



МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Московская государственная
геологоразведочная академия**

Кафедра механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов
дневного и заочного факультетов специальностей 0907
"Технология и техника разведки месторождений полезных ископаемых",
0902 "Подземная разработка месторождений подземных ископаемых"
и 0905 "Открытая разработка месторождений подземных ископаемых"

Москва 1997

Составители: Б.М.Редрик, А.М.Волков, Г.В.Тучков, С.Д.Некса

Методические указания и контрольные задания для студентов дневного и заочного факультетов специальностей 0907 "Технология и техника разведки месторождений подземных ископаемых", 0902 "Подземная разработка месторождений подземных ископаемых" и 0905 "Открытая разработка месторождений подземных ископаемых" / Моск. государственная геологоразведочная академия; сост. Б.М.Редрик, А.М.Волков, Г.В.Тучков, С.Д.Некса. М., 1997. 60 с.

Под редакцией профессора Б.М.Редрика

Лицензия № 020349 от 04.01.94 г.

Подписано в печать 5.05.97 г. Формат бумаги 60х90 1/16.

Бумага типографская № 3. Печать офсетная. Печ. л. 4,0.

Тираж 200 экз.

Редакционно-издательский отдел МГА

По характеру решаемых задач теоретическая механика делится на три раздела: статику, кинематику и динамику. Эти разделы и изучаются студентами.

1. При изучении курса необходимо уметь применять знания из области высшей математики. Во всех разделах курса широко используются векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на оси и на плоскость, находить геометрические и аналитические суммы векторов (построение векторных треугольника и многоугольника), вычислять векторное и скалярное произведение двух векторов и знать свойства этих произведений. Надо знать, что такое единичные векторы (орты) координатных осей и как выражаются соответствующие векторы по координатным осям с помощью ортов.

При изучении кинематики надо свободно пользоваться дифференцированием функций одного переменного, строить графики этих функций, иметь понятия о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны.

При изучении динамики следует использовать знания об интегральном и дифференциальном исчислении, т.е. находить интегралы от простейших функций, вычислять частные производные, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Метрически рекомендуются изучать по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам учебника), не останавливаясь над незнакомыми местами. Затем вернуться к местам, вызвавшим затруднения и внимательно рассмотреть в том, что было непонятно. Особое внимание обратить на формулировки, определения, доказательства и примеры. Однако не следует заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить сущность своими словами.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, после изучения соответствующей темы, надо рассмотреть в решениях стандартных задач, которые приведены и рассмотрены в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем самостоятельно решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И.В. Мещерякова и только после этого решать соответствующую задачу из контрольного задания.

По окончании изучения темы полезно составить краткий конспект, либо подробный план, по возможности не обращаясь к учебнику.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать

ответ на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку).

Все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены, подробно перечислены в программе. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом:

- выписать в тетрадь последовательно все перечисленные в программе вопросы темы, оставив справа широкую колонку (поле);

- по мере изучения материала темы следует в правой колонке указывать страницы учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически.

Такую тетрадь можно использовать не только для самопроверки, но и для подготовки к экзамену.

Следует иметь в виду, что в различных учебных материалах излагается в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос программы может оказаться в другой главе учебника, но на изучение курса в целом это, конечно, никак не отразится.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже (после рабочей программы). Их надо прочитать внимательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даны конкретные методические указания по ее решению и приводится пример решения.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА *

Введение.

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с общественным производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач.

СТАТИКА ТЕРГУДО ТЕЛА

Основные понятия и исходные положения статики

Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, ося, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая.

* Составлена на основе Программы дисциплины "Теоретическая механика", утвержденной ГМУ высшего образования Госкомитета СССР по народному образованию 02.06.88 (индекс ГМУ - 4/2).

ств, силы внешние и внутренние, распределенные и сосредоточенные. Исходные положения (аксиомы) статики. Связи и их реакции. Основные виды связей: гладкая плоскость (поверхность) или опора, твёрдая нить, цилиндрический и сферический шарниры (подшипник и подшипник), невесомый стержень, жесткая заделка (неподвижная заделка опора); реакции этих связей. Теорема о трех силах.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Теоретическое и аналитическое условия равновесия системы сходящихся сил.

Равновесие произвольной системы сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил, момент пары. Свойства пары сил. Понятие о приращении системы сил к заданному центру. Главный вектор и главный момент системы сил. Условия равновесия произвольной системы сил, приложенной к твердому телу. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Плоская система сил. Алгебраическая величина момента сил. Равновесие плоской системы сил. Случай параллельных сил. Равновесие системы тел. Расчет плоских ферм.

Трение. Законы трения скольжения. Реакции шероховатых связей. Угол трения. Равновесие при наличии трения. Трение качения.

Пространственная система сил. Момент силы относительно оси. Вычисление главного вектора и главного момента системы сил. Аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду. Равновесие произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил.

Центр тяжести. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Координаты центров тяжести однородных тел. Способы определения координат центров тяжести тел. Центр тяжести нерегулярных однородных тел (дуга окружности, треугольник, круговой сектор).

КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Траектория точки. Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки. Вектор скорости и уско-

рения точки. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения. Сил естественного трехгранника. Алгебраическая величина скорости. Касательная и нормальная проекции ускорения точки на сил естественного трехгранника. Некоторые частные случаи движения точки.

Поступательное и вращательное движение твердого тела. Поступательное движение. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Закон вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение. Равномерное и равнопеременное вращения. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Уравнения плоскопараллельного движения тела (движения плоской фигуры). Разложение движения на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость вращательной части движения от выбора полюса. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела (плоской фигуры). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорений точек плоской фигуры.

Сложное (составное) движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точек. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений (теорема Корiolиса). Случай поступательного и вращательного переносного движения. Вычисление кориолисова ускорения.

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах. Уравнения движения материальной точки в проекциях на сил естественного трехгранника. Две задачи динамики для свободной и несвободной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй (основной) задачи динамики. Начальные условия. Пространные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях действия сил, зависящих от времени, от положения точки и от ее скорости.

Общие теоремы динамики точки

Теорема об изменении количества движения. Количество движения. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме и конечном виде.

Теорема об изменении кинетической энергии. Элементарная работа силы, аналитическое выражение элементарной работы. Мощность. Примеры вычисления работы сил тяжести, упругости, трения. Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме и конечном виде.

Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов). Теорема моментов относительно оси. Теорема моментов относительно центра.

Необходимое движение точки. Уравнения движения точки по заданной неподвижной кривой. Определение реакций связей. Динамика относительно того движения. Принцип Даламбера для неограниченной материальной точки.

Динамика системы

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения механической системы, его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и в конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы (дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси).

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоско-параллельном движении тела. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Равенство нулю сумм работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и

главный момент сил инерции.

Список литературы

1. Тарт. С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 1886 и последующие издания.
2. Терзет М.М. Курс теоретической механики. М., 1970 и последующие издания.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1970 и последующие издания.
4. Теоретическая механика в примерах и задачах. I и II тома. Бать М.И., Джанелидзе Г.Е., Кальсон А.О. М., Наука, 1973 и последующие издания.

Б. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике (под редакцией А.А. Яблонского). М., 1973 и последующие издания.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Общие положения

Студенты выполняют две контрольные работы.

Работа 1 (статика и кинематика) - задания А, В, В, Г.

Работа 2 (динамика) - задания Д, Е.

К каждой задаче даны рисунок и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная (буква и цифра), при этом номер рисунка выдвигается, цифра, стоящая после точки. Например, рис. А.В - это рис. В к задаче А и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. Б и т.д.). Номер условия от 0 до 9 проставлены в 1-й столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра или номера студенческого билета, а номер условия в таблице - по последней; например, если шифр оканчивается числом 25, то берутся рис. 2 (т.е. схема №2) и условия №5 из таблицы. Если номер студенческого билета однозначен (скажем, 5), то номер рисунка 0. Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницах которой нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер или название работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факкультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер или название работы, номер решаемой задачи.

Решение задачи обязательно следует начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно прове-

рять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертёж (можно карандашом) и указывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертёж выполняется с учётом условий решаемой варианта задачи, а все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертёж должен быть аккуратным и наглядным. Его размеры должны позволять ясно показать, например, векторы скорости и ускорения. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единичные подчёркнутые величины нужно обязательно. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента. К работе, выполняемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачетная работа. На экзамене необходимо представлять зачетные по данному разделу курсы работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам все линии, параллельные отрезкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные отрезкам — вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят; катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по поверхностям без скольжения. Все связи, если не дано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задачи и в таблице $P_1, 1, 1$ и т.п. означают все или размеры тела 1; $P_2, 12, 12$ — тела 2 и т.д. Аналогично в кинематике и динамике v_A, ω_A обозначают скорость и ускорение точки В; v_C, ω_C — точки С; ω_1, ε_1 — угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2, ε_2 — тела 2 и т.д. В каждой задаче подробные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задач величин (размеры) при решении каких-либо вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задач. На всех пояснениях в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в расчетные задания, даются перед или после изложения текста задач, либо в примере решения аналитической задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразованные и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями, в конце должны быть даны ответы.

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ А.
Расчет условий в стержневых фермах
Варианты расчетного задания А.

Ферма закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню ВВ₁, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к ферме и к неподвижной опоре шарнирами.

К узлам фермы С, Д, Е, К приложены силы P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно (рис. А.О. — А.З, табл. 1). Определить аналитически опорные реакции фермы и условия, возникающие в ее стержнях. При окончательных подсчетах принять $l = 0,5 \text{ м}$.

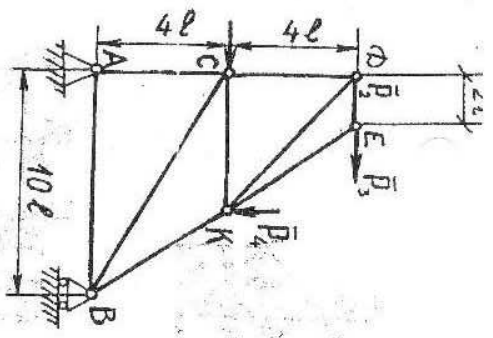
Указания. Задание А — на определение условий в стержневых фермах аналитическим способом и равновесие тела под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций иначе (в данном случае относительно точки А).

При выполнении момента силы P_3 часто удобно разложить ее на составляющие P_3' и P_3'' , для которых плечи легко вычисляются, в частности на составляющие, параллельные координатным осям, и использовать теорему Вариньона, тогда:

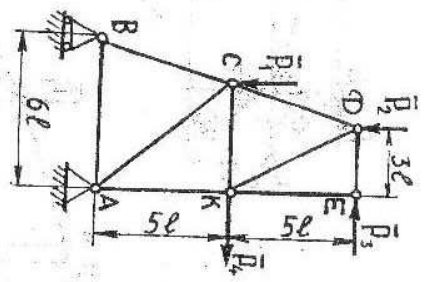
$$m_0(P_3) = m_0(P_3') + m_0(P_3'').$$

Расчет условий в стержневых фермах методами статик может быть приведен только для статически определенной формы (при условии $m = 2n - 3$, где m — количество стержней; n — количество узлов фермы). Условия приложены в узлах фермы. Трением в шарнирах пренебрегают. При этих условиях условия в стержнях будут направлены вдоль стержней. Условиями разлагающиеся условия считать положительными, а сжимающие — отрицательными.

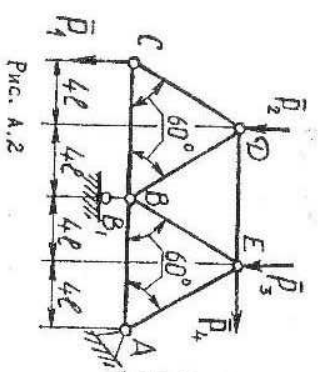
Метод оценки
Для расчета условий использовать два метода: метод оценок (Ритге-



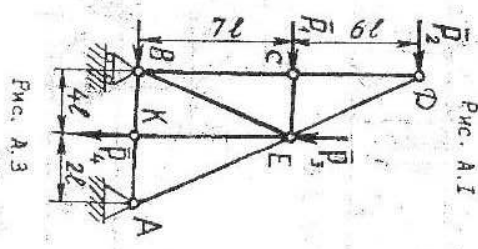
Pnc. A.0



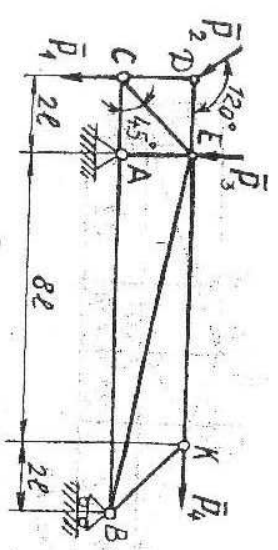
Pnc. A.1



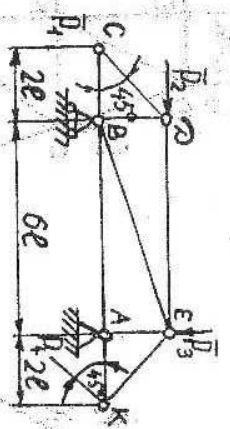
Pnc. A.2



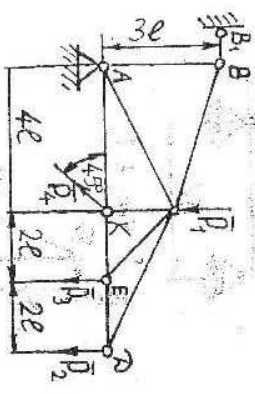
Pnc. A.3



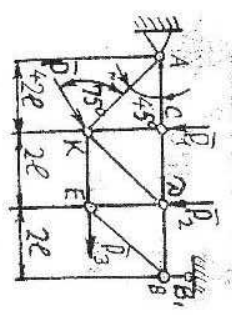
Pnc. A.4



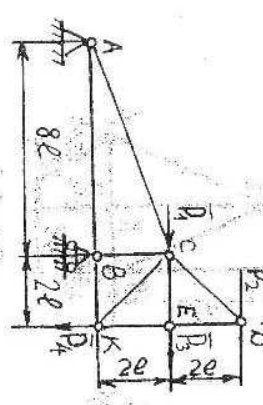
Pnc. A.5



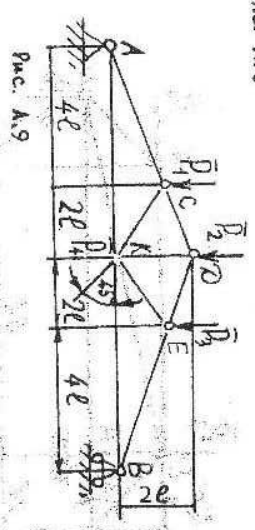
Pnc. A.6



Pnc. A.7



Pnc. A.8



Pnc. A.9

ра) и метод вырезания углов. Первый метод заключается в следующем:

- мгновенно рассекать ферму, к которой приложены все внешние силы (заданные и силы реакции), на две части так, чтобы число рассеченных стержней не превышало трех и, чтобы они не пересекались в одной точке, и заменили действие отброшенной части фермы искомыми усилиями стержней, показав, что все стержни растянуты (в оставшейся части фермы усилия в рассеченных стержнях направлены от углов);

- составляют уравнения равновесия для оставшейся части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило только одно неизвестное; для этого составляют уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий (точек Риттера); если два рассеченных стержня параллельны, то для нахождения усилия в третьем рассеченном стержне составляют уравнение проекций на ось, перпендикулярную к этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие;

Таблица 1

N варианта	P ₁ , кН	P ₂ , кН	P ₃ , кН	P ₄ , кН
0	80	120	80	100
1	100	80	80	120
2	120	80	100	70
3	80	90	120	50
4	50	120	70	100
5	70	100	90	150
6	100	80	60	90
7	120	100	70	80
8	150	90	50	60
9	90	70	100	120

- решая каждое из составленных уравнений, находят искомые усилия в трех рассеченных стержнях; если в ответе получается усилие со знаком минус, то это означает, что стержень сжат, а не растянут;

Этим методом удается определить усилия не во всех стержнях, так как не все стержни попадут в выбранные сечения. Обычно остаются 2-3 стержня, усилия в которых методом сечений не определяются. Усилия в этих стержнях определяются по методу вырезания углов.

