Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

М.А. Городилова, Л.Н. Гамоля, В.И. Жукова, М.И. Якунина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические пособие и контрольные задания для студентов ИИФО направлений подготовки «Технология транспортных процессов», «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Техносферная безопасность»

(контрольные работы №1-4)

Хабаровск 2012

УДК
ББК В
Ж

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Высшая математика» Дальневосточного
государственного университета путей сообщения
Г.А. Ушакова

Городилова М.А.
Г Математический анализ: методические указания и контрольные задания №1-4/ М.А. Городилова, Л.Н. Гамоля, В.И. Жукова, М.И. Якунина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2012. - с.

В данной работе даны краткие методические указания и задания для контрольных работ № 1-4, которые выполняются студентами ИИФО в I и во II семестрах.

Указания предназначены для студентов специальностей: 1) инфокоммуникационные технологии и системы связи, 3,5 и 5 лет, I курс; 2) экономика-экономика предприятий, 5 лет, I и II курсы; 3) экономика-бухгалтерский учет, 5 лет, I и II курсы; 4) экономика-финансы и кредит 5 лет, I и II курсы ; 5) технология транспортных процессов, 3,5 лет, I курс; 6) техносферная безопасность 3,5 лет, I курс.

УДК

ББК

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие по математическому анализу разработано для студентов ИИФО на основе государственного стандарта для специальностей: 1) инфокоммуникационные технологии и системы связи, 3,5 и 5 лет, I курс; 2) экономика-экономика предприятий, 5 лет, I и II курсы; 3) экономика-бухгалтерский учет, 5 лет, I и II курсы; 4) экономика-финансы и кредит 5 лет, I и II курсы; 5) технология транспортных процессов, 3,5 лет, I курс; 6) техносферная безопасность 3,5 лет, I курс.

Методическая разработка состоит из шестнадцати разделов в которых излагаются теоретические вопросы, приводятся решения типовых задач и контрольные задания к контрольным работам №1-4.

Методические указания содержат рекомендуемую литературу. Материал изложен компактно, доступно, приводится большое количество примеров с подробным анализом решения, что дает студентам возможность самостоятельно изучать основные разделы математического анализа.

Вариант контрольной работы студента совпадает с последней цифрой шифра студента.

Правила выполнения контрольных работ указаны в конце методических указаний.

Методические указания к контрольной работе №1

I. Понятие функции одной переменной

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть функция времени.

Определение 1.1. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть функция от x или, в символической записи, $y = f(x)$.

Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**. Зависимость переменных x и y называется **функциональной зависимостью**. Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y. Вместо записи $y = f(x)$, иногда пишут $y = y(x)$.

Определение 1.2. Совокупность значений x, при которых функция определена в силу правила $f(x)$, называется **областью определения функции** (или областью существования функции).

Пример 1.1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{9 - x^2} + lg\frac{x+1}{x-2}.$$

Решение.

Выражение $\sqrt{9 - x^2}$ имеет смысл при $9 - x^2 \geq 0$, а выражение $lg\frac{x+1}{x-2}$ – при $\frac{x+1}{x-2} > 0$ и $x - 2 \neq 0$. Таким образом, область определения функции определяется системой

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-2} > 0 \\ x - 2 \neq 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем, что $x \in [-3, -1) \cup (2,3]$.

Ответ. $x \in [-3, -1) \cup (2,3]$.

Пример 1.2. Найти область определения функции

$$y = arccos\frac{2x-5}{3x+8}.$$

Решение.

Область определения функции $y = \arccos x$ задается неравенством: $|x| \leq 1$. Следовательно, нахождение области определения исходной функции сводится к решению неравенства

$$\left|\frac{2x-5}{3x+8}\right| \le 1.$$

Возводя в квадрат, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{(2x-5)^2}{(3x+8)^2} \le 1,$$

или

$$\begin{cases}(2x-5)^2 \le (3x+8)^2 \\ (3x+8) \ne 0.\end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем $x \in \left(-\infty;-13\right] \cup \left[-\frac{3}{5},+\infty\right)$.

Ответ. $x \in \left(-\infty;-13\right] \cup \left[-\frac{3}{5},+\infty\right)$.

II. Пределы и непрерывность функции

2.1. Понятие предела

Предел – важнейшее понятие математики. Число A **– есть предел переменной величины** $y = f(x)$, если в процессе своего изменения, при $x \to a$ $y \to A$.

Рассмотрим пределы четырех типов:

Первый тип.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)},$$

где $Qn(x)$, $Rm(x)$ – многочлены с наивысшими степенями n и m, причем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Qn(x)}{Rm(x)} = \begin{cases}0, \text{если } m > n \\ \infty, \text{если } n > m \\ A, \text{если } m = n\end{cases}$$

где A – отношение коэффициентов при старших степенях в числителе и знаменателе.

Пример 1.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+7x^3+3x^2+x-2}{5x^4+2x^3+9x^2+4}$$

Представлена неопределенность, вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Наивысшая степень в числителе и знаменателе равна 4. Раскрывается такая неопределенность делением числителя и знаменателя на наивысшую степень, почленно.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+7x^3+3x^2+x-2}{5x^4+2x^3+9x^2+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+7\frac{1}{x^4}+3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{5+2\frac{1}{x^4}+9\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4}} = \frac{2}{5}$$

Дробь $\frac{1}{x^n} \to 0$, при $x \to \infty$.

Второй тип.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{Pn(x)}{Rm(x)} = \left(\frac{0}{0}\right), \text{ т.е. } Pn(x_0) = 0 \text{ и } Rm(x_0) = 0.$$

В этом случае в числителе и знаменателе необходимо выделить множитель вида $(x - x_0)$ и сократить, чтобы устранить неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. **Примечание**. Необходимо знать формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1, x_2 - \text{корни квадратного трехчлена}$$

Пример 1.4

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}.$$

Квадратный трехчлен раскладывается на множители

$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$,

в знаменателе применим формулу разности кубов

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

После сокращения получим:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1 + 1} = \frac{-1}{3}$$

Пример 1.5

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)(x - 3) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)(2 - 3) = -2\sqrt{2}.$$

Заметим: $x - 2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)$

Третий тип.

Вычисление пределов этого типа основано на первом замечательном пределе:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и, понятии эквивалентных бесконечно малых величин, т.е. – под знаком предела можно одну бесконечно малую величину заменить эквивалентной.

Примеры эквивалентных бесконечно малых величин:

$$\sin \alpha x \sim \alpha x, \quad \arcsin \alpha x \sim \alpha x, \quad \operatorname{tg} \alpha x \sim \alpha x, \quad 1 - \cos \alpha x \sim \frac{\alpha^2 x^2}{2},$$

$$\text{так как } 1 - \cos \alpha x = 2 sin^2 \frac{\alpha x}{2}.$$

Пример 1.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg2x} = \left|\begin{matrix}\text{переходим к}\\ \text{эквивалентным}\\ \text{бесконечно малым}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

Пример 1.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{tg2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{3}{2}x}{tg2x\sin x} = \left|\begin{matrix}\text{переходим к}\\ \text{эквивалентным}\\ \text{бесконечно малым}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2x\cdot x} = \frac{9}{4}.$$

Четвертый тип.

Здесь при вычислении используется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x}\right)^{\alpha x} = e.$$

Для этого необходимо выполнить преобразование под знаком предела.

Пример 1.8

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{\frac{3}{x}5x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{15x}{x}} = e^{15}.$$

Пример 1.9

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-1}{x+3}\right)^{x+4}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^{x+4} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x+3)}\right)^{-(x-3)}\right)^{\frac{x+4}{-(x+3)}} = e^{-1}$$

2.2. Исследование функции на непрерывность в заданных точках x_1 и x_2

Функция $f(x)$ считается непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в этой точке, пределы слева и справа существуют и равны значению функции в этой точке $f(x_0)$.

Если одно из этих условий нарушается, то функция является разрывной в этой точке.

Пример 1.10. Дана функция $f(x) = 16^{\frac{1}{4-x}}$. Исследовать на непрерывность в точках $x_1 = 4$; $x_2 = 0$, сделать схематический чертеж.

Решение.

В точке $x = 4$ показатель функции не существует. Исследуем поведение функции при приближении аргумента к $x = 4$ слева и справа.

Находим левосторонние и правосторонние пределы при $x_1 = 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \infty ,$$

(левосторонний предел при $x < 4$, т.е. знаменатель показателя степени $4 - x > 0$ и стремится к нулю, в этом случае

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{1}{4-x} = \infty ,$$

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{1}{4-(4-0)} = \lim_{x\to 4-0} \frac{1}{4-4+0} = \frac{1`}{0} = \infty ,$$

следовательно, и

$$\lim_{x\to 4-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{x\to 4-0} 16^{\infty} = \infty.$$

Правосторонний предел:

$$\lim_{x\to 4+0} \frac{1}{4-(4+0)} = \lim_{x\to 4-0} \frac{1}{4-4-0} = \frac{1`}{-0} = -\infty ,$$

$$\lim_{x\to 4+0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{x\to 4+0} 16^{-\infty} = \frac{1}{16^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Таким образом, функция

$$f(x) = 16^{\frac{1}{4-x}}$$

имеет разрыв в точке $x = 4$.

Рассмотрим эту функцию в окрестности $x_2 = 0$. В этом случае левосторонний и правосторонний пределы равны:

$$\lim_{x\to 0+0} 16^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{x\to 0-0} 16^{\frac{1}{4-x}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 ,$$

следовательно, в точке $x_2 = 0$, функция непрерывна. Схематический чертеж (рисунок 1.1):

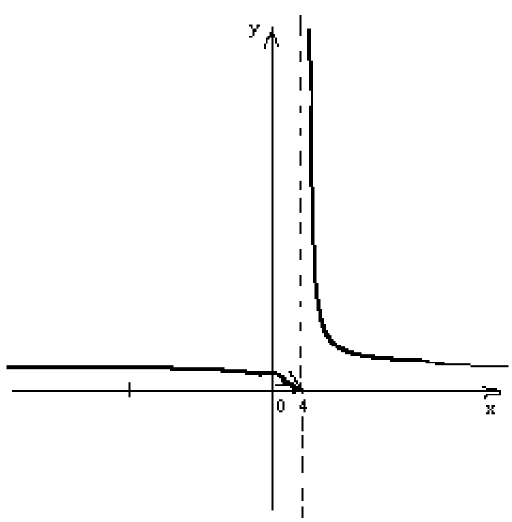


Рис.1.1

Пример 1.11

Для функции $f(x)$, найти точки разрыва, если они существуют:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, \text{при } x \leq 2; \\ x, \quad \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Решение.

Функция определена на всей числовой оси, но из этого не следует, что она непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная. Она задана двумя различными формулами для разных интервалов изменения аргумента x, и может иметь разрыв в точке $x = 2$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x = 2$, находим односторонние пределы функции при стремлении x к этой точке слева и справа.

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 2,$$

так как слева от точки $x = 2$ функция имеет вид: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} x = 2,$$

так как справа от точки $x = 2$ функция $f(x) = x$.

Левый и правый пределы конечны, но не равны между собой. Поэтому, функция в этой точке имеет разрыв. Разность между пределами называют скачком, его размер равен 4, то есть $\lim_{x \to 2+0} f(x) - \lim_{x \to 2-0} f(x) = 2 - (-2) = 4$.

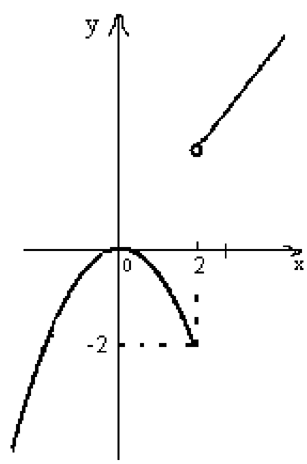


Рис.1.2

III. Производная функции одной переменной

3.1. Понятие производной функции

Производной функции $y = f(x)$ называется **предел отношения ее приращения Δy к приращению независимой переменной Δx**, когда это последнее стремиться к нулю $\Delta x \to 0$. Производная обозначается y'.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Нахождение производной называется **дифференцированием.** Функция дифференцируема в точке x, если в этой точке она имеет определенную производную, т.е. если предел существует и имеет одно и тоже значение при $\Delta x \to 0$ любым способом, при этом функция будет непрерывна в этой точке. Непрерывность функции есть необходимое, но недостаточное, условие дифференцируемости функции. Функция непрерывная в некоторой точке x, может быть и недифференцируемой в этой точке.

3.2. Таблица производных основных элементарных функций:

1. $y = x; \quad y' = 1$
2. $y = x^n; \quad y' = nx^{n-1}$
3. $y = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x; \quad y' = a^x lna$
5. $y = e^x; \quad y' = e^x$
6. $y = lnx, \quad y' = \frac{1}{x}$
7. $y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{xlna,}$
8. $y = \sin x; \quad y' = \cos x$
9. $y = \cos x; \quad y' = -\sin x$
10. $y = tgx; \quad y' = \frac{1}{cos^2 x}$
11. $y = ctgx, \quad y' = \frac{-1}{sin^2 x}$
12. $y = arcsinx, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $y = arccosx, \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $y = arctgx, \quad y' = \frac{-1}{1 + x^2}$

3.3. Правила дифференцирования:

1. $y = f(x) + \varphi(x) \qquad y' = f'(x) + \varphi'(x)$
2. $y = f(x) \cdot \varphi(x) \qquad y' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$
3. $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$
4. $y = f(ax + b) \qquad y' = af(ax + b)$
5. $y = F(\varphi(x)) \qquad y' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$
6. $y = c; \quad y' = 0$ c- const (постоянная величина)
7. $y = cf'(x) \qquad y' = (cf(x))' = cf'(x)$

Пример 1.12. Найти производные следующих функций

$a)$ $y = x^4; \quad y' = 4x^{4-1} = 4x^3$;

$b) y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}.$

Пример 1.13.

Правила действий со степенями:

$$x^m x^n = x^{m+n}; \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}; \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad (x^m)^n = x^{mn};$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} - 2x^{2-\frac{1}{2}} =$$

$= x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, тогда

$$y' = \left(x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{6} x^{\frac{-7}{6}} - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}} - 3\sqrt{x}.$$

Пример 1.14.

Найти производную функции

$$y = sin^2(ln6x).$$

Функция сложная, и ее можно записать с помощью промежуточных аргументов:

$$y = u^3 \;; \; u = \sin v \;; \quad v = \ln w; \quad w = 6x.$$

Каждый из промежуточных аргументов является основной элементарной функцией (см. таблицу производных),

$$y' = y'_u \, u'_v \, v'_w \, w'_x = 3u^2 \cos v \frac{1}{w} 6 = 3sin^2 (\ln 6x) \cos(\ln 6x) \frac{1}{6x} 6$$

$$= \frac{3}{x} sin^2(\ln 6x) \cos(\ln 6x).$$

Или:

$y' = 3sin^2(ln6x) \cdot (\sin(ln6x))' = 3sin^2(ln6x) \cdot \cos\,(ln6x) \cdot (ln6x)' =$

$=3sin^2(ln6x) \cdot \cos\,(ln6x) \cdot \frac{1}{6x} \cdot (6x)' = 3sin^2(ln6x) \cdot \cos\,(ln6x) \cdot$

$16x6x' = \quad =3sin2ln6x \cdot \cos(ln6x) \cdot 16x \cdot 6 = 3xsin2(\ln6x)\cos(\ln6x)$

Пример 1.15.

Производная произведения 2-х функций:

$$y = \sqrt[4]{x^3} \cdot sin^2 2x;$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{x^3}\right)' \cdot sin^2 2x + \sqrt[4]{x^3} \cdot (sin^2 2x)' =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4} x^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \\ (sin^2 2x)' = 2 \sin 2x \cos 2x \cdot 2 = \\ = 4 \sin 2x \cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} sin^2 2x + 4 \sin 2x \cos 2x \sqrt[4]{x^3}.$$

Пример 1.16.

Производная частного:

$$y = \frac{\sqrt[4]{ln^3 x}}{3^x};$$

$$y' = \frac{\left(\sqrt[4]{ln^3 x}\right)' 3^x - (3^x)' \sqrt[4]{ln^3 x}}{3^{2x}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left(\sqrt[4]{ln^3 x}\right)' = \left(ln^{\frac{3}{4}} x\right)' = \frac{3}{4}\left(\ln^{\frac{-1}{4}} x\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{4x\sqrt[4]{\ln x}} \\ \qquad\qquad (3^x)' = 3^x \ln 3 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\frac{3 \cdot 3^x}{4x\sqrt[4]{\ln x}} - 3^x \ln 3 \sqrt[4]{ln^3 x}}{3^{2x}} = \frac{3 - 4x \ln x}{4x \cdot 3^x \cdot \sqrt[4]{\ln x}}.$$

Теоретические вопросы к контрольной работе №1

1. Что называется функцией?
2. Определение области определения функции .
3. Как при вычислении пределов раскрываются неопределенности да $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$?
4. Определение первого замечательного предела.
5. Определение второго замечательного предела.
6. Определение эквивалентных бесконечно малых величин.
7. Применение эквивалентных бесконечно малых величин к вычислению пределов.
8. Условия непрерывности функции в точке.
9. Левосторонние и правосторонние пределы.
10. Классификация точек разрыва функции.
11. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного двух функций.
12. Правило дифференцирования сложной функции.
13. Необходимые условия экстремума.
14. Достаточные условия экстремума.
15. Условия существования критической точки.
16. Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

IV. Задания к контрольной работе №1

1-10. Найти область определения функции

1. $y(x) = \lg(x^2 - 16) + 2^{x-3} + \sqrt{x}$
2. $y(x) = \lg(x + 3) + \frac{x^2-1}{3x}$
3. $y(x) = \sqrt[4]{x^2 - 3x} + \frac{x-1}{2x+6}$
4. $y(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4x} + \frac{x-1}{x-6}$
5. $(x) = \frac{2}{x+2} + \lg(x^2 - 1)$
6. $y(x) = \sqrt{2 + x - x^2}) + \lg(x)$
7. $y(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$
8. $y(x) = \lg(9 - x^2) + \sqrt[4]{x^2 - 4}$
9. $y(x) = \sqrt{12 + x - x^2}) + \lg(x)$
10. $y(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x} + \sqrt{7 - x}$

11-20. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

11.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{5x^3 + 2x - 7}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + x - 4}{1 - x^2}$;

в) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$; г) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$.

