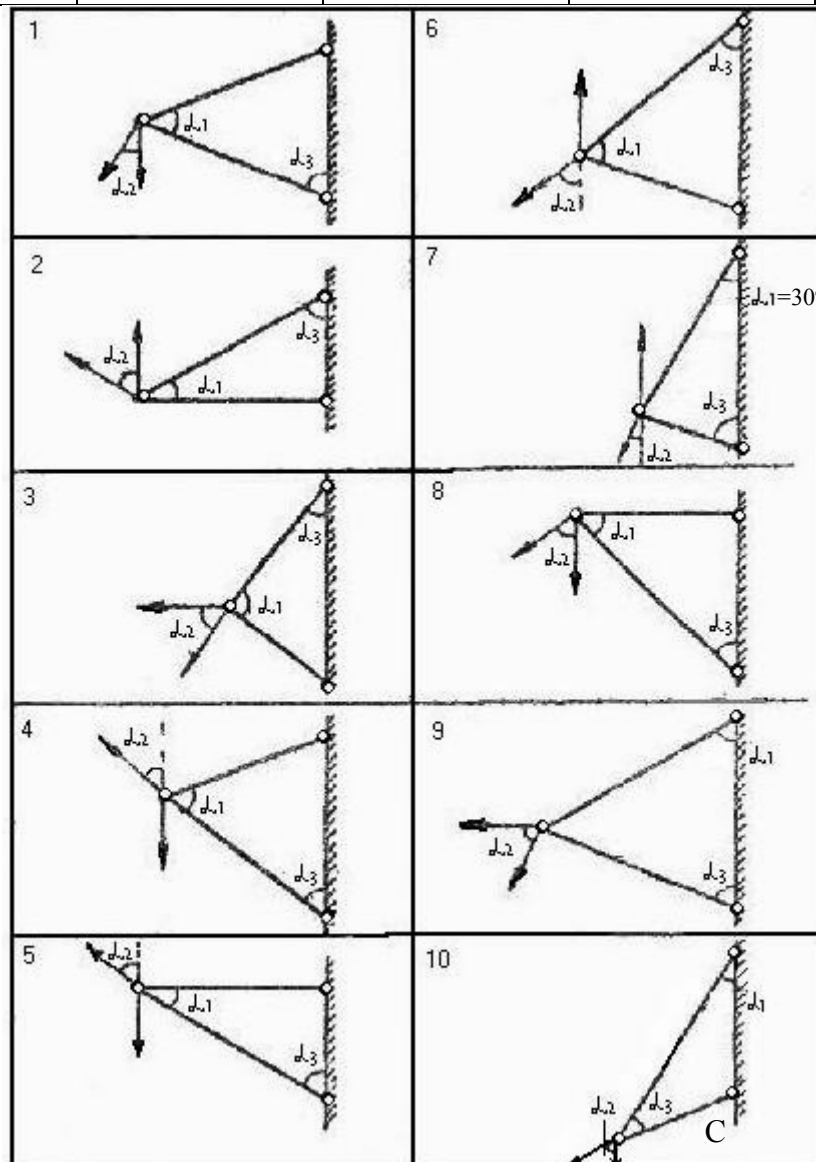


ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

ЗАДАЧА 1

Определить аналитическим и графическим способами усилия в стержнях АВ и ВС заданной стержневой системы.

Вариант	F_1 , кН	F_2 , кН	α_2 , град	α_3 , град
6	21	38	60°	30°



ПРИМЕР 1

Определить аналитическим и графическим способами в стержнях АВ и ВС заданной стержневой системы (рисунок 1).

Дано: $F_1 = 28$ кН; $F_2 = 42$ кН; $\alpha_1 = 45^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $\alpha_3 = 30^\circ$.

Определить: усилия $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_C$

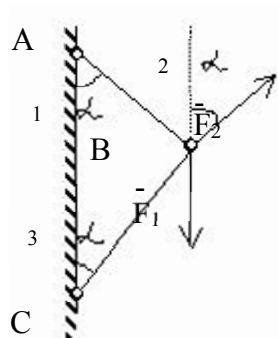


Рисунок -1

РЕШЕНИЕ

1 Аналитическое решение

1 Рассматриваем равновесие точки В, в которой сходятся все стержни и внешние силы (рисунок 1).

2 Отбрасываем связи АВ и ВС, заменяя их усилиями в стержнях $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_C$. Направления усилий примем от угла В, предполагая стержни растянутыми. Выполним на отдельном чертеже схему действия сил в точке В (рисунок 2).