Метод вырезания углов

При определении усилий в стержнях фермы по методу вырезания углов получают следующим образом:

- первоначально вычерчивают узел фермы, содержащий не более двух стержней, усилия в которых неизвестны, и в местах разреза прикладывают соответствующие усилия, предполагая, что неизвестные усилия положительны и стержни растянуты;

- выписывают две взаимно перпендикулярные оси координат, составляют уравнения равновесия полученных сил, складывая в рассматриваемом узле: $\sum F_{\text{хх}} = 0$; $\sum F_{\text{yy}} = 0$;

- решив совместно полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, определяют искомые усилия в стержнях. Отрицательный ответ будет показывать, что соответствующий стержень сжат.

Пример. Ферма (рис. А) имеет в точке А неподвижную шарнирную опору, а в точке В - подвижную шарнирную опору.

Дано: P₁ = 20 кН, P₂ = 10 кН, P₃ = 40 кН, P₄ = 25 кН,

$\alpha = 45^\circ$, l = 0,5 м.

Определить реакции опор А и В, вызываемые действующими нагрузками и усилия в стержнях фермы методами сечений (Риттера) и вырезания углов.

Решение. 1. Проверим статическую определенность фермы

$m = 2n - 3$; $m = 9$; $n = 6$;

$9 = 2 \cdot 6 - 3$ ферма статически определима.

2. Рассмотрим равновесие фермы, как твердого тела. Проведем координатные оси ху и изобразим действующие на ферму реакции связи X_A, Y_A, R_B (реакция подвижной шарнирной опоры направлена перпендикулярно опорной плоскости).

3. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении моментов силы P₃ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу P₃ на составляющие P₃' и P₃" (P₃' = P₃cos α ; P₃" = P₃sin α) и учтем, что $m_A(P_3) = m_A(P_3') + m_A(P_3'')$. Получим:

$\sum F_{\text{хх}} = 0$; X_A + P₂ - P₃cos $\alpha = 0$;

$\sum F_{\text{yy}} = 0$; Y_A + R_B - P₄ - P₁ - P₃sin $\alpha = 0$;

$\sum m_A(F_0) = 0$; P₄ 2 l - P₂ 2 l + R_B 6 l - P₃sin α 4 l.

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

X_A = 18,3 кН; Y_A = 53,4 кН; R_B = 13,9 кН.

4. Вычисляем усилия в стержнях методом сечений (Риттера). Для

данной формы можно провести три сечения (см. рис. А,а), проходящие через три стержня, не пересекающиеся в одной точке: сечение 1-1 через стержни 2, 3, и 4; сечение 11-11 через стержни 4, 5 и 6 и сечение 111-111 через стержни 6, 7 и 8.

Рассмотрим сечение 1-1. Эти сечением ферма разрезается на две части. Рассмотрим одну из них, например, левую (рис. А,б). В разреженных стержнях усилия S_2 , S_3 и S_4 направлены от углов, предполагая, что все стержни растянуты.

Рассмотрим аналогично оставшиеся части фермы (рис. А,в,г). Для систем сил, действующих на оставшиеся части фермы, запишем уравнение равновесия. (Точками Риттера, в которых пересекаются два неизвестных усилия, будут: для сечения 1-1 - точки С и А; для сечения 11-11 - точки А и Д; для сечения 111-111 - точки Д, В и Е).

Для сечения 1-1

$$\sum m_C(F_K) = 0; P_4 \cdot 2 \cdot 1 + S_2 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$\sum m_A(F_K) = 0; P_4 \cdot 2 \cdot 1 - S_4 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum F_{KX} = 0; -P_4 - P_1 - S_3 = 0.$$

Для сечения 11-11

$$\sum m_D(F_K) = 0; P_4 \cdot 2 \cdot 1 - S_4 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum m_C(F_K) = 0;$$

$$P_4 \cdot 6 \cdot 1 + P_1 \cdot 4 \cdot 1 - Y_A \cdot 4 \cdot 1 + X_A \cdot 2 \cdot 1 + S_6 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum F_{KY} = 0; -P_4 - P_1 + Y_A + S_{\sin \alpha} = 0.$$

Для сечения 111-111

$$\sum m_D(F_K) = 0; R_B \cdot 2 \cdot 1 - S_6 \cdot 2 \cdot 1 - R_{\cos \alpha} \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum m_B(F_K) = 0; -S_7 \cdot 2 \cdot 1 + R_{\sin \alpha} \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum m_E(F_K) = 0; R_B \cdot 2 \cdot 1 + S_{\sin \alpha} \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим усилия в стержнях:

$$S_2 = -25 \text{ кН}; S_3 = -32,2 \text{ кН}; S_4 = -19,7 \text{ кН}.$$

$$S_5 = -45 \text{ кН}; S_6 = -14,5 \text{ кН};$$

$$S_7 = 25 \text{ кН}; S_8 = 28,3 \text{ кН};$$

5. Усилия в стержнях 1 и 9 определим по методу вырезания углов (рис. А,д,е). Рассмотрим угол К и В. Необходимые уравнения равновесия для этих углов запишутся так:

- для угла К

$$\sum F_{KY} = 0; -P_4 + S_{\sin 45^\circ} = 0;$$

- для угла В

$$\sum F_{KX} = 0; -S_9 - S_{\cos 45^\circ} = 0.$$

6. Результаты всех расчетов приводим ниже

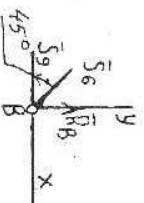
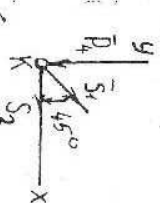
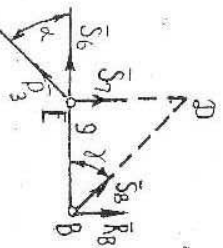
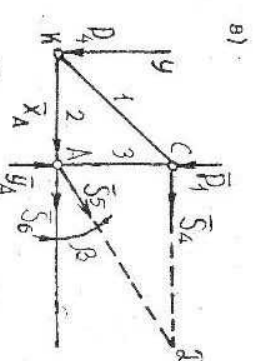
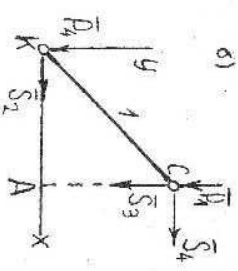
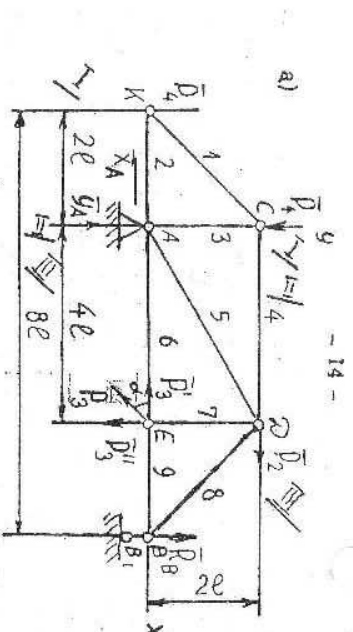
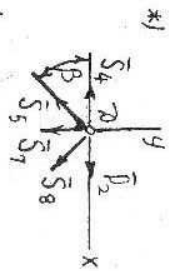


Рис. А



Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Усилие, кН | 35,4 | - 25 | - 45 | 25 | -32,2 | -14,5 | 28,3 | -19,7 | 13,9

Знак минус показывает, что стержень сжат, а знак плюс, что стержень растянут.

Для проверки правильности расчета выражается контрольный узел, содержащий большое число стержней, например, узел Д (рис. А, ж). Остатки уравнения равновесия и подстановка найденные значения условий с их знаками, проверим правильность написанных равенств:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; F_2 - S_4 - S_{cos} 26,5 + S_{cos} 45 = 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; - S_7 - S_{sin} 26,5 - S_{sin} 45 = 0; \\ 10 - 25 - 32,2 & 0,29 - 19,7 & 0,7 = 0; \\ - 28,3 + 32,2 & 0,45 + 19,7 & 0,7 = 0. \end{aligned}$$

Условия найдены правильно.

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ В

Равновесие системы тел с учетом трения

Пример. Два однородных стержня АВ и СЕ шарнирно соединены в т. В (рис. Б, з). Концы А стержня АВ закреплен шарнирно, а конец Е стержня СЕ опирается на шероховатую поверхность КЛ. На стержень АВ действует пара сил с моментом M . Определить минимальный коэффициент трения между стержнем СЕ и поверхностью КЛ при равновесии, а также реакции связей в т. А, если известно: $AB = AE = 2$; $CE = 3$; $\alpha = 60$; $m = 30$ Нм. Вес стержня длиной ℓ (м) $= P(H)$; $\ell = 1$ м; $P = 5$ Н.

Решение. 1. Составим расчетную схему для данной системы тел, т.е. мысленно отбросим связи и заменим их действия силами реакций этих связей (рис. Б, в).

2. Рассмотрим условия равновесия данной системы тел, т.е. составим уравнения статики для системы в целом:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= R_x - F_{тр} = 0; \\ \sum F_{iy} &= R_y + N_E - P_{AB} - P_{CE} = 0; \\ \sum M_E(F_i) &= - R_y(AE) - m + P_{AB}(AE) - 0,5(AB) \cos \alpha + P_{CE} 0,5(CE) \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_y &= - 0,5m / + 2P + 1,25P \cos \alpha; \\ N_E &= 0,5m / + 3P - 1,25P \cos \alpha. \end{aligned}$$

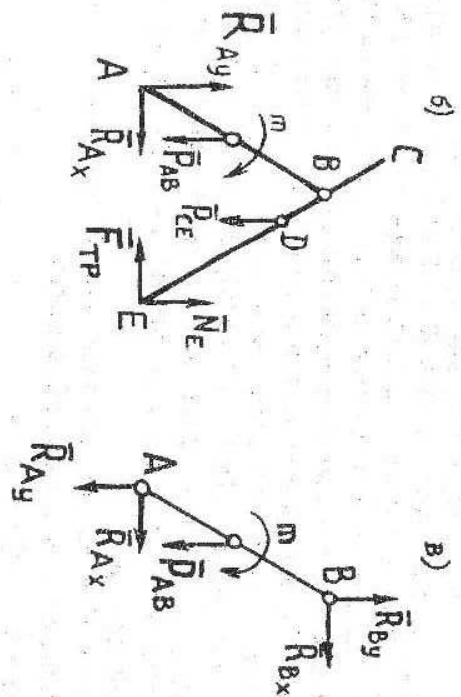
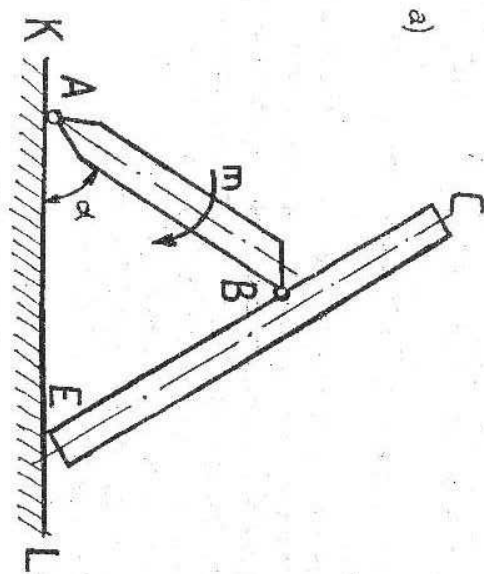


Рис. Б(а, в, г)

3. Для определения оставшихся неизвестных R_x и $F_{тр}$ рассмотрим равновесие стержня АВ как свободного тела (рис. Б, в).

$$\sum m_B(F_k) = -R_y(AB) \cos \alpha - m + R_x(AB) \sin \alpha + R_{AB} 0,5(AB) \cos \alpha = 0;$$

$$R = \frac{m - m \cos \alpha + 2P \cos \alpha + 2,5P \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha};$$

$$F_{тр} = R_x \text{ по } F_{тр} = f N_E, \text{ тогда}$$

$$R_x = \frac{m - m \cos \alpha + 2P \cos \alpha + 2,5P \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$N_E = 2 \sin \alpha (0,5m/d + 3p - 1,25p \cos \alpha)$$

4. Подставив числовые значения, получим:

$$R_y = 3,125 \text{ Н}; \quad N_E = 21,875 \text{ Н};$$

$$R_x = F_{тр} = 10,464 \text{ Н}; \quad f = 0,479.$$

5. Проверка. Определим, чему равна сумма моментов всех сил относительно т. В для расчетной схемы (рис. Б, в):

$$\sum m_B(F_k) = -R_y(AB) \cos \alpha + R_x(AB) \sin \alpha - m + R_{AB} 0,5(AB) \cos \alpha - P \cos(BD) \cos \alpha + N_E(BE) \cos \alpha - F_{тр}(BE) \sin \alpha =$$

$$= 2 \cos \alpha (R_x \sin \alpha - R_y + 0,25P + N_E - F_{тр} \sin \alpha).$$

После подстановки числовых значений всех величин получаем $\sum m_B(F_k) = 0$.