12.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - x + 4}{2x^2(x^3 + x - 1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^{2x}$.

1**3**.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + 3x - 4}{5x(x^3 + x + 1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$;

в) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$; г) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{x+2}$.

14.

а) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{4x^2(x+2x-3)}$; б) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{4x-4x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{1 - \cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 5}{2x}\right)^{x-1}$.

15. а) $\lim_{x\to\infty} \frac{3+2x+6x^5}{x^2(2x^3+6x+1)}$; б) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^2-5x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{1 - \cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x + 4}\right)^{x-2}$.

16.а) $\lim_{x\to\infty} \frac{x(1+x+7x^3)}{x^4+3+x}$; б) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot tg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$.

17.

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{x(4x^2+3x+1)}{x+4+6x^3}$; б) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x-x^4}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4}{5x+5}\right)^{4x+1}$.

18. а) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(6x^4+3x+5)}{3x^6+6x^2+1}$; б) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-3x^4}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin 2x\cdot\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$.

19. а) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3x+4x^2+x+1)}{5x+2x^5+2}$; б) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 3x}{1-\cos 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+1}\right)^{3x+1}$.

20.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x-x^2+1)}{3x^2+4x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{3x}$.

21-30. Задана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2.

Требуется установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента, и сделать схематический чертеж.

21. $f(x)=9^{\frac{1}{(2-x)}}$, $x_1=0$, $x_2=2$.
22. $f(x)=4^{1/(3-x)}$, $x_1=1$, $x_2=3$.
23. $f(x)=12^{1/(5-x)}$, $x_1=0$, $x_2=5$.
24. $f(x)=3^{1/(4-x)}$, $x_1=2$, $x_2=4$.
25. $f(x)=8^{1/(5-x)}$, $x_1=3$, $x_2=5$.
26. $f(x)=10^{1/(7-x)}$, $x_1=5$, $x_2=7$.
27. $f(x)=14^{1/(6-x)}$, $x_1=4$, $x_2=6$.
28. $f(x)=15^{1/(8-x)}$, $x_1=6$, $x_2=8$.
29. $f(x)=11^{1/(4+x)}$, $x_1=-4$, $x_2=-2$.
30. $f(x)=13^{1/(5+x)}$, $x_1=-5$, $x_2=-3$.

31-40. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

31. $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1; \\ x^2 + 2, & -1 \le x < 1; \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 3; \\ x - 2, & x > 3. \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le -1; \\ x^2 + 1, & -1 < x \le 1; \\ -x + 3, & x < 1. \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} -(x + 1), & x \le -1; \\ (x + 1)^2, & -1 < x \le 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ -(x - 1)^2, & 0 < x < 2; \\ x - 3, & x \ge 2. \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0; \\ 2x, & 0 < x \le 3; \\ 4, & x \ge 3. \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \le 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1; \\ x - 2, & x \ge 1. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \le 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 2; \\ x + 1, & x + 2. \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 1, & x \le 4. \end{cases}$

41-50. Найти производные данных функций:

41. а) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}}$ б) $y = ln^2(\cos 7x)$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2}\, cos^2 7x$ г) $y = \frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{2^x}$.

42. а) $y = \frac{\sqrt[6]{x^5}-3\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $y = cos^2(\sin 2x)$;

в) $y = \sqrt[5]{x^4}\, sin^3 \frac{x}{2}$; г) $y = \frac{\sqrt{tg^3 x}}{5^x}$.

43. а) $y = \frac{\sqrt[7]{x^4}-4\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{x^3}}$; б) $y = sin^3(ln\frac{x}{4})$;

в) $y = \sqrt[4]{x^3}\, cos^3 3x;$ г) $y = \dfrac{\sqrt[3]{5^x}}{ln^3 \frac{x}{3}}.$

44. а) $y = \dfrac{\sqrt[7]{x^3} - 2\sqrt[4]{x} + 3}{\sqrt[6]{x^5}}$; б) $y = tg^2(\cos 4x)$;

в) $y = 5^x \sqrt[5]{x};$ г) $y = \dfrac{\sqrt[3]{cos^8 5x}}{\sqrt[5]{x^4}}.$

45. а) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt[5]{x^2} + 4}{\sqrt[5]{x^4}}$; б) $y = ln^4(\sin 8x)$;

в) $y = e^{5x}\left(\sqrt{x} + x^2\right);$ г) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^2 + 1}}{cos^4 3x}.$

46. а) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[4]{x^3} - 4}{\sqrt[5]{x^3}}$; б) $y = arcsin^3 (\cos 4x)$;

в) $y = \sqrt[5]{x^2 + 3x} \cdot tg^2 2x;$ г) $y = \dfrac{\sqrt{sin^5 x}}{e^{2x}}.$

47. а) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3} + 5\sqrt[6]{x} - 4}{\sqrt[7]{x^5}}$; б) $y = arctg^2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)$;

в) $y = cos^6 4x \cdot \sqrt[4]{5x^2 + 1};$ г) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2^x}}{sin^2 3x}.$

48. а) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3} - 6\sqrt[5]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = sin^4(tg 5x)$;

в) $y = sin^5 2x \cdot \sqrt[5]{4x^3 + 2};$ г) $y = \dfrac{\sqrt[3]{sin^2 2x}}{10^x}.$

49. а) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x^4} + 3\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $y = tg^6(2\cos 4x)$

в) $y = cos^4 3x \cdot \sqrt[3]{1 + 2x^2};$ г) $y = \dfrac{\sqrt[4]{ln^3 2x}}{5^x}.$

50. а) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^5} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2}{\sqrt[7]{x^4}}$; б) $y = sin^4(tg 6x)$;

в) $y = tg^2 7x \cdot \sqrt[2]{x^2 + x};$ г) $y = \dfrac{\sqrt[5]{6^x}}{arctg^2 2x}.$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

V. Исследование функции одной переменной.

5.1. Экстремум функции, его классификация

При изучении поведения функции в зависимости от изменения независимой переменной обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. что каждое следующее ее значение больше предыдущего.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают, то и функция называется **возрастающей,** а если они убывают, то и функция называется **убывающей**.

Некоторые функции во всей своей области определения изменяются монотонно—только возрастают или только убывают.

Многие функции изменяются не монотонно. В одних интервалах изменения независимой переменной они возрастают, а в других интервалах убывают.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется **знаком ее производной** $\boldsymbol{y'}$: если в некотором интервале $\boldsymbol{y'} > 0$, то функция в**озрастает**, а если $\boldsymbol{y'} < 0$, то функция **убывает** в этом интервале.

Если функция меняет поведение, то есть возрастает на некотором промежутке, а затем убывает (или наоборот), то говорят, что функция имеет экстремум **- максимум или минимум.**

Значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **максимумом (минимумом)**, если оно является **наибольшим (наименьшим**) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Функция **может иметь экстремум (максимум или минимум)** только в тех точках, которые **лежат внутри области определения функции** и где ее **производная равна нулю или не существует**.

Такие точки называются **критическими**. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна оси абсцисс.

Это необходимые условия экстремума, но недостаточные. Точки, при переходе через которые возрастание функции сменяется на убывание, являются точками максимума, а точки, при переходе через которые убывание функции сменяется на возрастание, являются точками минимума.

Поскольку поведение функции характеризуется знаком ее производной, то **функция будет иметь экстремум в тех точках, где ее производная меняет свой знак, а сама функция непрерывна.**

Отсюда вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

Чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$, в которых она непрерывна, нужно:

I. Найти производную y' и критические точки, в которых $y'=0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции.

2. Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки.

Если при переходе аргумента $\boldsymbol{x}$ через критическую точку
y' меняет знак с « +» на « —» , x_0 является точка **максимума**;
y' меняет знак с — на +» то x_0 есть точка **минимума**;
y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Далее следует найти экстремумы функции, т. е. вычислить значения функции в найденных точках экстремума.

Пример 1.17. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:
$y = x^2 + 2x$
$y' = 2x + 2;$
$y' = 0,$ т.е. $2x + 2 = 0;$
$x_0 = -1$ – критическая точка.

Находим знак производной слева и справа от точки $x_0 = -1$.
$y'(-2) = 2(-2) + 2 = -2 < 0;$ $y'(0) = 2 > 0.$
т.е.в точке $x_0 = -1$,функция имеет минимум.

Вычислим значение минимума

$$y_{min}\ (-1) = (-1)^2 + 2\cdot)(-1) = -1$$

Пример 1.18. Исследовать на экстремум:
$y = \sqrt[3]{x^2}$
$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ – не существует в точке $x = 0$.

Находим знак производной в окрестности критической точки:
$y'(-1) = \frac{-2}{3} < 0;$ $y'(1) = \frac{2}{3} > 0$, т.е. $y(0) - min.$

$$y_{min}\ (0) = 0$$

Пример 1.19. Исследовать на экстремум:

$$y = xe^{-x}$$

$$y' = (x)'e^{-x} + (e^{-x})'x = e^{-x}(1 - x);$$

$$y' = 0 \quad e^x(x - 1) = 0;$$

$x = 1$ - критическая точка.

Находим знаки производной в окрестности критической точки $x = 1$:
$y'(0) = -1 < 0;$ $y'(2) = 3e^{-2} > 0$ т.е. $y(1) - min,$ $y_{min}\ (1) = \frac{1}{e}$

5.2. Наибольшее и наименьшее значение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Наибольшим значением функции называется самое **большее, а наименьшим значением** — самое **меньшее** из всех ее значений на данном промежутке.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция

$y = f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и, если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.

Отсюда вытекает практическое правило для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна:

1. находятся критические точки функции и отбираются те, которые попали в заданный интервал;

2.находится значение функций в этих точках и на границах интервала.

3.Из полученных значений выбираются наибольшие и наименьшие значения.

Пример 1.20. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x)$ на интервале $[1; 4]$:

$$y(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

Решение.

1.Находим критические точки:

$y' = 3x^2 - 6x = 0,$

$x(x - 2) = 0,$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2;$

в интервал $[1; 4]$ попадает только $x_2 = 2$.

2.Находим значение функции в точке $x_2 = 2$ и на границах интервала:

$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3;$

$y(1) = -1; \quad y(4) = 17,$

Выберем наибольшее значение функции, это- $y(4) = 17$, и наименьшее - $y(2) = -3$.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = y(4) = 17, \quad y_{\text{наиб.}}(2) = -3$

VI. Функции нескольких переменных

6.1. Определение функции нескольких переемнных

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется функцией двух переменных, определённой на множестве D со значениями в R, и записывается в виде$z = f(x;y)$ или $f: D \to R$. При этом x и y называются **независимыми переменными** (аргументами), а z- **зависимой переменной (функцией**).

Множество $D = D(f)$ называется областью определения функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется областью изменения этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

6.2.Частные производные первого порядка

Пусть задана функция $z = f(x;y)$. Так как x и y - независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δ_x, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y)$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y)$$

Полное приращение функции z определяется равенством:

$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).\backslash$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x}$

то он называется частной производной функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x;y)$ по переменной y: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$и обозначается одним из символов $z'_x, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

6.3. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать, как функции от $(x;y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = z^n_{xx} = f^n_{x^2}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = z^n_{xy} = f^n_{xy}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z^n_{yx} = f^n_{xy}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z^n_{yy} = f^n_{y^2}(x;y);$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Так, $z_{xyy}^{m} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\left(z_{xyx}^{m}\right)'x = z_{xyx^2}^{(4)}$ и т.д.

Частная производная второго или более высокого порядка , взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Пример 1.21. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2+y^2}$.

Решение.

Найдём частные производные первого порядка:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$;$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$

Найдём частные производные второго порядка:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}$.

6.4.Дифференцируемость и полный дифференциал функции.

Функция $z = f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x;y)$,если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Главная часть приращения функции $z = f(x;y)$, линейная относительно Δx и Δy называется полным дифференциалом этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

6.5. Экстремум функции двух переменных

Точка (x_0, y_0) называется точкой максимума функции $z = f(x;y)$,если существует такая δ- окрестность точки $(x_0; y_o)$, что для каждой точки $(x;y)$ отличной от $(x_0; y_o)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0; y_o)$.

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек $(x;y)$ отличных от $(x_0; y_o)$ из -окрестности точки $(x_0; y_o)$ выполняется неравенство $f(x;y) > f(x_0; y_o)$.

Необходимые и достаточные условия экстремума.

Теорема (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ достигает экстремума, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f_x'(x_0; y_0) = 0$, $f_y'(x_0; y_0) = 0$ или не существует.

Точки, в которых первые производные равны нулю или не существуют, называются критическими точками.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Для этого необходимы дополнительные исследования функции.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M(x_0;y_0)$ функция $f(x;y)$имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M(x_0;y_0)$ является критической точкой функции $f(x;y)$, т.е.

$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0$

Вычислим значения частных производных второго порядка в точке $M(x_0;y_0)$:

$A = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}\ C = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}\ B = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x dy}$

Обозначим

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$=AC-$B^2$

Тогда:

Если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$в точке $M(x_0;y_0)$имеет экстремум: максимум, если $A < 0$;минимум, если $A > 0$;

Если $\Delta < 0,$ то функция $f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $M(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 1.22. Исследовать функцию $z = x^3 + 8y^3 + 6y^3 + 5$ на экстремум.

Решение.

Находим частные производные первого порядка

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x.$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим критические (стационарные) точки

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1/2 \end{cases}$$

Критические точки $M_1(0;0), M_2(1;1/2)$

Исследуем эти точки на экстремум с помощью достаточных условий. Для этого найдём сначала вторые частные производные:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$$

Подставляя сюда координаты критических точек, получим:

Для точки M_1: $A = 0$: $C = 0$: $B = -6 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -36 < 0$, следовательно, согласно достаточному условию, в точке M_1 функция не имеет экстремума;

Для точки M_2: $A = 6$: $C = 24$: $B = -6 \Longrightarrow \Delta = 108 > 0$ *и* $A > 0$, следовательно, в точке M_2 функция имеет экстремум, а именно минимум. Значение функции в точке экстремума $z_{min} = 4$.

6.6. Метод наименьших квадратов

Пусть на основании эксперимента требуется установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами x *и* y. В результате эксперимента получено n значений функции $y = f(x)$ при соответствующих значениях аргумента x :

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Вид функции устанавливается из теоретических соображений или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих экспериментальным данным. Предположим, что между x *и* y существует линейная зависимость, выражающая формулой

$$y = ax + b \qquad (8)$$

Требуется подобрать коэффициенты a *и* b таким образом, чтобы сумма квадратов разностей значений y_i, даваемых экспериментом, и функцией $\varphi(x_i, a, b)$ в соответствующих точках была бы наименьшей.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2.$$

(9)

На основании теоремы о необходимости условиях экстремума следует, что значения a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}, \text{то есть} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_{i^2} - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Из этой системы находим числа a *и* b и затем, подставляя их в уравнение (8) получаем уравнение искомой прямой.

Пример 1.23. Пусть в результате эксперимента получены семь значений функции $y = f(x)$ при семи значениях аргумента x, которые приведены в таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	5	4	3	4	1	3	1

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$, выражающую приближённо аппроксимирующую функцию $y = f(x)$. В декартовой прямоугольной системе координат отметить экспериментальные точки и построить аппроксимирующую функцию.

Решение.

При составлении системы уравнений (10) для определения коэффициентов a *и* b предварительно вычислим:

i	x	y	xy	x^2
1	1	5	5	1
2	2	4	8	4

3	3	3	9	9
4	4	4	16	16
5	5	1	5	25
6	6	3	18	36
7	7	1	7	49
Σ	28	20	67	140

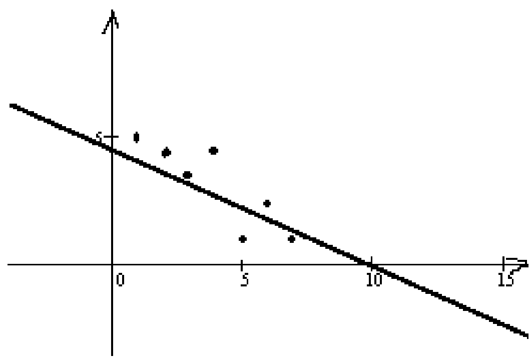
$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 67; \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 28 \quad \sum_{i=1}^{7} y_i = 20 \quad \sum_{i=1}^{7} x_i{}^2 = 140$$

Система (10) примет вид $\begin{cases} 67 - 140a - 28b = 0 \\ 20 - 28a - 7b = 0 \end{cases}$

Решая эту систему, найдём $a = -0{,}464, \quad b = 4{,}43$.

Следовательно, $y = -0{,}464x + 4{,}43$-уравнение искомой прямой.

На координатной плоскости отметим экспериментальные точки и строим график полученной функции.



