

**Сборник заданий**  
**для самостоятельной работы студентов**  
**по курсу «Основы математического анализа»**

**Часть 2**

**Неопределенный и определенный интегралы.**

***Функции многих переменных***

Под редакцией  
кандидата физико-математических наук, доцента **С.Г. Кальнея**

Утверждено редакционно-издательским советом института

Москва 2005

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *Т.В. Соколова*

**Борзистая Е.Л., Еремченко Д.В., Епихин В.Н.,  
Кальней С.Г., Ключин А.В., Ходеева Т.В.**

Сборник заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Основы математического анализа». Часть 2: Неопределенный и определенный интегралы. Функции многих переменных / Под ред. *С.Г. Кальней*. - М.: МИЭТ, 2005. - 52 с.

Сборник предназначен для студентов 1-го курса технических факультетов МИЭТ для самостоятельной работы по курсу «Основы математического анализа». Сборник содержит тематические наборы по 30 заданий примерно равной сложности по разделам «Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Функции многих переменных». Из заданий сборника могут формироваться семестровые домашние задания, варианты контрольных и самостоятельных работ, индивидуальные задания.

Сборник заданий составлен преподавателями кафедр высшей математики МИЭТ.

© МИЭТ, 2005

*Борзистая Екатерина Леонидовна*  
*Еремченко Дмитрий Васильевич*  
*Епихин Валерий Николаевич*  
*Кальней Сергей Григорьевич*  
*Клюшин Александр Викторович*  
*Ходеева Татьяна Владимировна*

Сборник заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Основы математического анализа». Часть 2. Неопределенный и определенный интегралы. Функции многих переменных.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать с оригинал-макета 20.06.05. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 3,02.  
Уч.-изд. л. 2,6. Тираж 1000 экз. Заказ 119.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.  
124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5, МИЭТ.

## Введение

Освоение студентами курса математического анализа невозможно без большой внеаудиторной работы. Одной из наиболее эффективных форм самостоятельной работы является выполнение индивидуальных семестровых домашних заданий по отдельным дисциплинам высшей математики. Применение системы семестровых домашних заданий (называемых также типовыми расчетами) рекомендовано научно-методическим советом по математике при Министерстве образования и науки Российской Федерации. Поэтому учебные планы дисциплин включают в качестве контрольных мероприятий кроме коллоквиумов и контрольных работ, семестровые домашние задания.

Задания сборника разбиты по темам, причем каждые 30 задач на определенную тему имеют примерно одинаковую сложность. Каждый студент решает одну из задач в соответствии с номером своего варианта. Номер варианта определяется преподавателем, ведущим практические занятия.

В индивидуальные домашние задания могут включаться не все задачи сборника. Группы задач, которые в конкретном учебном году должны быть решены студентами, определяются лектором потока.

Задачи решаются студентами самостоятельно по мере прохождения соответствующих тем и сдаются на проверку преподавателю в установленные сроки. Неверно решенные задачи возвращаются на доработку. Порядок сдачи (защиты) семестрового домашнего задания определяется преподавателем. Сдача студентом семестрового задания – необходимое условие выполнения семестрового плана по дисциплине (получения зачета).

Сборник заданий содержит задачи по следующим разделам курса математического анализа: неопределенный и определенный интегралы, приложения определенных интегралов, функции многих переменных (частные производные, экстремумы, нахождение наибольших и наименьших значений на замкнутых ограниченных областях). В некоторые разделы включены задачи большей сложности, которые могут предлагаться отдельным студентам.

Сборник не содержит теоретических сведений, необходимых для решения задач, так как является дополнительным пособием к учебникам по математическому анализу и сборникам задач по высшей математике, используемым при проведении практических занятий в соответствии с семестровыми планами.

Настоящее пособие – второе, существенно переработанное и дополненное издание сборника заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Основы математического анализа» часть 2, опубликованного в РИО МИЭТ в 1994 г. При переработке сборника учтен опыт выполнения студентами семестровых домашних заданий, при этом значительное внимание уделено обеспечению примерно равной трудности заданий по каждой теме.

## 1. Неопределенный интеграл

Применив табличные интегралы и подведение под знак дифференциала, найти неопределенные интегралы.

$$1.1. \int \left( \frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot \left( x - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

$$1.2. \int \frac{e^x + 3^x}{2^x} dx.$$

$$1.3. \int x \cdot \left( \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx.$$

$$1.4. \int \left( x \cdot \sqrt[5]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \right) dx.$$

$$1.5. \int \frac{x^3 \cos x - 2x^2 + 4}{x^3} dx.$$

$$1.6. \int \frac{3 + \sin^3 x + e^x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$1.7. \int \frac{5x^4 + 1}{x^5 + x + 3} dx.$$

$$1.8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x}.$$

$$1.9. \int \operatorname{ctg} \left( 1 + \frac{2}{3}x \right) dx.$$

$$1.10. \int (x+2) \cdot 3^{x^2+4x} dx.$$

$$1.11. \int \operatorname{tg} \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) dx.$$

$$1.12. \int \frac{x}{\sqrt{1+25x^2}} dx.$$

$$1.13. \int \left( \frac{1+x}{x} \right)^2 dx.$$

$$1.14. \int x \cdot \sqrt{7-x^2} dx.$$

$$1.15. \int \frac{\sin x}{3\cos^2 x - 1} dx.$$

$$1.16. \int \frac{dx}{(4 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x}.$$

$$1.17. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$1.18. \int \frac{3^x}{3^x + 1} dx.$$

$$1.19. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1.20. \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$1.21. \int \operatorname{ctg}(5x+2) dx.$$

$$1.22. \int x e^{2x^2+1} dx.$$

$$1.23. \int \frac{5\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$1.24. \int \frac{x^2}{1+x^6} dx.$$

$$1.25. \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$1.26. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1.27. \int (1+8x)^{26} dx.$$

$$1.28. \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

$$1.29. \int x^3 \cdot \cos(x^4+1) dx.$$

$$1.30. \int \sqrt[8]{(3x+2)^3} dx.$$

$$1.31. \int (2x-1)^{99} dx.$$

$$1.32. \int (1-2x)^{77} dx.$$

$$1.33. \int (1+4x)^{19} dx.$$

$$1.34. \int \sqrt[5]{2x+1} dx.$$

$$1.35. \int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1.36. \int (x-1)\sqrt{x^2-2x+5} dx.$$

$$1.37. \int \frac{e^{(2\sqrt{x}+1)}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.38. \int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$1.39. \int (7x+1)^{81} dx.$$

$$1.40. \int (1-3x)^{43} dx.$$

- 1.41.  $\int (2x+3)^{109} dx$ .
- 1.42.  $\int \sqrt[11]{5x+3} dx$ .
- 1.43.  $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ .
- 1.44.  $\int \sqrt[8]{(4x+9)^7} dx$ .
- 1.45.  $\int \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}} dx$ .
- 1.46.  $\int \frac{(x-3)^3}{x} dx$ .
- 1.47.  $\int (1+3x)^{39} dx$ .
- 1.48.  $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2} dx$ .
- 1.49.  $\int (2x+7)^{84} dx$ .
- 1.50.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}} dx$ .
- 1.51.  $\int x \cdot \sin(x^2+1) dx$ .
- 1.52.  $\int \sqrt[7]{9x+2} dx$ .
- 1.53.  $\int x \cdot \sin(x^2+1) dx$ .
- 1.54.  $\int \frac{2x+1}{x-4} dx$ .
- 1.55.  $\int (1+9x)^{26} dx$ .
- 1.56.  $\int (1+7x)^{48} dx$ .
- 1.57.  $\int \frac{7x^6-15x^2}{x^7-5x^3+2} dx$ .
- 1.58.  $\int \sqrt[13]{(5x+2)^3} dx$ .
- 1.59.  $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} dx$ .
- 1.60.  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 1} dx$ .
- 1.61.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}} dx$ .
- 1.62.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg} x + 3}}$ .
- 1.63.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+6}} dx$ .
- 1.64.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$ .
- 1.65.  $\int \frac{4x^3+50x}{x^4+25x^2} dx$ .
- 1.66.  $\int \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x^3}} dx$ .
- 1.67.  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-4x+5}} dx$ .
- 1.68.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (4-\operatorname{tg}^2 x)}$ .
- 1.69.  $\int \frac{\sin 2x}{10+\cos 2x} dx$ .
- 1.70.  $\int \frac{\ln(x-5)}{x-5} dx$ .
- 1.71.  $\int \frac{e^x}{(2+3e^x)^2} dx$ .
- 1.72.  $\int \frac{e^{-2x}}{2+3e^{-2x}} dx$ .
- 1.73.  $\int \frac{\cos 3x}{4-\sin^2 3x} dx$ .
- 1.74.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ .
- 1.75.  $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$ .
- 1.76.  $\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .
- 1.77.  $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$ .
- 1.78.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .
- 1.79.  $\int \cos 2x \cdot \sin^3 2x dx$ .
- 1.80.  $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ .
- 1.81.  $\int (x^2+2)e^{x^3+6x} dx$ .
- 1.82.  $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^{45}} dx$ .
- 1.83.  $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx$ .
- 1.84.  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ .

$$1.85. \int \frac{dx}{x \cdot \ln 2x}.$$

$$1.86. \int \frac{\cos x}{2 + \sin^2 x} dx.$$

$$1.87. \int \cos 8x \cdot \sin 8x dx.$$

$$1.88. \int \frac{e^{\lg x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$1.89. \int \frac{\ln x + \ln^2 x}{x} dx.$$

$$1.90. \int \frac{\lg x + 3}{\cos^2 x} dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы.

$$1.91. \int (3x + 2) \cos 5x dx.$$

$$1.92. \int (x - 1)^2 e^{-x} dx.$$

$$1.93. \int x^2 \cdot 3^x dx.$$

$$1.94. \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$1.95. \int (x - 1) \cdot \ln x dx.$$

$$1.96. \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$$

$$1.97. \int (2x - 1) \cos x dx.$$

$$1.98. \int x^2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$1.99. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$1.100. \int x \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$1.101. \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$1.102. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1.103. \int (5x - 2) \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$1.104. \int x^2 e^{-4x} dx.$$

$$1.105. \int x^2 \cos 3x dx.$$

$$1.106. \int \frac{\lg x}{x \sqrt{x}} dx.$$

$$1.107. \int \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-2x}} dx.$$

$$1.108. \int \arcsin 2x dx.$$

$$1.109. \int (2 - 9x) \cos 5x dx.$$

$$1.110. \int (x - 2)^2 e^{-x} dx.$$

$$1.111. \int x^2 \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$1.112. \int \sqrt[3]{x} \ln x dx.$$

$$1.113. \int \arcsin 3x dx.$$

$$1.114. \int x \ln^2 x dx.$$

$$1.115. \int (1 - 4x) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$1.116. \int \arccos 2x dx.$$

$$1.117. \int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-3x}} dx.$$

$$1.118. \int (x + 2) \ln x dx.$$

$$1.119. \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.120. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1.121. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$1.122. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1.123. \int x^2 \cos 3x dx.$$

$$1.124. \int x^2 e^{3x} dx.$$

$$1.125. \int \sqrt{x} \ln 2x dx.$$

$$1.126. \int \arccos 3x dx.$$

$$1.127. \int \operatorname{arctg} 5x dx.$$

$$1.128. \int \frac{x^2}{e^{3x}} dx.$$

$$1.129. \int x^3 \ln x dx.$$

$$1.130. \int (3x^2 + 1) \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1.131. \int \ln(2 + x^2) dx.$$

$$1.132. \int \operatorname{arctg}(2x + 1) dx.$$

$$1.133. \int x \cdot 2^x dx.$$

$$1.134. \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} dx.$$

- 1.135.  $\int x \ln(1+x^2) dx$ .      1.136.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx$ .  
 1.137.  $\int \ln(3-x^2) dx$ .      1.138.  $\int \operatorname{arctg}(3x+2) dx$ .  
 1.139.  $\int x \sin 3x dx$ .      1.140.  $\int \frac{\arccos \sqrt{1-2x}}{\sqrt{x}} dx$ .  
 1.141.  $\int x \ln(3+x) dx$ .      1.142.  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ .  
 1.143.  $\int \ln^2 x dx$ .      1.144.  $\int \arcsin^2 x dx$ .  
 1.145.  $\int x^{3/2} \ln x dx$ .      1.146.  $\int (7x+1)e^{2x} dx$ .  
 1.147.  $\int (1+5x-x^2)e^{-x} dx$ .      1.148.  $\int \frac{\arcsin \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$ .  
 1.149.  $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx$ .      1.150.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

Вычислить интегралы, применив выделение полного квадрата в квадратном трехчлене.

- 1.151.  $\int \frac{x+2}{\sqrt{7-2x-x^2}} dx$ .      1.152.  $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+10x-2}} dx$ .  
 1.153.  $\int \frac{5x+6}{\sqrt{13-4x-x^2}} dx$ .      1.154.  $\int \frac{4x+11}{\sqrt{7-2x-x^2}} dx$ .  
 1.155.  $\int \frac{x+2}{\sqrt{11+2x-x^2}} dx$ .      1.156.  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-8x+15}} dx$ .  
 1.157.  $\int \frac{x+2}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$ .      1.158.  $\int \frac{x-7}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$ .  
 1.159.  $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2-3x+8}} dx$ .      1.160.  $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5} dx$ .  
 1.161.  $\int \frac{4-x}{8-4x-x^2} dx$ .      1.162.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-10x+8}} dx$ .  
 1.163.  $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$ .      1.164.  $\int \frac{18-3x}{10-8x+x^2} dx$ .  
 1.165.  $\int \frac{10-2x}{2x^2-4x+1} dx$ .      1.166.  $\int \frac{1-x}{1-4x-x^2} dx$ .  
 1.167.  $\int \frac{3x+11}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx$ .      1.168.  $\int \frac{6x+5}{\sqrt{7-x-x^2}} dx$ .  
 1.169.  $\int \frac{11x+4}{\sqrt{11+2x-x^2}} dx$ .      1.170.  $\int \frac{8-3x}{\sqrt{8-4x-x^2}} dx$ .  
 1.171.  $\int \frac{4+3x}{\sqrt{7-2x-x^2}} dx$ .      1.172.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$ .  
 1.173.  $\int \frac{x^2+1}{1-x-x^2} dx$ .      1.174.  $\int \frac{x+3}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$ .  
 1.175.  $\int \frac{8+2x^2}{x^2-2x+5} dx$ .      1.176.  $\int \frac{6-x}{10-8x+x^2} dx$ .  
 1.177.  $\int \frac{4+3x}{\sqrt{x^2+6x-1}} dx$ .      1.178.  $\int \frac{2+3x^2}{x^2-3x+8} dx$ .



$$1.179. \int \frac{1-x^2}{7-2x-x^2} dx. \quad 1.180. \int \frac{3-2x^2}{5-4x-x^2} dx.$$

Вычислить интегралы от рациональных дробей.

$$1.181. \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx. \quad 1.182. \int \frac{x+1}{x^4+25x^2} dx.$$

$$1.183. \int \frac{x^4+6x^2+8}{x^3-8} dx. \quad 1.184. \int \frac{x^2+1}{x^3-1} dx.$$

$$1.185. \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx. \quad 1.186. \int \frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+x)} dx.$$

$$1.187. \int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}. \quad 1.188. \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x-1)} dx.$$

$$1.189. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}. \quad 1.190. \int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2}.$$

$$1.191. \int \frac{x^2+x+1}{x^4-1} dx. \quad 1.192. \int \frac{x^2+5x+1}{(x-2)(x+3)(x-1)} dx.$$

$$1.193. \int \frac{7x^2-27x+24}{x(x-2)(x-3)} dx. \quad 1.194. \int \frac{7x+3}{(x+1)^2(x+5)} dx.$$

$$1.195. \int \frac{x^2+36}{x^3(x-6)} dx. \quad 1.196. \int \frac{x^2+1}{(x^3-9x)(x+2)} dx.$$

$$1.197. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx. \quad 1.198. \int \frac{x-1}{x^3+1} dx.$$

$$1.199. \int \frac{x+1}{x(x-1)^3} dx. \quad 1.200. \int \frac{x^2}{1-x^4} dx.$$

$$1.201. \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx. \quad 1.202. \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x+2)}.$$

$$1.203. \int \frac{dx}{x^3+x^5}. \quad 1.204. \int \frac{x^3+x+1}{x^3+x^2+2x} dx.$$

$$1.205. \int \frac{5x+1}{(x-1)(x^2+x-2)} dx. \quad 1.206. \int \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+1)} dx.$$

$$1.207. \int \frac{2x^2-24}{(x^2+1)(x-5)} dx. \quad 1.208. \int \frac{3x^2-3}{(x^2+5)(x+1)^2} dx.$$

$$1.209. \int \frac{x^5-x^2}{x^3-8} dx. \quad 1.210. \int \frac{2x^2-1}{x(x+1)^2} dx.$$

Вычислить интегралы от тригонометрических функций.