Варианты расчетного задания В.

Задание В.0. Однородный стержень CD длиной 2 концом D опирается на шероховатую поверхность, а серединой на стержень АВ (рис. В.0.). Стержень АВ жестко заделан концом А в стену МН. Угол наклона стержня CD - $\alpha = 60^\circ$. Трение в точке В отсутствует. Вес стержня длиной ℓ (м) равен Р (Н). В т. Е на стержень АВ действует вертикальная сила F. Определить коэффициент трения f между стержнем CD и горизонтальной поверхностью (т. D), а также реакции связи в т. А для следующих исходных данных (табл. 2).

Таблица 2

N варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(м)	1,6	1,0	0,5	0,2	0,4	0,8	0,6	1,2	2,0	1,5
P (Н)	80	50	30	10	20	40	30	20	30	70
F (Н)	70	20	40	15	30	80	40	50	90	60

Задание В.1. Однородный стержень CD длиной 2 концом D опирается на шероховатую поверхность, а точкой Е (DE = 2) на стержень АВ (рис. В.1.). Стержень АВ, длиной 2 жестко заделан в стену МН концом А; угол наклона стержня CD - $\alpha = 45^\circ$. Трение в т. Е отсутствует. В середине стержня АВ действует пара сил с моментом m. Вес стержня длиной ℓ (м) равен Р (Н). Определить коэффициент трения f между стержнями CD и горизонтальной поверхностью (т. D), а также реакции связи в т. А для следующих условий (табл. 3).

Таблица 3

N варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(м)	2,0	1,5	1,8	1,3	1,6	1,4	1,0	0,9	1,7	1,9
P (Н)	80	60	70	80	70	60	50	50	80	90
m (Нм)	10	50	30	20	60	40	70	80	15	25

Задание В.2. Однородный стержень CD длиной 2,5 а концом D опирается на шероховатую поверхность, а точкой Е (DE = 1,5) на стержень АВ (рис. В.2.). Стержень АВ длиной 2 жестко заделан в стену МН концом А. Угол наклона стержня CD - $\alpha = 45^\circ$. Трение в т. Е отсутствует. На стержень АВ на участке АЕ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Вес стержня длиной (м) равен Р (Н). Определить коэффициент трения f между стержнем CD и горизонтальной поверхностью (т. D), а также реакции связи в т. А для следующих данных (табл. 4).

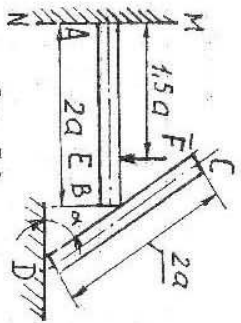


Рис. B.0

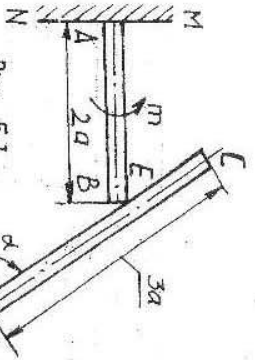


Рис. B.1

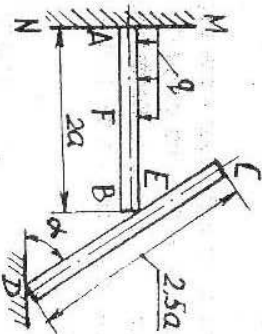


Рис. B.2

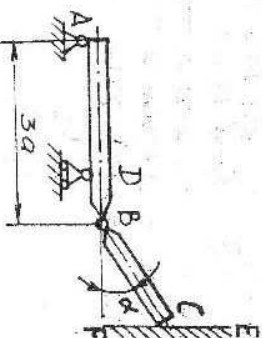


Рис. B.3

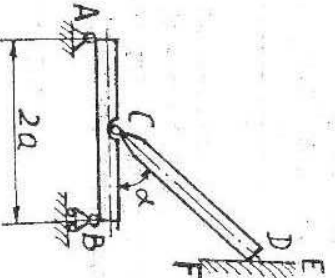


Рис. B.4

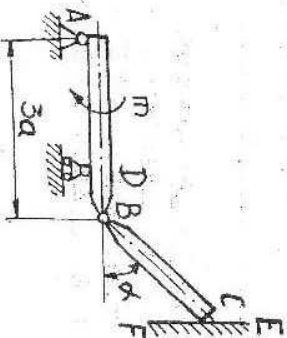


Рис. B.5

Рис. B.0 - B.5

Таблица 4

N варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1,5	2,0	1,0	1,2	1,8	1,8	1,4	2,5	2,2	2,0
P (H)	80	100	50	60	80	70	60	90	100	40
q (H/M)	10	20	30	10	15	40	20	30	60	60

Задача B.3. Два однородных стержня AB и BC соединены шарнирно в Т. В (рис. B.3). Длина AB = 3 ; AD = BC = 2. Вес стержня длиной l (M) равен P (H). Угол наклона стержня BC - $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между стеной EF и стержнем BC равен f. Определить реакции связей в Т, А и D для следующих данных (табл. 5).

Таблица 5

N варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1,0	0,5	1,2	0,8	0,6	1,4	1,5	0,8	1,0	1,2
P (H)	80	40	90	60	40	100	90	80	50	60
f	0,2	0,3	0,1	0,15	0,3	0,25	0,2	0,1	0,3	0,15

Задача B.4. Два однородных стержня AB и CD соединены шарнирно в Т, С (рис. B.4). Длина AB = CD = 2, AC = ; угол BCD - $\alpha = 45^\circ$. Коэффициент трения между стеной EF и стержнем CD равен f. Определить реакции связей в шарнирах А и В для следующих данных (табл. 6).

Таблица 6

N варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2,0	1,5	1,2	1,8	1,4	1,6	2,2	0,8	1,0	2,0
P (H)	80	60	50	70	80	90	40	50	100	
f	0,1	0,3	0,15	0,2	0,1	0,25	0,3	0,2	0,25	0,15

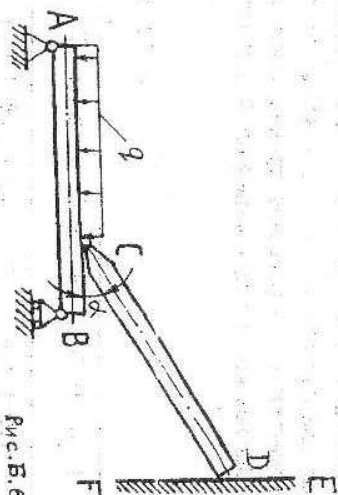


Рис. Б.6

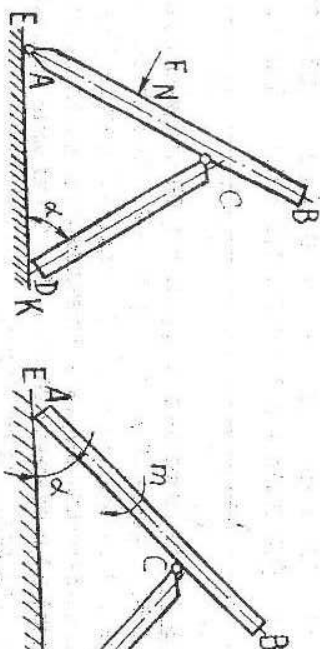


Рис. Б.7

Рис. Б.8

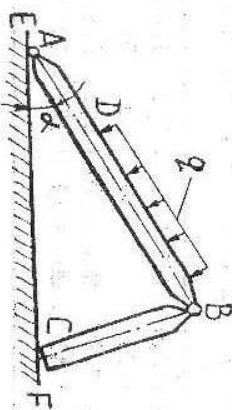


Рис. Б.9

Задание Б.5. Два однородных стержня АВ и ВС соединены шарнирно в т. В (рис. Б.5). Длина $AB = BC = 2$; $AB = 3$. Вес стержня длиной (м) равен P (Н). Угол наклона стержня $BC - \alpha = 45^\circ$. На стержень АВ действует пара сил с моментом m . Коэффициент трения между стеной EF и стержнем ВС равен f . Определить реакции шарниров А и В для следующих данных (табл. 7).

Таблица 7

Варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (Н)	2,0	1,8	1,0	1,4	1,2	1,5	1,6	0,8	0,6	1,0
m (Нм)	100	90	50	40	70	80	90	30	50	70
f	0,1	0,2	0,25	0,3	0,2	1,5	0,1	0,3	0,25	0,15

Задание Б.6. Два однородных стержня АВ и CD соединены шарниром в т. С (рис. Б.6). Длина $AB = BC = 3$; $AC = 2$. Вес стержня длиной (м) равен P (Н). Угол $BOD - \alpha = 30^\circ$. На часть AC стержня АВ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q . Коэффициент трения между стеной EF и стержнем CD равен f . Определить реакции шарниров А и В для следующих условий (табл. 8).

Таблица 8

Варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (Н)	1,4	2,0	1,8	1,6	1,5	1,2	1,0	1,4	2,0	1,0
q (Н/м)	40	60	30	50	90	30	20	70	100	80
f	0,3	0,25	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,25	0,15

Задание Б.7. Однородный стержень АВ длиной 3 (рис. Б.7) закреплен в т. А и С шарнирно. В точке N ($AN = 1$) к нему приложена сила F АВ ($AC = CD = 2$). Поверхность ЕК шероховатая. Вес стержня длиной l (м) равен P (Н). Угол $ADC - \alpha = 60^\circ$. Определить коэффициент трения f

между стержнем CD и поверхностью EK, а также величину реакции связи в т. А для следующих данных (табл. 9).

Таблица 9

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l (м)	2	4	3	1,5	2,5	4	3	2	1,5	3
P (Н)	10	30	20	20	15	40	30	20	10	25
F (Н)	5	5	8	7	6	9	5	6	8	9

Задание В.9. Однородный стержень АВ длиной 3 (рис. В.8) опирается концом А на шероховатую поверхность EF, а в т. С соединен со стержнем CD ($AC = CD = 2$). Вес стержня длиной l (м) равен P (Н). Угол $\alpha = 45^\circ$. На стержень АВ действует пара сил с моментом m . Стержень CD в т. D закреплен шарнирно. Определить коэффициент трения f между стержнем АВ и поверхностью EF, а также реакции связи в т. D для следующих данных (табл. 10).

Таблица 10

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	10,8	0,6	0,9	1,0	1,5	1,2	1,3	0,7	1,1	1,0
P (Н)	5	10	15	20	15	10	12	13	8	15
m (Нм)	6	8	10	7	9	5	10	12	8	9

Задание В.9. Два однородных стержня АВ и ВС соединены шарнирно в т. В (рис. В.9). Концом С стержня ЕС опирается на шероховатую поверхность, а конец А стержня АВ закреплен шарнирно. На участок DB стержня АВ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q . Длина АВ = AC = 3; DB = 2; $\alpha = 30^\circ$. Вес стержня длиной l (м) равен P (Н). Определить коэффициент трения между стержнем ВС и поверхностью EF, а также реакции связи в т. А для следующих данных (табл. 11).

Таблица 11

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	0,5	0,8	1,0	1,5	1,2	0,9	0,6	1,3	1,0	1,5
P (Н)	10	15	15	20	12	13	0,8	10	20	15
q (Н/м)	20	20	15	25	10	15	15	20	30	10

Указания. Задание В - на равновесие системы тел под действием плоской системы сил при наличии трения скольжения. При рассматривании равновесия конструкции из системы тел (двух и более) удобно использовать следующую последовательность. Сначала рассматривается равновесие всей системы как твердого тела, не учитывая при этом действия внутренних связей. Если при этом задача оказывается статически неопределимой (т.е. число неизвестных превышает число возможных уравнений статики), то дополнительно рассматривается условие равновесия отдельных тел, входящих в данную конструкцию, но уже с учетом соответствующих внутренних связей. При решении задания следует рассматривать предельное положение равновесия, когда $F_{тр} = fN$. Уравнения равновесия упрощаются, если их составлять в виде уравнений моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных сил. В данном задании обязательно проводится проверочный расчет.

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ В

Кинематическое исследование движения точки по заданному

уравнению движения в декартовых координатах.

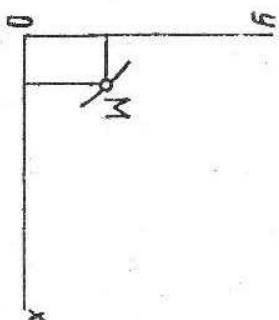
Пример. Точка М движется в плоскости OXY (рис. В.а), траектория точки на рисунке показана условно. Закон движения точки задан уравнениями

$$x = 25 \sin \pi t;$$

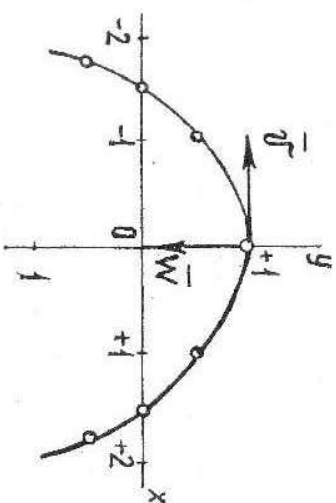
$$y = \cos 2 \pi t,$$

где x и y выражены в (см), t - в (с).

Найти уравнение траектории точки, определить окрестность и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории (для момента времени $t = 1$ с).



а)



б)

Рис. 5(а, б)

Решение. 1. Определим уравнение траектории, по которой движется точка М. Для этого представим уравнение в виде

$$\sin \pi t = x/2; y = 1 - 2\sin^2 \pi t.$$

Тогда $y = 1 - x^2/2$. Это уравнение параболы, вершина которой находится в точке (0;1), а ветви направлены вниз.

Из уравнений для x и y следует, что $|x| \leq 2$; $|y| \leq 1$.

Таким образом, траекторией точки М является часть параболы, где $-2 \leq x \leq 2$; $-1 \leq y \leq 1$.

График траектории точки М показан на рис. 5, б.

2. Определим начальное положение M_0 точки и направление ее движения.

$$\text{При } t = 0 \quad x_0 = 0; y_0 = 1.$$

В начальный момент времени точка находится в вершине параболы.

При возрастании t от 0 до 0,5 с точки М опускается по правой ветви параболы. При $0,5 < t < 1$ - точка М поднимается по правой ветви параболы до вершины.