VII. Задания к контрольной работе №2

1-10. Исследовать на экстремум:

1. а) $y = xlnx$ б) $y = x^2(x-6)$
2. а) $y = x^2e^x$ б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$
3. а) $y = (x^2 - x)e^x$ б) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$
4. а) $y = \frac{x^2}{e^x}$ б) $y = 3 - 2x^2 - x^4$
5. а) $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ б) $y = \frac{4x}{x^2+4}$
6. а) $y = \frac{e^x}{x^2}$ б) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$
7. а) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ б) $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$
8. а) $y = \frac{x^2+2x}{e^x}$ б) $y = \sin x + \cos x$
9. а) $y = \frac{lnx}{x}$ б) $y = 3x + tgx$
10. а) $y = \sqrt{xe^x}$ б) $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$

11-20. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [a; b]:

11. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; [0; 3].
12. $f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2$; [0; 2].
13. $f(x) = (\sqrt{3}/2)x + \cos x$; [0; π/2].
14. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; [−3; 1].
15. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; [1/2; 2].
16. $f(x) = x^4 + 4x$; [−2; 2].
17. $f(x) = (\sqrt{3}/2)x - \sin x$; [0; π/2].
18. $f(x) = 81x + x^4$; [−1; 4].
19. $f(x) = 3 - 2x^2$; [−1; 3].
20. $f(x) = x^3 - 27x + 1$ [−1; 4].

21-30. Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

21. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$
22. $z = x^3 + y^3 - 6xy$

23. $z = (x-1)^2 + 2y^2$
24. $z = x^3y^2(6-x-y), \quad (x > 0, \quad y > 0)$
25. $z = e^{x-y}(x^2-2y^2)$
26. $z = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$
27. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
28. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 1$
29. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$
30. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

31-40. В результате эксперимента получены семь значений искомой функции Y при семи значениях аргумента. Используя метод наименьших квадратов, найти функциональную зависимость между X и Y в виде линейной функции $y = ax + b$. Построить график этой функции, отметить экспериментальные значения.

1.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	6,5	7,0	5,1	5,8	4,5	4,9	3,0

2.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,0	3,5	3,4	4,5	4,2	5,8	6,0

3.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,2	5,5	4,0	5,0	2,8	3,1	1,6

4.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,8	2,8	4,0	3,7	5,5	5,2	6,2

5.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	6,5	4,5	5,2	4,0	2,5	3,0	1,6

6.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,8	4,2	5,0	4,0	4,3	2,5	3,5

7.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	4,5	5,8	4,2	4,2	4,7	2,6	3,6

8.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	3,2	2,2	3,5	4,5	3,5	5,7	4,5

9.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2,1	3,5	2,5	4,3	3,8	4,5	5,5

10.	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	5,5	6	4,1	4,8	3,5	3,9	25

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ №2

VIII. Интегрирование функции одной переменной

8.1. Неопределенный интеграл

Во многих задачах науки и техники приходится восстанавливать функцию по известной производной.

Определение 8.1.. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если на этом промежутке функция $F(x)$ непрерывна и выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Отыскание для функции $f(x)$ всех ее первообразных называется интегрированием и составляет одну из задач интегрального исчисления.

Определение 8.2. Совокупность всех первообразных для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке времени называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а произведение $f(x) \cdot dx$ – подынтегральным выражением.

Рассмотрим некоторые свойства неопределенных интегралов.

Свойство 1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Свойство 2. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и некоторой постоянной

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int l \cdot f(x)dx = l \int f(x)dx, \quad l \text{ – const}.$$

Свойство 4. Если существуют интегралы $\int f_1(x)dx$ и $\int f_2(x)dx$, то неопределенный интеграл суммы (разности) $f_1(x)\pm f_2(x)$ равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x)dx)=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

Пользуясь свойством 1 и обращаясь к формулам для производных основных элементарных функций, можно составить таблицу интегралов.

$$\int 1\cdot dx = x+c;$$

$$\int x^l dx=\frac{x^{l+1}}{l+1}+c, \text{ где } l\neq -1;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c;$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{Bmatrix} arctgx+c \\ -arcctgx+c\end{Bmatrix};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{Bmatrix} \arcsin x+c \\ -\arccos x+c\end{Bmatrix};$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c;$$

$$\int e^x dx=e^x+c;$$

$$\int\cos xdx=\sin x+c;$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+c;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c;$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}+c;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right|+c;$$

$$\int\frac{xdx}{x^2\pm a}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2\pm a\right|+c.$$

Пример 8.1.

Вычислить интегралы:

$$1.\int\left(6x^3-4x^2+5\right)dx=\int 6x^3dx-\int 4x^2dx+\int 5dx=$$

$$=6\int x^3dx-4\int x^2dx+5\int dx=6\cdot\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^3}{3}+5x+c=\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+5x+c;$$

$$2.\int \frac{x\sqrt{x}+2x^2-1}{2\sqrt[4]{x}}dx=\int \frac{x\cdot x^{\frac{1}{2}}+2x^2-1}{2x^{\frac{1}{4}}}dx=\int\left(\frac{x^{1+\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2x^2}{2x^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}}\right)dx=$$

$$=\int \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}dx+\int x^{2-\frac{1}{4}}dx-\int\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{4}}dx+\int x^{\frac{7}{4}}dx-\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+\frac{x^{\frac{7}{4}+1}}{\frac{7}{4}+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+c=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}}+\frac{x^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+c=\frac{2}{9}x^{\frac{9}{4}}+\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}+c;$$

$$3.\int ctg^2xdx=\int\frac{cos^2x}{sin^2x}dx=\int\frac{1-sin^2x}{sin^2x}dx=\int\left(\frac{1}{sin^2x}-\frac{sin^2x}{sin^2x}\right)dx=$$

$$\int\frac{1}{sin^2x}dx-\int 1\cdot dx=-ctgx-x+c;$$

$$4.\int\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}-\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int x^{-2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-arctgx+c=-\frac{1}{x}-arctgx+c.$$

Рассмотрим правила, позволяющие вычислить неопределенный интеграл, зная таблицу.

Если существует $\int f(x)dx=F(x)+c$, то справедливы равенства:

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+c;$$

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+c;$$

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Примеры.

$$\int\sin(x-10)dx=-\cos(x-10)+c;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 4x}=\frac{1}{4}tg4x+c;$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}dx=\frac{1}{3}\arcsin(3x+1)+c;$$

$$\int(7x+4)^{102}dx=\frac{1}{7}\frac{(7x+4)^{103}}{103}+c=\frac{(7x+4)^{103}}{721}+c.$$

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной. Он применяется в том случае, если подынтегральное выражение можно представить в виде $\int F(j(x)) \cdot j(x)dx$. Подстановка $j(x) = t$ сводит исходный интеграл к интегралу вида $\int F(t)dt$.

$$\int x^2 \cdot e^{x^3-2}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ x^3 - 2 = t \\ 3x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + c;$$

Пример 8.2.

$$\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ arctgx = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{arctg^4 x}{4} + c;$$

$$\int \frac{dx}{x(1-\ln^2 x)} = \left| \begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = arctgt + c = arctg(\ln x) + c.$$

К сожалению, не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы сомножителей. Для того, чтобы найти интеграл от произведения некоторого класса функций, таких как $x^l \cdot \ln^k$, $x^l \cdot \sin kx$, $x^l \cdot \cos kx$, $x^l \cdot e^{kx}$, $x^l \arcsin kx$, $x^l arctgkx$ и других, применяется формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример 8.3.

Вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

$$\int x \cdot \cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} \textit{положим} \\ u = x \quad dv = \cos 2xdx \\ \textit{тогда} \\ dV = dx \\ V = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c;$$

$$\int x^2 \cdot \sin xdx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \;\; dv = \sin xdx \\ du = 2xdx \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cdot \cos x + 2\int x \cdot \cos xdx = \left| \begin{array}{l} \textit{применим} \\ \textit{формулу} \\ \textit{еще раз} \\ u = x \; dv = \cos xdx \\ du = dx \; v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \cdot \sin x - \int \sin x dx\right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c;$$

$$\int x^4 \cdot \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^4 dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{matrix} \right| = \frac{x^5}{5} \cdot \ln x - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} \cdot x^5 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{5} + c =$$

$$= \frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c.$$

8.2. Определенный интеграл.

Определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа – является мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах.

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана при $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0< x_1< x_2< x_{i-1} < x_i < x_n = b$ и составим сумму, которая называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [a, b]:

$\sum_{i=1}^{n} f(C_i) \cdot \Delta x_i = f(C_1) \cdot \Delta x_1 + f(C_2)\Delta x_2 + ... + f(C_n)\Delta x_n$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а каждая точка C_i

произвольно выбрана из интервала (x_{i-1}, x_i).

Определение 8.3. Если предел интегральной суммы конечен и не зависит от способа разбиения [a, b] и от выбора точек C_i, то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на [a, b] и обозначается

$$\int_b^a f(x)dx = \lim \sum_{i-1}^{n} f(C_i) \cdot \Delta x_i,$$

где

а - нижний предел интегрирования; *в* - верхний предел интегрирования.

Рассмотрим основные свойства определенного интервала, которые помогут его вычислить.

Свойство 1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Свойство 2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Свойство 3. Постоянный множитель K можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx.$

Свойство 4. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 5. Если отрезок [a, b] разбит точкой c на две части [a, c] и[c, b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Определенный интеграл можно вычислить с помощью простой и удобной формулы, которая называется формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Как видно, эта формула выражает определенный интеграл от непрерывной функции через интеграл.

Рассмотрим примеры вычисления определенного интеграла.

Пример 8.4. Вычислить

$$\int_1^2 (3x^2 - x + 1)dx = \left|\begin{matrix}\text{используем}\\ \text{свойства}\end{matrix}\right| = 3\int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 xdx + \int_1^2 dx = \left|\begin{matrix}\text{находим}\\ \text{первообразные}\end{matrix}\right| =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + x\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 - \frac{1}{2}(2^2 - 1^3) + 2 - 1 = 8 - 1 - \frac{1}{2}\cdot(4-1) + 1 = 8 - \frac{3}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

Пример 8.5. Вычислить

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^4 + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Big|_1^4 =$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\left(\frac{1}{4} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}.$$

Пример 8.6.. Вычислить

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\left((8+1)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\cdot(27-1) = \frac{26}{3}$$

.

Пример 8.7. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{(e^x - 1)^2}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x}dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{2e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx = \int_0^1 (e^x - 2 - e^{-x})dx =$$

$$\int_0^1 e^x dx - 2\int_0^1 dx - \int_0^1 e^{-x}dx = e^x\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 + e^{-x}e^{-x}\Big|_0^1 = e - 1 - 2 + e^{-1} - 1 = e - 4 + \frac{1}{e}.$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где функция *f(x)* непрерывна на отрезке [a, b]. Введем новую переменную *t* по формуле $x = j(t)$.Не приводя доказательство, запишем формулу замены переменных

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

При этом функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ должны быть непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, концы которого α, β находятся из условий $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$

Замечание. Отметим, что при вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к первоначальной переменной x, но необходимо пересчитать пределы интегрирования.

Пример 8.8. Вычислить

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}} = \left|\begin{array}{l} \text{выполним замену} \\ 2x+1=t^2 \text{тогда} \\ x=\frac{1}{2}(t^2-1) \quad dx=\frac{1}{2}\cdot 2tdt \\ \text{или } dx=tdt \\ \text{заменим пределы интегрирования}; \\ \text{если } x=3, \text{ то } t^2=7,\ t_1=\sqrt{7} \\ \text{если } x=8, \text{ то } t^2=17,\ t_2=\sqrt{17} \end{array}\right| = \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)\cdot tdt}{\sqrt{t^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} (t^2-1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_{\sqrt{7}}^{\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17^3}}{3} - \sqrt{17} - \frac{\sqrt{7^3}}{3} + \sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\sqrt{7}\right).$$

Пример 8.9. Вычислить

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^4 x}{\cos^2 x}dx = \left|\begin{array}{l} \text{замена} \\ tgx=t; \quad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt \\ \text{находим новые пределы} \\ \text{интегрирования} \\ t_1=tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}, t_2=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \end{array}\right| = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^5}}{5} - \frac{\sqrt{3^5}}{5^5\cdot 5} = \frac{\sqrt{3^5}(5^5-1)}{5^6}.$$

Пример 8.10. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \text{упростим} \int_0^1 \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left|\begin{array}{l} \text{замена}: \\ e^x=t \\ e^x dx=dt \\ \text{новые пределы} \\ \text{интегрирования} \\ t_1=e^0=1 \\ t_2=e^1=e \end{array}\right| = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_1^e =$$

$$arctge - arctg1 = arctge - \frac{\pi}{4}.$$

8.3 Приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи прикладного характера. Наиболее часто используются формулы для вычисления площади плоской фигуры. Рассмотрим одну из формул. Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением

$r = r(j)$.

Определение 8.4. Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная двумя лучами $j = a$, $j = b$ и графиком функции $r = r(j)$.

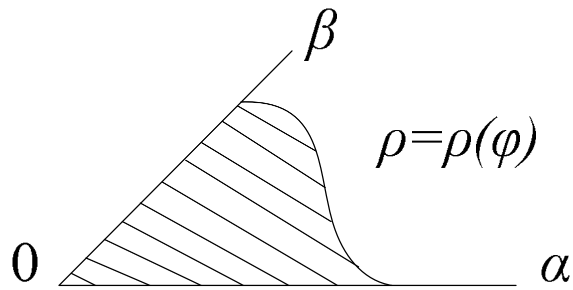


Рисунок 1.1

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(j)\,dj.$$

Пример 8.11. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 - \cos j)$.

Решение.

Выполним построение фигуры

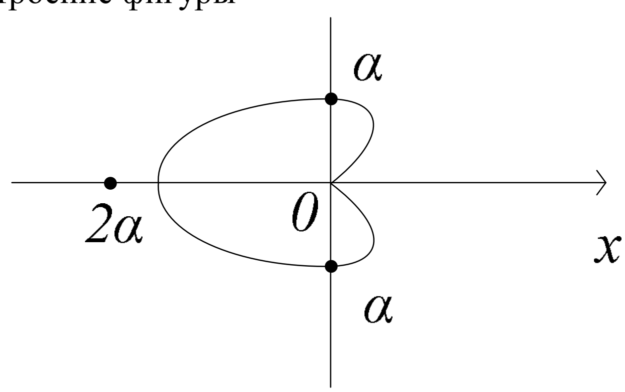


Рис 1.2

Из рисунка видно, что фигура симметрична оси *OX*, следовательно

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^p a^2(1-\cos j)^2\,dj = a^2\int_0^p (1-2\cos j+\cos^2 j)\,dj = a^2\int_0^p dj - 2\int_0^p \cos j\,dj + \int_0^p \cos^2 j\,dj) =$$

$$= a^2\Big(j\Big|_0^p - 2\cdot\sin j\Big|_0^p + \int_0^p \frac{1+\cos 2j}{2}dj\Big) = a^2\Big(p - 2\sin p + 2\sin 0 + \frac{1}{2}\int_0^p dj + \frac{1}{2}\int_0^p \cos 2j\,dj\Big) =$$

$$= a^2\Big(p - 2\sin p + 2\sin 0 + \frac{1}{2}\int_0^p dj + \frac{1}{2}\int_0^p \cos 2j\,dj\Big) = a^2\Big(p + \frac{1}{2}j\Big|_0^p + \frac{1}{4}\sin 2j\Big|_0^p\Big)$$

$$= a^2\Big(p + \frac{p}{2} + \frac{1}{4}\sin 2p - \frac{1}{4}\sin 0\Big) = a^2\cdot\frac{3}{2}p = \frac{3pa^2}{2} = \frac{3pa}{2}\,(\text{кв.ед.}).$$

Пример 8.12.

Вычислить площадь круга *r =2 sinj* .

Решение.

Построим окружность

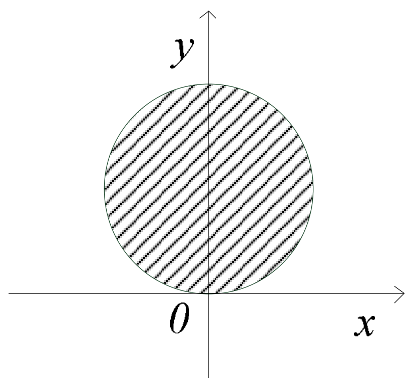


Рис. 1. 3

Из рисунка видно, что фигура расположена в I и II четвертях. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^p (2\sin j)^2 dj = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\int_0^p \frac{1-\cos 2j}{2}dj = \int_0^p 1\cdot dj - \int_0^p \cos 2j\,dj = j\Big|_0^p =$$

$$= p - \frac{1}{2}(\sin 2p - \sin 0) = p\,(\text{кв.ед}).$$

IX. Двойной интеграл

9.1. Определение и основные свойства

Пусть функция *f(x, y)* определена в ограниченной замкнутой области *D* плоскости *XoY*. Разобьем область *D* произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2 \ldots \Delta\sigma_n$ и диаметры d_1, $d_2, \ldots d_n$ - наибольшее расстояние между двумя точками границы этой области. Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_k(z_k h_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на площадь этой области. Составим интегральную сумму для функции *f(x, y)* по области *D*.

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k h_k)\Delta s_k = f(z_1 h_1)\Delta s_1 + f(z_2 h_2)\Delta s_2 + \mathbf{K} + f(z_n h_n)\Delta s_n$$

Если при max $d_к \to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения *D* на элементарные области и от выбора точек $P_к$ в них, то этот предел называется двойным интегралом от функции *f(x, y)* по области *D* и обозначается следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_л \to 0} f(z_к h_к)\Delta s_к.$$

Если *f(x,y)>0* в области *D*, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью *z=f(x,y),* сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси *OZ* и снизу областью *D* плоскости XOY.

Рассмотрим основные свойства двойного интеграла.

