega_{jh} x_j x_h + \dots + \overbrace{\sum_{j=1}^n \dots \sum_{q=1}^n \omega_{j,h,\dots,q} x_j x_h \dots x_q}^r = \\ &= (\vec{\omega}, \vec{\psi}_s). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Таким образом, для выходного сигнала может быть записана следующая система уравнений, которая дает оценку выходного сигнала, рассчитанную с помощью приближенных результатов идентификации параметров $\vec{\omega}$ по формуле:

$$\tilde{y}_m(t) = \Phi(\vec{x}). \quad (10.30)$$

Вектор параметров уточняется при выполнении очередного шага итерационного процесса по уже полученной ранее формуле вида:

$$\vec{\omega}^{(i+1)} = \vec{\omega}^{(i)} + \frac{\alpha(y_i - \tilde{y}_i)\vec{\psi}_s^{(i)}}{(\vec{\psi}_s^{(i)}, \vec{\psi}_s^{(i)})}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (10.31)$$

Контрольные вопросы

1. Опишите процесс идентификации методом последовательного обучения.
2. Что такое коэффициент коррекции ошибки?
3. Как выбирается начальная оценка коэффициентов?
4. Опишите процедуру последовательного распознавания образов для идентификации нелинейных систем.

11 ОСНОВЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Метод инвариантного погружения применяют для одновременной последовательной идентификации параметров и оценивания состояния линейных и нелинейных систем [1]. Метод основан на интегрировании по времени системы нелинейных дифференциальных уравнений.

В силу того, что метод может обеспечить последовательное и одновременное оценивание всех переменных состояния и параметров как линейных, так и нелинейных систем, он является одним из самых мощных математических методов идентификации.

Для того, чтобы приступить к изучению основ метода инвариантного погружения и его применения к задачам идентификации, нам требуется ознакомиться с такими понятиями, как функция Гамильтона–Понтрягина и условия трансверсальности, принцип максимума Понтрягина.

11.1 Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина является основой решения задач оптимального управления процессами [9], которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим основные понятия теории оптимального управления на простых примерах.

Пусть движение *управляемого объекта* (развитие *управляемого процесса*, изменение *управляемой системы*) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.1)$$

Эти уравнения можно записать в векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\theta}, \vec{u}, t), \quad (11.2)$$

где t – время, $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – **фазовый вектор (координаты)**, который характеризует движение объекта в зависимости от времени, вектор $\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$ – **вектор управления**, выбирая который можно изменять движение объекта,

$\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – известные (заданные) нелинейные в общем случае функции.

Функции $f_i(\vec{x}, \vec{u}, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ описывают внутреннее устройство объекта и влияние на него различных внешних воздействий. Предполагается, что эти функции априорно известны.

Вектор управления не может выбираться произвольно, так как реальные технические условия накладывают на него определенные ограничения. Положение рулей управления (самолета, корабля) может изменяться в довольно ограниченных пределах, не всегда может быть изменено практически мгновенно, диапазон изменения силы тяги двигателей ограничен и т.д.

Пусть U – подмножество в пространстве управлений, которое может быть определено, например, заданием следующего вида ограничений на вектор управлений:

$$|u_i(t)| \leq a_i. \quad (11.3)$$

Тогда U называют **областью управления**.

Очень часто накладываются ограничения на гладкость управлений $u_i(t)$. Например, если управляющие устройства работают безынерционно, то управление должно описываться кусочно-непрерывными функциями.

Некоторое состояние системы $\vec{x}^1$ называется **достижимым** из состояния $\vec{x}^0 = \vec{x}(t_0)$, если существует допустимое управление $\vec{u}(t)$ и такое значение $t_1 \geq t_0$, что $\vec{x}(t_1) = \vec{x}^1$.

Множеством достижимости по отношению к некоторому начальному состоянию $\vec{x}^0 = \vec{x}(t_0)$ называется множество всех состояний, достижимых из этого начального состояния.

Ясно, что при одинаковых начальных состояниях $\vec{x}^0 = \vec{x}(t_0)$ некоторой динамической системы, но разных допустимых управлениях $\vec{u}(t)$ будут получаться разные функции состояния $\vec{x}(t)$ и разные процессы $\{\vec{u}(t), \vec{x}(t)\}$.

Отсюда следует, что имеет смысл говорить об **оптимальном** с точки зрения какого-то критерия процессе. Тогда соответствующее управление также называют оптимальным управлением, а достигнутое в результате состояние и траекторию – оптимальным состоянием и оптимальной траекторией.

Целевая функция и критерий оптимальности. Рассмотрим постановку задачи оптимального управления, когда целевая функция (функционал) задана в виде интеграла:

$$J(t_0, T, \bar{x}_0, \bar{u}, \bar{x}) = \int_{t_0}^T f^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt + \Phi(\bar{x}(T), T), \quad (11.4)$$

где $f^0(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $\Phi(\bar{x}, T)$ – заданные функции.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы минимизировать (или максимизировать) функцию цели (функционал) (11.4) на множестве допустимых управлений и допустимых (совместимых с ограничениями на фазовые координаты) траекторий.