При значениях $1 < t < 1,5$ и $1,5 < t < 2$ точка М соответственно опускается и поднимается по левой ветви параболы. Таким образом точка М совершает в течение времени колебательные движения по параболе.

$$\text{При } t = 1 \quad x = 0; y = 1.$$

3. Определим скорость точки М

$$v_x = x = dx/dt = 2 \pi \cos \pi t;$$

$$v_y = y = dy/dt = -2 \pi \sin 2 \pi t.$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2 \pi \sqrt{\cos^2 \pi t + \sin^2 2 \pi t} =$$

$$= 2 \pi \cos \pi t \sqrt{1 + 4 \sin^2 \pi t}.$$

Направление вектора скорости:

$$\frac{v_x}{v} = \cos \pi t$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\cos \pi t}{\cos \pi t \sqrt{1 + 4 \sin^2 \pi t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \pi t}}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{-2 \pi \sin 2 \pi t}{2 \pi \cos \pi t \sqrt{1 + 4 \sin^2 \pi t}} = \frac{-\sin 2 \pi t}{\cos \pi t \sqrt{1 + 4 \sin^2 \pi t}}$$

где α и β - углы между направлением вектора скорости v и положительным направлением осей координат Ox и Oy соответственно.

При $t = 1$ с получаем:

$$V_x = -2\pi \text{ см/с}; V_y = 0; V = 2\pi \text{ см/с}; \alpha = ; \beta = \pi/2.$$

4. Определить ускорение точки М

$$W_x = x = d^2x/dt^2 = -2\pi^2 \sin \pi t;$$

$$W_y = y = d^2y/dt^2 = -4\pi^2 \cos 2\pi t.$$

Модуль полного ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 2\pi^2 \sqrt{\sin^2 \pi t + 4\cos^2 2\pi t}.$$

Направление вектора ускорения:

$$\cos \alpha = \frac{W_x}{W} = \frac{\sin \pi t}{2\cos 2\pi t}$$

$$\cos \beta = \frac{W_y}{W} = \frac{\sqrt{\sin^2 \pi t + 4\cos^2 2\pi t}}{2\cos 2\pi t}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2\cos 2\pi t} \sqrt{\sin^2 \pi t + 4\cos^2 2\pi t}$$

где α и β соответственно, углы между направлением вектора полного ускорения W и положительными направлениями осей Ox и Oy .

Касательное (тангенциальное) ускорение найдем, дифференцируя по времени уравнение скорости $W_c = dv/dt$, но учитывая, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dV_x}{dt} + \frac{dV_y}{dt} \quad \text{или} \quad V = V_x W_x + V_y W_y,$$

получаем

$$W_c = V_x W_x + V_y W_y =$$

$$= -2\pi \cos \pi t + 2\pi^2 \sin \pi t + 2\pi \sin 2\pi t + 4\pi^2 \cos 2\pi t$$

$$= 8\pi^3 \cos 2\pi t \sin 2\pi t - 2\pi^3 \sin 2\pi t$$

$$= 2\pi^3 \cos \pi t + 4\sin^2 \pi t$$

$$1 + 4\sin^2 \pi t$$

Нормальное ускорение определяется из равенства

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_c^2} = \frac{4\pi^2 \cos^2 \pi t}{1 + 4\sin^2 \pi t}$$

При $t = 1 \text{ с}$

$$W_x = 0; W_y = -4\pi^2; W = 4\pi^2; W_n = 4\pi^2;$$

$$\alpha = -\pi/2; \beta = \pi.$$

5. Найти радиус кривизны траектории в функции времени:

$$p = V^2/W_n = (1 + 4\sin^2 \pi t)^{3/2}$$

6. Проверим правильность вычисления радиуса кривизны траектории по формуле

$$p = \frac{V^3}{y''}$$

Вычислим производные

$$y' = dy/dx = -x; y'' = d^2y/dx^2 = -1.$$

Тогда

$$p = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}} = (1 + 4\sin^2 \pi t)^{3/2}$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с } p = 1 \text{ см.}$$

На траектории (рис. В.6) показывают положение точки М при $t = 1 \text{ с}$ и направления векторов V ; W_n ; W .

Варианты расчетного задания В.

Точка М движется в плоскости Oxy (рис. В.0 - В.9). Траектории точки на рисунках показана условно. Закон движения точки задан уравнениями $X = f_1(t)$; $Y = f_2(t)$, где X и Y выражены в см, t - в с.

Найти уравнение траектории точки, определить скорости и ускорения точки, а также ее касательные и нормальные ускорения, радиус кривизны в соответствующих точках траектории, для момента времени $t = 1 \text{ с}$.

Зависимость $X = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $Y = f_2(t)$ дана в табл. 12 (для рис. В.0 - В.2 - в столбце 2; для рис. В.3 - В.6 - в столбце 3; для рис. В.7 - В.9 - в столбце 4).

Указания.

Задавание В относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах, а также формул для определения тангенциального и нормального ускорения точки.

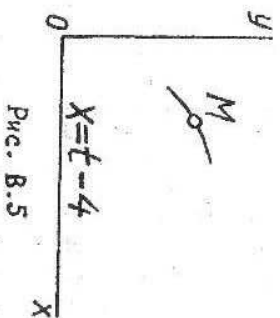
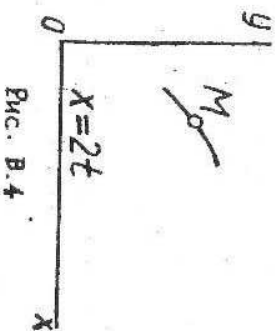
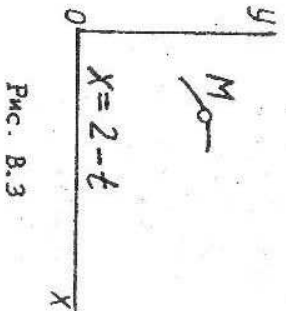
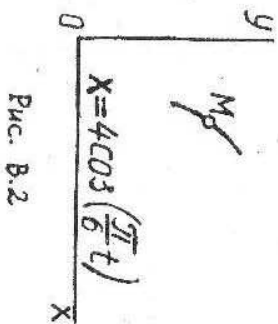
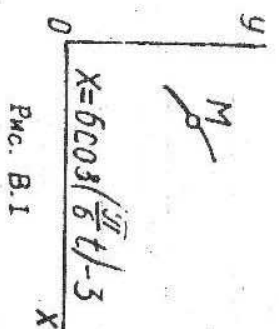
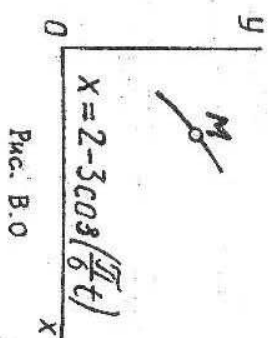
В данном задании все кинематические характеристики движения точки определяются для моментов времени $t = 0 \text{ с}$ и $t = 1 \text{ с}$.

При решении некоторых вариантов следует учесть известные тригонометрические зависимости:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Таблица 12

N задачи	$Y = f_2(t)$	Рис. Б.3,4,5,6	Рис. Б.7,8,9
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$
1	$-4 - 6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14 - 16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4$	$2t^2$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	$2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$8 - 12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2 - 6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$(t+1)^3$	$6 - 8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 5$	$2 - t^3$	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$
9	$3 - 8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$



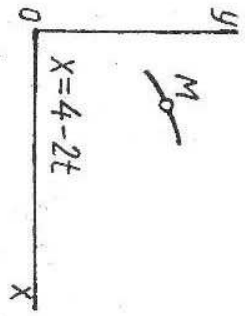


Рис. B.6

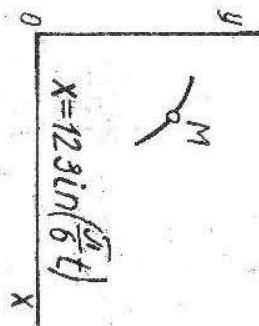


Рис. B.7

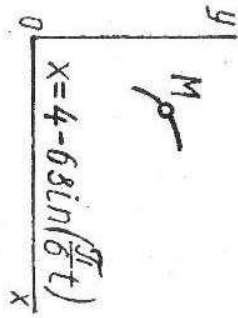


Рис. B.8

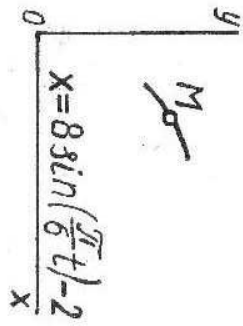
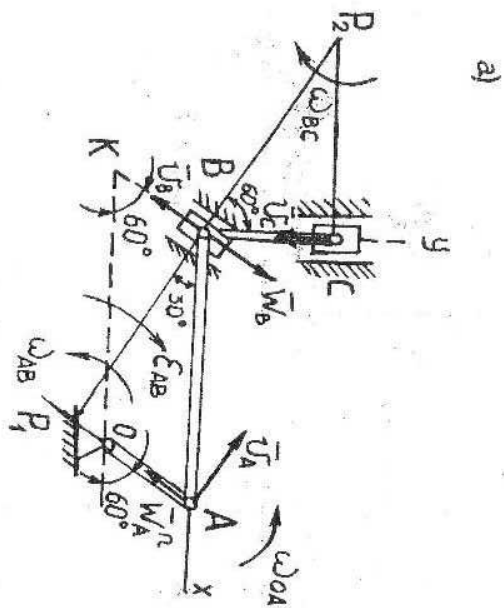


Рис. B.9



6)

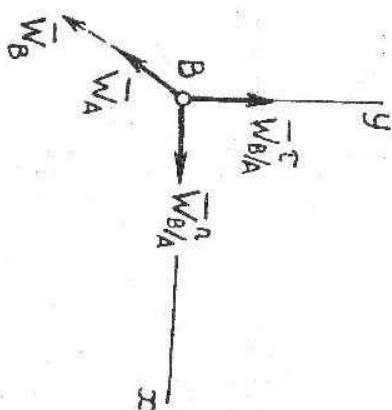


Рис. Г(a,б)

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ Г.

Кинематика твердого тела

Пример Г. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$ и приводит в движение шатуны AB , точка B которого с ползунком B совершает прямолинейное движение в направляющих, наклоненных к горизонту под углом 60° градусов. Точка B приводит в движение стержень BC , точка C которого с ползунком C движется по вертикали. Определить: скорости точек A , B и C ; угловые скорости звеньев AB и BC ; ускорения точек A и B ; угловое ускорение AB , если известно, что $OA = 0,2 \text{ м}$; $AB = 0,5 \text{ м}$; $BC = 0,24 \text{ м}$; угол указан на рис. Г.а.

Решение. 1. Определим скорости точек A , B , C механизма и угловые скорости звеньев AB и BC .

Зная, что точка A принадлежит кривошипу OA , найдем скорость V_A по формуле:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с.}$$

Вектор V_A направлен перпендикулярно радиусу OA в направлении вращения (рис. Г.а).

Точка A принадлежит еще звену AB , которое движется плоско-параллельно. Для определения скорости точки B и угловой скорости звена AB воспользуемся понятием мгновенного центра скоростей. Восстановим перпендикуляры к скоростям точек A и B , на их пересечении лежит мгновенный центр скоростей звена AB (P_1). Причем скорость точки B может быть направлена только вдоль прямой KB , т.к. ползун B движется в направляющих. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_B}{BP_1} = \omega_{AB}.$$

$$AP_1 \quad BP_1$$

Из $AP_1 B$ найдем $AP_1 = AB \sin 30^\circ = 0,25 \text{ м}$;

$$BP_1 = AB \cos 30^\circ = 0,43 \text{ м.}$$

Далее получаем

$$BP_1 = 0,43$$

$$V_B = V_A \frac{AP_1}{BP_1} = 0,4 \frac{0,25}{0,43} = 0,69 \text{ м/с};$$

$$AP_1 = 0,25$$

$$V_A = 0,4$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{0,4}{0,25} = 1,6 \text{ с}^{-1}.$$

$$AP_1 = 0,25$$

Понимая, что скорости точек звена механизма направлены так, как будто они вращаются вокруг своих мгновенных центров скоростей,

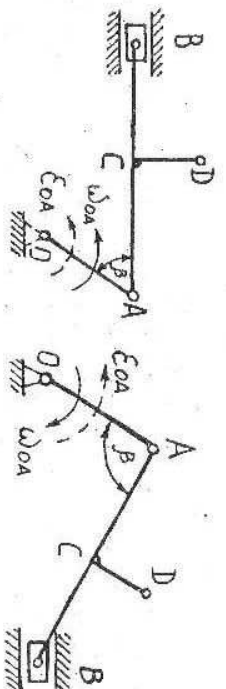


Рис. Г.0

Рис. Г.1

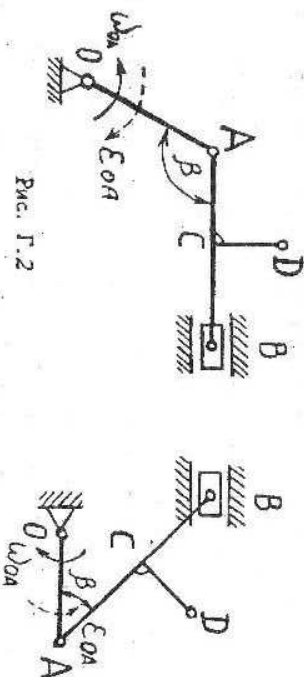


Рис. Г.2

Рис. Г.3

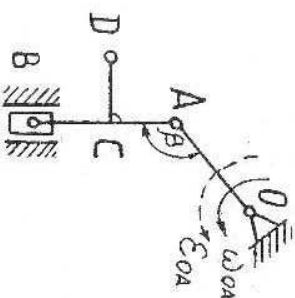


Рис. Г.4

Рис. Г.0 - Г.4

построим угловую скорость звена АВ направлена против хода часовой стрелки. Возьмем показываем направление вектора V_B .

Далее рассмотрим движение звена ВС. Оно также движется плоскопараллельно. Скорость точки С направлена вдоль линии СВ к точке В (покажем С движется в направлении). Скорость точки С в настоящий момент времени не может быть направлена в противоположную сторону, т.к. звено ВС - абсолютно твердое тело (расстояние между двумя точками которого всегда остается постоянным).

Используя теорему о проекциях скоростей двух точек (В и С) звена на линию ВС, найдем

$$V_C = V_{B \cos 30^\circ} = 0,69 \cdot 0,87 = 0,6 \text{ м/с.}$$

Угловую скорость ω_{BC} найдем при помощи мгновенного центра скоростей P_2 . Построение его аналогично построению P_1 . Возвращаемся перпендикуляры на точек С и В. Их $+CP_2B$ найдем:

$$BP_2 = 0,48 \text{ м, } CP_2 = 0,42 \text{ м.}$$

Тогда $V_B = 0,69$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = \frac{0,69}{0,48} = 1,44 \text{ с}^{-1}.$$

$$BP_1 = 0,48$$

Угловая скорость звена ВС направлена по ходу часовой стрелки (см. рис. 1, а).