3 Выбираем систему координат таким образом, чтобы одна из осей совпадала с неизвестным усилием, например, с $\bar{S}_A$. Обозначаем на схеме углы, образованные действующими силами с осью Х и составляем углы, образованные действующими силами с осью Х и составляем уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{RX} = 0; \quad F_2 \cos 75^\circ + F_1 \cos 45^\circ + S_c \cos 75^\circ - S_A = 0 \quad (1);$$

$$\Sigma F_{RY} = 0; \quad F_2 \cos 15^\circ - F_1 \cos 45^\circ - S_c \cos 15^\circ = 0 \quad (2).$$

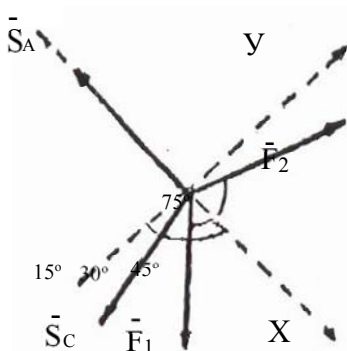


Рисунок - 2

Из уравнения (2) находим усилие S_c :

$$S_c = \frac{F_2 \cos 15^\circ - F_1 \cos 45^\circ}{\cos 15^\circ}$$

Подставляем числовые значения:

$$S_c = \frac{42 * 0.966 - 28 * 0.707}{0.966} \approx 21.51 \text{ кН}$$

Найденное значение S_c подставляем в уравнение (1) и находим из него значение S_A :

$$S_A = F_2 \cos 75^\circ + F_1 \cos 45^\circ + S_c \cos 75^\circ \text{ или} \\ S_A = 42 * 0.259 + 28 * 0.707 + 21.51 * 0.259 = 36.24 \text{ кН.}$$

Окончательно $S_A = 36.24 \text{ кН}$, $S_c = 21.51 \text{ кН}$; знаки указывают, что оба стержня растянуты.

2 Графическое решение

Выбираем масштаб сил $m = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}}$, тогда силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ будут откладываться отрезками

$$F_1^m = \frac{F_1}{m} = \frac{28}{10} = 2.8 \text{ см}; \quad F_2^m = \frac{F_2}{m} = \frac{42}{10} = 4.2 \text{ см}.$$

Из произвольно выбранной точки 0 откладываем отрезок, соответствующий величине и направлению силы $\vec{F}_1$. Из конца этого отрезка откладываем отрезок F_2^m . Так как условием равновесия сходящейся системы сил является замкнутость силового многоугольника, то из начала отрезка F_1^m откладываем линию, параллельную вектору $\vec{S}_c$, а из конца отрезка F_2^m откладываем линию, параллельную вектору $\vec{S}_A$. Точка их пересечения является вершиной силового многоугольника (рисунок 3).

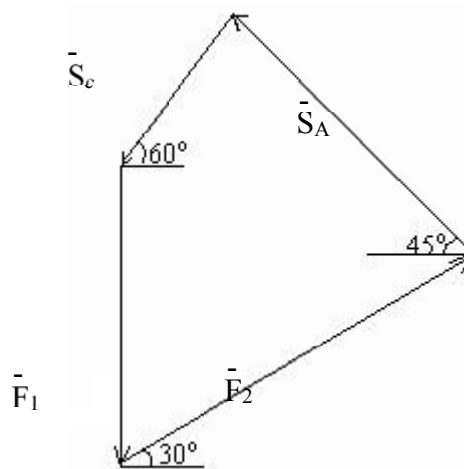


Рисунок - 3

Измеряя отрезки S_A^m и S_c^m и, умножая их на масштаб находим значения S_A и S_c :

$$S_A = S_A^m * m = 3.65 * 10 = 36.5 \text{ кН};$$

$$S_c = S_c^m * m = 2.15 * 10 = 21.5 \text{ кН}.$$

Вычислим допущенную при графическом способе решения ошибку:

$$S_A = \frac{36.5 - 36.24}{36.24} * 100\% \approx 0.72\%;$$

$$S_C = \frac{21.51 - 21.5}{21.51} * 100\% \approx 0.05\%.$$

(Ошибка находится в пределах 2%).