$$1.211. \int \cos^3\left(\frac{3x}{4}\right) dx. \quad 1.212. \int \sin^3\left(\frac{5x}{2}\right) dx.$$

$$1.213. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx. \quad 1.214. \int \cos 3x \cdot \sin^2 6x dx.$$

$$1.215. \int \cos^5 4x dx. \quad 1.216. \int \sin^5\left(\frac{2}{3}x\right) dx.$$

$$\begin{array}{ll}
1.217. \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^7 x}} dx. & 1.218. \int \cos 6x \cdot \cos^2 x dx. \\
1.219. \int \cos^2 5x \cdot \sin 7x dx. & 1.220. \int \sin^5 \frac{x}{4} dx. \\
1.221. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx. & 1.222. \int \cos 7x \cdot \cos 3x dx. \\
1.223. \int \sin^2 13x \cdot \sin 5x dx. & 1.224. \int \cos^3 3x dx. \\
1.225. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx. & 1.226. \int \sin^5 x dx. \\
1.227. \int \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) \cdot \cos^4 \left( \frac{x}{2} \right) dx. & 1.228. \int \cos^5 2x dx. \\
1.229. \int \cos^2 2x \cdot \sin 4x dx. & 1.230. \int \frac{dx}{\cos^4 x}. \\
1.231. \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx. & 1.232. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx. \\
1.233. \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx. & 1.234. \int \frac{dx}{\sin^4(5x)}. \\
1.235. \int \cos^3 x \cdot \sin^5 x dx. & 1.236. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}. \\
1.237. \int \cos x \cdot \cos^2 2x dx. & 1.238. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx. \\
1.239. \int \sin^5 \left( \frac{x}{3} \right) dx. & 1.240. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}.
\end{array}$$

Вычислить интегралы от иррациональных функций.

$$\begin{array}{ll}
1.241. \int \frac{x+4 \cdot \sqrt[4]{x+3}}{\sqrt{x+3}} dx. & 1.242. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (x+5)}. \\
1.243. \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x} \cdot (\sqrt[3]{4-3x+9})}. & 1.244. \int \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[3]{x+1})}. \\
1.245. \int \frac{x+4-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}} dx. & 1.246. \int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{4-x \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx. \\
1.247. \int \frac{\sqrt{4x+3}}{4x+7} dx. & 1.248. \int \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[5]{x}-2)}. \\
1.249. \int \frac{x-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}} dx. & 1.250. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}. \\
1.251. \int \frac{6+4x}{1+\sqrt{4x+5}} dx. & 1.252. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[6]{x^5} + x)}. \\
1.253. \int \frac{2x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx. & 1.254. \int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}. \\
1.255. \int \frac{\sqrt[4]{1-4x}}{4+\sqrt{1-4x}} dx. & 1.256. \int \frac{x+4+\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt{x+3}} dx.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1.257. \int \frac{1 - \sqrt[3]{3-3x}}{\sqrt[3]{(3-3x)^2}} dx. & 1.258. \int \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[6]{x} - 2)}. \\
1.259. \int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx. & 1.260. \int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx. \\
1.261. \int \frac{dx}{(x-1) \cdot \sqrt[4]{x^3}}. & 1.262. \int \frac{dx}{x + \sqrt[5]{x^2}}. \\
1.263. \int \frac{3x - \sqrt[4]{x-3}}{\sqrt{x-3}} dx. & 1.264. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{9 - \sqrt[6]{x^7}} dx. \\
1.265. \int \frac{dx}{2 \cdot \sqrt[3]{5-4x} + \sqrt[3]{(5-4x)^2}}. & 1.266. \int \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[7]{x^2} + 3)}. \\
1.267. \int \frac{x - \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}} dx. & 1.268. \int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}}. \\
1.269. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(5x-2)^2} + 4}. & 1.270. \int \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[5]{x-1})^2}.
\end{array}$$

Найти неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{ll}
1.271. \int \frac{dx}{5 - \cos x + 2 \sin x}. & 1.272. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 3}. \\
1.273. \int \frac{2}{5 - 3 \cos x} dx. & 1.274. \int \frac{\sin x}{5 \sin x - 1} dx. \\
1.275. \int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx. & 1.276. \int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x + 7}. \\
1.277. \int \frac{dx}{1 - 5 \cos x}. & 1.278. \int \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x dx. \\
1.279. \int \sqrt{8 + 3x^2} dx. & 1.280. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 5)^3}}. \\
1.281. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}}. & 1.282. \int (x^3 + x) \cdot e^{x^2} dx. \\
1.283. \int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}. & 1.284. \int \frac{dx}{2 - \sin x}. \\
1.285. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}. & 1.286. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}}. \\
1.287. \int ((\ln x)^2 - 2 \ln x) dx. & 1.288. \int \frac{\cos x}{1 + 2 \cos x} dx. \\
1.289. \int \operatorname{th}^3 x dx. & 1.290. \int e^{\sqrt{x}} dx. \\
1.291. \int \frac{4x^2}{((2x)^2 + 1)^2} dx. & 1.292. \int \frac{dx}{3 \sin x \cdot \cos x}. \\
1.293. \int x^2 (\ln x)^2 dx. & 1.294. \int \operatorname{ctg}^3 x dx. \\
1.295. \int \operatorname{tg}^4 x dx. & 1.296. \int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} dx. \\
1.297. \int \operatorname{sh}^4 x dx. & 1.298. \int \sin(\ln x) dx.
\end{array}$$

- 1.299.  $\int \sqrt{2x^2 - 1} dx$  .
- 1.301.  $\int \operatorname{ch} x \cdot e^x dx$  .
- 1.303.  $\int \frac{dx}{e^x + 4 - 5 \cdot e^{-x}}$  .
- 1.305.  $\int \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) \operatorname{arctg} x dx$  .
- 1.307.  $\int e^{2x} \operatorname{sh} 3x dx$  .
- 1.309.  $\int \frac{2x^2 - 1}{x(x+1)^2} dx$  .
- 1.311.  $\int \frac{5x^3 + 1}{(x+1)(2x+1)} dx$  .
- 1.313.  $\int \frac{3e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$  .
- 1.315.  $\int x \arcsin x dx$  .
- 1.317.  $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$  .
- 1.319.  $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx$  .
- 1.321.  $\int \frac{dx}{1 - \cos(ax)}$  ,  $a = \text{const}$  .
- 1.323.  $\int e^{2x} \cdot \cos(2x + 3) dx$  .
- 1.325.  $\int \sqrt{(x-1)(2-x)} dx$  .
- 1.327.  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$  .
- 1.329.  $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx$  .
- 1.300.  $\int \operatorname{ch}^3(3x) dx$  .
- 1.302.  $\int e^x(x^2 + x + 1) dx$  .
- 1.304.  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$  .
- 1.306.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$  .
- 1.308.  $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$  .
- 1.310.  $\int \arcsin 7x dx$  .
- 1.312.  $\int \frac{x^3 + 3}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx$  .
- 1.314.  $\int \operatorname{arctg} 3x dx$  .
- 1.316.  $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$  .
- 1.318.  $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} dx$  .
- 1.320.  $\int \frac{dx}{1 + \sin(ax)}$  ,  $a = \text{const}$  .
- 1.322.  $\int \cos(\ln x) dx$  .
- 1.324.  $\int \frac{x^2}{x^6 - 10x^3 + 9} dx$  .
- 1.326.  $\int \frac{dx}{e^x + e^{\frac{x}{2}}}$  .
- 1.328.  $\int x \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) dx$  .
- 1.330.  $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx$  .

## 2. Определенный интеграл

Вычислить определенные интегралы.

- 2.1.  $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$
- 2.2.  $\int_2^4 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$
- 2.3.  $\int_0^{2/3} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3} dx.$
- 2.4.  $\int_0^1 \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$
- 2.5.  $\int_0^{1/2} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$
- 2.6.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2} + 2}{x - \sqrt{x+2}} dx.$
- 2.7.  $\int_0^{1/2} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$
- 2.8.  $\int_3^5 \frac{dx}{(4+x^2) \cdot \sqrt{4+x^2}}.$
- 2.9.  $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} dx.$
- 2.10.  $\int_3^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{5x^2} dx.$
- 2.11.  $\int_2^5 \frac{dx}{5\sqrt{3} x \cdot \sqrt{25-x^2}}.$
- 2.12.  $\int_0^{1/2} \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$
- 2.13.  $\int_0^1 \frac{(1+2\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx.$
- 2.14.  $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
- 2.15.  $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$
- 2.16.  $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$
- 2.17.  $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$
- 2.18.  $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$
- 2.19.  $\int_6^8 \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-8x+15}} dx.$
- 2.20.  $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{11+2x-x^2}} dx.$
- 2.21.  $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx.$
- 2.22.  $\int_1^e \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx.$
- 2.23.  $\int_0^3 \frac{2}{9} x \operatorname{arctg} \frac{x}{3} dx.$
- 2.24.  $\int_0^1 (1+5x-x^2) e^{-x} dx.$
- 2.25.  $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x/2} dx.$
- 2.26.  $\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{x/2} dx.$
- 2.27.  $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$
- 2.28.  $\int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$
- 2.29.  $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$
- 2.30.  $\int_{-3}^3 x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx.$
- 2.31.  $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$
- 2.32.  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2+3\sin x}{\sin x - \sin x \cdot \cos x} dx.$
- 2.33.  $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$