2. Переходим к рассмотрению ускорений, рассматривая движение каждого звена механизма.

Звено ОА. Вследствие того, что кривошип ОА вращается вокруг оси О, ускорение точки А определяется как геометрическая сумма тангенциального и нормального ускорений:

$$\omega_A = \omega_A + \omega_A.$$

Величина нормального ускорения точки А находится по формуле

$$\omega_A = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор ω_A направлен по радиусу ОА от точки А к центру вращения О (см. рис. 1, а).

Тангенциальное ускорение точки А

$$d\omega_{OA} \cdot OA$$

$$\omega_A = \frac{d\omega_{OA}}{dt} \cdot OA = 0, \text{ т.к. } \omega_{OA} = \text{const.}$$

dt

Тогда полное ускорение точки А равно нормальному ускорению и вектор ω_A направлен от А к О $\omega_A = \omega_A$.

Звено АВ. Принимая точку А за полюс, определим ускорение точки В как геометрическую сумму ω_A и ускорения точки В во вращении вокруг

полюса - нормального и тангенциального:

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{B/A} + \omega_{B/A},$$

$$\text{где } \omega_{B/A} = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 1,6^2 \cdot 0,5 = 1,28 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения направлен вдоль звена АВ от точки В к точке А (рис. 1, б). $\omega_{B/A}$ неизвестно, т.к. угловое ускорение звена АВ неизвестно. Однако этот вектор должен быть направлен по линии, перпендикулярной звену АВ. Указать образ в какую сторону вдоль этого перпендикуляра направлен вектор $\omega_{B/A}$ нельзя. Предположим, что вверх.

Вектор полного ускорения точки В направлен вдоль линии ВК (т.к. полюс может двигаться поступательно вдоль этой линии), указать опять в какую сторону точно нельзя. Предположим, что в одном направлении со скоростью (на рис. 1, б предполагаемое направление вектора ω_B показано пунктирной линией).

Итак, в исходном векторном уравнении для ω_B неизвестны по модулю два ускорения ω_B и $\omega_{B/A}$, направления же этих векторов заданы. Строим теперь это уравнение на два взаимно перпендикулярных направления и найдем неизвестные величины.

Заметим, что оси для проецирования надо выбирать так, чтобы получилось уравнение с одним неизвестным.

Направим ось X вдоль ВА, а Y перпендикулярно ВА (рис. 1, б).

Проецируя уравнение для ω_B на ось X , найдем

$$-\omega_B \cos 60^\circ = -\omega_A \cos 60^\circ + \omega_{B/A} + 0.$$

Откуда $\omega_{B/A}$

$$\omega_B = \omega_A - \frac{\omega_{B/A}}{\cos 60^\circ} = 0,8 - 1,28 \cdot 2 = -1,76 \text{ м/с}^2.$$

$$\cos 60^\circ$$

Знак (-) указывает на то, что направление ускорения точки В на рис. 1, б выбрано неверно, на самом деле вектор ω_B направлен в сторону, противоположную V_B (см. рис. 1, а).

Проецируя уравнение для ω_B на ось Y , получим:

$$-\omega_B \cos 30^\circ = -\omega_A \cos 30^\circ + 0 + \omega_{B/A};$$

$$\omega_{B/A} = (\omega_A - \omega_B) \cos 30^\circ = (0,8 - (-1,76)) \cdot 0,87 = 2,22 \text{ м/с}^2.$$

Знак (+) означает, что вектор $\omega_{B/A}$ направлен правильно (от точки В к точке С).

$$\omega_{B/A} = 2,22$$

$$\omega_{AB} = \frac{\omega_{B/A}}{AB} = \frac{2,22}{0,5} = 4,44 \text{ с}^{-1}.$$

$$AB = 0,5$$

Анализируя полученные результаты, заметим, что точка В движется замедленно, т.к. ее скорость и ускорение имеют противоположные направления. Звено АВ вращается замедленно, т.к. угловое ускорение ϵ_{AB}

и угловая скорость ω АВ направлены в противоположные стороны (направление ϵ АВ определяется по вектору ω В/А).

Варианты расчетного задания Г.

Плоский механизм состоит из стержней ОА и АВ, ползуна В и жестко прикрепленного к стержню АВ стержня CD (угол DCA = 90°). В точках О, А, В шарниры (рис. Г.0 - Г.9). Положение механизма определяется углом β , который вместе с длинами стержней и другими величинами заданы в табл. 13. Определить для заданного положения скорости и угловое ускорение звена АВ.

Указания. Задание Г - на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При его решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей.

Таблица 13.

Номер	Угловой	ОА, м	АВ, м	АС, м	CD, м	ω ОА, с ⁻¹	ϵ ОА, с ⁻²	β , град.
0	1	3,0	4,0	3,0	1,0	2	2	60
1	1	2,0	6,0	4,0	0,5	1	1	45
2	1	1,0	3,0	1,5	1,0	2	2	105
3	1	1,5	4,0	2,0	0,5	3	4	75
4	1	2,5	3,0	0,5	1,0	2	3	150
5	1	1,0	4,0	1,5	1,2	3	2	90
6	1	2,0	3,0	1,0	1,5	2	5	135
7	1	1,5	3,0	1,5	1,0	2	4	165
8	1	2,5	3,5	1,0	1,0	2	5	135
9	1	2,0	4,0	2,0	1,5	1	2	120

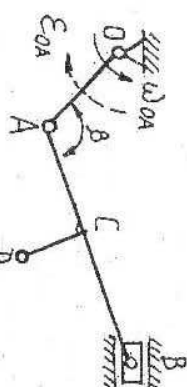


Рис. Г.5

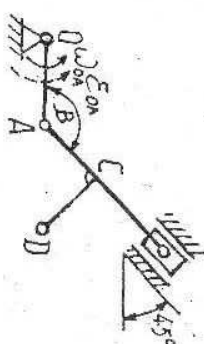


Рис. Г.6

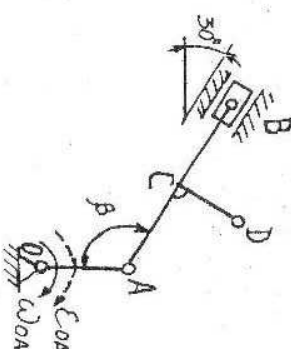


Рис. Г.7

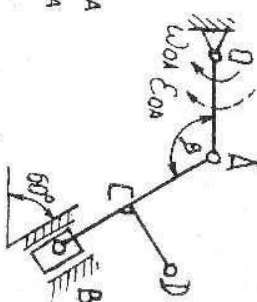


Рис. Г.8

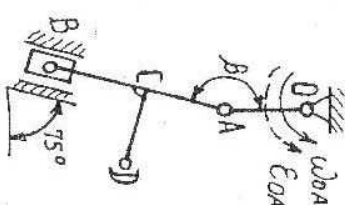


Рис. Г.9

Рис. Г.5 - Г.9

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ Д

Динамика материальной точки

Пример. Тело о силой тяжести $P = 5 \text{ Н}$ (рис. Д, а) перемещается из положения M_0 через положения M_1 , M_2 , M_3 , M_4 в положение M_5 и далее совершает свободный полет в воздухе до положения M_6 . На участке M_0M_1 $R = 1 \text{ м}$ тело движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием упругой силы пружины с коэффициентом жесткости $C = 12 \text{ кН/м}$. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна AM_1 . Из положения M_1 в положение M_4 тело движется по гладкому куполу радиуса $R = 1 \text{ м}$. Участок движения тела M_4M_5 наклонен под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Этот участок представляет собой шероховатую поверхность с коэффициентом трения $f = 0,15$. Определить скорость движения тела и его давление на поверхность в положении M_3 , определить скорость угла $\alpha = 30^\circ$, а также время движения t и t_1 тела на участках M_4M_5 и M_5M_6 и максимальное отклонение тела по горизонтали x_1 , если высота $H = 2 \text{ м}$. Размерами тела пренебречь.

Решение задачи будем производить в следующем порядке.

1. Всперем расчетную схему и покажем все действующие на тело активные силы и реакции связей в характерных точках его движения (рис. Д, б).

2. Определим давление тела на купол в положении M_3 , для чего воспользуемся принципом Даламбера для материальной точки. Спроецируем все действующие на тело в этом положении силы (активную P , реакцию опоры N и нормальную силу инерции F_n , направленную в сторону, противоположную нормальному ускорению W_n) на ось π

$$P \cos \alpha - F_n - N = 0.$$

$$P \sin^2 \alpha$$

$$P \sin^2 \alpha$$

$$\text{Но } F_n = \dots, \text{ тогда } P \cos \alpha - \dots - N = 0.$$

$$gR$$

$$gR$$

Чтобы определить N , необходимо знать скорость движения тела в положении M_3 . Для нахождения скорости воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии тела (точки):

$$mv_3^2 - mv_0^2 = \dots$$

$$\dots = \sum A_k.$$

$$2 \quad 2$$

На участке движения тела M_0M_1 работу производят упругая сила F_y и сила тяжести на перемещение h_1 . Поскольку в положении M_0 тело находится в покое, $v_0 = 0$. Тогда

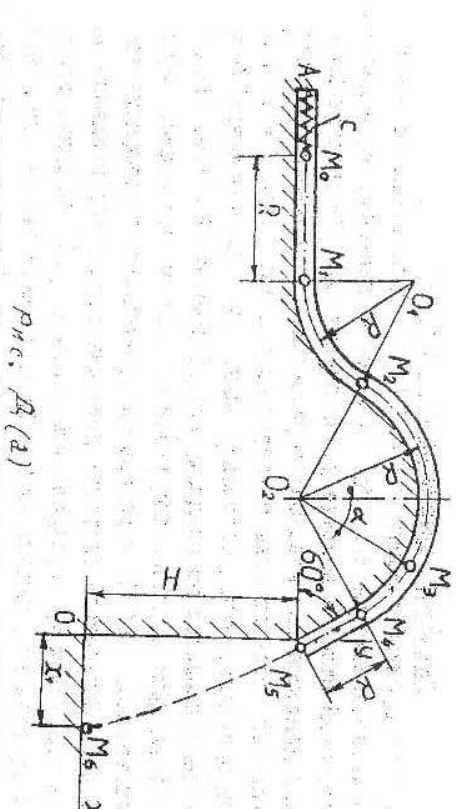


Рис. Д (а)

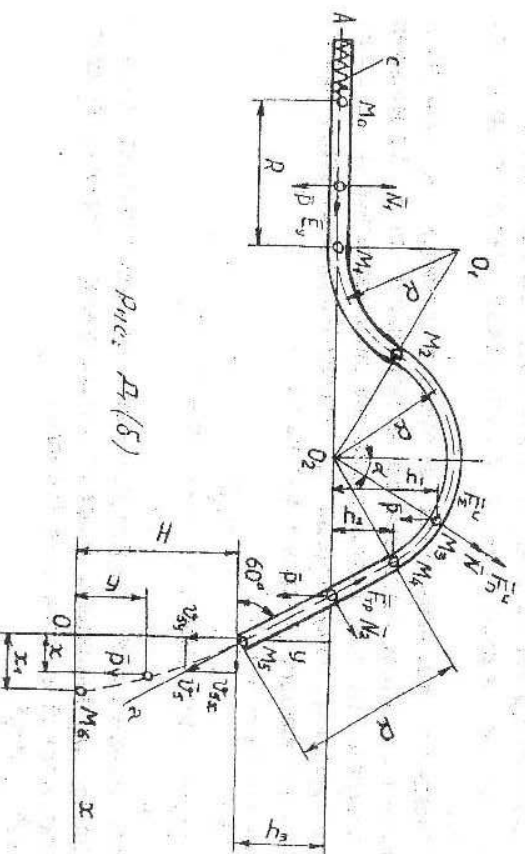


Рис. Д (б)

$$V_a^2 = \frac{P}{2g} [(v_{1x})^2 - (v_{1y})^2] - P h_1;$$

$$v_{1x} = R = 1 \text{ м}; v_{1y} = 0; h_1 = R \cos 30^\circ = 1 \cos 30^\circ = 0,867 \text{ м}.$$

Скорость тела в положении М₃

$$v_3 = \sqrt{\frac{C [(v_{1x})^2 - (v_{1y})^2] - P h_1}{2g}} = \sqrt{\frac{C (6,1 - 5,0,867) \cdot 2 \cdot 9,81}{2g}} = 2,56 \text{ м/с};$$

$$N = P \cos \alpha = 5 \cos 30^\circ = 4,33 \text{ Н}.$$

Теперь определим скорость тела в положении М₄, для чего также воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки

$$v_4 = \sqrt{\frac{C [(v_{1x})^2 - (v_{1y})^2] - P h_2}{2g}} = \sqrt{\frac{C (6,1 - 5,0,81) \cdot 2 \cdot 9,81}{2g}} = 3,7 \text{ м/с}.$$

Скорость тела в положении М₅ (по аналогии, с учетом работы силы трения на перемещении М₄М₅)

$$v_5^2 = \frac{C}{2g} [(v_{1x})^2 - (v_{1y})^2] - P h_3 - P f \cos 60^\circ R;$$

$$h_3 = R \sin 60^\circ = 0,867 \text{ м};$$

$$v_5 = \sqrt{\frac{C [(v_{1x})^2 - (v_{1y})^2] - P h_3 - P f \cos 60^\circ}{2g}} = \sqrt{\frac{C (6,1 + 0,366 \cdot 5 - 5,0,15 \cdot 0,5) \cdot 2 \cdot 9,81}{2g}} = 5,4 \text{ м/с}.$$

Определим время движения тела на участке М₄М₅, воспользовавшись теоремой об изменении количества движения точки в проекции на ось

$$m(v_5 - v_4) = (P \cos 30^\circ - P f \sin 60^\circ) t;$$

$$t = \frac{m(v_5 - v_4)}{P \cos 30^\circ - P f \sin 60^\circ} = \frac{5(5,4 - 3,7)}{9,81(0,867 - 0,15 \cdot 0,5)} = 0,22 \text{ с}.$$

Переходим к определению величины x_1 . Для этого составим дифференциальное уравнение движения тела на участке М₅М₆ в проекциях на оси x и y , показанные на чертеже.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \frac{d^2 y}{dt^2} = -P.$$

Интегрируем указанные уравнения

$$\int dx = 0; \int dy = \int (-g dt); \quad v_x = -gt + C_2;$$

$$v_x = 0; \quad v_y = -gt; \quad \int dx = \int (C_1 dt); \quad x = C_1 t + C_3;$$

$$\int dy = \int (-gt dt) + \int (C_2 dt); \quad y = C_2 t + C_4 \frac{gt^2}{2};$$

При $t = 0 \quad x = 0, v_x = v_{500} \cos 80^\circ;$
 $y = h, v_y = -v_{500} \sin 80^\circ;$
 Или при $t = 0 \quad x = 0, v_x = 2,7;$
 $y = 2, v_y = -4,67.$

Воспользовавшись определенными выше начальными условиями, найдем постоянные интегрирования

$$C_1 = 2,7; C_2 = -4,67; C_3 = 0; C_4 = 2.$$

Тогда закон движения тела на участке М₅М₆, заданный координатным способом, запишется в виде

$$x = 2,7t; \quad y = 2 - 4,67t - \frac{gt^2}{2};$$

Исключая t , определим траекторию движения тела

$$t = \frac{x}{2,7}; \quad y = 2 - \frac{4,67}{2,7}x - \frac{gt^2}{2};$$

$$y = 2 - 1,74x - 0,67x^2;$$

$$x = x_1 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad 0 = 2 - 1,74x_1 - 0,67x_1^2$$

или

$$x_1^2 + 2,6x_1 - 3 = 0; \quad x_1 = -1,3 + 1,8^2 + 3 = 0,87 \text{ м}.$$

Наконец, определим время движения тела на участке М₅М₆

$$t_1 = \frac{x_1}{v_{500} \cos 80^\circ} = \frac{0,87}{2,7} = 0,32 \text{ с}.$$

Задача решена.