Ответ:

а) аналитическое решение:

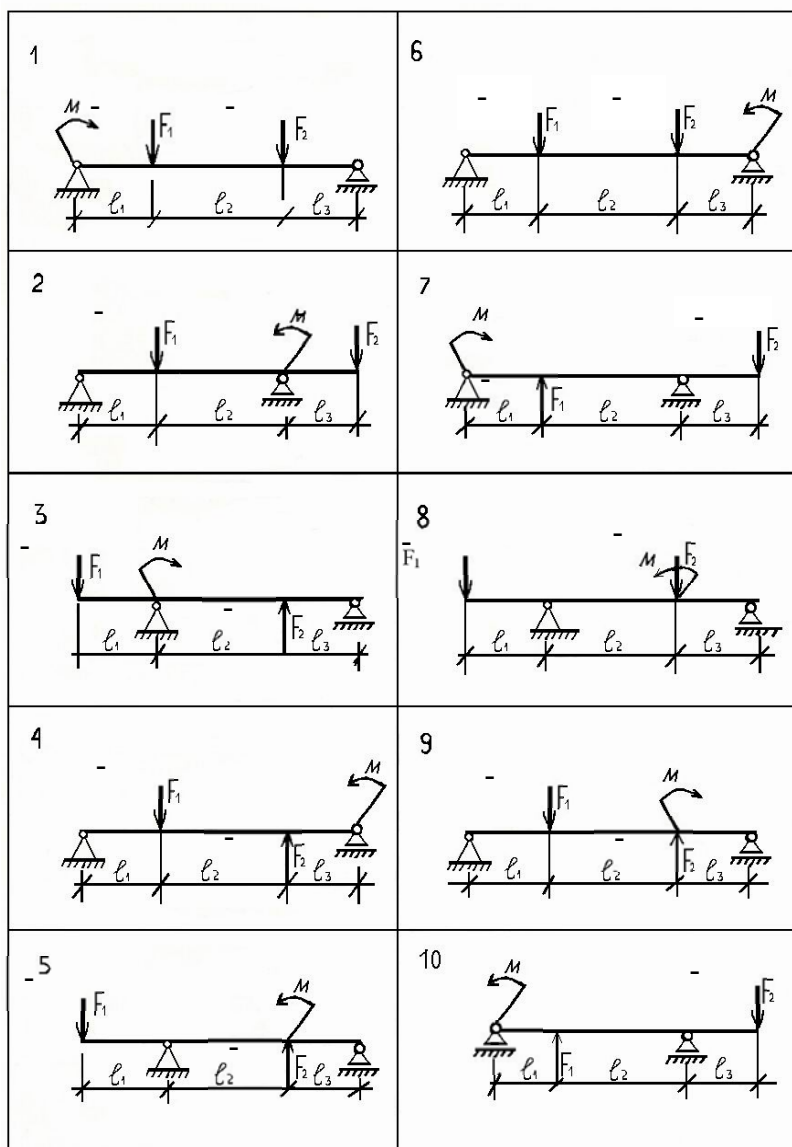
$$S_A = 36.24 \text{ кН}; S_C = 21,51 \text{ кН}$$

б) графическое решение:

$$S_A = 36.5 \text{ кН}; S_c = 21.5 \text{ кН}.$$

ЗАДАЧА 2

Для двухопорной балки определить реакции опор



Вариант	F_1 , кН	F_2 , кН	M , кНм	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м
6	30	45	40	1,0	4,0	5,0

ПРИМЕР 2 Определить реакции опор двухопорной балки (рисунок - 4)

Дано: $F_1=24 \text{ кН}$; $F_2=36 \text{ кН}$; $m_1=18 \text{ кНм}$; $m_2=24 \text{ кНм}$; $\ell_1=2,0 \text{ м}$; $\ell_2=3,0 \text{ м}$; $\ell_3=3,0 \text{ м}$

Определить реакции опор R_{Ay} и R_{By}

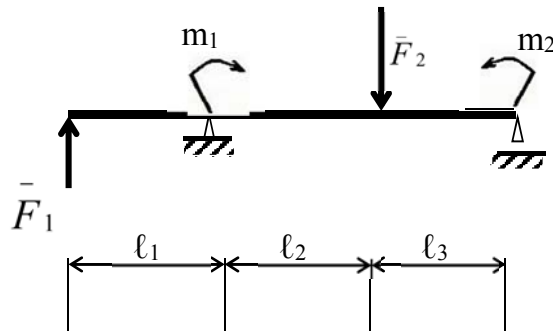


Рисунок - 4

Решение:

1 Обозначаем опоры буквами А и В. Отбрасываем связи (опоры А и В), заменяем их действие реакциями. Так как задана параллельная система сил, то реакции в опорах будут только вертикальные А и В. Выбираем систему координат ХУ с началом в левой опоре и чертим расчетную схему балки (рисунок 5)