$$2.34. \int_{\arccos \frac{4}{\sqrt{17}}}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx .$$

$$2.35. \int_0^{\operatorname{arctg} 1/3} \frac{8 + \operatorname{tg} x}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx .$$

$$2.36. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2 + \operatorname{tg} x}{3 \sin 2x} dx .$$

$$2.37. \int_0^{\pi/2} 32 \sin^6 \frac{x}{3} dx .$$

$$2.38. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x dx .$$

$$2.39. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 5 \cos^2 x} .$$

$$2.40. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} .$$

$$2.41. \int_0^{\pi/4} \frac{3 dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} .$$

$$2.42. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx .$$

$$2.43. \int_0^{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx .$$

$$2.44. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x \cdot (1 + \cos x)} .$$

$$2.45. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} .$$

$$2.46. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} .$$

$$2.47. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx .$$

$$2.48. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (x + 1)} dx .$$

$$2.49. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx .$$

$$2.50. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

$$2.51. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \cdot \sqrt{x}} dx .$$

$$2.52. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx .$$

$$2.53. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx .$$

$$2.54. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx .$$

$$2.55. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7} .$$

$$2.56. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

$$2.57. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \cdot \sqrt{x}} dx .$$

$$2.58. \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^2} .$$

$$2.59. \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx .$$

$$2.60. \int_1^2 \frac{x^4 + 1}{x^3 \cdot (x^2 + 1)} dx .$$

Вычислить несобственные интегралы по бесконечному промежутку.

$$2.61. \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

$$2.62. \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2} dx}{1 + x^2} .$$

$$2.63. \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx .$$

$$2.64. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} .$$

$$2.65. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2} .$$

$$2.66. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} .$$

$$2.67. \int_1^{\infty} \frac{4x dx}{(x^2+3)(x^2+5)}.$$

$$2.68. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}.$$

$$2.69. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}.$$

$$2.70. \int_1^{\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$2.71. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}.$$

$$2.72. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}.$$

$$2.73. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$2.74. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+6x+12}.$$

$$2.75. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$$

$$2.76. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+3}.$$

$$2.77. \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^3 dx.$$

$$2.78. \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2+1}}.$$

$$2.79. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)x^2}.$$

$$2.80. \int_1^{\infty} e^{\frac{1}{x^2}} \frac{dx}{x^3}.$$

$$2.81. \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$$

$$2.82. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

$$2.83. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^4-1}.$$

$$2.84. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+5x+7}.$$

$$2.85. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$2.86. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$2.87. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$2.88. \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}.$$

$$2.89. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}.$$

$$2.90. \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx.$$

Вычислить несобственные интегралы от неограниченных функций.

$$2.91. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$2.92. \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$2.93. \int_0^1 \ln^2 x dx.$$

$$2.94. \int_1^2 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}.$$

$$2.95. \int_1^3 \frac{2x dx}{(x^2-1)^{2/3}}.$$

$$2.96. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

$$2.97. \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.98. \int_{-3}^0 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$2.99. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}.$$

$$2.100. \int_1^2 \frac{2dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

$$2.101. \int_0^1 \frac{(1-x)^3 dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.102. \int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{5x-6-x^2}}.$$

$$2.103. \int_{-1}^0 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$2.104. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

$$2.105. \int_1^2 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-1}}.$$

$$2.106. \int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$$

$$2.107. \int_0^{\pi/4} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$2.108. \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$2.109. \int_0^1 \ln^3 x dx.$$

$$2.110. \int_0^1 \frac{x^2-2x+2}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2.111. \int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2.112. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2.113. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.114. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.115. \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

$$2.116. \int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$2.117. \int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}.$$

$$2.118. \int_2^4 \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx.$$

$$2.119. \int_0^1 (x+1) \ln x dx.$$

$$2.120. \int_1^5 \frac{dx}{(10-x) \cdot \sqrt{x-1}}.$$



Исследовать на сходимость интегралы.

$$2.121. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$2.122. \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

$$2.123. \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

$$2.124. \int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}.$$

$$2.125. \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$2.126. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$2.127. \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.128. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$2.129. \int_0^{2/\pi} \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x}.$$

$$2.130. \int_0^1 \cos \frac{\pi}{1-x} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

$$2.131. \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$2.132. \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

$$2.133. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

$$2.134. \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx.$$

$$2.135. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx.$$

$$2.136. \int_0^1 \frac{\sin x}{2x^2 + \sqrt{x}} dx.$$

$$2.137. \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx.$$

$$2.138. \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} dx.$$

$$2.139. \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1} dx.$$

$$2.140. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} + \sin x}.$$

$$2.141. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx.$$

$$2.142. \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.143. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$2.144. \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.145. \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$$

$$2.146. \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2.147. \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{1+x^3} dx.$$

$$2.148. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x^3}} dx.$$

$$2.149. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$2.150. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt[3]{4x-x^2-3}}.$$

### Дополнительные задания

2.151. Доказать, что функция  $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos y dy$  (интеграл Лобачевского)

удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x \ln 2.$$

Вычислить несобственные интегралы (2.152-2.153).

2.152.  $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ .

2.153.  $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx$ .

2.154. Используя, что  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (интеграл Пуассона), вычислить  $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx$ .

2.155. Исследовать на сходимость  $\int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}}$ .

2.156. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\gamma + \sin x} dx$  в зависимости от значений параметра  $\gamma > 0$ .

### 3. Приложения определенного интеграла

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в декартовой системе координат.

- 3.1.  $y=(x-2)^3$ ,  $y=4x-8$ .      3.2.  $y=x\cdot\sqrt{9-x^2}$ ,  $y=0$ .  
3.3.  $y=4-x^2$ ,  $y=x^2-2x$ .      3.4.  $y=\sqrt{4-x^2}$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ .  
3.5.  $y=\sqrt{e^x-1}$ ,  $y=0$ ,  $x=\ln 2$ .  
3.6.  $y=\arccos x$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ .  
3.7.  $y=(x+1)^2$ ,  $y^2=x+1$ . 3.8.  $y=2x-x^2+3$ ,  $y=x^2-4x+3$ .  
3.9.  $y=\sin x$ ,  $y=0$ ,  $x=-\frac{7\pi}{6}$ ,  $x=\frac{\pi}{4}$ .  
3.10.  $y=x^2-6$ ,  $y=-x^2+5x-6$ .  
3.11.  $x^2+y^2=8$ ,  $y=\frac{x^2}{2}$  (большую площадь).  
3.12.  $y=\arcsin x$ ,  $y=\arccos x$ ,  $y=0$ .  
3.13.  $y^2=6x$ ,  $x^2+y^2=16$  (меньшую площадь).  
3.14.  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$ ,  $y=0$ ,  $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ .  
3.15.  $y=x^2+4x+1$ ,  $y=-x^2+7x+3$ .  
3.16.  $y=|\lg x|$ ,  $y=0$ ,  $\frac{1}{10}\leq x\leq 10$ .  
3.17.  $x=y^2(y-1)$ ,  $x=0$ . 3.18.  $y=\operatorname{tg} x$ ,  $y=\sqrt{2}\cos x$ ,  $x=0$ .  
3.19.  $y^2+8x=16$ ,  $y^2-24x=48$ .  
3.20.  $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$ ,  $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ .  
3.21.  $y=(x-1)^2$ ,  $y^2=x-1$ .  
3.22.  $y=x\arctg x$ ,  $y=0$ ,  $x=\sqrt{3}$ .  
3.23.  $y=x^2\cdot\sqrt{8-x^2}$ ,  $y=0$ ,  $0\leq x\leq 2\sqrt{2}$ .  
3.24.  $y=x\cdot\sqrt{4-x^2}$ ,  $y=0$ ,  $0\leq x\leq 2$ .  
3.25.  $y=x^2-6$ ,  $y=-x^2+5x-6$ .  
3.26.  $xy=8$ ,  $y=8x^3$ ,  $y=27$ .  
3.27.  $y=x\cdot\sqrt{36-x^2}$ ,  $y=0$ ,  $0\leq x\leq 6$ .  
3.28.  $y=x^2$ ,  $y=\frac{1}{x^2}$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=3$ .  
3.29.  $y=\arcsin x$ ,  $\pi x=2y$ .  
3.30.  $y=\sin x$ ,  $y=2\sin x$ ,  $x=0$ ,  $x=\frac{7\pi}{4}$ .

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат.