Формулировка принципа максимума Понтрягина. Рассмотрим задачу, которая называется задачей с закрепленными концами и закрепленным временем. Пусть требуется минимизировать функцию

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^T f^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt \quad (11.5)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \\ \bar{x}(t_0) &= \bar{x}_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1, \\ \bar{u}(t) &\in U, \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$ управления предполагаются кусочно-непрерывными функциями на $[t_0, T]$, точки $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ – заданы. Важно, что в этой задаче множество U не зависит от времени и нет ограничений на фазовые координаты при $t_0 \leq t \leq T$. Все это и определяет название задачи как задачи с закрепленными концами и закрепленным временем.

Будем предполагать, функции $f_i(\bar{x}, \bar{u})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ имеют частные производные $\frac{\partial f_i(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_j} = f_j^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Функция Гамильтона–Понтрягина. Для формулировки принципа максимума Понтрягина введем вспомогательные переменные $\bar{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \in E^n$ и константу ψ_0 . Определим

следующую функцию, которая и называется функцией Гамильтона–Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(\bar{x}, \bar{u}, t, \bar{\psi}, \psi_0) &= \psi_0 f^0(\bar{x}, \bar{u}, t) + \psi_1 f^1(\bar{x}, \bar{u}, t) + \dots + \psi_n f^n(\bar{x}, \bar{u}, t) = \\ &= \sum_{j=0}^n \psi_j f^j(\bar{x}, \bar{u}, t) = \psi_0 f^0(\bar{x}, \bar{u}, t) + (\bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Пусть теперь $\bar{u}(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq T$ – кусочно-непрерывное управление, удовлетворяющее ограничениям в задаче (11.6). Пусть $\bar{x} = \bar{x}(t, \bar{u}, \bar{x}_0)$ – решение уравнений (11.6), которое соответствует этому управлению $\bar{u}(t) \in U$, $t_0 \leq t \leq T$, начальному условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ и которое определено на всем отрезке $[t_0, T]$. Решениям $\{(\bar{u}(t), \bar{x}(t)), t_0 \leq t \leq T\}$ задачи (11.6) поставим в соответствие систему (присоединенную или сопряженную систему уравнений) линейных дифференциальных уравнений относительно вспомогательных переменных следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} &= - \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{u}, t, \psi(t), \psi_0)}{\partial x_i} \bigg|_{\bar{u}=\bar{u}(t), \bar{x}=\bar{x}(t)} = \\ &= - \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{\partial f^j(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial x_i} \bigg|_{\bar{u}=\bar{u}(t), \bar{x}=\bar{x}(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где $\psi_0 = \text{const}$.

Канонические уравнения. Исходная (динамическая) система уравнений (11.6) и присоединенная система (11.8) обычно записывается в векторной форме в виде **канонических** уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}, t, \bar{\psi}, \psi_0), t), \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= - \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}, t, \bar{\psi}, \psi_0), t, \bar{\psi}, \psi_0)}{\partial \bar{x}}, \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (11.9)$$

относительно $2n$ неизвестных $\bar{\psi}$ и $\bar{x}$. Здесь $\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}$, $\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$ – градиенты функции Гамильтона H по $\bar{\psi}$ и по $\bar{x}$. Общее решение этой системы зависит от $2n$ произвольных числовых параметров, для определения которых нужны еще $2n$ условий (уравнений). Такими условиями являются начальные условия $\bar{x}(t_0)$, $\bar{\psi}(t_0)$. В рассмат-

риваемой задаче такими условиями являются ограничения на фазовые координаты в начальный и конечный момент времени:

$$\bar{x}(t_0) = x_0, \quad \bar{x}(T) = \bar{x}_1. \quad (11.10)$$

Относительно еще одного параметра, ψ_0 , ограничимся утверждением, что зачастую можно принять $\psi_0 = -1$.

Принцип максимума Понтрягина

Теорема 1. Пусть $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$, $t_0 \leq t \leq T$ – решение задачи (11.5), (11.6). Тогда необходимо существуют непрерывная вектор-функция $\bar{\psi}(t)$ и постоянная ψ_0 такие, что 1) $\psi_0 \leq 0$, $|\psi_0| + |\bar{\psi}(t)| \neq 0$, $t_0 \leq t \leq T$; 2) $\bar{\psi}(t)$ является решением сопряженной системы (11.8), соответствующей рассматриваемому решению $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$; 3) при каждом $t \in [t_0, T]$ функция $H(\bar{x}(t), \bar{u}, t, \bar{\psi}(t), \psi_0)$ переменной $\bar{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ достигает своего максимума на множестве U при $\bar{u} = \bar{u}(t)$, т.е. $\max_{u \in U} H(\bar{x}(t), \bar{u}, t, \bar{\psi}(t), \psi_0) = H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \bar{\psi}(t), \psi_0)$, $t_0 \leq t \leq T$.