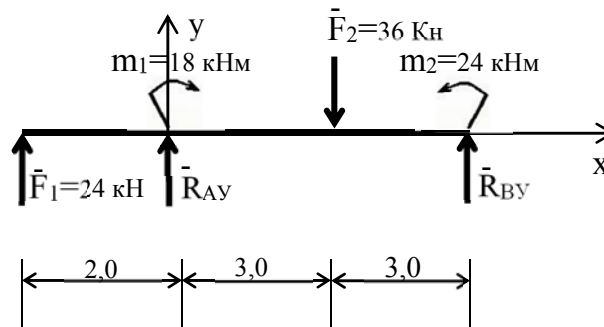


Рисунок - 5

2 Для полученной плоской параллельной системы сил составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_R) = 0 \quad F_1 * 2.0 + m_1 + F_2 * 3.0 - m_2 - R_{By} * 6.0 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_R) = 0 \quad F_1 * 8.0 + m_1 + R_{Ay} * 6.0 - F_2 * 3.0 - m_2 = 0 \quad (4)$$

3 Решаем систему уравнений.

Из уравнения (3) находим R_{By} :

$$R_{By} = \frac{F_1 * 2.0 + m_1 + F_2 * 3.0 - m_2}{6.0} = \frac{48 + 18 + 108 - 24}{6.0} = \frac{150}{6} = 25 \text{ кН}$$

Из уравнения (4) находим R_{AY} :

$$R_{AY} = \frac{-F_1 * 8.0 - m_1 + F_2 * 3.0 + m_2}{6.0} = \frac{-192 - 18 + 108 + 24}{6} = -13 \text{ kH}$$

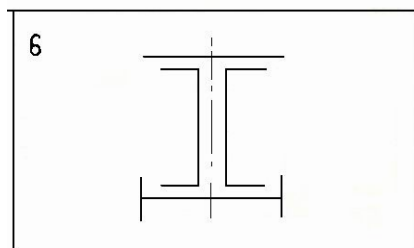
4 Для проверки правильности решения составим сумму протекций всех сил на ось У

$$\Sigma F_{RY} = F_1 + R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 24 - 13 - 36 + 25 = 49 - 49 = 0$$

то есть реакции определены верно.

ЗАДАЧА 3

Для заданных сечений, состоящих из прокатных профилей и полосы $b \times h$, определить положение центра тяжести.



Вариант	Двутавр	b, см	h, м	Швеллер
6	20	24,0	1,8	22а

ПРИМЕР 3.

Определить координаты центра тяжести сечения. Сечение состоит из двутавра № 18, швеллера № 18 и пластины 200*60 (рисунок-6)