- 3.31.  $r=\cos 2\varphi$ .      3.32.  $r=4\cos 3\varphi$ ,  $r=2$  ( $r\geq 2$ ).  
3.33.  $r=\sqrt{3}\cos \varphi$ ,  $r=\sin \varphi$ .      3.34.  $r=4\sin 3\varphi$ ,  $r=2$  ( $r\geq 2$ ).

- 3.35.  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$ .                      3.36.  $r = \sqrt{3} \sin \varphi, r = \cos \varphi$ .
- 3.37.  $r = \sin \varphi, r = \sqrt{2} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)$ .
- 3.38.  $r = \cos \varphi, r = \sin \varphi$ .                      3.39.  $r = \frac{4}{\cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right)}, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .
- 3.40.  $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .                      3.41.  $r = \frac{5}{2} \sin \varphi, r = \frac{3}{2} \sin \varphi$ .
- 3.42.  $r = 4 \cos 4\varphi$ .                      3.43.  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .
- 3.44.  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .                      3.45.  $r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi$ .
- 3.46.  $r = 2 \cos 6\varphi$ .                      3.47.  $r = 2(2 + \cos \varphi)$ .
- 3.48.  $r = 2 \cos \varphi - 1$ .                      3.49.  $r = 2 \cos \varphi + 1$ .
- 3.50.  $r = \sin 2\varphi, r = \frac{1}{2} \left( r \geq \frac{1}{2} \right)$ .
- 3.51.  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .                      3.52.  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .
- 3.53.  $r = 2 \sin 4\varphi$ .                      3.54.  $r = \cos 3\varphi$ .
- 3.55.  $r = 6 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .                      3.56.  $r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi$ .
- 3.57.  $r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .
- 3.58.  $r = \sqrt{2} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), r = \sqrt{2} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)$ .
- 3.59.  $r = 2 \cos 3\varphi, r = 1 (r \geq 1)$ .
- 3.60.  $r = a(1 + \sin^2 \varphi), r = a$ .

Вычислить длину дуги, заданной в декартовой системе координат.

- 3.61.  $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$ .                      3.62.  $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.63.  $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .                      3.64.  $y = \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1$ .
- 3.65.  $y^2 = 16x$  (часть, отсеченную прямой  $x = 4$ ).
- 3.66.  $y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1$ .                      3.67.  $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .
- 3.68.  $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.69.  $y^2 = 9 - x, y = -3, y = 0$ .
- 3.70.  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 3, 0 \leq x \leq 2$ .
- 3.71.  $5y^3 = x^2$  (часть, заключенную внутри окружности  $x^2 + y^2 = 6$ ).
- 3.72.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$ .
- 3.73.  $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .
- 3.74.  $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{4} \leq x \leq 1$ .
- 3.75.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$ .

$$3.76. y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

$$3.77. y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$$

$$3.78. y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$$

$$3.79. y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{15}{16}.$$

$$3.80. y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$3.81. y = -x^2 + 2x \quad (\text{от вершины до точки с абсциссой } x = 2).$$

$$3.82. y^2 = \frac{x^3}{6} \quad (\text{от начала координат до точки с абсциссой } x = 6).$$

$$3.83. y = \operatorname{ch}(x + 1), \quad -1 \leq x \leq 0.$$

$$3.84. y = e^x + 26, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$3.85. y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{4}.$$

$$3.86. y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

$$3.87. y = 2 \ln \frac{4}{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$3.88. y = \ln(x + \sqrt{3}), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{8} - \sqrt{3}.$$

$$3.89. y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \quad \frac{1}{9} \leq x \leq 1.$$

$$3.90. y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 3), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Вычислить длину дуги, заданной параметрически.

$$3.91. \begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases} \quad (\text{эволюта эллипса}).$$

$$3.92. \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t. \end{cases}$$

$$3.93. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{развертка окружности}).$$

$$3.94. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t - t, \\ y = \operatorname{ch} t - 1, \quad 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

$$3.95. \begin{cases} x = \operatorname{ch}^3 t, \\ y = \operatorname{sh}^3 t, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$3.96. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$3.97. \begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.98. \begin{cases} x = \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \\ y = \sin t \end{cases} \quad (\text{от точки } (0, 1) \text{ до точки } (x, y) \text{ (трактриса)}).$$

$$3.99. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

$$3.100. \begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases} \quad (\text{длину петли}).$$

$$3.101. \begin{cases} x = 8 \sin t + 6 \cos t, \\ y = 6 \sin t - 8 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.102. \begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \quad 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

$$3.103. \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 - t^2, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

$$3.104. \begin{cases} x = \sqrt{3}t, \\ y = t, \\ z = \frac{2}{3\sqrt{3}} t \sqrt{t} \end{cases} \quad (\text{от начала координат до точки } (3, 3, 2)).$$

$$3.105. \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$3.106. \begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln t, \\ z = t^2, \quad 1 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

$$3.107. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \ln \cos t \end{cases} \quad (\text{от точки } (1, 0, 0) \text{ до точки } \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2} \right)).$$

- 3.108. 
$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$$
 (от точки  $(1, 0, 1)$  до точки, соответствующей параметру  $t$ ).
- 3.109. 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$
- 3.110. 
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad (a > 0), \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (\text{развертка окружности}).$$
- 3.111. 
$$\begin{cases} x = a \cos^5 t, \\ y = a \sin^5 t, \end{cases} \quad (a > 0).$$
- 3.112. 
$$\begin{cases} x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t \end{cases}$$
 (трактриса от точки  $(0, a)$  до точки  $(x, y)$  ( $a > 0$ )).
- 3.113. 
$$\begin{cases} x = a(\operatorname{ch} t - t), \\ y = a(\operatorname{ch} t - 1), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4, \quad (a > 0).$$
- 3.114. 
$$\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = 3t^2 + 1 \end{cases}$$
 (длину петли).
- 3.115. 
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = a \ln \cos t \end{cases}$$
 (от точки  $(a, 0, 0)$  до точки  $\left( \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2} \ln 2 \right)$ ).
- 3.116. 
$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2t - t^2}, \\ z = \ln \frac{2}{2-t} \end{cases}$$
 (от начала координат до точки, соответствующей параметру  $t$ ).
- 3.117. 
$$\begin{cases} x = t, \\ y = \operatorname{arcsin} t, \\ z = \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{1-t} \end{cases}$$
 (от начала координат до точки  $\left( \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\ln 3}{4} \right)$ ).
- 3.118. 
$$\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz, \\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz \end{cases}$$
 (от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной).
- 3.119. 
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = kt \end{cases}$$
 (длину первого витка).
- 3.120. 
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Вычислить длину дуги, заданной в полярной системе координат.

- 3.121.  $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.122.  $\varphi \cdot r = 1$ ,  $\frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$ .
- 3.123.  $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$ ,  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.124.  $r = \sqrt{2}e^\varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.125.  $r = 1 - \sin \varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$ .
- 3.126.  $r = 2(1 - \cos \varphi)$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$ .
- 3.127.  $r = 3(1 + \sin \varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0$ .
- 3.128.  $r = 2 \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ .
- 3.129.  $\varphi = \sqrt{r}$ ,  $0 \leq r \leq 5$ .
- 3.130.  $r = 3 \cos^4 \frac{\varphi}{4}$ .
- 3.131.  $r = 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$ .
- 3.132.  $r = 5\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}$ .
- 3.133.  $r = 8 \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .
- 3.134.  $r = 4(1 - \sin \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ .
- 3.135.  $r = 5e^{5\varphi/2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .
- 3.136.  $r = \frac{2}{\varphi}$ ,  $\frac{1}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$ .
- 3.137.  $r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.138.  $r = \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ .
- 3.139.  $r = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .
- 3.140.  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .
- 3.141.  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .
- 3.142.  $r = \frac{1}{1 - \sin \varphi}$ ,  $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$ .
- 3.143.  $r = 6 \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .
- 3.144.  $r = 8 \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .
- 3.145.  $r = 8(1 - \cos \varphi)$ ,  $-\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq 0$ .
- 3.146.  $r = 7(1 - \sin \varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ .
- 3.147.  $r = \sqrt{2}e^\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 3.148.  $r = 5\varphi$ , находящейся внутри круга  $r = 10\pi$ .
- 3.149.  $r = 2e^\varphi$ , находящейся внутри круга  $r = 2$ .
- 3.150.  $r = 6(1 + \sin \varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ .

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями вокруг оси  $OX$ .