Условия трансверсальности. Пусть по условиям задачи требуется минимизировать функцию цели общего вида

$$J(t_0, T, \bar{x}_0, \bar{u}, \bar{x}) = \int_{t_0}^T f^0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt + \Phi(\bar{x}(T), T). \quad (11.11)$$

Пусть также правый конец траектории свободен. Тогда в качестве «начальных» условий в конечный момент времени для присоединенной системы следует задавать условия вида:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(T) - \psi_0 \frac{\partial \Phi(\bar{x}(T), T)}{\partial x} \Big|_{t=T} &= 0 \Rightarrow \text{при } \psi_0 = -1 \Rightarrow \\ \psi_i(T) &= - \frac{\partial \Phi(\bar{x}(T), T)}{\partial x_i} \Big|_{t=T}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Пусть теперь левый конец траектории свободен. Тогда в качестве начальных условий для присоединенной системы следует задавать условия вида:

$$\bar{\psi}(t_0) = 0. \quad (11.13)$$

Условия (11.12), (11.13), которые определяют «граничные» условия для присоединенной системы, называют *условиями трансверсальности*.

Пример 11.1. Пусть точка движется по оси Ox по закону

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad t \geq 0.$$

Требуется найти кусочно-непрерывное управление $u = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, такое, чтобы, начиная движение из начального положения $x(0) = 1$ с нулевой скоростью, точка попала в начало координат за минимальное время T и имела в этот момент нулевую скорость.

Очевидно, что функция цели в этом случае имеет вид:

$$J(T) = \int_0^T (1) dt, \quad f^0 \equiv 1, \quad \Phi \equiv 0.$$

Введем следующие обозначения для фазовых координат точки: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: найти такое управление, которое наискорейшим образом переводит фазовую точку из состояния $(1, 0)$ в состояние $(0, 0)$, считая, что движение подчиняется уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad t \geq 0, \quad U = \{u \in E^1 : |u| \leq 1\}.$$

Составляем функцию Гамильтона–Понтрягина H :

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad t \geq 0.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D,$$

где C и D – постоянные интегрирования.

Из условия достижения максимума функции H

$$\max_{|u| \leq 1} H$$

следует, что управление должно быть задано в виде:

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t)) = \text{sign}(-Ct + D), \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что управление $u(t)$ может быть только функцией, принимающей $+1$ или -1 и имеющей не более одной точки переключения t_1 , при переходе через которую управление меняет знак.

Из физических соображений ясно, что заслуживает внимание только управление вида

$$u(t) = -1 \text{ при } 0 \leq t < t_1,$$

$$u(t) = +1 \text{ при } t \geq t_1.$$

При других управлениях фазовая траектория, начинаясь в точке $(1,0)$, не попадет в точку $(0,0)$. Этому управлению соответствует траектория $\{x_1(t), x_2(t)\}$:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - t^2 / 2, & 0 \leq t < t_1, \\ t^2 / 2 - 2t_1 t + t_1^2 + 1, & t \geq t_1, \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t < t_1, \\ t - 2t_1, & t \geq t_1. \end{cases}$$

Теперь из условий $x_1(T) = 0 = T^2 / 2 - 2t_1 T + t_1^2 + 1 = 0$, $x_2(T) = 0 = T - 2t_1$, получим, что $t_1 = 1$, $T = 2$.

Тогда

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - t^2 / 2, & 0 \leq t < 1, \\ (t - 2)^2 / 2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t < 1, \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Найденные управление и траектория являются решением поставленной задачи быстродействия.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции Гамильтона–Понтрягина.
2. Запишите систему канонических уравнений для задач оптимального управления.
3. Постановка задачи идентификации методом инвариантного погружения.

11.2 Постановка задачи идентификации состояния и параметров непрерывной системы методом инвариантного погружения [2, 10]

Рассмотрим систему управления, которая описывается следующими нелинейными уравнениями состояния, в которых учтем также влияние неизмеряемого шума в системе $\vec{n}(t)$ и шума $\vec{v}(t)$ в измерениях выходного сигнала $\vec{z}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{\theta}, \vec{u}(t)) + \vec{n}(t), \end{aligned} \quad (11.14)$$

$$\vec{z}(t) = \vec{\varphi}(\vec{x}(t), \vec{\theta}, \vec{u}(t)) + \vec{v}(t), \quad (11.15)$$