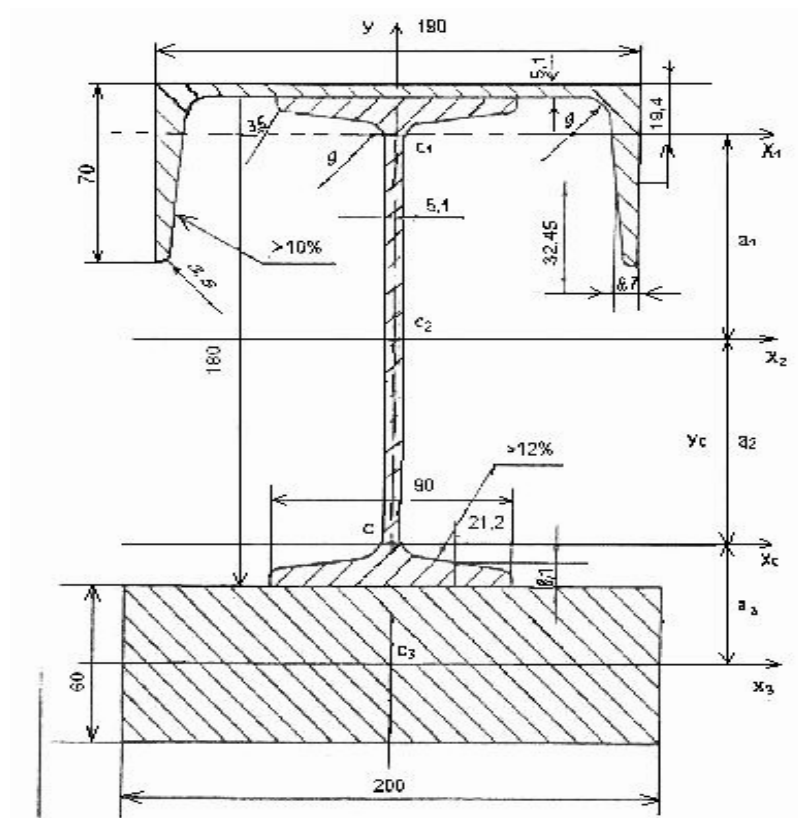


Рисунок - 6

- 1 Разобьем сечение на профили проката. Оно состоит из двутавра № 18, швеллера № 18 и пластины 200*60. обозначим их 1, 2, 3.
- 2 Укажем центры тяжести каждого профиля, используя таблицу приложения, и обозначим их C_1 , C_2 , C_3 , проведем через них оси X_1 , X_2 , X_3 .
- 3 Выберем систему координатных осей. Ось Y совместим с осью симметрии, а ось X проведем через центр тяжести двутавра.
- 4 Определим центр тяжести всего сечения. Так как ось Y совпадает с осью симметрии, то она проходит через центр тяжести сечения, потому $X_c=0$. Координату Y_c определим по формуле:

$$Y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Пользуясь таблицами ГОСТ 8239-89, ГОСТ 8240-89, ГОСТ 8510-86, ГОСТ 8509-86, определим координаты центров тяжести

$$\begin{aligned} A_1 &= 20,7 \text{ см}^2 & y_1 &= \left(\frac{h_2}{2} + d_1 - z_0 \right) = \frac{18}{2} + 0,51 - 1,94 = 7,57 \text{ см} \\ A_2 &= 23,4 \text{ см}^2 & y_2 &= 0 \\ A_3 &= 20 \cdot 6 = 120 \text{ см}^2 & y_3 &= - \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \right) = - \left(\frac{18}{2} + \frac{6}{2} \right) = -12 \text{ см} \end{aligned}$$

Координата y_2 равна нулю, так как ось X проходит через центр тяжести двутавра. Подставим полученные значения в формулу для определения y_c :

$$y_C = \frac{20,7 * 7,57 + 23,4 * 0 + 120 * (-12)}{20,7 + 23,4 + 120} = -7,82 \text{ см}$$

- 1 Укажем центр тяжести сечения на рисунке и обозначим его буквой С. Покажем расстояние $y_C = -7,82$ см от оси Х до точки С.
- 2 Определим расстояние между точками С и С₁, С и С₂, С и С₃, обозначим их a_1 , a_2 , a_3 :

$$a_1 = y_1 + y_C = 7,57 + 7,82 = 15,39 \text{ см}$$

$$a_2 = y_C = 7,82 \text{ см}$$

$$a_3 = y_3 - y_C = 12 - 7,82 = 4,18 \text{ см}$$

- 3 Выполним проверку. Для этого ось Х проведем по нижнему краю пластины. Ось Y оставим, как в первом решении. Формулы для определения x_C и y_C не изменятся:

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Площади профилей останутся такими же, а координаты центров тяжести двутавра, швеллера и пластины изменятся.

$$A_1 = 20,7 \text{ см}^2 \quad y_1 = (h_3 + h_2 + d_1 - z_0) = 6 + 18 + 0,51 - 1,94 = 22,57 \text{ см}$$

$$A_2 = 23,4 \text{ см}^2 \quad y_2 = h_3 + \frac{h_2}{2} = 6 + \frac{18}{2} = 15 \text{ см}$$

$$A_3 = 20 * 6 = 120 \text{ см}^2 \quad y_3 = \frac{h_3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ см}$$

Находим координату центра тяжести:

$$y_C = \frac{20,7 * 22,57 + 23,4 * 15 + 120 * 3}{20,7 + 23,4 + 120} = 7,18 \text{ см}$$

По найденным координатам x_C и y_C наносим на рисунок точку С. Найденное двумя способами положение центра тяжести находится в одной и той же точке. Сумма координат y_C , найденных при первом и втором решении: $7,82 + 7,18 = 15$ см

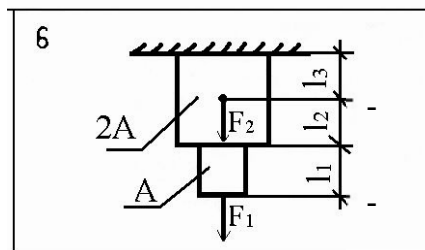
Это равно расстоянию между осями Х при первом и втором решении:

$$18/2 + 6 = 15 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 4

По оси ступенчатого бруса приложены силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. Необходимо построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить абсолютную деформацию бруса. Принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Вариант	F ₁ , кН	F ₂ , кН	l ₁ , м	l ₂ , м	l ₃ , м	A, см ²
6	30	57	2,0	1,4	1,2	6,5