1°. $\iint\limits_D (f(x,y) \pm q(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D q(x,y)dxdy;$

2°. $\iint\limits_D C \cdot f(x,y)dxdy = C \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy;$

3°. Если область интегрирования *D* разбита на две области D_1 и D_2 , то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

9.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Ранее было отмечено, что если функция *f(x, y)* непрерывна и неотрицательна на *D*, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ выражает объем цилиндрического бруса. Пусть *D* –криволинейная трапеция, ограниченная прямыми *x = a, x = b (a £ b)* и графиками непрерывных на [*a, b*] функций *y = q(x), y = h(x),* где *q(x) £ h(x),* тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{q(x)}^{h(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.1)$$

Формула 2.1 справедлива для любой непрерывной на *D* функции, не обязательно неотрицательной на *D*. Ее смысл состоит в том, что вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух определенных интегралов: сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{q(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$, в результате чего получается некоторая функция, а затем вычисляется внешний интеграл от полученной функции по промежутку $[a, b]$.

Пример 9.1. Вычислить двукратный интеграл $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right)dx.$

Решение. Вычисление начинаем с внутреннего интеграла, стоящего в скобках:

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2\cdot y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2}dx=\int\limits_0^1\left(x^2\cdot x^2+\frac{(x^2)^3}{3}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{3\cdot 7}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Пример 9.2. Вычислить $\iint\limits_D(x+3y-1)dxdy,$ где D - фигура, ограниченная линиями x=0, x=1, y=x, y=3x.

Решение. Построим сначала область интегрирования D. Она представляет собой фигуру, заключенную между двумя лучами y = x, y = 3x, выходящими из начала координат и прямой x = 1

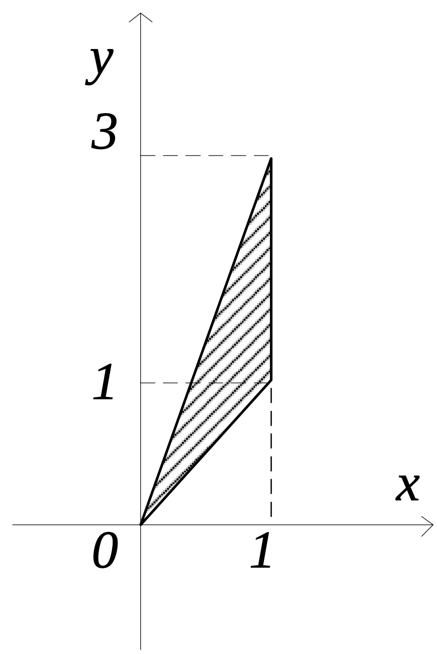


Рис. 2.1

Для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой (2.1)

$$\iint\limits_D (x+3y-1)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{3x}(x+3y-1)dy=\int\limits_0^1 dx(xy+3\cdot\frac{y^2}{2}-y)\Big|_x^{3x}=$$

$$\int\limits_0^1\left(x\cdot 3x+\frac{3}{2}\cdot(3x)^2-3x-x\cdot x-\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=$$

$$\int\limits_0^1\left(3x^2+\frac{27}{2}x^2-3x-x^2-\frac{3}{2}x^2+x\right)dx=\int\limits_0^1(14x^2-2x)dx=(14\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{14}{3}-1=\frac{11}{3}.$$

Замечание. Если область интегрирования D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y=c$, $y=d$, $x=j(y)$, $x=y(x)$, где $\varphi(y)\le\psi(x)$ на $[c, d]$, то справедлива еще одна формула для вычисления двойного интеграла по области D:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{j(t)}^{y(y)} f(x,y)dx \qquad (2.2)$$

На практике обе формулы используются в равной степени. Обычно предпочтение отдается той из них, которая приводит либо к меньшему числу слагаемых, либо к более простым вычислениям.

Пример 9.3. Вычислить $\iint\limits_D (x^2y-3)dxdy,$ где

D – фигура, ограниченная линиями $y=2$, $y=x$, $xy=1$.

Решение. Построим сначала фигуру D и найдем точки пересечения линий, ее ограничивающих.

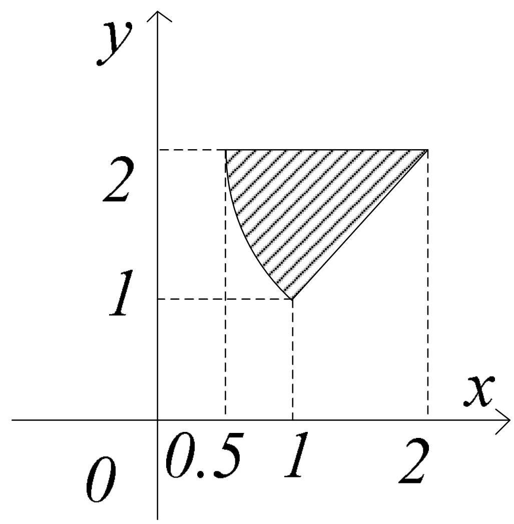


Рис. 2.2

Из рисунка видно, что лучше воспользоваться формулой (2.2). Таким образом

$$\iint_D (x^2y-3)dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(x^2y-3)dx=\int_1^2 dx\left(\frac{x^3}{3}\cdot x-3x\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y}=\int_1^2\left(\frac{y^3}{3}\cdot y-3y-\frac{1}{3y^3}\cdot y+3\cdot\frac{1}{y}\right)dy=$$

$$=2\int_1 dy\left(\frac{y^4}{3}-3y-\frac{1}{3y^2}+\frac{3}{y}\right)dy=\left(\frac{y_5}{3\cdot 5}-3\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{1}{3\cdot y}+3\ln|y|\right|_1^2=\frac{32}{5}-\frac{12}{2}+\frac{1}{6}+3\ln 2-\frac{1}{15}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-3\ln 1=$$

$$=-\frac{44}{15}+\ln 2.$$

2.3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x и y к полярным координатам ρ, φ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x = r\ cos j,\ y = r\ sin j$, осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos j, r\sin j)\,r\,dr\,dj \qquad (2.3)$$

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами φ = α, φ = β, выходящими из полюса, и двумя кривыми $r = r_1(j)$ и $r = r_2(j)$, где

$r_{1)}(j)$ и $r_2(j)$ – однозначные функции при a £ j £ b и $r_{1(}j)$ £ $r_2(j)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(r\cos j, r\sin j)\,r\,dr\,dj=\int_a^b dj\int_{r_1(j)}^{r_2(j)} f(r\cos j, r\sin j)\,r\,dr\,dj \qquad (2.4)$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{r_2(j)}^{r_2(j)} f(r\cos j, r\sin j)\,r\,dr$, в котором φ считается постоянной величиной.

Пример 9.4. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 2.3).

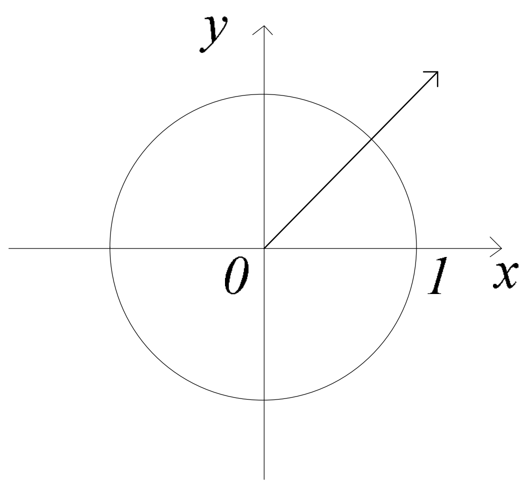


Рис. 2.3

Решение. Построим область D и перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, тогда

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi = \iint_D \sqrt{1-\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint_D \sqrt{1-\rho^2}\cdot \rho d\rho d\varphi .$$

Для перехода к повторным интегралам запишем уравнение $x^2 + y^2 = 1$ в виде $\rho = 1$ и как видно из рисунка φ изменяется от 0 до 2π.

Таким образом

$$\iint_D \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 -\frac{1}{2}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-\rho^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\Bigg|_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3}\pi .$$

Пример 9.5. Вычислить $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$ если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Строим область интегрирования, преобразовав уравнение $x^2 + y^2 = 2x$ к каноническому виду $(x-1)^2+y^2= 1$.

Запишем теперь уравнение границы области D в полярных координатах, заменив $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, $\rho = 2\cos\varphi$.

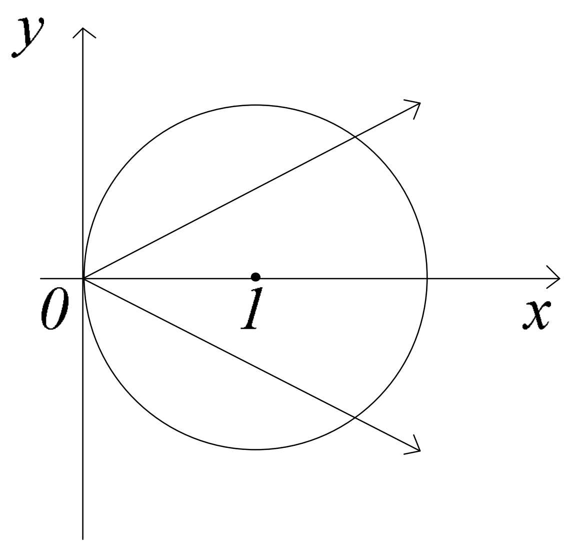


Рис. 2.4

Из рис. 2.4 видно, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом,

$$\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\phi=\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi\int\limits_0^{2\cos\phi}\rho^3 d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\phi} d\phi=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^4\cdot\cos^4\phi\, d\phi=$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)^2 d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\phi+\cos^2 2\phi)d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\phi+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4\phi)$$

$$=\phi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\phi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\phi d\phi=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\sin\pi-\sin(-\pi)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{8}\sin 4\phi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

9.4. Применение двойного интеграла для вычисления площади плоской фигуры и объема цилиндрического тела

С помощью двойного интеграла можно вычислить площадь плоской фигуры D. Для этого используются формулы:

$$S=\iint\limits_D dxdy \text{ (в декартовых координатах)} \qquad (2.5)$$

$$S=\iint\limits_D rdrdj \text{ (в полярных координатах)} \qquad (2.6)$$

Пример 9.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y = x, x = 2, x = 0.$ (рис. 2.5).

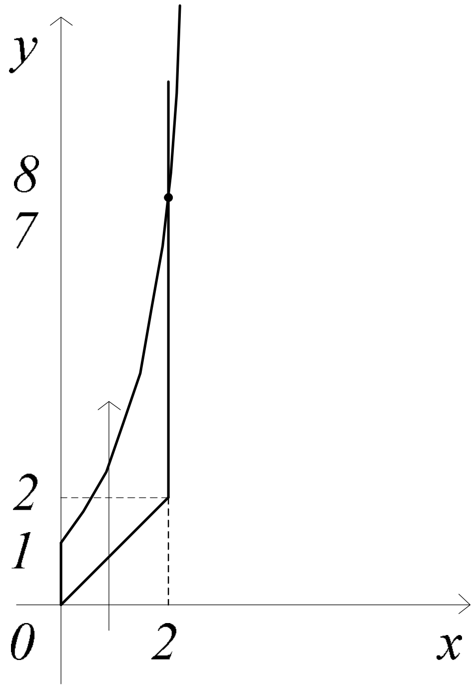


Рис. 2.5

Применяя формулу (2.5)

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{e^x}dy=\int\limits_0^2 y\Big|_x^{e^x}dx=\int\limits_0^2(e^x-x)dx=e^x\Big|_0^2-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=e^2-e^o-\frac{2^2}{2}=e^2-1-2=e^2-3(\text{кв.ед.}).$$

Пример 9.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

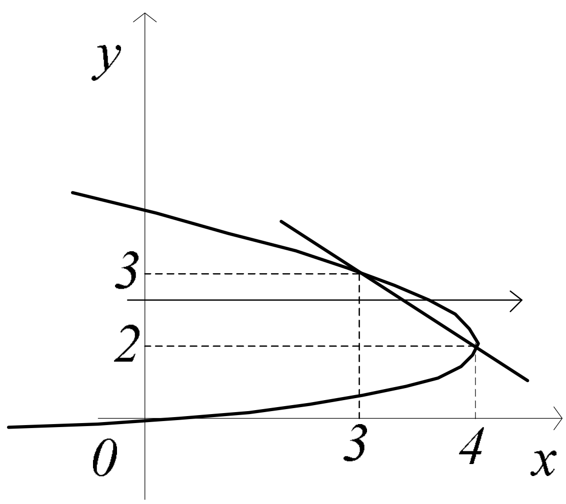


Рис. 2.6

Решение.

Для того, чтобы построить фигуры найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему $\begin{cases}x=4y-y^2\\x+y=6\end{cases}$. В результате получим две точки А(4; 2) и В(3; 3). Первая линия – парабола, координаты ее вершины М (4; 2).

$$S=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3(4y-y^2-6+y)dy=-\frac{1}{3}y^3\Big|_2^3+5\frac{y^2}{2}\Big|_2^3-6y\Big|_2^3=-\frac{1}{3}(27-8)+$$
$$+\frac{5}{2}(9-4)-6(3-2)=-\frac{19}{3}+\frac{25}{2}-6=-\frac{38+75-36}{6}=\frac{1}{6}(кв.ед.).$$

Из определения двойного интеграла следует, что объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, снизу плоскостью z=0 и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости XOY область D, вычисляется по формуле

$$V=\iint_d f(x,y)dxdy \qquad (2.7)$$

Пример 9.8. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостями $x=1$, $y=x$, $y=3x$, $z=0$ и $z=x^2+y^2$.

Решение. Для вычисления объема используем формулу(2.7). При этом очень важно изобразить область D в плоскости XOY (рис.2.7).

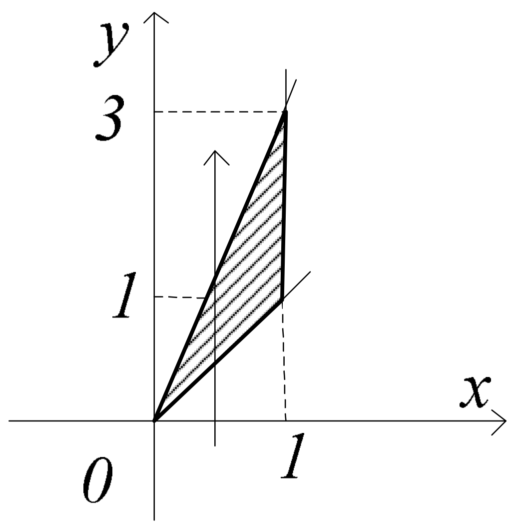


Рис. 2.7

$$V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{3x}(x^2+y^2)dy=\int_0^1(x^2\cdot y+\frac{y^3}{3})\Big|_x^{3x}dx=\int_0^1(x^2\cdot 3x+\frac{27x^3}{3}-x^2\cdot x-\frac{x^3}{3})dx=$$
$$=\int_0^1\frac{32}{3}x^3dx=\frac{32}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{8}{3}(куб.ед.).$$

Пример 9.9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ и расположенного в 1 актанте.

Решение. Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D – круговой сектор, ограниченной дугой окружности $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$. и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$ (рис.6.8). Следовательно, $V=\iint_D(1-x^2-y^2)dxdy$.

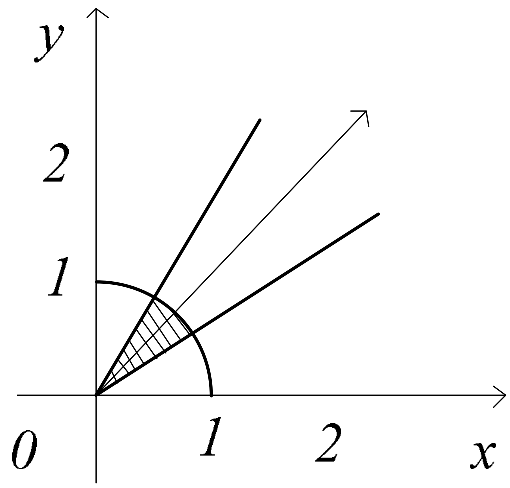


Рис 2.8

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, целесообразно перейти к полярным координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$в этих координатах примет вид $\rho=1$, подынтегральная функция равна $1-\rho^2$, а пределы интегрирования по φ определяем из уравнений прямых $\operatorname{tg}\varphi_1 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом имеем

$$V = \iint_D (1-x^2-y^2)dxdy = \iint_D (1-\rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\,(\rho-\rho^3)d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{48}(\textit{куб.ед}).$$

X. Тройной интеграл.

10.1. Определение тройного интеграла

Пусть функция f(x,y,z) определена в ограниченной замкнутой области V пространства OXYZ. Разобьем область V произвольным образом на n элементарных областей V_1, V_2 , V_3, …, V_n . Обозначим через d_1 , d_2 , d_3 … d_n диаметры, а через ΔV_1, ΔV_1, ΔV_1, …ΔV_n – объемы элементарных областей. В каждой элементарной области возьмем произвольную точку M_i (x_i , y_i ,z_i) и умножим значение функции в точке M_i на объем соответствующей области ΔV_i . Затем составим сумму

$$fx_1, y_1, z_1)\cdot\Delta V_1 + (x_2, y_2, z_2)\cdot\Delta V_2 + f(x_3, y_3, z_3)\cdot\Delta V_3 + \ldots + f(x_n, y_n, z_n)\cdot\Delta V_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta V_i \tag{10.1}$$

Таких сумм можно составить бесконечное множество и они называются интегральными суммами.

Определение 10.1. Если существует предел интегральных сумм вида (3.1), не зависящий ни от способа разбиения на элементарные области, ни от выбора в них точек M_i при $n\to\infty$, $d_i \to 0$, то он называется тройным интегралом от функции f(x,y,z) по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x_1, y_1, z_1)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \tag{10.2}$$

где $f(x,y,z)$ - подынтегральная функция; V – область интегрирования; $dV = dx\,dy\,dz$ – элемент объема.