где $\vec{f}$, $\vec{\varphi}$ – нелинейные функции априорно известного (заданного) вида, $\vec{x}(t)$ – вектор состояний системы, $\vec{u}(t)$ – измеряемый вектор входного сигнала (управление), $\vec{z}(t)$ – измеряемый выходной сигнал, $\vec{\theta}$ – вектор постоянных идентифицируемых параметров системы. Предположение о постоянстве параметров системы приводит к уравнениям:

$$\dot{\vec{\theta}} = 0. \quad (11.16)$$

При формулировке задачи идентификации вводится показатель качества идентификации, который записывают в виде:

$$J = \int_{t_0}^T \left\{ \left[\vec{z} - \vec{\varphi}(\vec{\tilde{x}}, \vec{\tilde{\theta}}, \vec{u}) \right] \eta \left[\vec{z} - \vec{\varphi}(\vec{\tilde{x}}, \vec{\tilde{\theta}}, \vec{u}) \right] + \vec{\tilde{n}} \zeta \vec{\tilde{n}} \right\} dt. \quad (11.17)$$

В выражении (11.17) величины $\vec{\tilde{x}}$, $\vec{\tilde{n}}$ – оценки величин $\vec{x}$, $\vec{n}$, входящих в уравнения (11.14), (11.15), η , ζ – положительные диагональные весовые матрицы, заданные при формулировке (конкретизации) показателя качества (11.17). Как правило, в моделях предсказания полагают, что входной сигнал (управление) равен нулю: $\vec{u}(t) = 0$.

Теперь выполним следующие формальные преобразования уравнений (11.14), (11.16). Введем вектор $\vec{y}$ следующим образом:

$$\vec{y}(t) = \begin{Bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (11.18)$$

Теперь уравнения (11.14) и (11.16) можно записать относительно $\vec{y}$ в виде одного векторного дифференциального уравнения вида:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{\psi} + \vec{V}, \quad (11.19)$$

правая часть которого определена соотношениями:

$$\vec{\psi} = \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \quad (11.20)$$

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}. \quad (11.21)$$

Функция $\vec{\psi}$ в уравнении (11.20) – нелинейная функция от $\vec{y}$, даже если функция $\vec{f}$ в уравнении (22.14) – линейная функция. Это нетрудно проиллюстрировать, если рассмотреть следующий пример. Пусть имеется скалярная система:

$$\dot{x} = \theta x + u.$$

Введем вектор $\vec{y}$ в соответствии с формулой (5):

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}.$$

Тогда уравнение $\dot{x} = \theta x + u$ и условие стационарности системы (коэффициент θ – константа) приводятся к следующему уравнению вида (11.19):

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 y_2 + u, \\ \dot{y}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \dot{\vec{y}} = \vec{\psi} + \vec{V}.$$

Здесь функция $\vec{\psi} = \begin{Bmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$ – нелинейная функция, хотя в ис-

ходном уравнении $\dot{x} = \theta x + u$ правая часть $f = \theta x + u$ – линейная функция переменной состояния.

Теперь рассмотрим функцию Понтрягина–Гамильтона (гамильтониан) системы (11.15), преобразованной к виду (11.19). Он имеет вид:

$$H = [\vec{z} - \vec{\phi}(\vec{y}, u)] \eta [\vec{z} - \vec{\phi}(\vec{y}, u)] + \vec{n} \zeta \vec{n} + \vec{\lambda} \vec{\psi}. \quad (11.22)$$

здесь $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}\} \in E^{n+m}$ – вспомогательные переменные (аналог множителей Лагранжа), а константа λ_0 принята равной единице: $\lambda_0 = 1$.

Необходимое условие экстремума (минимума или максимума) гамильтониана приводит к следующей системе **канонических** уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} = -\dot{\tilde{\lambda}}, \quad (11.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{\lambda}} = -\dot{\tilde{y}}, \quad (11.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{u}} = 0. \quad (11.25)$$

Для решения систем дифференциальных уравнений (11.23), (11.24) необходимо задать условия на левом и правом конце траектории $\tilde{y}(t)$, то есть значения $\tilde{y}(t_0)$ и $\tilde{y}(T)$. Если эти условия не заданы изначально, тогда они формулируются с использованием условий трансверсальности. Эти условия дают следующие уравнения. Для задач со **свободным левым концом траектории** (см. формулы (11.12), (11.13) предыдущего раздела) условия трансверсальности дают соотношения:

$$\vec{\lambda}(t_0) = 0. \quad (11.26)$$

Аналогичным образом, для задач со **свободным правым концом траектории** условия трансверсальности дают уравнения:

$$\vec{\lambda}(T) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi(\vec{x}(T), T)}{\partial x_i} \right) \bigg|_{t=T} = 0, \quad \Phi \equiv 0. \quad (11.27)$$

В задачах с двумя свободными концами эти условия объединяют:

$$\vec{\lambda} \bigg|_{t=t_0}^{t=T} = 0. \quad (11.28)$$

Таким образом, задача идентификации параметров системы $\tilde{\theta}$ и оценивания переменных состояния $\tilde{x}(t)$ сводится к решению уравнений (11.23), (11.24) при заданных условиях на левом и правом конце траектории в задачах с закрепленными концами

или условиях вида (11.26)–(11.28) в задачах со свободными концами. Для решения этой задачи необходим метод инвариантного погружения.