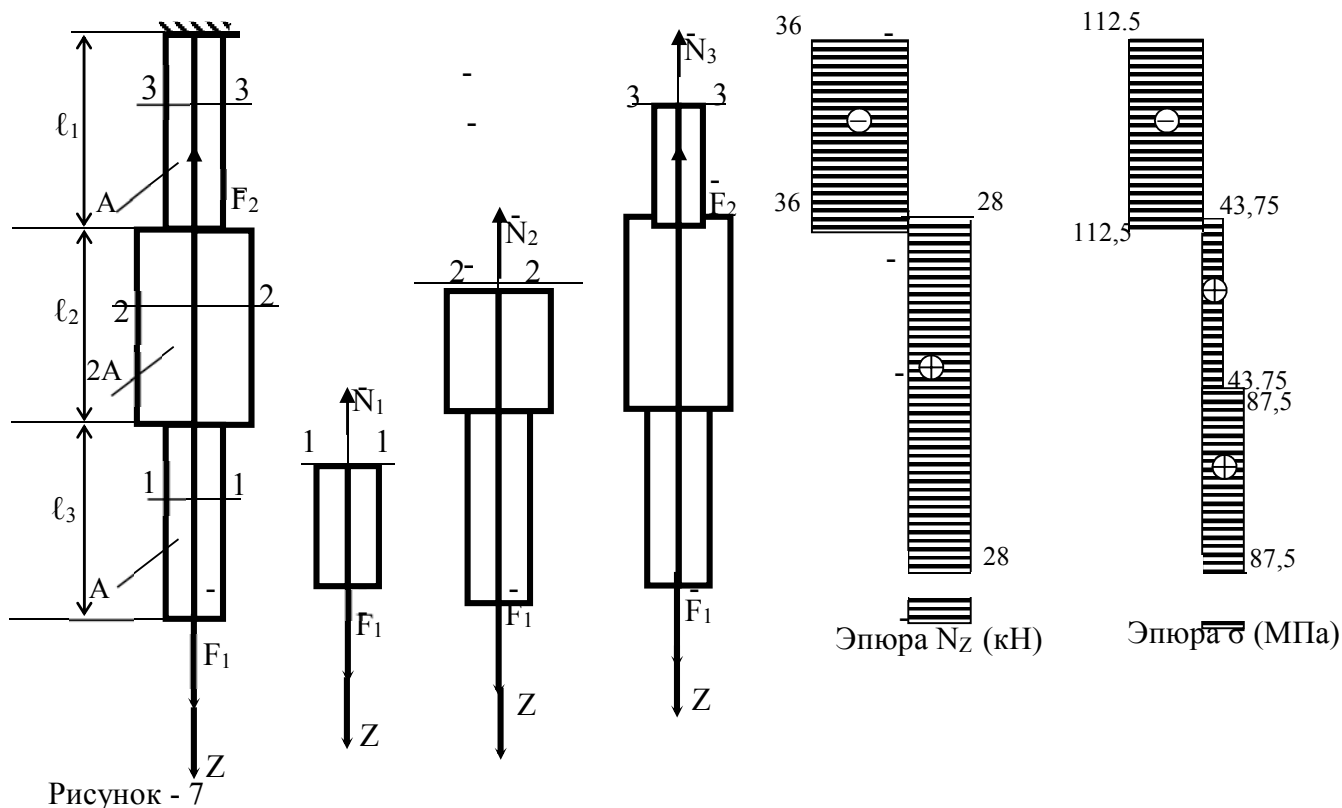


ПРИМЕР 4

Для данного ступенчатого бруса построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Определить абсолютное удлинение (укорочение) бруса (рисунок 7)

Дано:

$$F_1 = 28 \text{ kH}, F_2 = 64 \text{ kH}, \ell_1 = 2,4 \text{ m}, \ell_2 = 2,2 \text{ m}, \ell_3 = 2,0 \text{ m}, A = 3,2 \text{ cm}^2, E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$



Решение

1 Проводим ось Z в сторону свободного конца бруса и определяем реакцию заделки $\bar{V}$:

$$\Sigma F_{RZ} = F_1 - F_2 + V = 0;$$

$$V = -F_1 + F_2 = -28 + 64 = 36 \text{ кН}.$$

2 Разбиваем брус на участки, границы которых определяются сечениями, где изменяется площадь поперечного сечения или приложены внешние силы. На каждом из участков проводим характерные сечения 1-1, 2-2, 3-3. С помощью метода сечений определяем продольные силы на каждом из участков бруса: мысленно рассекаем брус в пределах первого участка сечения 1-1, отбрасываем верхнюю часть бруса и заменяем ее действие продольной силой N_1 (рисунок 7) для оставшейся части составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma F_{RZ} = F_1 - N_1 = 0; N_1 = F_1 = 28 \text{ кН}.$$