Если $f(x,y,z) > 0$ в области V, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,t,z)\,dV$, представляет собой массу тела, занимающего область V и имеющего переменную плотность $\gamma = f(x,y,z)$ (физический смысл тройного интеграла).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

10.2. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

В декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ и его вычисление по области V сводится к трехкратному интегрированию, т.е. к последовательному вычислению трех определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

Пусть область V определяется неравенствами $x_1 £\ x £\ x_2$, $y_1(x) £\ y £\ y_2(x)$, $z_1(x,y) £\ z £\ z_2(x,y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ - непрерывные функции. Эта область называется простой, так как любая прямая, находящаяся внутри области параллельно оси OZ , пересекает границу области не более, чем в двух точках (рис.3.1).

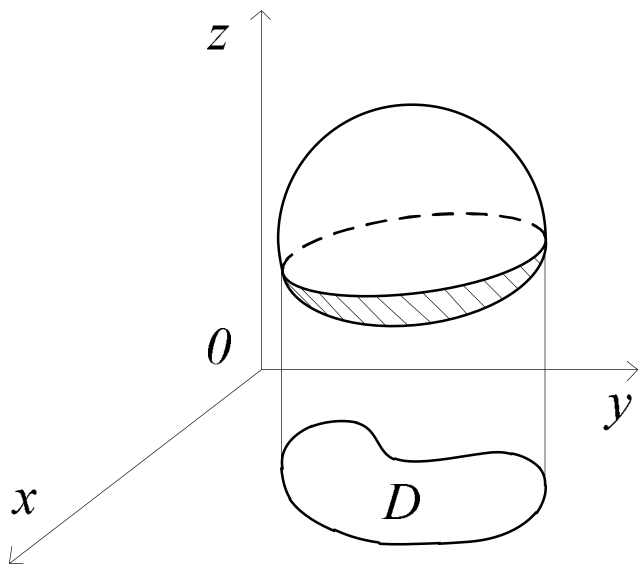


Рисунок 10.1

D – проекция области V на плоскость XOY.

$Z=Z_1(x,y)$ - уравнение нижней поверхности (заштрихована)

$Z=Z_2(x,y)$ – уравнение верхней поверхности, тогда тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V вычисляется по формуле

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{10.3}$$

Рассмотрим пример.

Пример 10.1. Вычисления тройного интеграла $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область V определяется неравенствами $0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Используя формулу (3.3), получаем

$$\iiint zdxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (1-x^2-y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-2x^3-\frac{8}{3}x^2-x+x^3+\frac{x^3}{3})dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (x-\frac{10}{3}x^3)dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{10}{3}\cdot\frac{x^4}{4})\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Пример 10.2. Вычислить $\iiint\limits_V (4+z)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=2$ (рис.3.2)

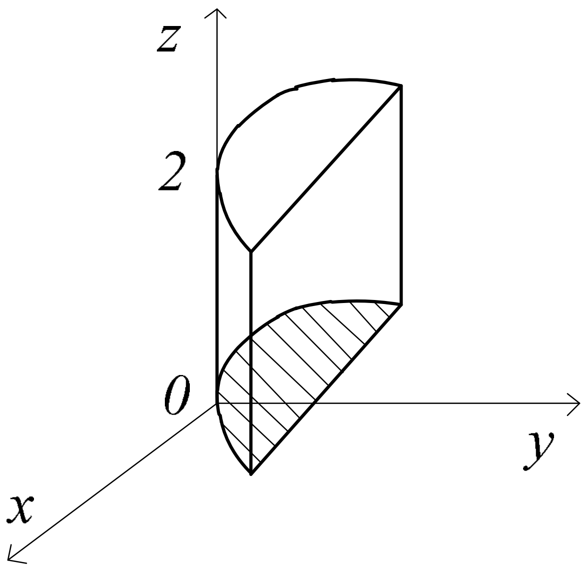


Рис. 10.2

Решение. Уравнение $y=x^2$ задает параболический цилиндр, $y=1$, $z=0$, $z=2$ – плоскости. Изобразим область V и область D, принадлежащую плоскости XOZ (рис.3.3).

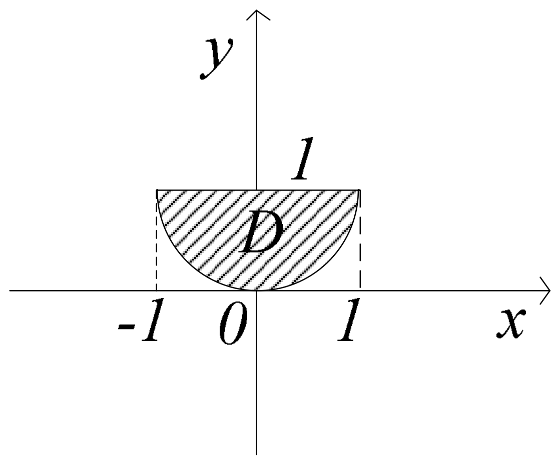


Рисунок 10.3

$$\iiint (4+z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{2} (4+z)dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{2} (4z + \frac{z^2}{2})\Big|_0^2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (4\cdot 2 + \frac{2^2}{2})dy = 10\int_{-1}^{1} y\Big|_{x^2}^{1} dx =$$

$$= 10\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = 10(x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = 10(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}) = 10(2 - \frac{2}{3}) = \frac{40}{3}.$$

10.3 Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах.

При необходимости тройной интеграл можно перевести в систему цилиндрических или сферических координат.

Если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью, то от декартовых координат переходят к цилиндрическим. В цилиндрических координатах положение точки M (x,y,z) OXYZ определяется числами $r,\ j\ ,z$ (рис.3.4)

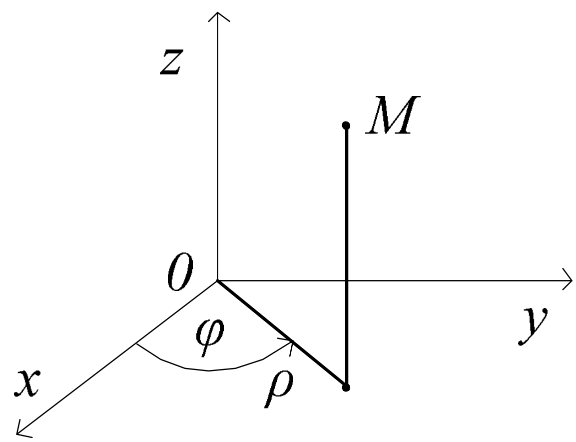


Рис. 10.4

Они называются цилиндрическими координатами точки M, где r - радиус-вектор проекции точки M на плоскость оху; j - угол, образованный этим радиусом-вектором с осью ох; z – аппликата точки M. Используя формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим

$$\begin{cases} x = r\cos j \\ y = r\sin j \\ z = z \end{cases}, \qquad (10.4)$$

где $\rho \geq 0$, ,$\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in R$, получим

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos j, r\sin j, z)\,r\,dr\,dydz, \qquad (10.5)$$

Пример 10.3. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz.$

Решение. По данным пределам интегрирования $0 \leq x \leq 1$, $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ построим область V в пространстве (рис.10.5) и плоскую фигуру D, расположенную в плоскости ХоУ (рис.10.6)

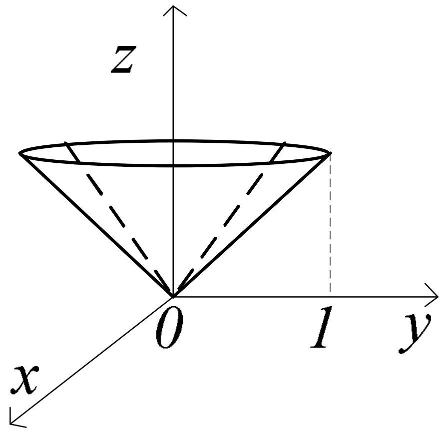


Рис. 10.5

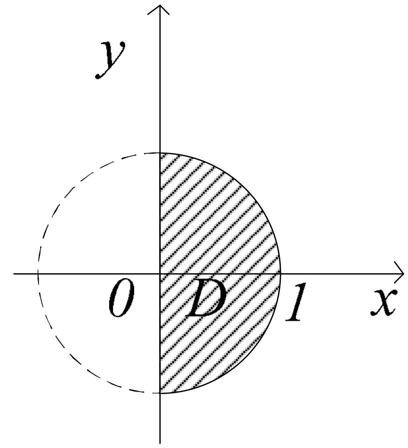


Рис. 10.6

В данном случае удобно перейти к цилиндрическим координатам по формулам (3.4) и (3.5). Из уравнения окружности в декартовых координатах $y=\pm\sqrt{1-x^2}=1,\ x^2+y^2=1$ получим $r = 1$ в полярных координатах, $-\frac{p}{2}\le y\le\frac{p}{2}$, а $r\le z\le 1$.

Таким образом

$$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}dz=\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}dj\int_0^1 r\,dr\int_r^1 dz=\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}dj\int_0^1 r\,dr\cdot z\Big|_r^1=\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}dj\int_0^1 d(1-r)dr=\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 dj=\frac{1}{6}\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}dj=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot j\Big|_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}}=\frac{p}{6}.$$

Если область интегрирования есть шар или его часть, или если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2+z^2)$, то от декартовых координат переходят к сферическим. В сферических координатах положение точки M(x, y, z) в пространстве OXYZ определяется тремя числами ρ, φ, θ (рис.10.7).

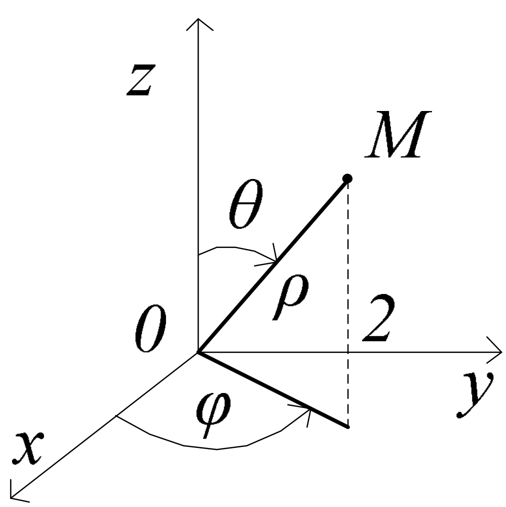


Рисунок 10.7

Числа (ρ, φ, θ) называются сферическими координатами точки M, где r - длина радиуса-вектора точки M; φ - угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость OXY и осью OX; θ- угол отклонения радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ от оси OZ.

Используя формулы перехода от декартовых координат к сферическим

$$\begin{cases} x = r\cos j\ \sin q \\ y = r\sin j\ \sin q \\ z = r\cos q \end{cases}, \qquad (10.6)$$

где $r \ge 0;\ \ j \in [0;2p];\ \ q \in [0;p]$, а $dxdydz = r^2 \sin q dr dj dq$ получим

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\cos j\ \sin q, r\sin j\ \sin q, r\cos q)p^2 \sin q dr dj dq, \qquad (10.7)$$

Пример10.4. Вычислить $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, если область V - верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Решение. Введем сферические координаты; новые переменные изменяются в пределах $0 \le r \le 2,\ \ 0 \le j \le 2p,\ \ 0 \le q \le \frac{p}{2}$.

Таким образом, учитывая формулы (3.6) и (3.7) получим

$$\iiint_V f(x^2+y^2)dxdydz = \iiint_V (r^2\cos^2 j\ \sin^2 q + r^2 \sin^2 j\ \sin^2 q)\cdot r^2 \sin q dr dj dq =$$

$$= \iiint_V r^2 \sin^2 q(\cos^2 j + \sin^2 j)\cdot r^2 \cdot \sin q dr dj dq = \iiint_V r^4 \sin^3 q dr dj dq = \int_0^2 r^4 dr \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^3 q dq \int_0^{2p} dj =$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 q \cdot \sin q dq \cdot j \Big|_0^{2p} = -2p\int_0^2 r^4 dr \int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos^2 q)d(\cos q) = -2p\int_0^2 r^4 dr \cdot (\cos q - \frac{\cos^3 q}{3})\Big|_0^{\frac{p}{2}} =$$

$$= -2p\int_0^2 r^4 dr(-1+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}p \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{4}{15}p \cdot 32 = \frac{128}{15}p.$$

10.4. Приложение тройного интеграла

С помощью тройного интеграла можно решать геометрические и физические задачи. Рассмотрим формулу, позволяющую вычислить объем V пространственного тела *V*.

Если вычисления ведутся в декартовых координатах, то

$$V = \iiint_V dxdydz, \qquad (10.8)$$

в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint_V r dr dj dz \qquad (10.9)$$

в сферических координатах:

$$V=\iiint\limits_V r^2 \sin q\, dr\, dj\, dq. \qquad (10.10)$$

,

Пример10.5. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2+2$ и плоскостями $y=2-x,\ \ z=1,\ \ x=0,\ y=0.$

Решение. Изобразим тело (рис.3.8.), объем которого нужно найти. Снизу оно ограничено плоскостью $z=1,$ сверху – параболоидом $z=x^2+y^2+2$, а слева и справа плоскостями $x=0,\ y=0.$

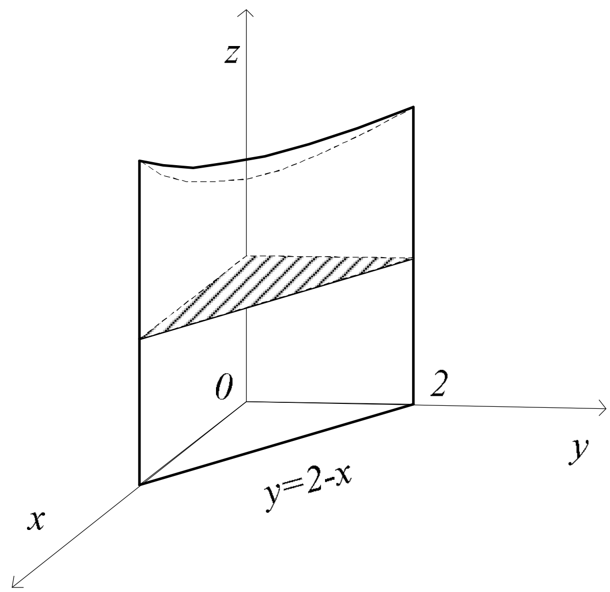


Рис. 10.8

Для вычисления объема воспользуемся формулой (10.8)

$$\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_1^{x^2+y^2+2} dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} z\Big|_1^{x^2+y^2+2}=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x^2+y^2+2-1)dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx(x^2y+\frac{y^3}{3}+y)\Big|_0^{2-x}(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}+2-x)dx=$$

$$=(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(2-x)^4}{4}+2x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^2=\frac{2}{3}\cdot 8-4-\frac{1}{12}\cdot 0+4-2=\frac{10}{2}(\text{\textit{куб.ед.}}).$$

Пример 10.6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z\ge 0,$ $x^2+y^2-z^2=0,\ \ x^2+y^2+z-12=0.$

Решение. Данное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $x^2+y^2+z-12=0$ или $z=12-x^2-y^2$ и снизу – конусом $x^2+y^2=z^2$ (рис.10.9).

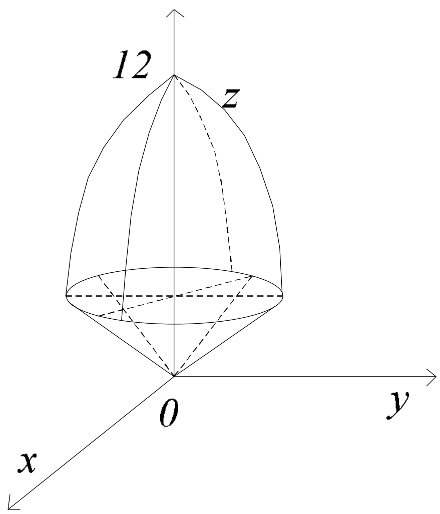


Рис. 10.9

Чтобы определить уравнение линии пересечения этих поверхностей решим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=12-z \end{cases}$$

Отсюда $z=12-z$ или $z^2+z-12=0$. Решая это квадратное уравнение, имеем $z_1=3$, $z_2=-4$, т.е. эти поверхности пересекаются при z =3, z = - 4. Так как по условию z ≥ 0, то нас интересует линия пересечения при z = 3. Этой линией будет окружность $x^2+y^2=9$.

Для вычисления объем перейдем к цилиндрическим координатам и воспользуемся формулой (10.9.). Таким образом $V=\iiint\limits_V r\,dr\,dj\,dz.$

Для расстановки пределов интегрирования запишем уравнение окружности $x^2+y^2=9$ в полярных координатах r = 3, тогда $j\in[0;2p]$ из уравнений поверхностей определим пределы интегрирования для z. Очевидно, что $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 12-(x^2+y^2)$. Заменив $x=r\cos j$, $y=r\sin j$, получаем $r\le z\le 12-r^2$.

Тогда

$$V=\iiint\limits_V r\,dr\,dj\,dz=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^3 r\,dr\int\limits_r^{12-r^2}dz=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^3 r\,dr\cdot z\Big|_r^{12-r^2}=\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^3 r(12-r^2-r)dr=$$

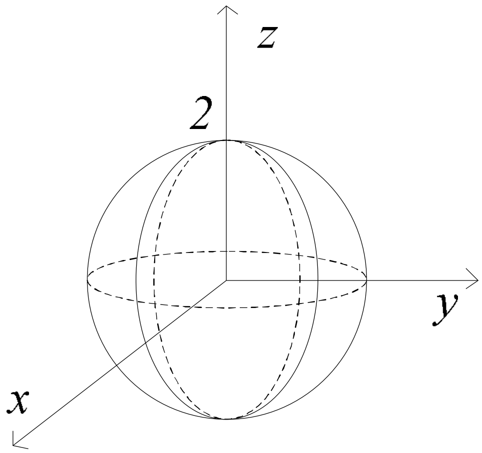
$$=\int\limits_0^{2p}\left(12\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^3 dj=\int\limits_0^{2p}\left(6\cdot 9-\frac{81}{4}-9\right)dj=\frac{99}{4}\int\limits_0^{2p}dj=\frac{99}{4}\cdot 2p=\frac{99}{2}(\text{куб.ед.}).$$

Задача . Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\ \ y\le -x,\ \ x\ge 0.$

Решение. Так как областью интегрирования V является часть сферы, то для вычисления объема V перейдем к сферическим координатам и воспользуемся формулой (10.10).