11.3 Алгоритм решения задачи идентификации состояния и параметров непрерывной системы методом инвариантного погружения [2, 9]

Пусть для задачи идентификации нелинейной системы (11.14), (11.15) выполнены описанные выше преобразования и получена система канонических уравнений вида:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{g}(\vec{y}, \vec{\lambda}, \vec{u}, t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{\lambda}}, \quad (11.29)$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{h}(\vec{y}, \vec{\lambda}, \vec{u}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{y}}, \quad (11.30)$$

где $\vec{y} = \{\vec{x}, \vec{\theta}\}$ – вектор идентифицируемых переменных состояния $\vec{x}$ и параметров $\vec{\theta}$ системы (последние считаем постоянными); $\vec{g}(\vec{y}, \vec{\lambda}, \vec{u}, t) = \{\vec{f}(\vec{x}, \vec{\theta}, \vec{u}, t), \vec{0}\}$ – вектор-функция, которая задана выражениями для правой части векторного уравнения состояния, $\vec{\lambda}$ – вектор дополнительных переменных, через которые определяется функция Гамильтона–Понтрягина $H(\vec{y}, \vec{\lambda}, \vec{u})$ исходных дифференциальных уравнений системы управления.

Уравнения (11.29), (11.30) будем решать при следующих граничных условиях на левом $t = t_0$ и правом конце промежутка моделирования $t = T$:

$$\vec{\lambda}(t_0) = \vec{a}, \quad (11.31)$$

$$\vec{\lambda}(T) = \vec{b}. \quad (11.32)$$

Более того, момент времени T также будем рассматривать как *текущую переменную*, так что имеет смысл говорить о приращениях функций, описывающих решение задачи (11.29)–(11.32) при соответствующих приращениях этой переменной ΔT . Условие (11.32) на конце промежутка заменим еще более общим условием:

$$\vec{\lambda}(T) = \vec{C}(T). \quad (11.33)$$

Задача (11.29)–(11.33) представляет собой обобщение, расширение задачи (11.23), (11.24), (11.26), (11.27). Таким образом, имеет место «погружение» частной задачи в задачу более общую. Поэтому метод и называют методом инвариантного погружения. Оказывается, что для такой общей задачи зачастую легче найти метод решения.

Если конечное условие (11.33) удовлетворяется, то для правого конца траектории системы должно удовлетворяться конечное условие вида:

$$\vec{y}(T) = \vec{F}(\vec{C}, T). \quad (11.34)$$

Неизвестная пока функция $\vec{F}(\vec{C}, T)$ в условии (11.34) отражает связь между условием на конце $\vec{\lambda}(T) = \vec{C}(T)$ (определяется как обобщение условия трансверсальности), которое накладывается на вспомогательные переменные $\vec{\lambda}$, с конечным значением $\vec{y}(T) = \vec{F}(\vec{C}, T)$, которое определяет конец траектории системы (11.29). Если бы функция $\vec{F}(\vec{C}, T)$ была известна, то уравнения (11.29), (11.30) можно было бы решить, напрямую используя условия (11.33), (11.34). Но так как эта функция неизвестна, то требуется метод её определения. Этот метод заключается в следующем.

Правую часть уравнения (11.34) разложим в ряд Тэйлора, рассматривая, как независимые, малые приращения величин $\vec{C} + \Delta\vec{C}$, $T + \Delta T$. В результате, используя уравнение (11.29), получим:

$$\begin{aligned} \vec{y}(T + \Delta T) &= F(\vec{C} + \Delta\vec{C}, T + \Delta T) = \vec{y}(T) + \dot{\vec{y}}\Delta T = \\ &= F(\vec{C}, T) + \vec{g}(\vec{F}, \vec{C}, \vec{u}, T)\Delta T. \end{aligned} \quad (11.35)$$

С другой стороны, для правой части уравнения (11.34) равенства

$$F(\vec{C} + \Delta\vec{C}, T + \Delta T) = F(\vec{C}, T) + \frac{\partial F(\vec{C}, T)}{\partial \vec{C}} \Delta\vec{C} + \frac{\partial F(\vec{C}, T)}{\partial T} \Delta T. \quad (11.36)$$

Используя уравнение (11.30), для величины $\Delta\vec{C}$ можно записать выражение вида:

$$\Delta\vec{C} = \vec{h}(\vec{F}, \vec{C}, \vec{u}, T)\Delta T. \quad (11.37)$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.36) и приравнявая правые части уравнений (11.35) и (11.36), получаем **уравнение инвариантного погружения**:

$$\frac{\partial F(\vec{C}, T)}{\partial \vec{C}} \vec{h}(\vec{F}, \vec{C}, T) + \frac{\partial F(\vec{C}, T)}{\partial T} = \vec{g}(\vec{F}, \vec{C}, T). \quad (11.38)$$