- 3.151.  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ .
- 3.152.  $2x - x^2 - y = 0$ ,  $2x^2 - 4x + y = 0$ .
- 3.153.  $y = 3 \sin x$ ,  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .
- 3.154.  $y = 5 \cos x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$ .
- 3.155.  $y = \sin^2 x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 0$ .



$$3.156. y=1-x^2, x=0, x=\sqrt{y-2}, x=1.$$

$$3.157. y=2x-x^2, y=-x+2.$$

$$3.158. y=e^{1-x}, y=0, x=0, x=1.$$

$$3.159. x=\sqrt[3]{y-2}, x=1, y=1.$$

$$3.160. y=x^2, y^2-x=0.$$

$$3.161. x^2+(y-2)^2=1.$$

$$3.162. y=\sin\frac{\pi x}{2}, y=x^2.$$

$$3.163. x^2-2x+y=0, 2x^2-4x+y=0.$$

$$3.164. y=x^2, y=1, x=2.$$

$$3.165. y=xe^x, y=0, x=1.$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями вокруг оси  $OY$ .

$$3.166. x=(y-2)^2, x=0, y=0.$$

$$3.167. y=\arccos\frac{x}{3}, y=\arccos x, y=0.$$

$$3.168. y=\arcsin x, y=\arccos x, y=0.$$

$$3.169. y=x^2+1, y=x, x=0, x=1.$$

$$3.170. y=\sqrt{x-1}, y=0, y=1, x=\frac{1}{2}.$$

$$3.171. y=\ln x, x=2, y=0.$$

$$3.172. y=(x-1)^2, y=1.$$

$$3.173. y^2=x-2, y=0, y=x^3, y=1.$$

$$3.174. y=\arcsin\frac{x}{5}, y=\arcsin x, y=\frac{\pi}{2}.$$

$$3.175. y^2=(x+4)^3, x=0.$$

$$3.176. y=x(4-x), y=0.$$

$$3.177. x^2-y^2=4, y=\pm 2.$$

$$3.178. y=x^2-2x+1, x=2, y=0.$$

$$3.179. y=x^3, y=x.$$

$$3.180. 2y=16-x^2, y-4=0, y=0.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной в декартовой системе координат, вокруг оси  $OX$ .

$$3.181. y=2x^3, -2\leq x\leq 2.$$

$$3.182. y=-x^2+5x-6, y=0.$$

$$3.183. x^2+(y-1)^2=4.$$

$$3.184. y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x, |x|\leq 2.$$

$$3.185. y=e^{-2x}, 0\leq x<+\infty.$$

$$3.186. y=\frac{1}{2}x\sqrt{x}, 0\leq x\leq 4.$$

$$3.187. y=\cos x, |x|\leq\frac{\pi}{2}.$$

$$3.188. y=\sqrt{1+3x^2}, |x|\leq\frac{1}{3}.$$

$$3.189. y=x^2, y=\sqrt{x}.$$

$$3.190. y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}, |x|\leq 2.$$

3.191.  $y = 2x^3, |x| \leq 1.$

3.192.  $y^2 = 4 + x, x = 2.$

3.193.  $y = \sin 3x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$

3.194.  $y = \cos \frac{\pi x}{2}, |x| \leq 1.$

3.195.  $y^2 = 9 + x, |x| \leq 9.$

Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной в декартовой системе координат, вокруг оси  $OY$ .

3.196.  $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x, y = 0.$

3.197.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x, |x| \leq 2.$

3.198.  $y = \frac{1}{2} \ln x, 0 < x \leq 1.$

3.199.  $(x-4)^2 + y^2 = 9.$

3.200.  $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}, |x| \leq \frac{1}{2}.$

3.201.  $y^2 + 4x = 2 \ln y, 1 \leq y \leq 2.$

3.202.  $9x^2 = y(3-y)^2.$

3.203.  $4x^2 + y^2 = 4.$

3.204.  $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{3}{2}.$

3.205.  $y = \frac{1}{4} \ln x, 0 < x \leq 1.$

3.206.  $y = \frac{1}{3} \operatorname{ch} 3x, |x| \leq 3.$

3.207.  $(x-2)^2 + y^2 = 1.$

3.208.  $y = 2 \ln x, 0 < x \leq 1.$

3.209.  $y = 4 \operatorname{ch} \frac{x}{4}, |x| \leq 4.$

3.210.  $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e.$

### Дополнительные задания

3.211. Скорость тела меняется по закону  $v=0,03t^2$  м/с. Какой путь пройдет тело за 10 с? Чему равна средняя скорость движения?

3.212. Скорость автобуса при торможении изменяется по закону:  $15-3t$  м/с. Какой путь пройдет автобус от начала торможения до полной остановки?

3.213. Скорость движения точки  $v=te^{-0,05t}$  м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

3.214. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 Н растягивает пружину на 20 см?

3.215. Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

3.216. Определить величину давления морской воды на вертикальный круг радиуса  $R=0,2$  м, центр которого погружен в воду на глубину  $H=10$  м. Плотность морской воды  $\gamma=1020$  кг/м<sup>3</sup>.

3.217. Найти силу давления воды (плотность  $\gamma$ ) на круглый иллюминатор диаметром  $D$  (на вертикальном борту судна), наполовину погруженный в воду.

3.218. Найти силу давления воды (плотность  $\gamma$ ) на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых  $a$ , высота  $b$ , если шлюз заполнен водой на одну треть.

3.219. Найти силу давления воды на плотину, сечение которой имеет форму равнобоковой трапеции. Размеры трапеции  $a=7$  см (низ),  $b=12$  см (верх),  $h=5$  м. Плотность воды  $1000$  кг/м<sup>3</sup>.

3.220. Вода полностью заполняет резервуар кубической формы с ребром, равным  $0,5$  м. Найти силу давления воды на боковую стенку.

3.221. Найти давление спирта (плотность  $\gamma=830$  кг/м<sup>3</sup>), находящегося в цилиндрическом баке высотой  $3$  м и радиусом  $4$  м, на боковую стенку бака.

3.222. Найти статические и инерционные моменты однородной дуги (плотность  $\gamma$ ) астроиды  $x=2\cos^3 t$ ,  $y=2\sin^3 t$ , расположенной в первой четверти.

3.223. Найти массу и статические моменты относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  дуги астроиды  $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ , расположенной в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна  $\gamma=x$ .

3.224. Найти статический момент кривой  $r=4\sin\varphi$  относительно полярной оси.

3.225. Найти статический момент однородной дуги (плотность  $\gamma$ ) кривой  $y=\cos x$ ,  $0\leq x\leq\pi/2$  относительно оси  $Ox$ .

3.226. Найти массу и момент инерции плоского однородного стержня (плотность  $\gamma=1$ ) длины  $l$  относительно его конца.

3.227. Найти момент инерции окружности (плотность  $\gamma=1$ ) радиуса  $R$  относительно ее диаметра.

3.228. Найти координаты центра тяжести однородной дуги (плотность  $\gamma$ ) окружности  $x^2+y^2=R^2$ , расположенной в третьей четверти.

3.329. Найти координаты центра тяжести однородной дуги астроиды (плотность  $\gamma$ )  $x=\cos^3 t$ ,  $y=\sin^3 t$ , расположенной левее оси  $Oy$ .

3.330. Найти центр тяжести четверти окружности  $x^2+y^2=R^2$ , расположенной в первом координатном углу, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

#### 4. Функции многих переменных

Найти и изобразить область определения функции  $u = f(x, y)$ .

- 4.1.  $u = \ln[(x^2 + y^2 - 1) \cdot (y - 1)]$ .      4.2.  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}}$ .
- 4.3.  $u = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 + x^2 - x)$ .      4.4.  $u = \sqrt{x - y + 2} \cdot \ln(x + y)$ .
- 4.5.  $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cdot \ln y$ .      4.6.  $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$ .
- 4.7.  $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} + \arcsin(x - y)$ .
- 4.8.  $u = \ln(x \sin y)$ .      4.9.  $u = \ln(4x - y^2 - 8) \cdot \ln(4 - x)$ .
- 4.10.  $u = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}}$ .
- 4.11.  $u = \arcsin(x + y) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .
- 4.12.  $u = \frac{1}{x} \arcsin \frac{x + y}{y}$ .      4.13.  $u = \arccos \frac{x}{x + y} + \ln y$ .
- 4.14.  $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \arcsin \frac{y}{x^2}$ .
- 4.15.  $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x}$ .
- 4.16.  $u = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ .      4.17.  $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$ .
- 4.18.  $u = \arcsin \frac{y}{x} + \ln(4 - y^2)$ .      4.19.  $u = \sqrt{\log_2(x^2 + y^2)}$ .
- 4.20.  $u = \ln(1 - x - y) + \ln(x^2 - y)$ .      4.21.  $u = \sqrt{y \cdot \cos \pi x}$ .
- 4.22.  $u = \sqrt{\frac{x - \sqrt{y}}{2 - x^2 - y^2}}$ .
- 4.23.  $u = \sqrt{1 - x^2 + 2x - y^2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2 + 2y}$ .
- 4.24.  $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y^2)$ .
- 4.25.  $u = \ln[(1 - x + y)(2 - 3x + y)]$ .
- 4.26.  $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \cdot \ln(y - x^2 + 5)$ .      4.27.  $u = \arcsin \frac{x}{y} \cdot \sqrt{x^2 - y + 3}$ .
- 4.28.  $u = \ln\left(\frac{x}{y} + 5\right) \ln(x - 1)$ .
- 4.29.  $u = \sqrt{x + y - 1} \cdot \ln(1 - x^2 - y^2)$ .      4.30.  $u = \arcsin \frac{y^2}{x} - \ln(x^2 - y)$ .

