РАСЧЕТНАЯ РАБОТА 1: «МОНЕТКА»

Задание к лабораторной работе

1. Возьмите 10 монет одинакового достоинства, хорошо перемешайте и выложите на стол. Сосчитайте количество гербов. Запишите результат.

2.Повторите пункт 1 сто раз. Результаты оформите в виде таблицы экспериментальных данных:

№ броска	Число выпавших гербов
1	7
…	…
100	3

3. Сосчитайте, сколько раз выпало 0 гербов, 1 герб, 2 герба, 3 герба,…, результаты оформите в виде статистического ряда:

	Случайная величина X - число выпадений гербов										
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота n_i	2	6	10	…	…	…	…	…	…	…	…

4. Постройте полигон частот, гистограмму.

5. Вычислите математическое ожидание ***a*** случайной величины *X*, ее дисперсию *D* и среднее квадратичное отклонение σ.

6. На графике, показывающем полигон относительных частот экспериментальных значений величины *X*, постройте кривую нормального распределения с вычисленными выше значениями математического ожидания и дисперсии.

7.Сравните экспериментальный и теоретический графики визуально.

8. Вычислите вероятности попадания случайной величины *X* в интервалы $[a-\sigma, a+\sigma]$, $[a-2\sigma, a+2\sigma]$, $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ и сравните с экспериментальными данными.

9. Вычислите критерий χ^2 Пирсона и проверить гипотезу о нормальным характере распределения, приняв доверительную вероятность $\alpha = 0{,}05$.

10. Постройте доверительный интервал для математического ожидания величины *X*.

Образец выполнения работы

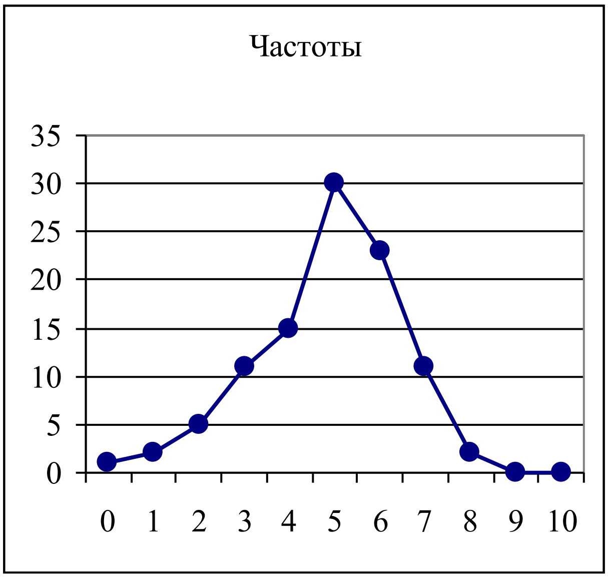
После выполнения пунктов 1 и 2 получены результаты:

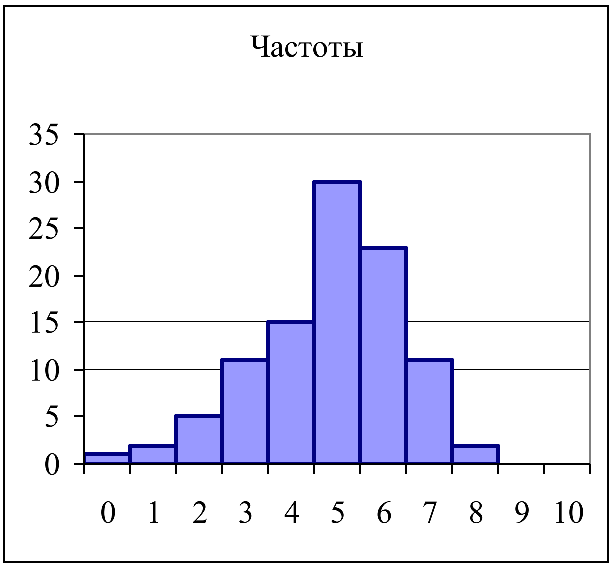
Выборка									
1	7	3	6	0	6	6	4	4	5
6	3	5	5	8	5	3	7	4	6
4	2	6	6	6	5	6	6	3	4
5	4	8	4	5	5	5	5	7	5
4	4	5	5	6	5	6	6	3	6
6	5	3	2	3	3	7	5	5	3
4	4	1	7	5	5	7	5	4	5
4	6	7	5	7	6	6	6	5	2
2	5	3	5	5	6	6	5	6	4
4	7	7	2	3	6	5	7	5	5

3. По выборке строим статистический ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	5	11	15	30	23	11	2	0	0

4. Полигон и гистограмма частот $\left(\frac{n_i}{100}\right)$:





5. Числовые характеристики выборочного распределения.