Варианты расчетного задания Д.

Задачи Д.0; Д.1; Д.2; Д.3; Д.4.

Шарик с силой тяжести P (рис. Д.0, Д.1, Д.2, Д.3, Д.4) движется из положения M_0 через положения M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 в положение M_6 . На пружинном участке M_0M_1 , равном α , он перемещается под действием силы тяжести и упругой силы пружины с коэффициентом жесткости C . Длина пружины в ненагруженном состоянии равна AM_1 . На протяжении M_4 по положению M_4 шарик движется по прямолинейным и дугообразным участкам. Размеры этих участков и их радиусы указаны на соответствующих рисунках.

В точке M_4 шарик покидает опору и поверхность и перемещается далее как свободная материальная точка, находясь в воздухе в течение времени t_1 . Считая шарик материальной точкой, определить его скорость и давление на опору в точке M_2 или M_3 , определить угол α , а также время t_1 , высоту H и расстояние x_1 , на которое шарик улетит по горизонтали. (В задачах Д.0, Д.2 и Д.4 H не определяется). Исходные данные представлены в табл. 14. Для задач Д.0 в угле β необходимости нет.

Задачи Д.5, Д.6, Д.7, Д.8, Д.9

Шарику с силой тяжести P (рис Д.5, Д.6, Д.7, Д.8, Д.9) в положении M_0 сообщена начальная скорость V_0 . Далее он перемещается по трубе через положения M_1, M_2, M_3, M_4 в положение M_5 .

На участках M_0M_1 (задачи Д.5 и Д.6) или M_0M_4 (задачи Д.7, Д.8 и Д.9) шарик движется по шероховатой поверхности с коэффициентом трения f . В точке M_4 шарик встречается пружину с коэффициентом жесткости C , длина ненагруженной пружины равна M_4M_5 .

Определить скорость шарика и давление в т. M_2, M_3 , время движения шарика из положения M_3 в положение M , в задаче Д.5 из положения M_0 в положение M_1 и величину сжатия пружины Q . Исходные данные представлены в табл. 15 (В задаче Д.8 угол $\beta = 0$).

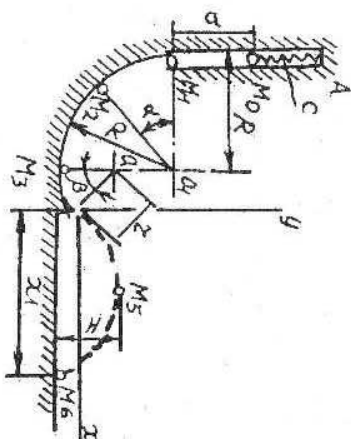


Рис. Д.1

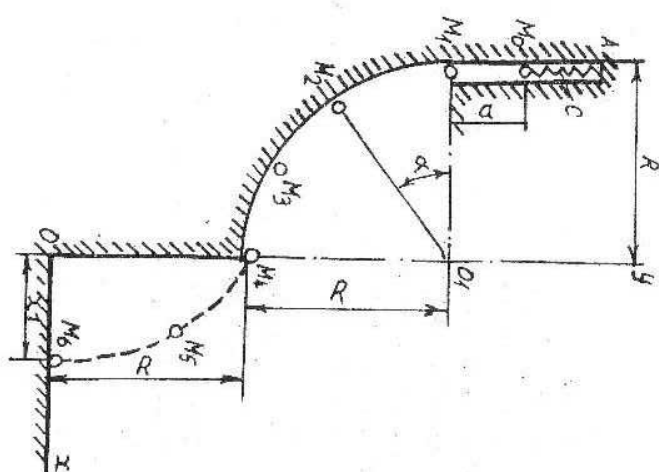


Рис. Д.0

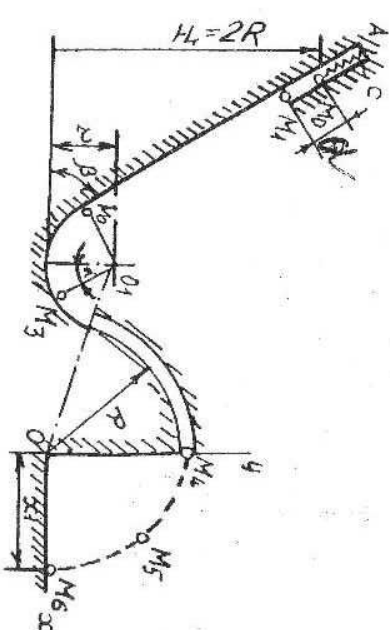
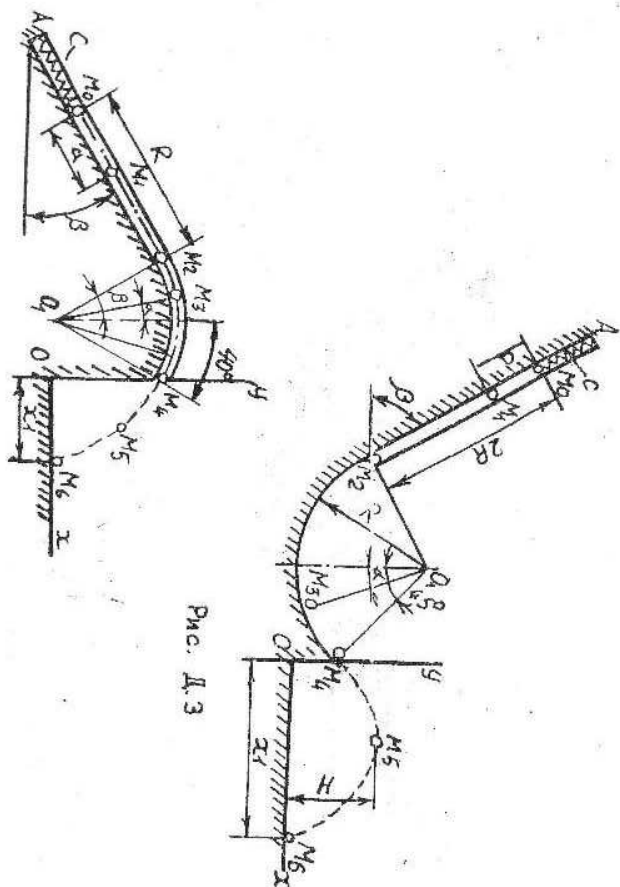
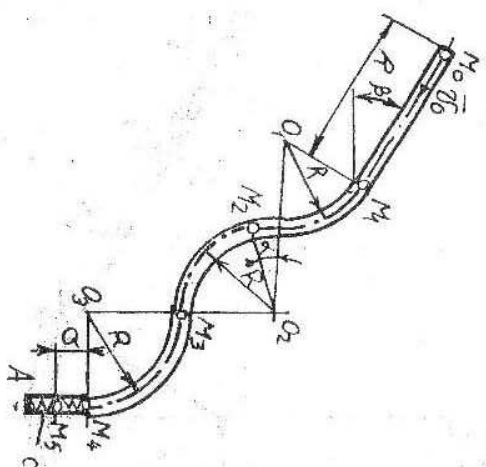


Рис. Д.2

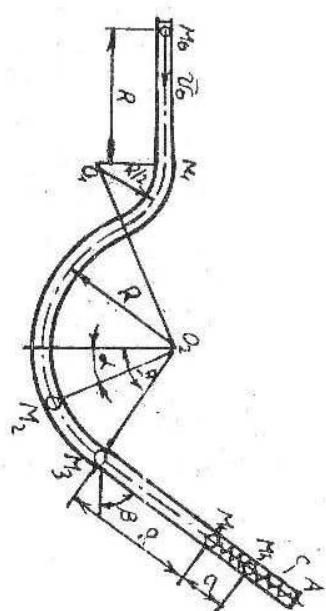


Puc. A.3

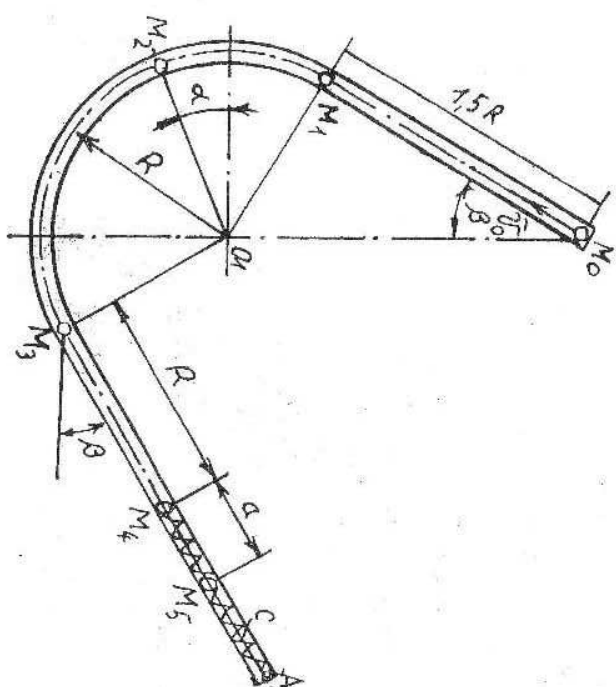
Puc. A.4



Puc. A.5



Puc. A.6



Puc. A.7

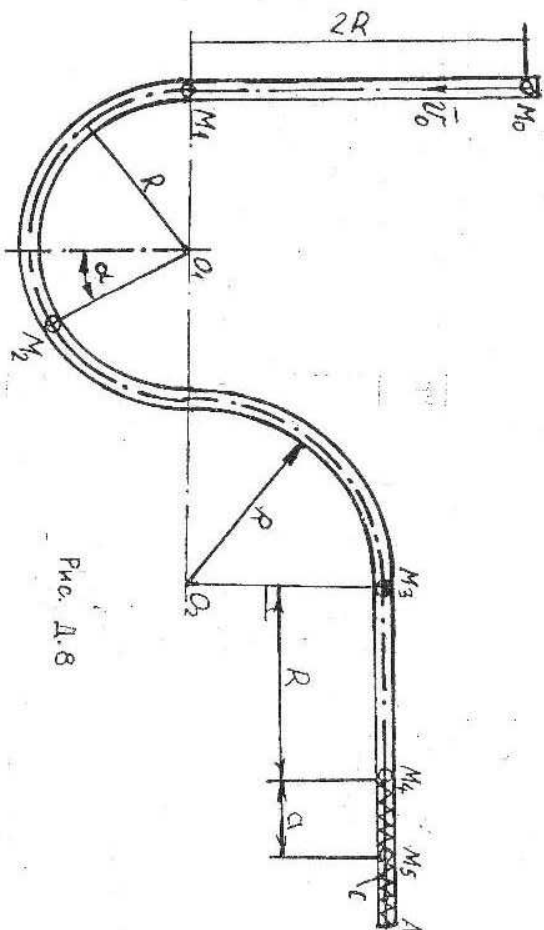


Рис. А.8

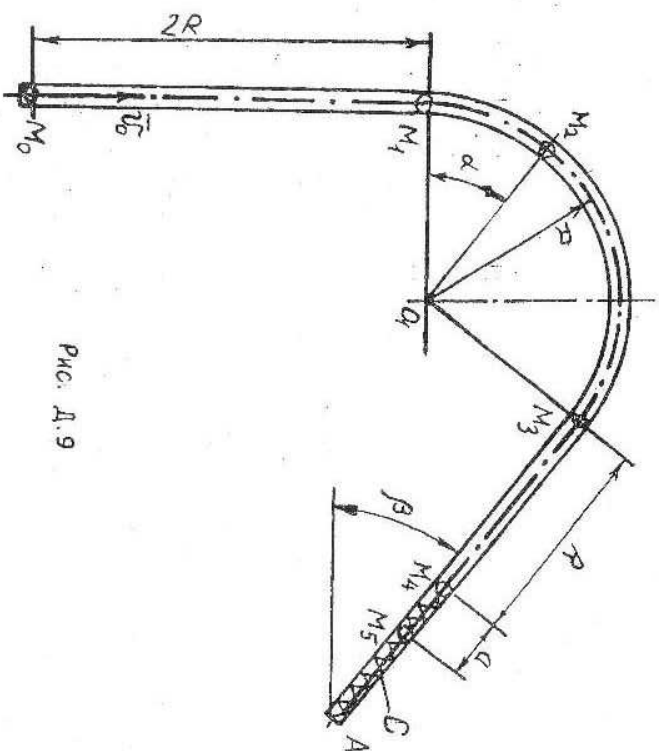


Рис. А.9

К задачам Д.0, Д.1, Д.2, Д.3, Д.4

Таблица 14

№ задачи	F, Н	Q, м	C, Н/м	α, град.	β, град.	R, м	Γ, м
1	1	0,5	100	10	45	1	0,5
2	1,2	0,4	120	20	40	1,5	0,75
3	1,4	0,3	140	30	30	2	1
4	1,6	0,2	160	10	45	1	0,5
5	1,8	0,6	180	20	40	1,5	0,75
6	2	0,5	200	30	35	2	1
7	2,2	0,4	220	10	45	1	0,5
8	2,4	0,3	240	20	40	1,5	0,75
9	2,6	0,2	260	30	35	2	1
0	2,8	0,6	280	10	45	1	0,5

Таблица 15

К задачам Д.5, Д.6, Д.7, Д.8, Д.9

№ задачи	P, Н	f	C, Н/м	α, град.	β, град.	R, м	Γ0, м/с
0	1	0,1	1000	0	45	1,5	15
1	1,2	0,15	1200	10	60	1	10
2	1,4	0,2	1400	20	45	1,5	5
3	1,6	0,25	1600	30	60	2	15
4	1,8	0,1	1800	0	45	1,5	10
5	2	0,15	2000	10	60	1	5
6	2,2	0,2	2200	20	45	1,5	15
7	2,4	0,25	2400	30	60	2	10
8	2,6	0,1	2600	0	45	1,5	5
9	2,8	0,15	2800	10	60	1	15

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ E

Динамика механической системы материальных тел

Пример. На рис. E, а показана механическая система, состоящая из четырех тел массами $M_1 = 10$ кг, $M_2 = 3$ кг, $M_3 = 9$ кг и $M_4 = 4$ кг. Тела соединены нерастяжимой нитью, закрепленной в точках O и O₄. Тело M₄ катится по наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) без скольжения. Тела M₂, M₃ и M₄ представляют собой однородные круглые сплошные диски радиусами $r = 0,1$ м; $R = 0,2$ м. Определить скорость тела M₁, если оно спустится из состояния покоя на величину $h = 1$ м и натяжение всех частей нити.