Теперь заметим, что функции $\vec{h}(\vec{F}, \vec{C}, T)$, $\vec{g}(\vec{F}, \vec{C}, \vec{u}, T)$ в рассматриваемых уравнениях являются в то же время и производными от функции Гамильтона–Понтрягина для канонической системы уравнений, то есть имеют место равенства:

$$\vec{g}(\vec{F}, \vec{C}, T) = \frac{\partial H}{\partial \vec{C}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\lambda}}. \quad (11.39)$$

$$\vec{h}(\vec{F}, \vec{C}, T) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{F}}. \quad (11.40)$$

Поэтому уравнение (11.38) можно записать в виде:

$$\frac{\partial F(\vec{C}, T)}{\partial T} - \frac{\partial \vec{F}(\vec{C}, T)}{\partial \vec{C}} \frac{\partial H}{\partial \vec{F}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{C}}. \quad (11.41)$$

Решение уравнения (11.41) будем искать в виде:

$$\vec{y}(T) = \vec{F}(\vec{C}, T) = \vec{\tilde{y}}(T) - Q(T)C(T), \quad (11.42)$$

где $Q(T)$ – симметричная матрица, которая аналогична матрице P в методе последовательной регрессии.

Подставив выражение (11.42) в уравнение (11.41), получим:

$$\frac{\partial \vec{y}(T)}{\partial T} + Q(T) \frac{\partial H}{\partial \vec{F}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{C}}. \quad (11.43)$$

Для произвольного момента времени внутри интервала моделирования $t_0 \leq t \leq T$ и траекторий $\vec{y}(t)$, удовлетворяющих на конце промежутка $t = T$ конечным условиям (11.33), из уравнений (11.42), (11.43) следует система уравнений вида:

$$\vec{y}(\vec{C}, t) = \vec{\tilde{y}}(t) - Q(t)C, \quad (11.44)$$

$$\frac{\partial \vec{y}(t)}{\partial t} - Q(t) \vec{h}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t) = \vec{g}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t). \quad (11.45)$$

Уравнение (11.45) можно преобразовать к виду:

$$\dot{\vec{y}} - \dot{Q}(t)\vec{C} - Q(t)\vec{h}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t) = \vec{g}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t). \quad (11.46)$$

Если воспользоваться выражением функций $\vec{h}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t)$, $\vec{g}(\vec{y}, \vec{C}, \vec{u}, t)$ через производные от функции Гамильтона–Понтрягина, то уравнение (11.46) преобразуется к уравнению

$$\ddot{\vec{y}} - \dot{Q}(t)\vec{C} + Q(t) \frac{\partial H}{\partial \vec{y}} \bigg|_{\substack{\vec{y}=\ddot{\vec{y}}-Q\vec{C} \\ \vec{\lambda}=\vec{C}}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\lambda}} \bigg|_{\substack{\vec{y}=\ddot{\vec{y}}-Q\vec{C} \\ \vec{\lambda}=\vec{C}}}. \quad (11.47)$$

Необходимо отметить, что матрица C должна быть близка к нулю (см. условия трансверсальности (11.28)). Поэтому уравнение (11.47) дает две системы уравнений. Первая получается в результате приравнивания нулю матрицы C . Вторая система получается в результате отбрасывания в (11.47) слагаемых, содержащих элементы матрицы C в степени выше первой. Эта результирующая система дифференциальных уравнений может быть идентифицирована последовательным методом при заданных начальных условиях (начальном приближении) для $\ddot{\vec{y}}(t_0)$ и $Q(t_0)$. Начальная оценка $\ddot{\vec{y}}(t_0)$ и $Q(t_0)$ зачастую не имеет решающего значения, так как метод инвариантного погружения характеризуется довольно хорошей сходимостью.

Для системы с n переменными $\vec{x}$ состояния и r неизвестными параметрами $\vec{\theta}$ количество решаемых дифференциальных уравнений равно величине

$$[n + r + (n + r)(n + r + 1)/2],$$

где $(n + r)$ – размерность вектора $\vec{y}$, а $[(n + r)(n + r + 1)/2]$ – количество различных элементов симметричной матрицы $Q(t)$.

Контрольные вопросы

1. Опишите постановку задачи идентификации методом инвариантного погружения.
2. В какой форме задается показатель качества идентификации в методе инвариантного погружения?
3. Поясните, почему уравнения системы управления при идентификации методом инвариантного погружения являются нелинейными?