$V = \iiint\limits_V r^2 \sin q dr dj dq.$

Изобразим поверхность интегрирования V (рис.3.10) и ее проекцию на плоскость xoy (рис.3.11).



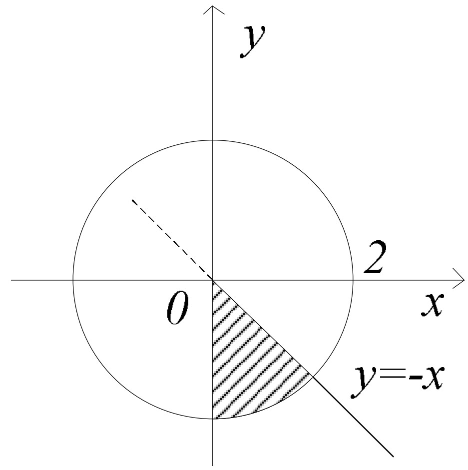


Рис. 10.10 Рис. 10.11

Очевидно, что $0 \le q \le p$. Для нахождения пределов r и j рассмотрим проекцию тела V на плоскость xoy (рис.3.11). Уравнение проекции $x^2+y^2=4$ или в полярных координатах $r = 2$, т.е. $0 \le r \le 2$. Так как x ≥ 0, y ≤ -x, то $\frac{-p}{2} \le j \le \frac{-r}{4}$.

Тогда

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin q dr j dq = \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} dj \int_0^p \sin q dq = \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} dj\,(-\cos q)\Big|_0^p = \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} (-\cos p + \cos 0) dj =$$

$$= \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} (-\cos p + \cos 0) dj = 2\int_0^a r^2 dr j \Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} = 2 \cdot \int_0^a r^2 \left(-\frac{p}{4} + \frac{p}{2}\right) dr = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{pa^3}{6} (куб.ед).$$

XI. Криволинейные интегралы

11.1 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в точках дуги AB гладкой кривой K, имеющей уравнение $y = j(x)$, $a \le x \le b$. Интегральной суммой для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по координатам называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} (P(y_k, h_k)\Delta x_k + Q(y_k, h_k)\Delta y_k),$$

где Δx_k и Δy_k - проекции элементарной дуги на оси Ox и Oy.

Криволинейным интегралом по координатам или криволинейным интегралом второго рода от выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по направленной дуге

АВ называется предел интегральной суммы при условии, что max $\Delta x_k \to 0$ и $\Delta y_k \to 0$ обозначается:

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} (P(y_k, h_k)\Delta x_k + Q(y_k, h_k)\Delta y_k) = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Криволинейный интеграл второго рода есть работа, совершаемая переменной силой $\vec{F} = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ на криволинейном пути AB.

Основные свойства криволинейного интеграла II рода.

1^0. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy;$

2^0. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

3^0. Если контур интегрирования К разбит на две части K_1 и K_2, то $\int\limits_{K} Pdx + Qdy = \int\limits_{K_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{K_2} Pdx + Qdy;$

4^0. Если К – отрезок прямой, параллельной оси Ох,

то $\int\limits_{K} Q(x,y)dy = 0;$

5^0. Если К- отрезок прямой, параллельной оси Оу, то $\int\limits_{K} P(x,y)dx = 0.$

11.2. Вычисление криволинейного интеграла

Пусть дуга К задана условиями $y = j(x),\ \ a \le x \le b,$ причем $j'(x),$ непрерывна на $[a,в]$ и пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные на некотором множестве, содержащем кривую К внутри себя. Тогда криволинейный интеграл сводится к определенному с помощью формулы

$$\int\limits_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{в} P(x,j(x))dx + Q(x,j(x))\cdot j'(x)dx = \int\limits_{a}^{в} (P(x,j(x)) + j'(x)\cdot Q(x,j(x)))dx$$

Пример 11.1. Вычислить $\int\limits_{K} 2xydx + x^2dy,$ где К- дуга параболы $y = x^2,$ $x \in [0;2].$

Решение.

$$\int\limits_{K} 2xydx + x^2dy, = \int\limits_{0}^{2} (2x\cdot x^2 + 2x\cdot x^2)dx = 4\int\limits_{0}^{2} x^3dx = x^4\Big|_0^2 = 16.$$

Аналогично обстоит дело в случае, если гладкая кривая К задана условиями $x = g(y),\ \ y \in [c;d],$ то есть

$$\int\limits_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)d = \int\limits_{c}^{d} (P(g(y),y)\cdot g'(y) + Q(g(y),y))dy.$$

Если кривая K задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\quad y = y(t)$, $a \le t \le b$, то криволинейный интеграл сводится к определенному с помощью формулы:

$$\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t))dt.$$

Пример 11.2. Вычислить $\int\limits_K x^2ydy - y^2xdx,$ если $x = \sqrt{\cos t},\quad y = \sqrt{\sin t},\quad 0 \le t \le \frac{p}{2}.$

Решение. Найдем

$$dx = (\sqrt{\cos t})'dt = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}dt;$$

$$dy = (\sqrt{\sin t})'dt = -\frac{\cos t}{2\sqrt{\cos t}}dt.$$

Тогда

$$\int\limits_K x^2ydy - y^2xdx = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} (\cos t\cdot\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t\sqrt{\cos t}\,\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}})dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{4}.$$

Замечание. Если К – пространственная кривая, заданная уравнениями $x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),$ где $a \le t \le b$, то

$$\int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t))dt.$$

11.3. Формула Грина

В настоящем пункте мы рассмотрим одну из основных формул интегрального исчисления функций двух переменных – формулу Грина. Она связывает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L и двойной интеграл по области D, ограниченной этим контуром. Так как при изменении направления движения по дуге меняется и знак криволинейного интеграла, поэтому нужно условиться о направлении обхода контура L таким образом, чтобы сама область D при этом движении все время оставалась бы слева.

Если D – фигура, ограниченная замкнутым контуром L, а функции $P(x,y)$ $Q(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на D, тогда справедлива формула

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy,$$

которая называется формулой Грина.

Пример 11.3. Используя формулу Грина, вычислить

$$\int\limits_L (xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y)dx + (xy + \frac{1}{2}x^2 - y)dy,$$

где L – контур параболического сегмента $y = x^2 - 3x - 2, \quad y = x + 3.$

Решение. Сначала сделаем чертеж области D. Для этого найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = x + 3$$

или

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

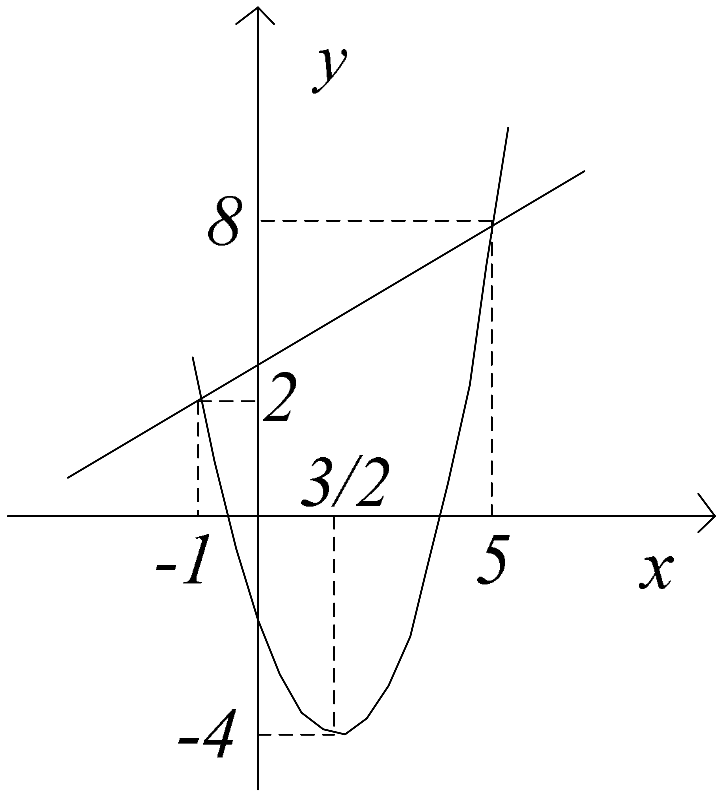


Рис. 4.1

$$P(x, y) = xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y;$$

$$Q(x, y) = xy + \frac{1}{2}x^2 - y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + y - 1;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y + x.$$

Следовательно, по формуле Грина

$$\int\limits_L (xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y)dx + (xy + \frac{1}{2}x^2 - y)dy = \iint\limits_D (y + x - x - y + 1)dxdy = \iint\limits_D dxdy.$$

Перейдя от двойного интеграла к повторным, получим

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^{5} dx \int_{x^2-3x-2}^{x+3} dy = \int_{-1}^{5} dx \cdot y\Big|_{x^2-3x-2}^{x+3} = \int_{-1}^{5} (x+3-x^2+3x+2)dx = \int_{-1}^{5} (-x^2+4x+5)dx =$$

$$= (-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x)\Big|_{-1}^{5} = -\frac{125}{3}+50+25-(-\frac{(-1)^3}{3}+2-5) = 36.$$

XII. Задания к контрольной работе № 3

1-10. Найти неопределенные интегралы

1. **а)** $\int e^{arctg\,2x} \cdot \frac{dx}{1+4x^2}$; **б)** $\int x^3 \cdot \ln x dx$;

2. **а)** $\int e^{3x} \cdot \sin(e^{3x}-1)dx$; **б)** $\int x \cdot \cos 5x dx$;

3. **а)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tgx+1}}$; **б)** $\int x \cdot arctgx dx$;

4. **а)** $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x+3}$; **б)** $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$;

5. **а)** $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+3)}$; **б)** $\int (x+2) \cdot \cos x dx$;

6. **а)** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$; **б)** $\int x \cdot \sin 2x dx$;

7. **а)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$; **б)** $\int (x+2) \cdot e^x dx$;

8. **а)** $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; **б)** $\int \ln(x+2) dx$;

9. **а)** $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; **б)** $\int x \cdot 3^x dx$;

10. **а)** $\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$; **б)** $\int \arccos 4x dx$;

11-20. Вычислить определенный интеграл

1. $\int_2^6 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} dx$; **2.** $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}} dx$;

3. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} dx$; **4.** $\int_0^{\frac{p}{6}} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$;

5. $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} \frac{tg^3 x - \sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x} dx;$

6. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sqrt{x}}{4+x} dx;$

7. $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \sqrt[4]{2+\sin x} \cdot \cos x dx;$

8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} dx;$

9. $\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{3}} \frac{tg^4 x + 1}{\cos^2 x} dx;$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt[7]{3+4x^3}} dx;$

21-30. Используя полярные координаты, вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями

1) $r = 8;\quad r = \frac{4}{\cos j}$

2) $r = 2\sqrt{3} \cdot \cos j;\quad r = 2\sin j$

3) $r = 2(1 + \sin j);\quad r = 2$ (вне окружности)

4) $r = 3;\quad r = 3\sqrt{\cos 2j}$

5) $r = \sin j;\quad r = 2\sin j;\quad j = \frac{p}{4};\quad j = \frac{p}{2}$

6) $r = 4(1 - \cos j);\quad r = 4\cos j$ (внутри окружности)

7) $r = 5(1 - \sin j);\quad r = 5$

8) $r = 1 - \cos j;\quad r = 2$

9) $r = 6(1 - \cos j);\quad r' = 6$ (вне кардиоиды)

10) $r = \cos j;\quad r = 2\cos j);\quad 0 \le j \le \frac{p}{4}.$

31-40. Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями

1. а) $y = x,\quad y = x^2,\quad x = \frac{3}{4};$ **б)** $y^2 = x,\quad x = \frac{3}{4} y^2 + 1;$

2. а) $y = x^2 + 1,\quad y = -x^2 + 3;$ **б)** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\quad x + y = 1;$

3. а) $y = x^2,\quad 4y = x^2,\quad y = 4;$ **б)** $y = -2y^2,\quad x = 1 - 3y^2;$

4. а) $y = 2x,\quad x = 2y,\quad xy = 2;$ **б)** $y = \ln x,\quad x = 2,\quad x = 3;$

5. а) $xy = 6,\quad y = 7 - x;$ **б)** $y = \cos x,\quad y = x + 1,\quad y = 0;$

6. а) $y = \frac{2}{p} x,\quad y = \sin x;$ **б)** $y^2 = 4 + x,\quad x = 2;$

7. а) $y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad x = 0;$ **б)** $y = x^3,\quad y = x,\quad y = 2x;$

8. а) $y = 2^x,\quad 2x + 3y = 8,\quad y = 0,\quad x = 0;$ **б)** $4y = 8x - x^2,\quad 4y = x + 6;$

9. а) $y = (x-4)^2,\quad y = 16 - x^2;$ **б)** $y = e^x,\quad y = e^{-x},\quad x = 3;$

10.а) $y=\dfrac{8}{x^2+4}$, $x^2=4y$; **б)** $y=x$, $x=\sqrt{y}$, $y=\dfrac{1}{2}$.

41-50. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1. $z=0$, $x^2+y^2=4$, $x+y+z=6$;
2. $z=0$, $x^2+y^2+z-4=0$, $x=\pm1$, $y=\pm1$;
3. $z=0$, $x^2+y^2-z+5=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$;
4. $z=0$, $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x\ge 0$, $y=0$;
5. $z=0$, $y=x^2$, $z=x^2+y^2$, $y=1$;
6. $z=0$, $z=x^2+y^2+3$, $x+y-2=0$, $x=0$, $y=0$;
7. $z=0$, $z=x^2$, $y=2x$, $x=4$, $y=0$;
8. $z=0$, $y=x$, $y=x^2$, $2-x-y-2z=0$;
9. $z=0$, $x^2+y^2=9$, $z=5-x-y$;
10. $z=0$, $z=x$, $x=\sqrt{4-y^2}$.

51-60. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1. $x^2+y^2=4x$, $z=x$, $z=2x$;
2. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$;
3. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;
4. $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$, $z=2$;
5. $x^2+y^2-z^2=0$, $z=2$;
6. $x^2+y^2=4$, $z=1$, $z=12-3x-4y$;
7. $z^2=x^2+y^2$, $z=6-x^2-y^2$, $z\ge 0$;
8. $4x=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$, $z\ge 0$;
9. $5x=x^2+y^2$, $z=x$, $z=3x$;
10. $3y=x^2+z^2$, $z^2+x^2+y^2=4$.

61-70. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$, L – дуга параболы $y=x^2$ от точки (1;1) до точки (2;4);
2. $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$, L – дуга кривой $y=2x^3$ от точки (0;0) до (1;2);
3. $\int\limits_L 2ydx+(3x-y)dy$, L – дуга параболы $x=2y^2$ от точки (2;1) до (8;2);

4. $\int\limits_L \frac{3x}{y}dx - \frac{2y^3}{x}dy,$ L – дуга параболы $x = y^2$ от точки (4;2) до (1;1);

5. $\int\limits_L xydx,$ L – дуга синусоиды $y = \sin x$ от точки (0;0) до (π;0);

6. $\int\limits_L (4y+4)dx + (3x+3y+4)dy,$ L – дуга параболы $y = \frac{3}{2}x^2$ от точки (0;0) до (2;6);

7. $\int\limits_L (y^2+x)dx + \frac{2x}{y}dy,$ L – дуга кривой $y = e^x$ от точки (0;1) до (1;e);

8. $\int\limits_L 2xydx + x^3dy,$ L – отрезок с концами (1; $\frac{p}{6}$) и (2; $\frac{p}{4}$);

9. $\int\limits_L \frac{y^2+1}{y}dy - \frac{x-2y^2}{y^2}dy,$ L – отрезок с концами (1;2) и (2;4);

10. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy,$ L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки (1;0) до (e;1).