Решение. Первоначально покажем все действующие на механическую систему внешние силы, которые производят работу (рис. E, б).

Для определения скорости тела M₁ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \Sigma A_k, \quad (1)$$

где T_0 - кинетическая энергия системы в начале смещения;

T - кинетическая энергия системы в конце смещения;

ΣA_k - алгебраическая сумма работ всех действующих на систему внешних сил.

Поскольку в начале перемещения система находилась в покое, $T_0 = 0$.

Система состоит из 4-х тел. Поэтому

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (2)$$

Первое тело совершает поступательное движение. Его кинетическая энергия

$$T_1 = (M_1 V_1^2) / 2, \quad (3)$$

где V_1 - скорость движения тела M₁.

Второе тело совершает плоско-параллельное движение

$$M_2 V_{O2}^2 + J_{O2} \omega_2^2$$

$$T_2 = \dots + \dots, \quad (4)$$

$$\frac{2}{2}$$

где V_{O2} - скорость движения центра масс второго тела;

J_{O2} - момент инерции второго тела относительно оси z, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O₂;

ω_2 - угловая скорость второго тела.

Скорость V_{O2} , очевидно равна скорости V_1

$$M_2 V_1^2$$

$$J_{O2} = \dots; \quad \omega_2 = \dots, \quad (5)$$

$$\frac{2}{2}$$

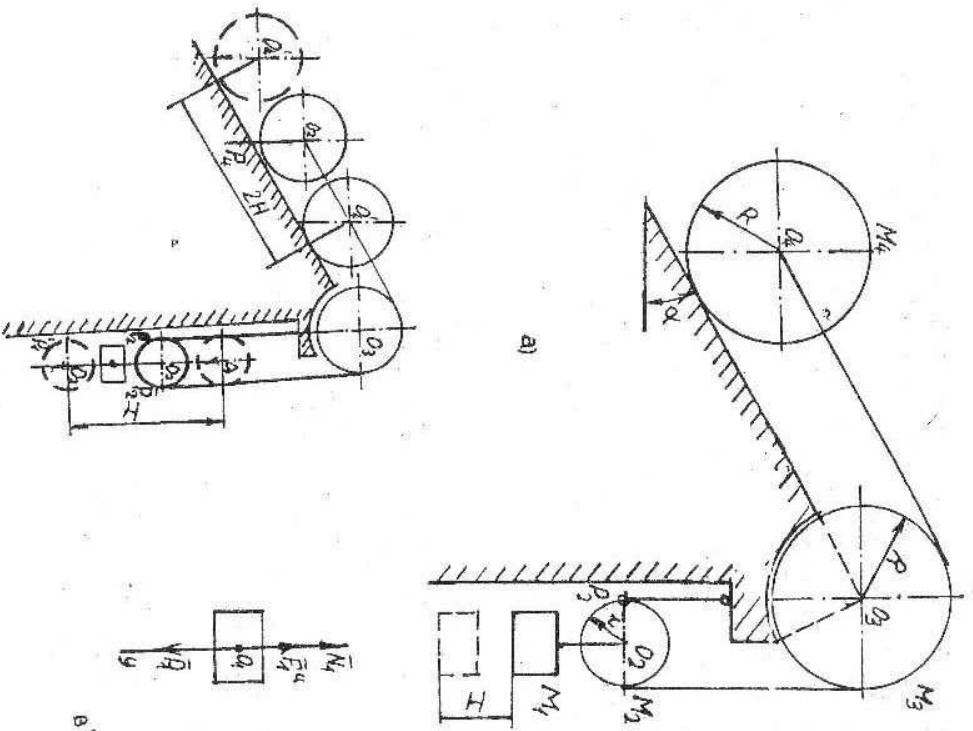
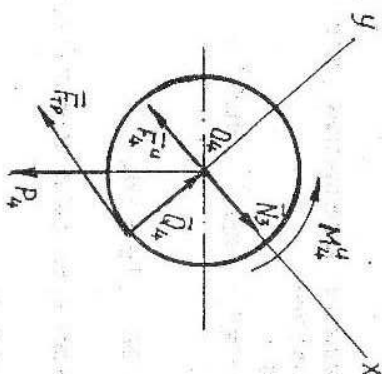
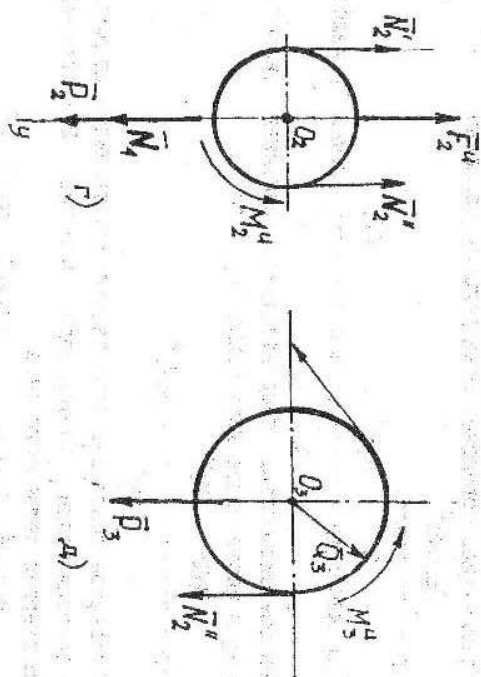


Рис. E (a, б, в)



e)

Рис. E (г, д, е)

Тогда

$$T_2 = \frac{M_2 V_1^2}{2} + \frac{M_2 R^2}{2} \omega^2 = \frac{M_2 V_1^2}{2} + \frac{M_2 R^2}{2} \left(\frac{2V_1}{R} \right)^2 = \frac{M_2 V_1^2}{2} + 2M_2 V_1^2 = \frac{5}{2} M_2 V_1^2 \quad (6)$$

Третье тело совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{J_{O3} \omega^2}{2} = \frac{M_3 R^2}{2} \omega^2 = \frac{M_3 R^2}{2} \left(\frac{2V_1}{R} \right)^2 = 2M_3 V_1^2 \quad (7)$$

Так как $J_{O3} = \frac{M_3 R^2}{2}$, а $\omega = \frac{2V_1}{R}$ (точка P2 является мгновенным центром скоростей, следовательно, линейная скорость на ободе диска M2 в месте сохода нити равна $2V_1$), то

$$T_3 = \frac{M_3 R^2}{2} \cdot \frac{4V_1^2}{R^2} = 2M_3 V_1^2 \quad (8)$$

Четвертое тело совершает плоско-параллельное движение. По аналогии с третьим телом с учетом того, что $V_{O4} = 2V_1$ определим кинетическую энергию четвертого тела

$$T_4 = \frac{M_4 V_{O4}^2}{2} + \frac{J_{O4} \omega^2}{2} = \frac{M_4 (2V_1)^2}{2} + \frac{M_4 R^2}{2} \left(\frac{2V_1}{R} \right)^2 = 3M_4 V_1^2 \quad (9)$$

Подставляя значения кинетических энергий в исходное уравнение для четырех тел, получим

$$T = \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{M_2 V_1^2}{2} + \frac{M_3 V_1^2}{2} + \frac{3M_4 V_1^2}{2} = \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{5M_2 V_1^2}{2} + \frac{2M_3 V_1^2}{2} + \frac{3M_4 V_1^2}{2} \quad (10)$$

Теперь определим сумму работ всех действующих на систему внешних активных сил.

$$\sum A_R = A_1 + A_2 + A_3; \quad (11)$$

$$A_1 = P_1 H; \quad A_2 = P_2 H; \quad A_3 = -P_4 2H \sin \alpha \quad (12)$$

Тогда (с учетом, что $P_1 = M_1 g$; $P_2 = M_2 g$; $P_4 = M_4 g$)

$$\sum A_R = Hg(M_1 + M_2 - 2M_4 \sin \alpha) \quad (13)$$

Подставляя (13) и (10) в (1), получим

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{Hg(M_1 + M_2 - 2M_4 \sin \alpha)}{4} \quad (14)$$

Находим исходную скорость

$$N_2(M_1 + M_2 - 2M_2 \sin \alpha)$$

$$V_1 = 2 \frac{2M_1 + 3M_2 + 4M_3 + 12M_4}{19,81(10 + 2 - 9,0,5)} =$$

$$20 + 9 + 24,48$$

$$= 2 \frac{20 + 9 + 24,48}{19,81(10 + 2 - 9,0,5)} = 1,87 \text{ м/с.}$$

Переходим к определению истинной скорости. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде, первоначально определим ускорение движения тела M_1 .

$$dV_1 = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{d}{dt} (\Sigma A_k). \quad (15)$$

Взяв производную по t от левой и правой части выражения (4), получим

$$2V_1 \frac{dV_1}{dt} = (2M_1 + 3M_2 + 4M_3 + 12M_4) =$$

$$dH$$

$$\frac{dH}{dt} = (M_1 + M_2 - 2M_2 \sin \alpha). \quad (16)$$

$$H_0 = V_1; \quad \frac{dH_0}{dt} = W_1.$$

$$\text{Тогда}$$

$$W_1 = \frac{2(M_1 + M_2 - 2M_2 \sin \alpha)}{29,81} = 1,75 \text{ м/с.}$$

$$2M_1 + 3M_2 + 4M_3 + 12M_4 = 101$$

Зная ускорение тела M_1 , a , следовательно, и всех остальных тел в соответствии с принципом Даламбера, можно найти натяжение всех нитей.

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad P_2 - P_1 - M_1 = 0; \quad M_1 = P_1 - P_1; \quad P_1 = M_1 W_1;$$

$$M_1 = P_1 - M_1 W_1 = 10,8,81 - 10,1,75 = 80,6 \text{ Н.} \quad (17)$$

С использованием расчетной схемы, показанной на рис. Е, а, стрелками натяжение N_2' и N_2''

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad P_2 + N_1 - N_2' - N_2'' - P_2 = 0; \quad (18)$$

$$P_2 = M_2 W_1; \quad P_2 + N_1 - N_2' - N_2'' - M_2 W_1 = 0;$$

$$\Sigma \text{пр}2 (F_k) = 0; \quad F_{2T} + N_2' 2t - N_1 T - P_{2T} + M_2 = 0;$$

$$M_2 = J_{2O2} a; \quad a, 2 = \dots; \quad J_{2O2} = \dots;$$

$$M_2 W_1$$

$$M_2 W_1 T + N_2' 2t - N_1 T - F_{2T} + \dots = 0;$$

$$- 2P_2 + 2M_1 W_1 + 4N_2'' - 2N_1 + M_2 W_1 = 0;$$

$$2N_1 - 2M_2 W_1 - M_2 W_1 + 2P_2 = 168 - 9,1,75 + 60$$

$$N_2'' = \dots = 51,4 \text{ Н;}$$

$$N_2' = P_1 + N_1 - N_2'' - P_2 = 39,81 + 80,6 - 51 - 31,75 = 52,8 \text{ Н.}$$

На основе расчетной схемы, представленной на рис. Е, д, находим натяжение нити N_3

$$\Sigma \text{по} (F_k) = 0; \quad - N_2' R + M_3 + N R = 0; \quad (19)$$

$$M_3 = J_{2O3} a; \quad J_{2O3} = \dots; \quad a, 3 = \dots;$$

$$\text{Тогда } N_3 = N_2'' - M_3 W_1 = 51 - 9,1,75 = 40,6 \text{ Н.}$$

Используя рис. Е, е, осуществим проверку найденного значения

на:

$$\Sigma \text{пр}4 (F_k) = 0; \quad F_{4R} - N_3 R + M_4 + P R \sin \alpha = 0; \quad (20)$$

$$F_4 = M_4 W_1; \quad M_4 = J_4 a; \quad a, 4 = \dots; \quad J_4 = \dots;$$

$$M_4 W_1 - N_3 + M_4 W_1 + M_4 \sin \alpha = 0;$$

$$N_3 = M_4(2,5 + 1,75 + 4,9) = 40,8 \text{ Н.}$$

Различие составляет 0,3 Н, что может быть отнесено к вычислительным погрешностям.

Обращаем внимание, что в данной задаче числовые значения R и r практически не были использованы. В расчетных заданиях эти значения, как правило, необходимы.