ЛИТЕРАТУРА

1. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2003. – 583 с.
2. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Изд. 2-е, стереотипное. – Киев: «Техніка», 1977. – 768 с.
4. Харин Ю.С., Малюгин В.Н., Кирлица В.П., Лобач В.И., Хацкевич Г.А. Основы имитационного и статистического моделирования: Учебное пособие – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.
5. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
6. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1971.
7. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1987.
8. Пляскин И.И. Оптимизация технических решений в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1982. – 176 с.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. – 520 с.
10. Сэйдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. – 248 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1. Линейные преобразования, диагонализация, устойчивость, управляемость, наблюдаемость, получение передаточных функций систем

Задания

1. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

2. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

3. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

4. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

5. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразования $\varphi = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

6. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

7. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

8. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A*.

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

9. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = (1/2 \quad -2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A*.

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$;

$k = 0, 1, 2, \dots; \Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

10. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 3).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; \Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

11. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 5).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

12. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (3 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

13. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

14. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A*.

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

15. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 1/3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

16. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 5).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

17. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -2).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

18. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad -5).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$;

$k = 0, 1, 2, \dots; \Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

19. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (5 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразования $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; \Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

20. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\vec{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad -1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

21. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = (1/2 \quad -10).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

22. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 3).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A*.

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

Наблюдаемость. Определение. Если все состояния системы можно определить по вектору выходного сигнала, то эта система наблюдаема.

23. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad -5).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A*.

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

24. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C = (-3 \quad 1).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z -преобразования.

25. Задана система со скалярным входным и выходным сигналом:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\bar{x}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad C = (3 \quad -5).$$

1. Преобразовать систему с помощью матрицы преобразований $\varphi = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, найти собственные значения матрицы A и преобразованной матрицы A^* .

2. Диагонализировать систему, найдя матрицу канонического преобразования.

3. Исследовать управляемость системы, используя результаты канонического преобразования.

4. Исследовать управляемость на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

5. Исследовать наблюдаемость, анализируя каноническую систему.

6. Исследовать наблюдаемость с помощью критерия на основе полиномиального разложения матричной экспоненты.

7. Получить передаточную функцию системы, используя преобразование Лапласа.

8. Построить дискретную модель системы, используя замену производной по времени приближенным равенством $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \cong \frac{x(t_k + \Delta t) - x(t_k)}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{1}$, полагая, что $t_k = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\Delta t = 1$. Получить для этой модели передаточную функцию с помощью z-преобразования.

Контрольная работа 2. Метод максимального правдоподобия. Полнофакторный эксперимент: обработка результатов и проверка адекватности

По результатам полнофакторного эксперимента 2^3 для функции отклика

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$$

(гипотеза) найти наилучшую линейную несмещенную оценку вектора параметров $\vec{b} = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$, построив таким образом модель, которую требуется проверить на адекватность изучаемой системе.

При выполнении задания требуется выполнить расчеты и ответить на следующие вопросы.

$$1. \text{ Найти средний отклик } \bar{y}_i = \frac{\sum_{p=1}^r \bar{y}_{ip}}{r}.$$

$$2. \text{ Найти наиболее вероятные оценки (наилучшую линейную несмещенную оценку) коэффициентов модели } b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} \bar{y}_i}{N}.$$

3. Показать, что эта расчетная формула коэффициентов регрессии является следствием применения общего метода максимального правдоподобия для случая, когда информационная матрица получается из матрицы плана полнофакторного эксперимента, столбцы которой попарно ортогональны.

$$4. \text{ Найти построчные дисперсии } (\sigma_i)^2 = \frac{\sum_{p=1}^r (y_{ip} - \bar{y}_i)^2}{r-1} \text{ и}$$

$$\text{дисперсию воспроизводимости } S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^r (y_{ip} - \bar{y}_i)^2}{N(r-1)}.$$

5. По Т-критерию Стьюдента проверить значимость коэффициентов регрессии. Для этого найти дисперсию коэффициентов

регрессии $S^2(b_j) = \frac{S^2(y)}{Nr}$, затем по таблицам распределения вероятностей (см., например, кн.: И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 544 с.) определить критическое значение $T_{кр}$ критерия Стьюдента для степеней свободы $f=N(r-1)$ и уровня значимости $\alpha=5\%$. Построить интервал длиной $r\Delta b_j$, $\Delta b_j = T_{кр} S(b_j)$, где $\Delta b_j = T_{кр} S(b_j)$, равный половине длины доверительного интервала. Если абсолютная величина коэффициента $|b_j| > \Delta b_j$, то коэффициент считается значащим.

6. Проверить **адекватность** модели на основе критерия Фишера. С этой целью вычислить дисперсию адекватности

$$S^2_{ad} = \frac{r}{N-m} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{\bar{y}}_i)^2, \text{ где } m - \text{количество членов аппроксимирующего полинома, учитывая и свободный член, а } \hat{\bar{y}}_i - \text{значение функции отклика, вычисленное по принятой функции регрессии.}$$

Вычислить значение критерия Фишера $F = \frac{S^2_{ad}}{S^2(y)}$. Из таб-

лиц найти критическое значение критерия Фишера $F_{кр}$ для степеней свободы $F_{ad}=N-m$, $f_k=N(r-1)$ и заданного уровня значимости $\alpha=5\%$. При выполнении условия $F < F_{кр}$ модель признается адекватной.