Выборочное среднее:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i = \frac{2\cdot 1+5\cdot 2+11\cdot 3+15\cdot 4+30\cdot 5+23\cdot 6+11\cdot 7+2\cdot 8}{100} = 4{,}860;$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2 - \left(\overline{x}_B\right)^2 =$$

$$= \frac{2\cdot 1^2+5\cdot 2^2+11\cdot 3^2+15\cdot 4^2+30\cdot 5^2+23\cdot 6^2+11\cdot 7^2+2\cdot 8^2}{100} - 4{,}860^2 =$$

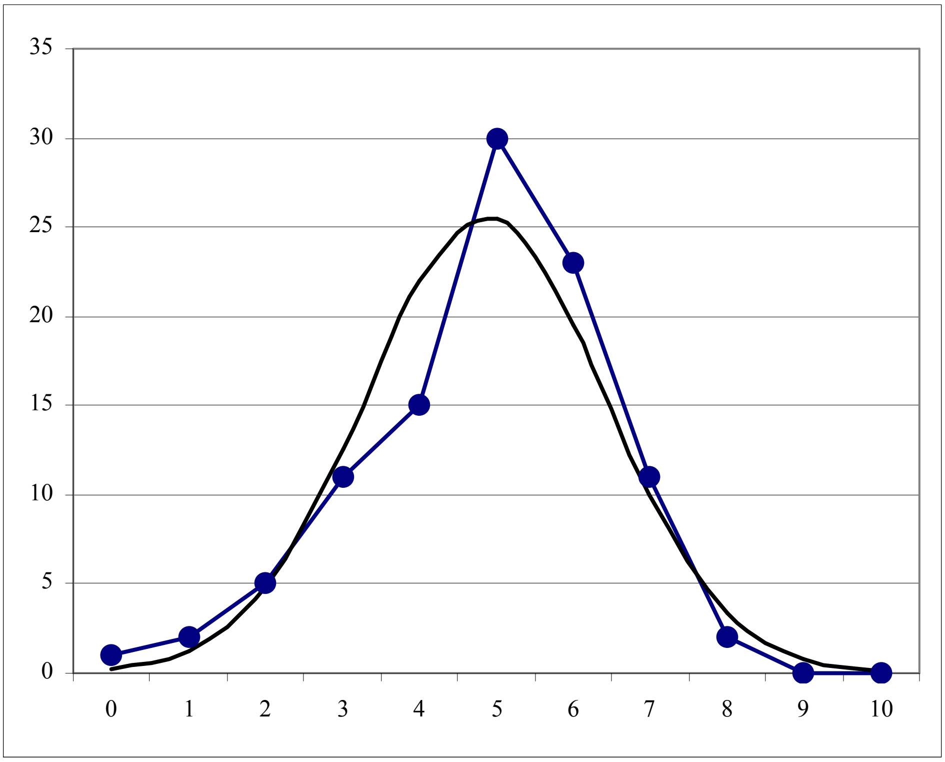
$$= 26{,}060 - 4{,}860^2 = 2{,}440.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 1{,}562$.

В качестве точечных оценок параметров распределения берем найденные выборочные средние, $a \approx \overline{x}_B = 4{,}860$, $\sigma \approx \sigma_B = 1{,}562$.

6,7. Построение кривой нормального распределения и сравнение теоретического и экспериментального распределений.

Кривая нормального распределения $f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ строится при полученных экспериментальных значениях параметров $a = 4{,}860$ и $\sigma = 1{,}562$:



8. Вероятности попадания в интервалы.

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$ где $\Phi(x)$ - функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Значения функции Лапласа берутся из таблиц.

$$P\{a-\sigma < X < a+\sigma\} = \Phi\left(\frac{a+\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\sigma-a}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0{,}6827.$$

Аналогично, $P\{a-2\sigma < X < a+2\sigma\} = 2\Phi(2) = 0{,}9545$,

$P\{a-3\sigma < X < a+3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Интервалы		Экспериментальная относительная частота	Теоретическая вероятность
$(a-\sigma; a+\sigma)$	$(3{,}298; 6{,}422)$	0,68	0,6827
$(a-2\sigma; a+2\sigma)$	$(1{,}736; 7{,}984)$	0,95	0,9545
$(a-3\sigma; a+3\sigma)$	$(0{,}174; 9{,}547)$	0,99	0,9973

9. Вычисление критерия χ^2 Пирсона и проверка гипотезы о нормальности распределения.

Критерий Пирсона χ^2: $\chi^2_{набл} = \sum_{i=0}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, где n_i – экспериментальные частоты, а p_i – теоретические вероятности (формула Бернулли), соответствующие значениям случайной величины *X*. Вычисления дают

x_i	np_i	n_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	0,202	1	3,1508
1	1,206	2	0,5224
2	4,779	5	0,0102
3	12,570	11	0,1962
4	21,947	15	2,1988
5	25,435	30	0,8192

6	19,568	23	0,602
7	9,993	11	0,1015
8	3,387	2	0,5683
9	0,762	0	0,7622
10	0,114	0	0,1139
Сумма	99,964	100	9,0456

т.е., $\chi^2_{набл} = 9{,}0456$. При $n \to \infty$ распределение этой случайной величины, независимо от того, каков закон распределения генеральной совокупности, стремится к распределению Пирсона χ^2 с числом степеней свободы $\nu = q - 1 - k$, где k – число параметров генерального распределения, оцениваемых на основании наблюденных данных. Так как оба параметра распределения генеральной совокупности оцениваются по данным выборки, число степеней свободы $\nu = 11 - 3 = 8$.