Варианты расчетного задания

Задачи Е.0 - Е.9. На рисунках Е.0 - Е.9 показана механическая система, состоящая из четырех тел, массами M_1 , M_2 , M_3 и M_4 , соединенных между собой нерастяжимыми нитями. Некоторые нити натянуты на барабанах, соответственно радиусов r или R , другие - отходят барабана. За исключением тела M_1 на рис. Е.4, представляющего собой колесо с массой, распределенной по его ободу, все остальные круглые тела счи-

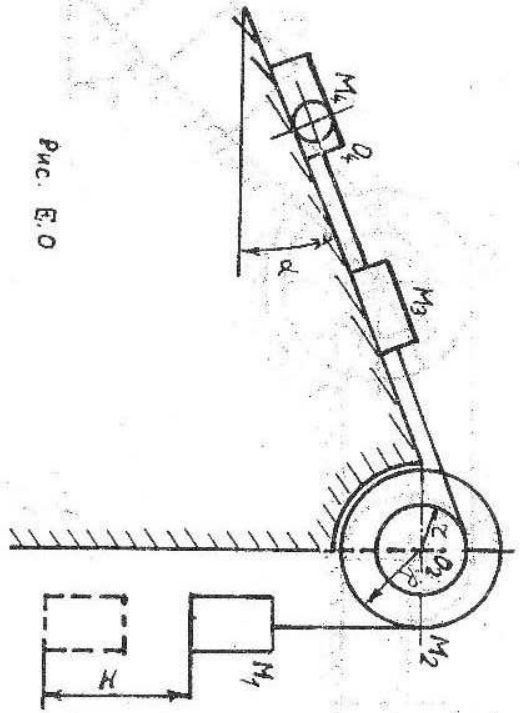


Рис. E.0

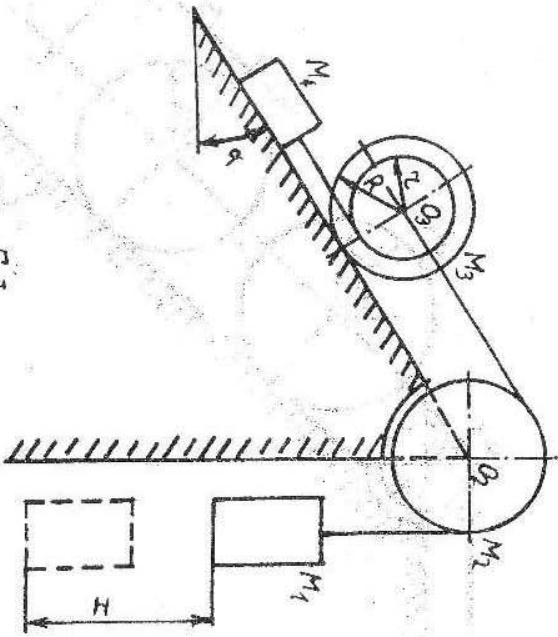


Рис. E.1

Рис. E.0 - E.1

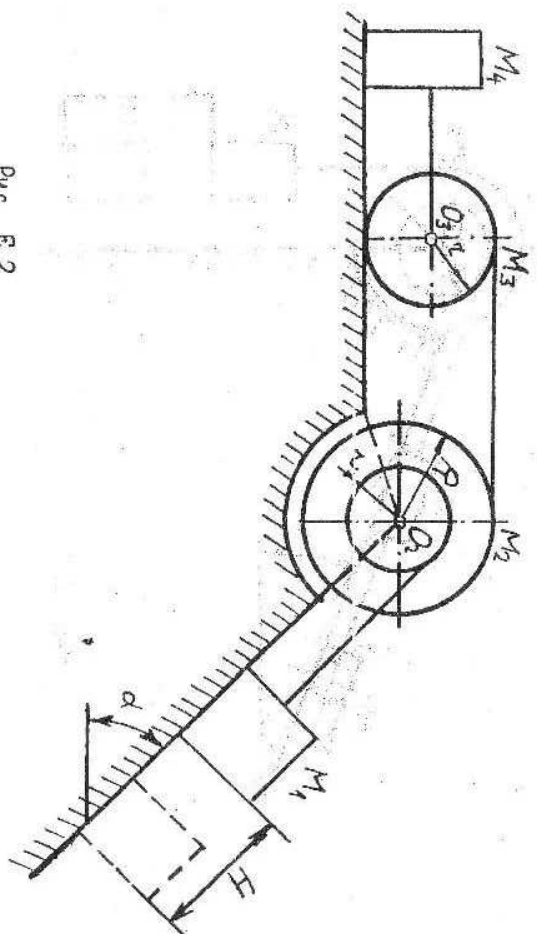


Рис. E.2

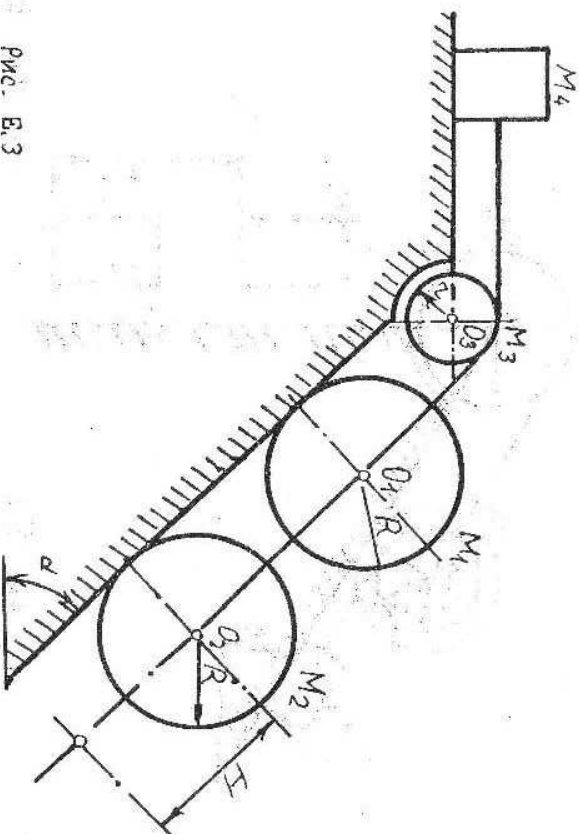


Рис. E.3

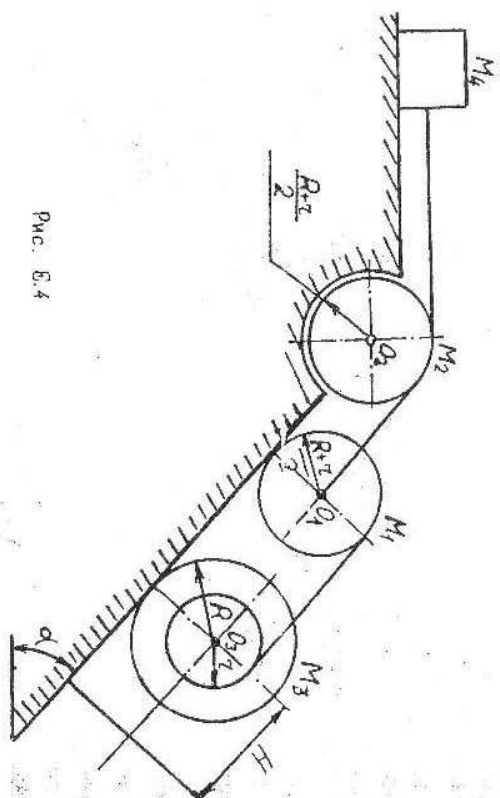


Рис. E.4

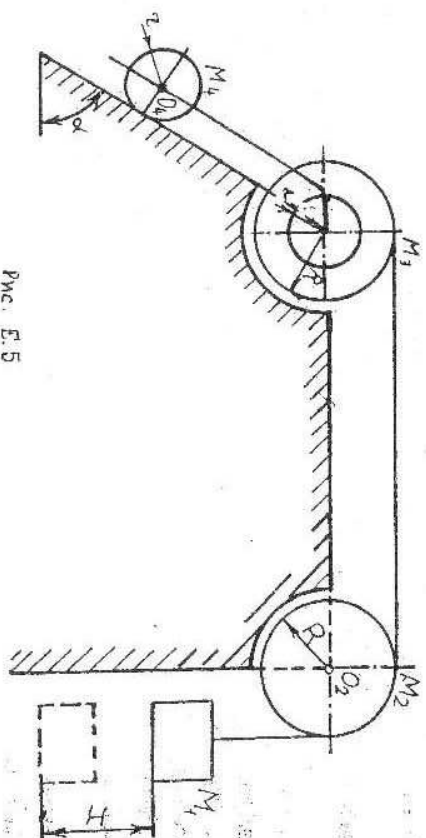


Рис. E.5

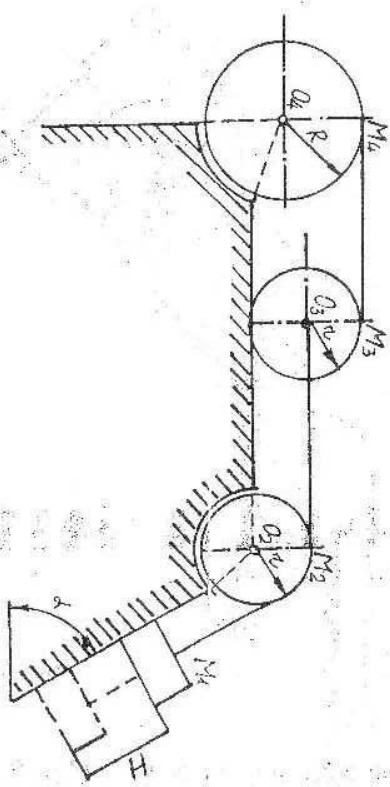


Рис. E.6

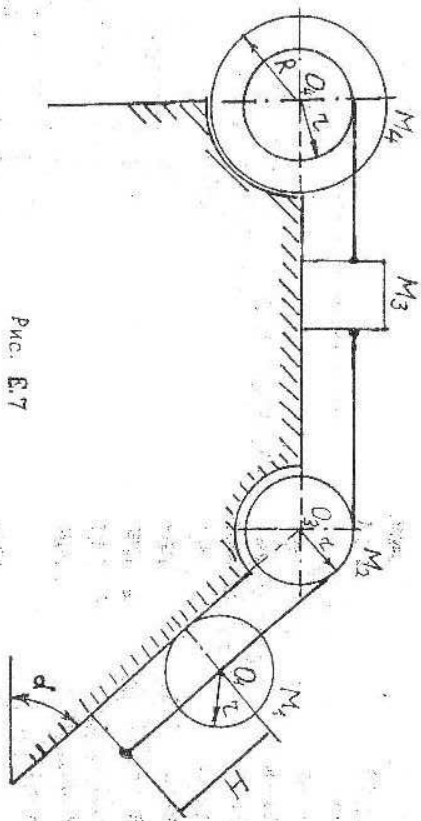


Рис. E.7

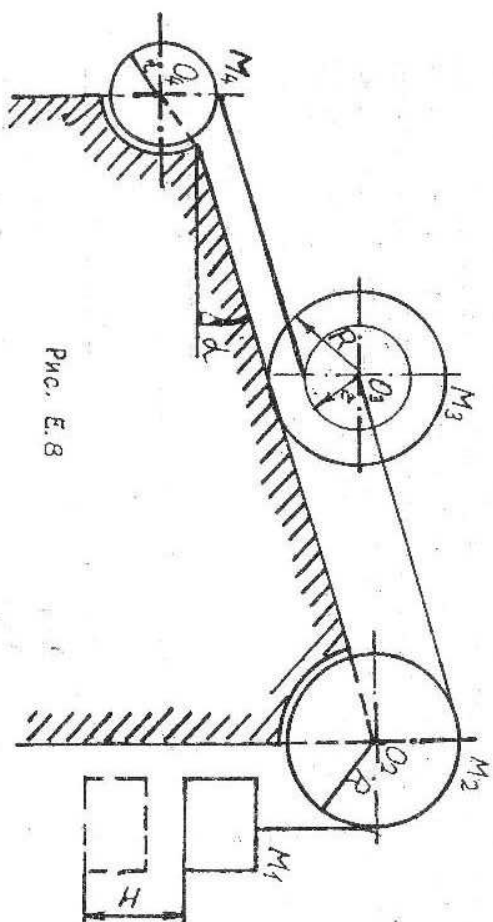


Рис. E.8

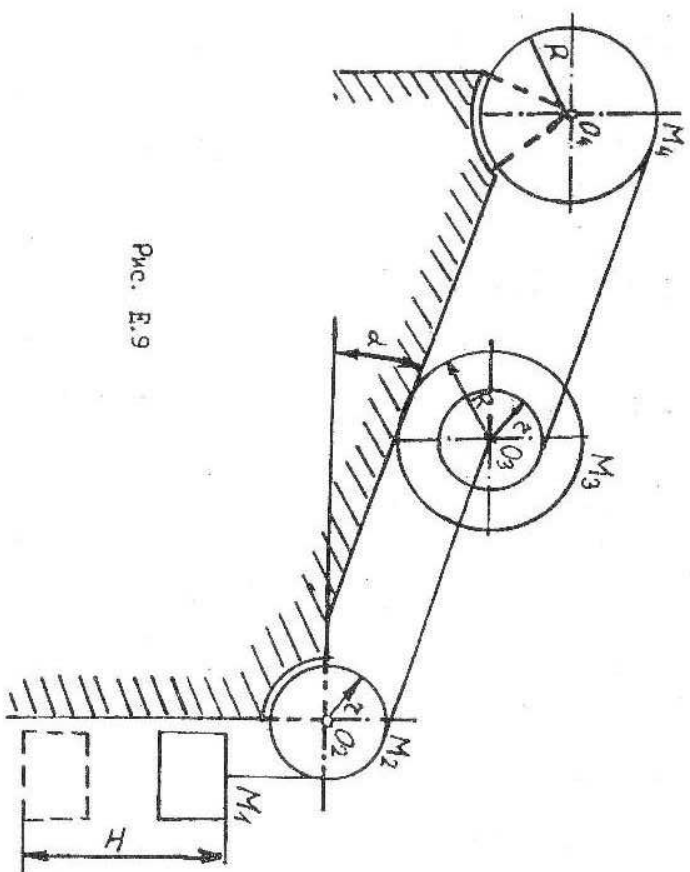


Рис. E.9

табл. 16. Исходные данные для всех десяти вариантов представлены в табл. 16.

Таблица 16

№ п/п	M ₁ , кг	M ₂ , кг	M ₃ , кг	M ₄ , кг	α, град.	γ, м	R, м	H, м
0	20	10	10	5	30	0,05	0,10	0,10
1	30	15	10	6	45	0,05	0,15	0,15
2	40	20	10	7	30	0,10	0,15	0,20
3	50	25	10	8	45	0,10	0,20	0,25
4	60	30	10	9	30	0,15	0,25	0,30
5	20	5	8	10	45	0,05	0,10	0,35
6	30	10	8	11	30	0,05	0,15	0,40
7	40	15	8	12	45	0,10	0,15	0,45
8	50	20	8	13	30	0,10	0,20	0,50
9	60	25	8	14	45	0,15	0,25	0,55

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Общие методические указания	1
Рабочая программа	2
Контрольные задания	6
Общие положения	6
Расчетное задание А.	
Расчет усилий в стержнях фермы	8
Расчетное задание В.	
Равновесие системы тел с учетом трения	15
Расчетное задание В.	
Кинематическое исследование движения точки по задан- ным уравнениям движения в декартовых координатах	23
Расчетное задание Г.	
Кинематика твердого тела	33
Расчетное задание Д.	
Динамика материальной точки	39
Расчетное задание Е.	
Динамика механической системы материальных тел	48