7. Вычислить коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{\bar{y}}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2}}. \text{ Если } R \text{ близко к единице, то уравнение регрессии хорошо описывает экспериментальные данные.}$$

грессии хорошо описывает экспериментальные данные.

2. Таблицы плана и результатов эксперимента:

1.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	58	50	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	6	12	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	8	9	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	0	2	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	14	15	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	0	-2	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	2	3	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-3	-4	

2.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	95	89	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	7	8	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	9	6	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-1	2	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	15	11	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-3	-4	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	0	3	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	0	-4	

3.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	95	98	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	18	21	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	17	21	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-1	-2	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	30	36	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-3	-5	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	4	6	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-8	-10	

4.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	148	150	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-100	-110	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-116	-104	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	104	103	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-110	-114	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	89	99	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	88	98	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-100	-90	

5.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	19	22	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	2	3	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-2	-3	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	1	0	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	1	2	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-8	-5	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-7	-6	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	1	1	

6.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	42	39	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	4	2	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-1	-3	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	22	21	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	1	-2	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-3	-4	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-4	-5	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	1	1	

7.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	35	39	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	2	4	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-2	-3	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	15	18	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	1	0	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	9	6	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	7	5	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-1	-1	

8.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	2	-1	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-10	-9	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-10	-11	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	2	0	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	10	9	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	12	14	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-10	-9	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	6	4	

9.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	24	26	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	8	10	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	10	13	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	10	15	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	11	16	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	4	7	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	0	-3	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	8	7	

10.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	100	110	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	76	80	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	25	29	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	34	40	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-2	-4	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	21	26	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-43	-50	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-65	-70	

11.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	34	38	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-2	-4	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-18	-24	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	32	40	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-12	-16	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-2	-6	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-26	-32	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-8	-10	

12.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	290	300	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	255	260	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	295	298	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	264	275	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	289	296	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	254	270	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	296	304	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	255	248	

13.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	120	134	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	40	42	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	18	20	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-20	-26	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	70	80	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-4	0	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-18	-16	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-50	-60	

14.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	46	42	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-2	-1	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-4	-2	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-2	-1	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	8	7	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-4	-2	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	3	6	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	10	8	

15.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	40	44	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	22	20	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	18	16	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	6	4	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	20	22	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	3	6	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	6	8	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-12	-10	

16.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	440	400	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	114	96	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	112	106	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-50	-46	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	210	220	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-6	-4	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	36	50	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-26	-18	

17.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	2	4	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-18	-20	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-16	-20	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	8	12	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	2	3	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-6	-5	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	0	-1	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	28	26	

18.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	80	90	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	40	50	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-45	-48	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-66	-65	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	8	9	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-18	-17	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	4	2	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-10	-12	

19.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	84	91	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-48	-52	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-30	-34	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	14	16	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-66	-60	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	45	46	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	21	23	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-15	-12	

20.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	110	106	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	108	102	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	101	110	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	97	90	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	101	110	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	98	100	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	95	98	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	92	93	

21.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	-290	-300	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-450	-440	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-290	-300	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-450	-460	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-290	-300	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-450	-440	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-290	-300	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-450	-460	

22.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	13	15	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	3	1	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-1	1	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	7	3	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	7	5	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-5	-7	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-10	-6	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-5	-3	

23.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	30	32	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	18	20	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	16	18	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	20	22	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	22	24	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	10	12	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	8	10	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	12	14	

24.

№ то-чек плана	Факторы								Параметры оптими-зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	-2	-1	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-2	-1	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-10	-13	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-10	-13	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-14	-12	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-15	-14	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-15	-15	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-15	-14	

25.

№ то- чек плана	Факторы								Параметры оптими- зации		
	$b_0,$ j=0	$X_1,$ j=1	$X_2,$ j=2	$X_3,$ j=3	$X_1X_2,$ j=4	$X_2X_3,$ j=5	$X_3X_1,$ j=6	$X_1X_2X_3,$ j=7	$y'_i,$ p=1	$y''_i,$ p=2	$\bar{y}_i$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	-15	-14	
2	+	-	+	+	-	+	-	-	-15	-15	
3	+	+	-	+	-	-	+	-	-15	-13	
4	+	-	-	+	+	-	-	+	-10	-13	
5	+	+	+	-	+	-	-	-	-10	-13	
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-7	-4	
7	+	+	-	-	-	+	-	+	-5	-5	
8	+	-	-	-	+	+	+	-	-2	-1	