По таблице распределения χ^2 для $\nu = 8$ и $\alpha = 0{,}05$ находим критическую точку $\chi^2_{кр} = 15{,}507$. Так как $\chi^2_{набл} = 9{,}0456 < \chi^2_{кр} = 15{,}507$, гипотеза о нормальным характере распределения случайной величины X не отвергается.

10. Доверительный интервал для математического ожидания величины X.

Считая, что величина X распределена по нормальному закону с найденными ранее $a \approx \bar{x}_B = 4{,}860$, $\sigma \approx \sigma_B = 1{,}562$ и принимая, что доверительная вероятность $\alpha = 0{,}05$, найдем доверительный интервал $I_{0,95}$ для математического ожидания величины X:

$$I_{1-\alpha} = \left(\bar{x}_B - t_\alpha \cdot \frac{s_B}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + t_\alpha \cdot \frac{s_B}{\sqrt{n}} \right),$$

где s_B – исправленное среднеквадратичное отклонение,

$$s_B = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} = \sqrt{\frac{11}{10} \cdot 2{,}440} = 1{,}638,$$

t_α – квантиль распределения Стьюдента, из таблиц $t_{0,05} = 2{,}201$.

Отсюда $I_{0,95} = (3{,}773; 5{,}947)$, с вероятностью 0,95 среднее количество гербов в серии из 10 выбрасываний лежит в этом интервале.

Варианты экспериментальных данных для самостоятельной работы

Вариант 1

Вариационный ряд									
6	3	6	5	4	5	3	3	2	3
3	5	2	4	4	7	8	7	5	7
7	5	7	3	5	6	5	7	5	6
4	7	3	5	2	7	6	2	4	5
7	4	6	4	6	2	4	3	4	3
7	5	8	6	4	7	5	8	5	6
3	8	3	1	7	5	5	4	6	6
3	2	3	4	8	5	6	2	6	6
1	5	5	4	7	5	10	5	5	8
7	2	1	6	4	2	7	6	8	5

Вариант 2

Вариационный ряд									
3	4	7	6	5	6	4	7	3	6
6	6	4	1	7	5	3	3	4	7
6	5	6	6	5	6	6	7	5	6
3	3	1	4	4	6	6	5	3	4
5	7	4	4	8	4	4	3	4	9
4	5	5	4	5	7	2	5	6	6
6	5	6	7	4	3	6	6	7	6
4	3	7	4	6	5	6	7	4	3
6	5	7	5	7	6	2	6	5	2
4	6	7	2	6	7	5	5	6	5

Вариант 3

Вариационный ряд									
5	7	6	5	5	4	3	7	4	6
5	4	3	6	4	5	5	7	6	6
4	3	6	5	3	6	4	8	6	5
4	3	2	7	3	6	5	4	6	7
6	7	4	5	6	8	4	6	5	4
6	8	7	5	4	5	6	9	4	8
5	6	5	4	3	5	6	7	3	6
6	8	4	5	7	6	3	4	2	7
4	6	4	5	7	2	4	6	8	3
7	6	5	4	3	7	6	4	4	5

Вариант 4

Вариационный ряд									
6	4	2	5	5	1	2	6	2	3
4	4	8	4	4	4	5	4	5	3
5	5	5	4	8	3	3	6	5	3
6	3	4	7	3	8	3	3	4	5
6	7	5	3	2	7	5	3	5	5
5	5	5	5	4	7	2	6	4	5
5	6	6	5	6	7	4	3	6	5
5	4	2	7	3	6	3	7	5	5
4	8	6	9	3	9	4	8	6	3
3	1	4	5	6	5	7	7	6	5

Вариант 5

Вариационный ряд									
4	4	6	3	5	3	8	3	5	6
2	5	6	5	5	5	6	6	5	5
6	4	6	7	6	5	4	8	5	4
4	8	6	6	5	4	4	7	4	7
5	7	7	6	5	6	5	7	3	6
4	5	4	6	5	7	6	5	6	5
6	4	5	6	6	5	8	5	4	5
6	6	4	6	2	5	6	6	3	9
4	7	5	5	3	5	3	8	2	1
3	2	5	3	3	3	4	5	6	3

Вариант 6

Вариационный ряд									
2	1	3	4	9	4	4	5	2	5
4	6	4	4	2	5	7	3	3	4
4	6	6	7	5	4	4	7	6	7
3	7	6	6	7	5	6	6	6	5
6	5	7	4	6	4	5	7	3	3
6	3	5	5	4	3	5	5	7	5
5	7	4	8	7	5	3	4	5	5
6	3	6	4	5	6	3	5	5	6
7	3	6	5	5	6	1	4	3	4
3	5	5	7	4	4	5	6	7	2