71-80. Вычислить криволинейный интеграл по кривой L

1. $\int\limits_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y},$ L – дуга окружности $x = 5\cos t,\ \ y = 5\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{p}{2};$

2. $\int\limits_L (4y-3x)dy - 4ydx,$ L – эллипс $x = 3\cos t,\ \ y = 4\sin t,\ \ 0 \le t \le 2p;$

3. $\int\limits_L xdy - ydx,$ L – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t,\ \ y = 2\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le \frac{p}{2};$

4. $\int\limits_L \frac{x}{y}dx + \frac{dy}{y-2},$ L – дуга циклоиды $x = 2(t - \sin t),\ \ y = 2(1-\cos t),\ \ \frac{p}{6} \le t \le \frac{p}{3};$

5. $\int\limits_L y^2, dx + x^2dy,$ L – верхняя половина эллипса $x = \cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ 0 \le t \le p;$

6. $\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy,$ L – окружность $x = 1 + 2\cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t,\ \ 0 \le t \le 2p;$

7. $\int\limits_L (x^2y - 2x)dx + (y^2x + 3y)dy,$ L – верхняя половина эллипса $x = 2\cos t,$ $y = 3\sin t,\ \ 0 \le t \le p;$

8. $\int\limits_L (2-y)dx + xdy,$ L – дуга циклоиды $x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t,\ \ 0 \le t \le 2p;$

9. $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x + y^2)dy,$ L – дуга окружности $x = 8\cos t,\ \ y = 8\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{p}{2};$

10. $\int\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2},$ L – окружность $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ 0 \le t \le 2p.$

81-90. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру L в положительном направлении

1. $\oint\limits_L (x+y)^2 dx-(x-y)^2 dy,$ L – контур, образованный дугой параболы $y=2x^2-x$ и отрезком прямой, соединяющей точки $A(1;1)$ и $B(2;6)$;

2. $\oint\limits_L (x-2y)dx+(3x+y)dy,$ L – окружность $x^2+y^2=16;$

3. $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2 dy,$ L – контур треугольника с вершинами A(1;1), B(2;2), C(1;3);

4. $\oint\limits_L (x^3-x^2y+5)dx+(xy^2+y+2)dy,$ L – окружность $x^2+y^2=8;$

5. $\oint\limits_L \frac{dx}{y}-\frac{dy}{x},$ L – контур треугольника с вершинами A(1;1), B(2;1), C(2;2);

6. $\oint\limits_L x^2ydx+x^3+dy,$ L – контур ограниченный параболами $y^2=x,\ x^2=y;$

7. $\oint\limits_L (2x-\frac{1}{3}y^3)dx+(2y^2x+\frac{1}{3}x^3)dy,$ L – окружность $x^2+y^2=36;$

8. $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy,$ L – окружность $x^2+y^2=2x;$

9. $\oint\limits_L 6y^2dx+6(x+y)^2dy,$ L – контур треугольника с вершинами $A(2;0)$), $B(2;2)$, $C(0;2)$;

10. $\oint\limits_L (2x+3y)dx+(3x-4y)dy,$ L – контур, образованный дугой параболы $y=x^2$ и отрезком прямой, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 4

XIII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 13.1. Комплексным числом называется число

$$Z=X+iY, \tag{13.1}$$

где X – называется действительной частью комплексного числа и обозначается X=ReZ; Y –называется мнимой частью комплексного числа и обозначается Y=ImZ; i – называется мнимой единицей и $i=\sqrt{-1}$.

Такая запись комплексного числа называется алгебраической формой комплексного числа.√

Определение 13.2. Модулем комплексного числа (13.1) называется величина

$$|Z|=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{13.2}$$

Определение 13.3. Главным значением аргумента комплексного числа (13.1) называется величина

$$\operatorname{arq}Z=\begin{cases} \operatorname{arctq}\frac{Y}{X},\ X>0,\ Y>0, \\ \pi-\operatorname{arctq}\frac{Y}{|X|},\ X<0,\ Y>0, \\ \pi+\operatorname{arctq}\frac{|Y|}{|X|},\ X<0,\ Y<0, \\ -\operatorname{arctq}\frac{|Y|}{X},\ X>0,\ Y<0. \end{cases} \quad 0\le arqZ<2\pi \quad . \tag{13.3}$$

Аргументом называется величина

$$\operatorname{Arq}Z=\operatorname{arq}Z+2\pi n, n=0,\mp1,\mp2,\dots .$$

Определение 13.4. Комплексное число (13.1) равно 0, если X=0 и Y=0.

Определение 13.5. Комплексное число $\overline{Z}$=X-iY называется сопряженным комплексному числу (13.1), причем $|Z|=|\overline{Z}|$.

Определение 13.6. Два комплексных числа

$$Z_1=X_1+Y_1,\quad Z_2=X_2+Y_2 \tag{13.4}$$

Называются равными $Z_1=Z_2$,если $X_1=X_2$ и $Y_1=Y_2$.

Пример13.1. Найти действительную часть, мнимую часть, модуль и аргумент комплексного числа

а). Z=-3+3i

Решение.

ReZ=-3; ImZ=3; $|Z|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$; $arqZ=\pi-arctq\frac{3}{3}=\frac{3}{4}\pi.$

$\operatorname{Arq}Z=\frac{3}{4}\pi+2n\pi,\ n=0,\mp1,\mp2,\dots$.

б) Z=-3i

Решение:=.

ReZ=0, ImZ=-3, $|Z|=\sqrt{(-3)^2}=3$, arqZ=$-\frac{1}{2}\pi$,

ArqZ=$-\frac{1}{2}\pi+2n\pi,\ n=0,\mp1,\mp2,\ldots$.

13.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число Z=X+iY однозначно определяется парой действительных чисел(X,Y), поэтому можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости и всевозможными комплексными числами. Тогда комплексное число можно изобразить с помощью точки плоскости, координаты которой X – абсцисса, Y – ордината. В этом заключается геометрическая интерпретация комплексного числа.

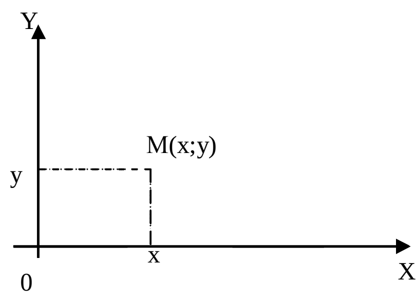


Рис.13.1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Тогда ось OX , где откладывают действительную часть числа Z, называется действительной осью, а ось OY, где откладывают мнимые части числа Z, называется мнимой осью. Такую плоскость будем называть комплексной плоскостью (рис.13.1).

Действительной и мнимой частям комплексного числа можно также поставить в соответствие координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$=(X,Y) (рис.13.2).

То есть комплексное число можно изобразить с помощью вектора $\overline{OM}$.

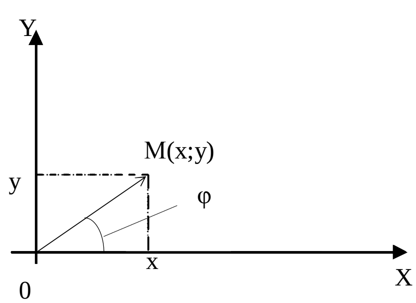


Рис. 13.2. Изображение комплексного числа в тригонометрической форме

Тогда длина вектора r – есть модуль комплексного числа

$$r = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad (13.5)$$

а угол φ есть аргумент комплексного числа

$$\varphi = arqZ = arctq\frac{Y}{X}; \quad tq\varphi = \frac{Y}{X}\cdot \qquad (13.6)$$

Из прямоугольного треугольника (рис. 13.2) , определения модуля и аргумента следует, что если Z=X+iY, то

X=rcos$j$ = |Z|cos(arqZ), Y=rsin$j$ = |Z|sin(arqZ).

Тогда любое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в тригонометрической форме:

$$Z = r\cos j + i\, r\sin j = r(\cos j + i\sin j). \qquad (13.7)$$

Пример 13.2. Представить комплексное число Z= 1-2 i в тригонометрической форме.

Решение.

Используя формулы (13.5),(13.6) найдем соответственно r=$\sqrt{1+4}$=$\sqrt{5}$ и

φ=-arctq $\frac{2}{1}$. Тогда число Z в тригонометрической форме (13.7) будет иметь вид:

Z=1- i 2=$\sqrt{5}(\cos arctq2 + i\, sin\, arctq2)$.

Замечание. Используя формулу Эйлера:

$$e^{ij} = \cos j + i\sin j \quad \text{и} \quad e^{-ij} = \cos j - i\sin j,$$

комплексное число можно записать в показательной форме

$$Z = re^{ij}, \qquad \overline{Z} = re^{-ij}. \qquad (13.8)$$

13.3. Алгебраические операции над комплексными числами

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$$Z_1 = X_1 + iY_1, \qquad Z_2 = X_2 + iY_2 + \text{I}$$

выполняется по правилу действия с многочленами, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 + iY_1) \pm (X_2 + iY_2) = (X_1 \pm X_2) \pm (Y_1 \pm Y_2); \qquad (13.9)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (X_1 + iY_1)\cdot(X_2 + iY_2) = X_1X_2 + iX_1Y_2 + iX_2Y_1 + i^2Y_1Y_2 = (X_1X_2 - Y_1Y_2) + i(X_2Y_1 + X_1Y_2). \qquad (13.10)$$

Замечание. $Z\cdot\overline{Z} = (X + iY)\cdot(X - iY) = X^2 + Y^2$. (13.11)

Для выполнения операции деления комплексных чисел в алгебраической форме необходимо умножить числитель и знаменатель на комплексное число сопряженное знаменателю:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1 + iY_1}{X_2 + iY_2} = \frac{(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2)}{(X_2 + iY_2)(X_2 - iY_2)} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2} + i\frac{(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}.$$

Пример 13.3.
Выполнить действия

$$(2+i)^2+\frac{3i}{(-1+2i)}-i^3(3-i).$$

Решение.

$$(2+i)^2+\frac{3i}{(-1+2i)}-i^3(3-i)=$$

$$=4+2i-i^2+\frac{3i(-1-2i)}{(-1+2i)\cdot(-1-2i)}-i(3-i)=$$

$$=3+2i+\frac{-3i+6}{1+4}-3i-1=2-i-i\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{16}{5}-i\frac{8}{5}.$$

Возведение в степень комплексного числа в тригонометрической форме (13.7): Z= rcos$j$ + i rsin$j$ = r(cos$j$ + i sin$j$)выполняется по формуле Муавра

$$Z^n=r^n(\cos nj+i\sin nj). \tag{13.12}$$

Извлечение корня степени n из комплексного числа в тригонометрической форме (13.7) выполняется по формуле:

$$\omega=\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{13.13}$$

где k=0; 1;…;(n-1). Корень степени n из комплексного числа имеет ровно n комплексных корней:

$$\text{при } k=0,\quad \omega_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$\text{при } k=1,\quad \omega_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),$$

……………………………………………………………………………………

$$\text{при } k=n-1,\quad \omega_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Пример 13.4. Найти $Z^5=(-2-2i)^5$.
Решение.
Найдем r $=|-2-2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,

$$\varphi=arq(-2-2i)=\pi+arctq\frac{2}{2}=\frac{5}{4}\pi.$$

Воспользуемся формулой Муавра (13.12), получим

$$Z^5=(-2-2i)^5=\left(2\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{25}{4}\pi+i\sin\frac{25}{4}\pi\right)=2^7(1+i).$$

Пример 13.5. Найти $\omega=\sqrt[3]{Z}=\sqrt[3]{-8i}$.
Решение.
Найдем r $=|Z|=|-8i|=\sqrt{0^2+(-8)^2}=8$,

$$\varphi=arq(-8i)=-\frac{\pi}{2}.$$

Воспользуемся формулой (13.13), получим

$$\omega = \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{-8i} = 2\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

K=0;1;2.

$$\omega_{0=}2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = 2i,$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - i.$$

XIV. Дифференциальные уравнения

Определение 14.1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение связывающее функцию, ее независимую переменную и производные этой функции различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Уравнение n-го порядка можно представить в виде

$$F\left(x,y,y',y'', \cdots ,y^{(n)}\right) = 0. \tag{14.1}$$

Определение 14.2. Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение (14), обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (14.1) называется решение зависящее от n произвольных констант:

$$y = \varphi(x,c_1,c_2, \cdots ,c_n).$$

Определение. 14.3 Частным решением уравнения (14.1) называется решение полученное из общего решения при конкретных значениях констант.

Определение. 14..4. Задачей Коши уравнения (14.1) называется задача нахождения частного решения этого уравнения удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'',\cdots, y^{(n)}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_{0,}\, y'(x_0) = y'_0,\ \ y''(x_0) = y''_0,\cdots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n)}. \end{cases} \tag{14.2}$$

14.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 14.5. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{14.3}$$

Если уравнение (14.3) можно разрешить относительно производной, то оно будет называться дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме:

$$y' = f(x,y). \tag{14.4}$$

Замечание. Так как

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

то дифференциальное уравнение первого порядка (14.4) можно записать в виде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{14.5}$$

Определение 14.6. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка или общим интегралом называется функция $y = \varphi(x,C)$,

Которая зависит от одной произвольной константы и удовлетворяет уравнению (14.3).

Определение 14.7. Частным решением называется любая функция

$y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения, если постоянной C придать определенное значение C_0.

Для дифференциального уравнения первого порядка начальное условие имеет вид $y(x_0) = y_0$, а задача Коши (14.2) записывается системой

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение 14.8. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{14.6}$$

Замечание. Для нахождения общего решения уравнения (14.6) разделим обе части уравнения на выражение $N_1(y)M_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Общее решение (общий интеграл) находим почленным интегрированием полученного уравнения

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Произвольная константа C содержится в неопределенном интеграле.

Пример 14.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(y + x^2 y)dx + (2x - xy)dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, получим

$$y(1 + x^2)dx = -x(2 - y)dy \Rightarrow \frac{1 + x^2}{x}dx = \frac{y - 2}{y}dy.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим общее решение

$$\int \frac{1 + x^2}{x}dx = \int \frac{y - 2}{y}dy \Rightarrow ln|x| + \frac{x^2}{2} = y - 2ln|y| + C.$$

(Общее решение записано в неявной форме, так как явно функцию $y(x)$ нельзя выразить).

Пример 14.2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y' = (y + 2)\cos x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения. Для этого запишем его в дифференциальной форме (14.6):

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)\cos x \Rightarrow \frac{dy}{y + 2} = \cos x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y + 2} = \int \cos x\, dx \Rightarrow$$

$$ln|y + 2| = \sin x + ln|C| \Rightarrow ln\left|\frac{y + 2}{C}\right| = \sin x \Rightarrow y = Ce^{\sin x} - 2.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальному условию

$$-1 = Ce^{\sin\frac{\pi}{2}} - 2 \Rightarrow C = \frac{1}{e}; \qquad y = \frac{1}{e}e^{\sin x} - 2.$$

Определение 14.9. Функция $f(x, y)$ называется однородной порядка k если $f(lx, ly) = l^k f(x, y)$.

Определение 14.10. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $y' = f(x, y)$, если $f(x, y)$ – однородная функция первого порядка.

Замечание. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка всегда можно свести к виду

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (14.7)$$

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения его сводят к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$. Здесь $t' = \frac{dt}{dx}$.

Пример 14.3. Найти общий интеграл уравнения

$$x^2 y' = x^2 + xy + 2y'.$$

Решение. Проверим, что уравнение является однородным. Для этого его представим в нормальной форме (14.4):

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}.$$

Полученное уравнение имеет вид (14.7), то есть является однородным первого порядка. Для нахождения общего решения этого уравнения введем замену

$$t = \frac{y}{x} \rightarrow \ y' = t'x + t,$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными относительно функции

$$t = t(x):$$

$$t'x + t = 1 + t + 2t^2.$$

Разделим переменные в этом уравнении, полагая

$$t' = \frac{dt}{dx}.$$

Получим уравнение

$$\frac{dt}{1 + 2t^2} = \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \int \frac{dt}{1 + 2t^2} = \int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{2}}{2} arctq\sqrt{2}t = ln|x| + ln|C| \Rightarrow$$

$$arctq\sqrt{2}t = \sqrt{2}ln|Cx| \ \Rightarrow \ t = tq(lq|Cx|).$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\frac{y}{x} = tq(ln|Cx|) \ \Rightarrow \ y = x \cdot tq(ln|Cx|).$$

Определение 14.11. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{14.8}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции от x.

Общее решение уравнения (14.8) ищется в виде произведения двух функций от x

$$y = u(x)v(x) \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}. \tag{14.9}$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определяется из уравнения (14.8).

Подставим формулы (14.9) в уравнение (14.8), получим

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q \ \Rightarrow u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q.$$

Последнее уравнение запишем в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными (функцию v в которой ищем произвольно):

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + Pv = 0, \\ v\dfrac{du}{dx} = Q. \end{cases} \tag{14.10}$$

Решая систему (14.10), получим функции v и u (одно решение будет частным, например, v другое – общим). Подставим v и u в (14.9), получим общее решение уравнения (14.8).

Пример 14.4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' - 2xy = (1+x^2)e^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' - 2xy = (1+x^2)e^{x^2}.$$

Решение ищем в виде $y=uv$ из системы (14.10):

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \\ v\frac{du}{dx} = (1+x^2)e^{x^2}. \end{cases} \beta$$

Найдем частное решение первого уравнения

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int xdx \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Подставим функцию v во второе уравнение системы и определим его общее решение:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = (1+x^2)e^{x^2} \Rightarrow \int du = \int (1+x^2)\,dx \Rightarrow u = x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, общее решение исходного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{x^2}\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right).$$

С учетом начального условия задачи Коши найдем частное решение линейного уравнения:

$$1 = e^0(0 + 0 + \mathrm{C}) \Rightarrow \mathrm{C} = 1.$$

Подставим найденное значение произвольной константы в общее решение, получим решение задачи Коши

$$y = e^{x^2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right).$$

14.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. 14.12. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \tag{14.11}$$

где $a_0 {}^1\, 0, a_{1,} a_2$ - постоянные; $f(x)$ – непрерывная функция.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (14.11) называется неоднородным уравнением. Если $f(x) = 0$, уравнение имеет вид

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{14.12}$$

и называется линейным однородным.

Замечание. Начальные условия задачи Коши уравнения (14.11) или (14.12) имеют вид

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \tag{14.13}$$

Определение. 14.13. Частные решения уравнения (14.12) $y_1(x), y_2(x)$ называются независимыми частными решениями, если их отношение

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$$

Два независимых частных решения однородного уравнения (14.12) образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Теорема.14.1. Если $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (14.12), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (14.14)$$

где C_1, C_2 - произвольные константы.