Вычислить приближенно с помощью дифференциала первого порядка.

- 4.31.  $1,02^{1,97}$ .      4.32.  $\sqrt{48,99 \cdot 25,03}$ .
- 4.33.  $\sqrt[4]{4,99^2 - 3,02^2}$ .      4.34.  $4,98 \cdot \sqrt[3]{27,03}$ .
- 4.35.  $\sqrt{2,99^2 + 4,02^2}$ .      4.36.  $\sqrt{1,01^2 + 2,01^2 + 1,98^2}$ .

4.37.  $\frac{7}{\sqrt{16,02} + \sqrt{8,99}}$ .

4.38.  $1,99 \cdot \sin 1,51\pi$ .

4.39.  $\frac{3,98}{1 + \sqrt{4,02}}$ .

4.40.  $\sqrt[4]{2,02^5 + 6,93^2}$ .

4.41.  $\sqrt{18,92 + 9,01^2}$ .

4.42.  $\sqrt[3]{3,01 \cdot 2,98^2}$ .

4.43.  $1,04^{1,98}$ .

4.44.  $0,99^{2,02}$ .

4.45.  $\sqrt{15,99 \cdot 4,02}$ .

4.46.  $\sqrt[3]{2,01^3 + 5,99^2 + 20}$ .

4.47.  $4,97 \cdot \sqrt[3]{125,1}$ .

4.48.  $\sqrt{13,04^2 - 4,99^2}$ .

4.49.  $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ .

4.50.  $\sqrt{31,96 + 2,01^5}$ .

4.51.  $3,02 \cdot \cos 0,98\pi$ .

4.52.  $\frac{5,03}{2 + \sqrt{8,98}}$ .

4.53.  $\sqrt{1,98^4 + 3,02^2}$ .

4.54.  $\sqrt{16,97 + 2,01^3}$ .

4.55.  $1,01^{2,03 \cdot 3,98}$ .

4.56.  $e^{0,01} \cdot \cos 0,98\pi$ .

4.57.  $e^{-0,01} \cdot \sqrt{25,02}$ .

4.58.  $6,98 \cdot \operatorname{arctg} 0,03$ .

4.59.  $e^{0,02} \cdot \sqrt{1 + (1,99)^3}$ .

4.60.  $\sqrt{16,03} \cdot \sin 3,49\pi$ .

Найти дифференциалы второго порядка.

4.61.  $z = x^2 y^2 - e^{xy}$ .

4.62.  $z = \ln(x^2 + y)$ .

4.63.  $z = \ln(x - y)$ .

4.64.  $z = e^{x^2 + x + y}$ .

4.65.  $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$ .

4.66.  $z = 3x^2 y + 6y^3 \cos x$ .

4.67.  $z = \sin(2x + y)$ .

4.68.  $z = e^{x/y}$ .

4.69.  $z = x \cdot \sin^2 y$ .

4.70.  $z = e^{xy}$ .

4.71.  $z = xyt$ .

4.72.  $z = \sin(x + y + t)$ .

4.73.  $z = \sin(x + 5y)$ .

4.74.  $z = \cos(x + y)$ .

4.75.  $z = e^x \sin y$ .

4.76.  $z = e^{x^2 + y^2}$ .

4.77.  $z = e^x \cos y$ .

4.78.  $z = x \cos y + y \sin x$ .

4.79.  $z = x^2 + \sqrt{xy} - u^2$ .

4.80.  $z = xy^2 - \sqrt{uy}$ .

4.81.  $z = \ln(x^2 + y + 3u)$ .

4.82.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

4.83.  $z = e^{x + y + t}$ .

4.84.  $z = (x + u) \cdot \cos y$ .

4.85.  $z = (y - u) \operatorname{tg} x$ .

4.86.  $z = y \cos(x + u)$ .

4.87.  $z = x^2 \sqrt{y + 3u}$ .

4.88.  $z = \cos(x^2 + y^2)$ .

4.89.  $z = \ln(xyt)$ .

4.90.  $z = \operatorname{arctg}(x + y + t)$ .

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $F(x, y, z) = 0$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

4.91.  $x^2 - 1 + y^2 - z^2 = 0,$

$M_0(1, 1, 1)$ .

4.92.  $2z^2 - xy - 6 = 0,$

$M_0(1, -2, 1)$ .

4.93.  $x + 10 - y^2 + xz = 0,$

$M_0(1, 3, -2)$ .

- 4.94.  $x^3 - 1 - xy + z^2 = 0$ ,  $M_0(1, 4, -2)$ .  
 4.95.  $xz + 1 + yz - x^2 = 0$ ,  $M_0(1, -1, 2)$ .  
 4.96.  $xy - 25 + z^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $M_0(2, -6, 3)$ .  
 4.97.  $z^3 - 2xy + 7 + y^2 = 0$ ,  $M_0(3, 1, -2)$ .  
 4.98.  $z^3 + y^2x + 15 - 2y = 0$ ,  $M_0(-3, 2, 1)$ .  
 4.99.  $xy - 18 + 6z^2 - y^2z = 0$ ,  $M_0(1, -2, 1)$ .  
 4.100.  $21 - z^2 + 6xy - 8x = 0$ ,  $M_0(1, 3, -1)$ .  
 4.101.  $x^2 - 1 + xy - 2zy + 3z = 0$ ,  $M_0(1, 1, -1)$ .  
 4.102.  $x^3 - 13 + 3xy + 6z^2 = 0$ ,  $M_0(1, 2, 1)$ .  
 4.103.  $x^2 - y^3 + z^4 + xy - 2 = 0$ ,  $M_0(1, 1, -1)$ .  
 4.104.  $z^3 + zy - 2xz - 5 = 0$ ,  $M_0(-1, 2, 1)$ .  
 4.105.  $y^3 + xz - 1 + x = 0$ ,  $M_0(1, -1, 1)$ .  
 4.106.  $z^2 + x^2 + 2y^2 + 7 = 0$ ,  $M_0(1, 2, 9)$ .  
 4.107.  $2z^3 + x^2 - y^2 - 3 = 0$ ,  $M_0(1, 2, -3)$ .  
 4.108.  $3z^2 + xy - 5 = 0$ ,  $M_0(1, 1, 1)$ .  
 4.109.  $xz + x^2y - y^2 + 7 = 0$ ,  $M_0(1, -2, -6)$ .  
 4.110.  $z^2 + xy^2 - x^2 - 31 = 0$ ,  $M_0(1, -2, 3)$ .  
 4.111.  $2z^2 + yx^2 + x - 9 = 0$ ,  $M_0(2, 1, 6)$ .  
 4.112.  $xz + xy + x^2 + 15 = 0$ ,  $M_0(3, 1, 12)$ .  
 4.113.  $z^2 - y^2 + xy^3 - 1 = 0$ ,  $M_0(2, 1, -1)$ .  
 4.114.  $z^3 + x + x^3y - 8 = 0$ ,  $M_0(2, 1, 10)$ .  
 4.115.  $x^2 + 3z^2 - yx^3 - 4 = 0$ ,  $M_0(1, -1, 2)$ .  
 4.116.  $xz - xy^2 + y^3 - 6 = 0$ ,  $M_0(2, 1, 1)$ .  
 4.117.  $z^2 - x^3y + x^2 = 5 = 0$ ,  $M_0(-1, 1, -2)$ .  
 4.118.  $yz - x^3y - y - 3 = 0$ ,  $M_0(2, -1, 9)$ .  
 4.119.  $z^3 - x^2y^3 - yz + 1 = 0$ ,  $M_0(2, -1, -5)$ .  
 4.120.  $z^2 - xy^3 - y - 2 = 0$ ,  $M_0(-1, 2, -6)$ .

Найти экстремумы.