Аналогично находим N_2 и N_3 :

сечение 2-2 (рисунок 7)

$$\Sigma F_{RZ} = F_1 - N_2 = 0; N_2 = F_1 = 28 \text{ кН};$$

сечение 3-3 (рисунок 7)

$$\Sigma F_{RZ} = F_1 - F_2 - N_3 = 0, N_3 = F_1 - F_2 = 28 - 64 = 36 \text{ кН}.$$

По найденным значениям продольной силы строим соответствующую эпюру. Для этого параллельно оси бруса проведем базовую (нулевую) линию. Левее ее откладываем отрицательные значения N , соответствующие сжатою участку, а правее – положительные значения N , соответствующие растянутому участку (рисунок - 7).

Определяем нормальные напряжения в характерных сечениях бруса по формуле: $\sigma = \frac{N}{A}$;

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{28 * 10^3 \text{ Н}}{3.2 * 10^2 \text{ мм}^2} = 87,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 87.5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{28 * 10^3 \text{ Н}}{2 * 3.2 * 10^2 \text{ мм}^2} = 43,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = -\frac{36 * 10^3 \text{ Н}}{3.2 * 10^2 \text{ мм}^2} = -112.5 \text{ МПа}.$$

Строим соответствующую найденным значениям эпюру σ (рисунок - 7)

4 Определяем абсолютное удлинение бруса.

В соответствии с законом Гука:

$$\Delta \ell = \frac{N * \ell}{E * A} = \sigma \frac{\ell}{E},$$

где $E = 2,1 * 10^5 \text{ МПа}$ – модуль продольной упругости для стали.

Складывая удлинение участков, получим:

$$\Delta \ell = \Sigma \Delta \ell_k = \sigma_1 \frac{\ell_1}{E} + \sigma_2 \frac{\ell_2}{E} + \sigma_3 \frac{\ell_3}{E} \text{ или}$$

$$\Delta \ell = \frac{1}{E} (\sigma_1 * \ell_1 + \sigma_2 * \ell_2 + \sigma_3 * \ell_3)$$

Учитывая, что $I_m = 10^3 \text{ мм}$, будем иметь:

$$\Delta \ell = \frac{10^3}{2.1 * 10^5} (87,5 * 2,4 + 43,75 * 2,2 - 112,5 * 2,0) = 0,39 \text{ мм.}$$

Таким образом, абсолютное удлинение бруса $\Delta \ell = 0,39 \text{ мм}$.

ЗАДАЧА 5

По данным задачи 2 для двухопорной балки построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x . Подобрать сечение стального двутавра, приняв $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

ПРИМЕР 5

Для двухопорной балки построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Подобрать сечение стального двутавра, приняв $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Дано: $F_1 = 24 \text{ кН}$; $F_2 = 36 \text{ кН}$; $m_1 = 18 \text{ кНм}$;
 $m_2 = 24 \text{ кНм}$; $\ell_1 = 2.0 \text{ м}$; $\ell_2 = 3.0 \text{ м}$; $\ell_3 = 3.0 \text{ м}$.

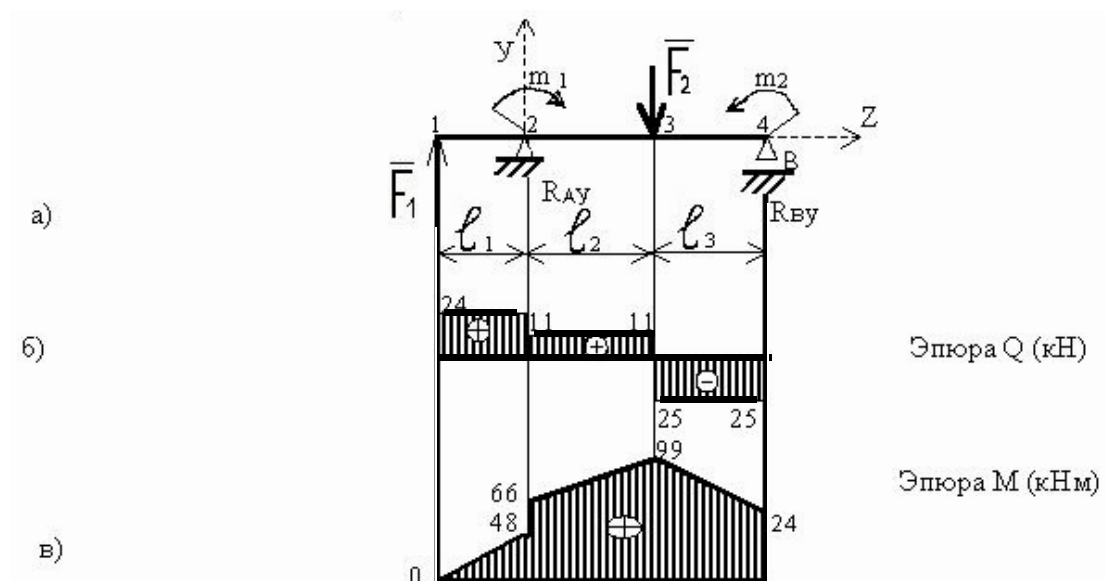


Рисунок - 8

Решение

1 Составляем уравнение равновесия параллельной системы сил, из которых определяем опорные реакции балки:

$$\sum M_A(\bar{F}_R) = F_1 * 2.0 + m_1 + F_2 * 3.0 - m_2 - R_{By} * 6.0 = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_R) = F_1 * 8.0 + m_1 + R_{Ay} * 6.0 - F_2 * 3.0 - m_2 = 0 \quad (6)$$

Из уравнения (6) находим R_{Ay} :

$$R_{Ay} = \frac{-F_1 * 8.0 - m_1 + F_2 * 3.0 + m_2}{6.0} = \frac{-192 - 18 + 108 + 24}{6.0} = -\frac{78}{6} = -13 \text{ кН}$$

Из уравнения (5) находим R_{By} :

$$R_{By} = \frac{F_1 * 2.0 + m_1 + F_2 * 3.0 - m_2}{6.0} = \frac{48 + 18 + 108 - 24}{6.0} = \frac{150}{6} = 25 \text{ кН}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя сумму проекций всех сил на ось Y:

$$\Sigma F_{RY} = F_1 + R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 24 - 13 - 36 + 25 = 49 - 49 = 0,$$

то есть реакции определены верно.

2 Определяем значения поперечной силы Q в характерных сечениях балки, которые обозначим цифрами 1, 2, 3, 4 (рисунок 8 а)

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2^{\text{лев}} = F_1 = 24 \text{ кН}; \\ Q_2^{\text{прав}} &= Q_3^{\text{лев}} = F_1 + R_{AY} = 24 - 13 = 11 \text{ кН}; \\ Q_3^{\text{прав}} &= Q_4 = F_1 + R_{AY} - F_2 = -R_{BY} = -25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По найденным значениям строим эпюру, поперечных сил Q (рисунок 8 б).

3 Аналогично определяем значения изгибающего момента M в характерных сечениях балки:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0; \\ M_2^{\text{лев}} &= F_1 * 2.0 = 48 \text{ кНм} \\ M_2^{\text{прав}} &= M_2^{\text{лев}} + m_1 = 48 + 18 = 66 \text{ кНм}; \\ M_3 &= F_1 * 5.0 + m_1 + R_{AY} * 3.0 = 120 + 18 - 39 = 99 \text{ кНм}; \\ M_4 &= m_2 = 24 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

По найденным значениям строим эпюру изгибающих моментов M (рисунок 8 в).

4 По эпюре изгибающих моментов определяем положение опасного сечения балки (сечение, в котором изгибающий момент имеет наибольшее по абсолютной величине значение). В нашем случае – это сечение 3, где $M_3 = M_{\max} = 99 \text{ кНм}$. Из условия прочности балки на изгиб $\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma_u]$

вычисляем необходимый осевой момент сопротивления:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma_u]} = -\frac{99 * 10^6 \text{ Н} * \text{мм}}{160 \text{ Н} / \text{мм}^2} = 0,619 * 10^6 \text{ мм}^3 = 619 \text{ см}^2.$$

В соответствии с ГОСТ 8239-89 принимаем сечение из стального двутавра № 33 с $W_x = 597 \text{ см}^3$. Имеем перенапряжение:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{99 * 10^6 \text{ Н} * \text{мм}}{597 * 10^3 \text{ мм}^3} = 165,8 \text{ МПа} \\ \sigma &= \frac{\sigma_{\max} - [\sigma_u]}{[\sigma_u]} = \frac{165,8 - 160}{160} * 100\% = 3,6\% \end{aligned}$$

что находится в разрешенных пределах (менее 5%).

Ответ: сечение балки двутавр № 33.