- 4.121.  $u = x^3 + y^2 + 12xy + 2$ .  
 4.122.  $u = 4x - 3y - x^4 + y^3$ .  
 4.123.  $u = 2xy - 2x^3 - 2y^3 + 10$ .  
 4.124.  $u = 4(x - y) - x^3 + y^3$ .  
 4.125.  $u = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ .  
 4.126.  $u = x^3 + 3y^3 - 3x - 18y - 4$ .  
 4.127.  $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ .  
 4.128.  $u = x^3 + xy - y^3 + 1$ .  
 4.129.  $u = (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{e^y}$ .  
 4.130.  $u = xy(2 - x - y)$ .  
 4.131.  $u = x^3 + xy - 4x + y^2$ .  
 4.132.  $u = x^3 + y^3 - 3xy$ .  
 4.133.  $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ .  
 4.134.  $u = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 4$ .  
 4.135.  $u = x^3 - 2x^2 + y^2 + xy$ .  
 4.136.  $u = x^2 + y^3 - 2x - 3y^2$ .  
 4.137.  $u = x^3 + xy^2 + 6xy$ .  
 4.138.  $u = xy(x + y - 1)$ .

4.139.  $u = x^3 - 4y^4 + 12xy$ .

4.140.  $u = x^3 + y^3 - 15xy$ .

4.141.  $u = (2x - x^2)(2y - y^2)$ .

4.142.  $u = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ .

4.143.  $u = 8x^3 + y^3 - 6xy - 5$ .

4.144.  $u = x^3 + y^3 - 3x + 4 - 3y$ .

4.145.  $u = x^3 - y^3 - 6xy$ .

4.146.  $u = x^3 + 8y^3 + 12xy - 1$ .

4.147.  $u = x^2 - 6xy - y^3 + 2$ .

4.148.  $u = x^2 - 3y^3 + y + 6x - 7$ .

4.149.  $u = x^4 + y^2 - 2x^2 + y + 15$ .

4.150.  $u = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|$ .

Исследовать на экстремум функцию двух переменных  
 $F(x, y) = x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ .

Номер задачи	Значения коэффициентов					
	$a_{21}$	$a_{12}$	$a_{03}$	$a_{20}$	$a_{11}$	$a_{02}$
4.151.	2	1	-4	1	2	3
4.152.	2	1	-4	2	4	6
4.153.	4	4	-4	1	4	6
4.154.	4	4	-4	2	8	12
4.155.	6	9	4	1	6	3
4.156.	6	9	4	2	12	6
4.157.	6	9	4	1	6	6
4.158.	6	9	4	2	12	12
4.159.	4	4	-4	1	4	6
4.160.	4	4	-4	3	12	18
4.161.	6	9	4	3	18	9
4.162.	6	9	4	3	18	18
4.163.	8	16	8	1	8	4
4.164.	8	16	8	2	16	8
4.165.	8	16	8	3	24	12
4.166.	8	16	8	4	32	16
4.167.	8	16	8	1	8	12
4.168.	8	16	8	2	16	24
4.169.	8	16	8	3	24	36
4.170.	8	16	8	4	32	48
4.171.	2	1	-8	1	2	4
4.172.	2	1	-8	2	4	8
4.173.	2	1	-8	3	6	12
4.174.	2	1	-8	4	8	16
4.175.	6	9	-8	1	6	12

Номер задачи	Значения коэффициентов					
	$a_{21}$	$a_{12}$	$a_{03}$	$a_{20}$	$a_{11}$	$a_{02}$
4.176.	6	9	-8	2	12	24
4.177.	6	9	-8	3	18	36
4.178.	6	9	-8	4	24	48
4.179.	10	25	20	1	10	10
4.180.	10	25	20	2	20	20

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = ax^2 + by^2 + cx + dy$  в трапеции, ограниченной прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ ,  $x+y=4$ . Построить несколько линий уровня функции  $z$  и дать геометрическую интерпретацию найденного решения.

Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.181.	2	1	8	-8
4.182.	1	3	2	24
4.183.	1	-1	-4	8
4.184.	-1	2	2	12
4.185.	-1	-1	6	6
4.186.	2	-2	4	16
4.187.	2	-5	16	10
4.188.	-2	3	8	12
4.189.	-1	-2	10	-4
4.190.	-1	4	-10	8

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = ax^2 + by^2 + cx + dy$  в прямоугольнике, ограниченном прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $y=2$ . Построить несколько линий уровня функции  $z$  и дать геометрическую интерпретацию найденного решения.

Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.191.	1	-2	1	-1
4.192.	1	1	2	3
4.193.	1	0	2	5
Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.194.	-2	2	-2	1
4.195.	1	-2	3	4
4.196.	-1	4	-7	1
4.197.	1	-3	4	2
4.198.	-2	-4	6	7
4.199.	2	0	4	-1
4.200.	1	-2	4	3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = ax^2 + by^2 + cx + dy$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=6$ . Построить несколько линий уровня функции  $z$  и дать геометрическую интерпретацию найденного решения.

Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.201.	0	1	16	1



Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.202.	1	1	60	2
4.203.	1	2	0	-1
4.204.	2	1	12	3
4.205.	2	4	-60	4
4.206.	-1	2	-62	-2
4.207.	4	2	16	7
4.208.	-1	1	0	6
4.209.	1	2	31	-1
4.210.	2	1	0	8

Исследовать заданные функции на условный экстремум в области неотрицательных аргументов.

- 4.211.  $z = x^3 + y^3$  при  $x + y = 8$ .
- 4.212.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$ .
- 4.213.  $u = x^2 + y^2$  при  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ .
- 4.214.  $z = \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$  при  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$ .
- 4.215.  $z = xy$  при  $x^2 + y^2 = 8$ .
- 4.216.  $z = x^4 + y^4$  при  $x + y = 2$ .
- 4.217.  $u = x + y + z$  при  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ .
- 4.218.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при  $x + y = 2$ .
- 4.219.  $2x^2 + 4y^2 + z^2 = u$  при  $x + y + z = 1$ .
- 4.220.  $u = 9x + y + z$  при  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$ .
- 4.221.  $x^2 + y^2 + z^2 = u$  при  $x + y + z = 1$ .
- 4.222.  $z = x^3 + y^2$  при  $x + y = 8$ .
- 4.223.  $u = 9x + 9y + z$  при  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$ .
- 4.224.  $u = 4x + 9y + z$  при  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ .
- 4.225.  $z = x + 2y$  при  $x^2 + y^2 = 5$ .
- 4.226.  $z = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$  при  $\frac{1}{x^2} + \frac{9}{y^2} = \frac{1}{64}$ .
- 4.227.  $z = \frac{5}{x} + \frac{4\sqrt{3}}{y}$  при  $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} = \frac{1}{36}$ .
- 4.228.  $z = x^2 + y^2$  при  $x + y = 8$ .
- 4.229.  $z = xy^2$  при  $x + 2y = 1$ .

- 4.230.  $u = x + 4y + z$  при  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ .
- 4.231.  $z = x^2 + y^2 - xy - x - y - 4$  при  $x + y - 3 = 0$ .
- 4.232.  $z = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$  при  $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} = \frac{1}{16}$ .
- 4.233.  $z = xy$  при  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 4.234.  $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2$  при  $x + y + z = 1$ .
- 4.235.  $u = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$  при  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 4.236.  $z = \frac{x + y - 4}{\sqrt{2}}$  при  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 4.237.  $z = 2x + y$  при  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 4.238.  $u = x^2 y$  при  $x + 2y = 12$ .
- 4.239.  $u = 3x^2 + 5y^2$  при  $x + y = 1$ .
- 4.240.  $z = x + 4y$  при  $x \cdot y = 4$ .

### Дополнительные задания

4.241. Преобразовать уравнение  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ , полагая  $x = \operatorname{ctg} t$ .

4.242. Приняв  $y$  за аргумент, преобразовать уравнение  $3\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ .

4.243. Преобразовать уравнение  $(xy' - y)^2 = 2xy \cdot (1 + y'^2)$ , перейдя к полярным координатам.

4.244. Преобразовать уравнение  $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , перейдя к новым переменным  $u$  и  $v$ , если  $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

4.245. Преобразовать уравнение  $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$ , приняв за новые переменные  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = x$  и за новую функцию  $w = xz - y$ .

4.246. Преобразовать выражение (оператор Лапласа)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , перейдя к полярным координатам.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = ax^2 + bxy + cx + dy$  в прямоугольнике, ограниченном прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=2$ ,  $y=1$ . Построить несколько линий уровня функции  $z$  и дать геометрическую интерпретацию найденного решения.

Номер задачи	Значения коэффициентов			
	$a$	$b$	$c$	$d$
4.247.	3	4	1	2
4.248.	5	12	0	2
4.249.	6	8	4	-7
4.250.	4	-3	-2	3
4.251.	8	-6	-2	4

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 4x^2 + axy + by^2 + cx$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=5$ . Построить несколько линий уровня функции  $z$  и дать геометрическую интерпретацию найденного решения.

Номер задачи	Значения коэффициентов		
	$a$	$b$	$c$
4.252.	3	8	12
4.253.	4	7	16
4.254.	8	10	0
4.255.	5	-8	60
4.256.	-6	12	-62