Для определения фундаментальной системы решений однородного уравнения (14.12) составим характеристическое уравнение

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (14.15)$$

При решении уравнения (14.15) возможны три случая:

$\boldsymbol{k_1, k_2}$**- два различных действительных корня,** тогда

$y_1(x) = e^{k_1 x}, y_2(x) = e^{k_2 x}$ - фундаментальная система решений и общее решение уравнения (14.12) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

$\boldsymbol{k = k_1 = k_2}$**- один действительный корень**, тогда

$y_1(x) = e^{kx}, y_2(x) = xe^{kx}$ - фундаментальная система решений и общее решение уравнения (14.12) имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

$\boldsymbol{k_1} = a + b\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k_2} = a - b\boldsymbol{i}$ - два комплексных сопряженных корня, тогда

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ - фундаментальная система решений и общее решение уравнения (14.12) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример. 14.5. Найти общее решение уравнения

y^2-5y′+6y=0.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных действительных корня:

$k_1 = 2$, $k_2 = 3$, поэтому $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$ – фундаментальная система решений. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Пример. 14.6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения:

$k^2 - 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i \Rightarrow$ α=2, β=1 ⇒

$$y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x.$$

Для решения задачи Коши воспользуемся начальным условием:

$$1 = C_1e^0\cos 0 + C_2\,e^0\sin 0\ . \qquad (*)$$

Для составления второго уравнения найдем производную общего решения:

$$y' = 2e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x).$$

Применим к производной начальное условие, получим

$$0 = 2e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) + e^0(-C_1\sin 0 + C_2\cos 0). \quad (**)$$

Преобразуем уравнения $(*)$, $(**)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1, \\ 0 = 2C_1 + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$y = e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x.$$

Теорема. 14.2. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (14.11) имеет вид

$y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения (14.12), y^* - какое – нибудь частное решение неоднородного дифференциального уравнения (14.11).

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (14.11) будем подбирать по виду правой части. Данный метод называется методом неопределенных коэффициентов.

Обозначим

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ – многочлен степени n с известными коэффициентами $a_{0,}a_1, a_2, \cdots, a_n$.

$\overline{P_n}(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$ - многочлен степени n с неизвестными коэффициентами $A_{0,}A_1, A_2, \cdots +, A_n$.

$Q_m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ - многочлен степени m с известными коэффициентами $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$.

$\overline{Q_m}(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m$ - многочлен степени m с неизвестными коэффициентами.

$r = \max(n, m)$.

Составим таблицу для определения частных решений неоднородного уравнения (14.11) методом неопределенных коэффициентов для некоторых видов функции в правой части уравнения (14.11).

Обозначим:

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ – многочлен с известными коэффициентами;

$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ – многочлен с известными коэффициентами;

$\widetilde{P_n}(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$ – многочлен с неизвестными коэффициентами;

$\widetilde{Q_m}(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m$ — многочлен с неизвестными коэффициентами.

Таблица определения частного решения уравнения (14.11):

Вид функции $f(x)$	Корни характеристического уравнения (14.10)	Вид частного решения y^* уравнения (14.11)
$f(x) = P_n(x)$	$k_1 \neq 0, \ \ k_2 \neq 0$	$y^* = \widetilde{P_n}$
	$k_1 = 0, \qquad k_2 \neq 0$	$y^* = x\widetilde{P_n}$
	$k_1 = k_2 = 0$	$y^* = x^2\widetilde{P_n}$
$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$	$k_1 \neq \alpha, \qquad k_2 \neq \alpha$	$y^* = e^{\alpha x}\widetilde{P_n}$
	$k_1 = \alpha, \qquad k_2 \neq \alpha$	$y^* = xe^{\alpha x}\widetilde{P_n}$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$y^* = x^2e^{\alpha x}\widetilde{P_n}$
$f(x) = e^{\alpha x}(a_0 \cos \beta x + b_0 \sin \beta x)$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$	$y^* = e^{\alpha x}(A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x)$
	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y^* = xe^{\alpha x}(A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x)$

Замечание. Для определения неизвестных коэффициентов, входящих в y^*, нужно подставить это решение в уравнение (14.11) и приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x многочленов левой и правой частей уравнения.

Пример 14.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}(2x - 1).$$

Решение.

Общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + y^*$.

1). Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y^2 - 4y¢¢ + 4y = 0$. Для этого определим корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2,$$

Следовательно, $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

2). Частное решение неоднородного уравнения будем искать по виду правой части: $y^* = x^2e^{2x}(A_0 + A_1x)$.

Чтобы определить неизвестные коэффициенты, подставим это решение в исходное уравнение. Для этого найдем

$y^{*'} = e^{2x}(2A_1x^3 + (2A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x)$,

$y^{*''} = e^{2x}(4A_1x^3 + (4A_0 + 12A_1)x^2 + (8A_0 + 6A_1)x + 2A_0)$.

После подстановки $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение, преобразуем его к виду

$$e^{2x}(6A_1x + 2A_0) = 6e^{2x}(2x - 1).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x левой и правой частей уравнения, получим систему уравнений

$\begin{cases} 6A_1 = 12, \\ 2A_0 = -6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2, \\ A_0 = -3. \end{cases}$

Следовательно, $y^* = x^2e^{2x}(2x - 3)$.

3). Таким образом, $y = e^{2x}\big(C_1 + C_2x + x^2(2x - 3)\big)$ является общим решением исходного дифференциального уравнения.

Пример 14.8. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 65\sin 2x,$$

Удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = -3; y'(0) = 1.$$

Решение.

Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = \overline{y} + y^*.$$

Для определения общего решения однородного уравнения $\overline{y}$ составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 3.$$

Тогда $$\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Определим частное решение исходного дифференциального уравнения y^* по виду правой части: $f(x) = 3\sin 2x + 0\cos 2x$. Здесь $\alpha = 0, \beta = 2$: $\alpha + i\beta$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, следовательно

$$y^* = A_0\sin 2x + B_0\cos 2x.$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_0, B_0 подставим частное решение в исходное уравнение:

$$y^{*'} = 2A_0\cos 2x - 2B_0\sin 2x; \quad y^{*''} = -4A_0\sin 2x - 4B_0\cos 2x.$$

Получим

$$(-7A_0 + 4B_0)\sin 2x + (-7B_0 - 4A_0)\cos 2x = 3\sin 2x + 0\cos 2x.$$

Равенство имеет место когда равны выражения слева и справа при

$$\sin 2x:\ -7A_0 + 4B_0 = 65,$$
$$\cos 2x:\ -7B_0 - 4A_0 = 0.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -7A_0 + 4B_0 = 65, \\ -4A_0 - 7B_0 = 0, \end{cases}$$

Получим

$$A_0 = -7, \qquad B_0 = 4.$$

Тогда

$$y^* = -7\sin 2x + 4\cos 2x.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - 7\sin 2x + 4\cos 2x.$$

Для определения частного решения, удовлетворяющего начальному условию , найдем

$$y' = -C_1e^{-x} + 3e^{3x} - 14\cos 2x - 8\sin 2x.$$

Тогда для определения неизвестных коэффициентов в общем решении, подставим начальные условия $x = 0, y = -3, y¢ = 1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = -3, \\ -C_1 + 3C_2 - 14 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$C_1 = -9, \qquad C_2 = 2.$$

Таким образом, частное решение задачи Коши исходного уравнения имеет вид

$$y = -9e^{-x} + 2e^{3x} - 7\sin 2x + 4\cos 2x.$$

XV. Ряды

15.1. Ряд и его сумма

Числовым рядом называется выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (15.1)$$

где: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ образуют бесконечную числовую последовательность.
a_n - общий член ряда.

Сумма n первых членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда и обозначается S_n : $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется **сходящимся**, а S - суммой ряда.

Ряд называется **расходящимся**, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Особое значение имеет задача об исследовании ряда на сходимость.

Теорема. (необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд (15.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Отсюда вытекает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ 0, то о сходимости ряда еще ничего сказать нельзя.

Пример 15.1. Можно ли с помощью необходимого признака решить вопрос о сходимости ряда?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2/3 \neq 0$$

значит данный ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n+2} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$$

т.е. о сходимости данного ряда еще ничего сказать нельзя.

15.2. Сходимость рядов с положительными членами.

Если необходимый признак не дает ответа на вопрос о сходимости числового ряда (1), следующие достаточные признаки позволяют судить об этом.

Первый признак сравнения

Пусть даны ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами, причем начиная с некоторого номера n $a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Сравнение исследуемых рядов производится обычно с некоторыми стандартными рядами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$, $a \neq 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q|<1$ и расходящаяся при $|q|>1$).

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $a>1$ и расходящийся при $a \le 1$).

Пример 15.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Сравнивая общий член данного ряда с общим членом расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, убеждаемся что $\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n}$ при всех n. Следовательно исследуемый ряд расходится.

Второй признак сравнения. Если сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ известна и существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ =0, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 15.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^3+n+1}$. Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^3+n+1}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{3n^3+n+1}=2/3\neq 0,$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^3+n+1}$ тоже сходится.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$, то при $r<1$ ряд сходится , а при $r>1$ - расходится. При $r=1$ ряд может сходиться или расходиться.

Пример 15.4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{(2n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!3^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$; следовательно, ряд сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+1)n^2}{(n+1)^2(3^n+1)}$ = 3>1; значит ряд расходится.

Признак Коши (радикальный).

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$, то при $r<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $r>1$ - расходится. При r =1 ряд может сходиться или расходиться.

Замечание. Если применение одного из признаков (Даламбера или Коши) не дает ответа о сходимости ряда, то применение другого признака тоже бесполезно.

Пример 15.5. Исследовать на сходимость с помощью признака Коши.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{2n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{\frac{2n-1}{n}}$ = 4>1, ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1.$

Значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится.

Интегральный признак Коши.

Пусть общий член ряда (1) $a_n = f(n)$. Если непрерывная положительная функция f(x), принимающая в точках x=n (n= 1,2,3, ...) значения $f(n)$, монотонно убывает на промежутке $1 \le x < \infty$, то ряд (1) сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример 15.6. С помощью интегрального признака исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$

Так как $f(n) = \frac{n}{n^2+3}$, то $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Данная функция непрерывна на промежутке $1 \le x < \infty$ и монотонно убывает на нем. Вычислим $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+3} = \lim\limits_{b\to\infty}$

$\int\limits_1^{b}\frac{xdx}{x^2+3} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left(b^2+3\right)-\ln 4\right) = \infty$

Интеграл расходится, следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$ тоже расходится

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) = \ln 3$

Несобственный интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ сходится, значит ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ тоже сходится.

15.3. Знакочередующиеся ряды.

Ряд называется знакочередующимся, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд вида:

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_n(-1)^n + ...$ (15.2)

где a_1, a_2... - положительные числа.

Теорема Лейбница. Если модуль n-го члена знакочередующегося ряда с возрастанием n монотонно убывает и стремится к нулю, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Ряд (15.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, составленный из модулей членов данного ряда.

Ряд (15.2) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд из модулей расходится. Исследование сходимости знакочередующихся рядов удобно начинать с исследованиях абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение признака Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

Пример 15.7. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Он сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $a = 2 > 1$. Следовательно сходится и данный ряд, причем абсолютно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(-1)^n}{n}$

Ряд составленный из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}$ расходится по признаку Даламбера, т.к.: $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}n}{(n+1)5^n} = 5$.

Условия теоремы Лейбница для данного знакочередующегося ряда не выполняются, т.е. с возрастанием n модуль n-го члена ряда не стремится к нулю ($\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n} = \infty$). Отсюда следует, что данный знакочередующийся ряд расходящийся.

15.4. Степенные ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$ или

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, если $x_0 = 0$

Областью сходимости всякого степенного ряда является интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = x_0$, который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Половина длины интервала сходимости называется радиусом сходимости степенного ряда R.

В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности. Если R=0, то степенной ряд сходится лишь при $x = x_0$, если же $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой оси Ox.

Для определения области сходимости степенного ряда, обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда, исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов.

Пример 15.8. Определить интервал сходимости степенного ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n-1}\sqrt{n}}$

По известному члену ряда u_n , заменяя в нем n через n+1, находим следующий за ним член u_{n+1}

$u_n = \frac{x^n}{5^{n-1}\sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{5^n\sqrt{n+1}}$

Далее, используя признак Даламбера, ищем предел

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}5^{n-1}\sqrt{n}}{5^n\sqrt{n+1}x^n}\right| = \frac{|x|}{5}\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{5} .$$

И определяем, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, т.е. решаем неравенство

$\frac{|x|}{5} < 1$; $|x| < 5$; $-5<x<5$

Согласно признаку Даламбера, при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится, а при $|x| > 5$ расходится.

Граничные точки $x = \pm 5$ этого интервала, для которых $r = 1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо. При x=-5 получим числовой знакочередующейся ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{\sqrt{n}}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При x=5 получим числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$,который расходится (по интегральному признаку сходимости).

Следовательно, интервалом сходимости ряда является полуоткрытый интервал или -5≤x<5 или $[-5;5)$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n}}{n^2}$

Здесь $u_n = \frac{(x+4)^{2n}}{n^2}$, $u_{n+1} = \frac{(x+4)^{2n+2}}{(n+1)^2}$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{n^2(x+4)^{2n+2}}{(n+1)^2(x+4)^{2n}}\right|=|x+4|^2\lim\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^2=|x+4|^2$$

$|x+4|^2 < 1$ $|x+4| < 1$ $-1< x+4 < 1$

$-5< x < -3$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При x=-5 получим ряд с положительным членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Исследуя его по интегральному признаку $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$, выясняем, что он сходится.

При x=-3 получаем такой же ряд, следовательно интервал сходимости есть -5<x<3.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(3x-4)^{n-1}$

$u_n = (3x-4)^{n-1}$, $u_{n+1} = (3x-4)^n$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x-4)^n}{(3x-4)^{n-1}}\right|=|3x-4|$$

$|3x-4|<1$; $-1<3x-4<1$; $3<3x<5$; $1<x<\frac{5}{3}$

Исследуем концы интервала:

x=1., $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=$ 1-1+1-1+...,

x=$\frac{5}{3}$, $\sum 1^{n-1}=$ 1+1+1+...

Оба ряда расходятся, т.к. не выполняется необходимое условие сходимости $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. Следовательно, интервал сходимости 1<x<$\frac{5}{3}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$

$u_n=\frac{(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$, $u_{n+1}=\frac{(x+5)^{2n+3}}{(n+2)!}$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2n+3}(n+1)!}{(n+2)!(x+5)^{2n+1}}\right| = (x+5)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = (x+5)^2 0 = 0 < 1$$

Следовательно, интервал сходимости есть $-\infty < x < \infty$, т.е. вся числовая ось

д) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

. $u_n = n!\,x^n \quad u_{n+1} = (n+1)!\,x^{n+1}$

. $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = x\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ >1 при любом x, кроме x=0.

Ряд сходится при x=0.

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^n}{n!}$

$u_n = \frac{x^n n^n}{n!} \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

Отметим следующее свойство степенных рядов: ряды, полученные дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Таким образом, если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n (x-a)^{n-1}$, $\int_a^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$, где –R<x-a<R.

Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Следовательно, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

Пример 15.9. Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Найдем интервал сходимости ряда:

$$u_n = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)x^n 2^{n+2}}{n(n+1)x^{n-1}2^{n+1}}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$$

Ряд сходится при -2<x<2. На границах интервала ряд расходится.

Проинтегрируем почленно дважды искомый ряд, обозначив за S(x) его сумму.

$$S_1(x)=\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}\ ,\quad S_2(x)=\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

В интервале -2<x<2, получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Так как $S=\frac{a_1}{1-q}$, где $a_1=\left(\frac{x}{2}\right)^2, q=\frac{x}{2}$, то $S_2(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2-x}$

Продифференцировав почленно дважды эту сумму, получим $S_2^{/}(x)=S_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{4-2x+x}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{2(2-x)^2}$.

$$S(x)=S_1^{/}(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}\right)^{/}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-2x)(2-x)^2+2(4x-x^2)(2-x)}{(2-x)^4}=\frac{4}{(2-x)^3}.$$

Итак, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{4}{(2-x)^3}$.

Этот ряд сходится при -2<x<2.

15.5. Приложения степенных рядов.

Рядом Тейлора для функции f(x) в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена (x-a) вида

$$f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

При a=0 ряд Тейлора есть степенной ряд относительно переменной x:

$f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$, который называется рядом Маклорена.

Ряд Тейлора можно записать для любой функции *f(x)*, которая в окрестности точки $x=a$ имеет производные любого порядка. Однако этот ряд представляет данную функцию *f(x)* только тогда, когда остаточный член ряда будет стремиться к нулю.

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in R$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in R$$

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots,\ |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,|\,x\,| < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)..(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$|x| < 1$

Пример10. Разложить функцию в ряд Маклорена, используя разложения элементарных функций.

а) $e^{\sqrt{x}}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{\sqrt{x}} == 1 + \frac{\sqrt{x}}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x\sqrt{x}}{3!} + \ldots + \frac{(\sqrt{x})^n}{n!} + \ldots$$

Ряд сходится к данной функции при всех значениях x.

б) $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2\,x)^4}{2\cdot 4!} + \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \ldots$$

Ряд сходится при всех значениях x.

в) $\ln(3+x)$

Преобразуем аргумент функции.

$$\ln(3+x) = \ln 3(1+\frac{x}{3}) = \ln 3 + \ln(1+\frac{x}{3}).$$

Воспользуемся разложением функции $\ln(1+t)$, полагая t=x/3

$$\ln(3+x) = \ln 3 + x/3 - \frac{(x/3)^2}{2} + \frac{(x/3)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x/3)^n}{n} + \ldots$$

Так как разложение $\ln(1+t)$ имеет место при $|t|<1$, то данное разложение будет иметь место при $|x/3|<1$, то есть $|x|<3$

Пример 15.11. Пользуясь соответствующими рядами, вычислить с точностью до 0,0001.

а) $\sqrt[4]{17}$

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\,(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$$

Применим биномиальный ряд, полагая x=1/16, m=1/4:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-...\right).$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001, вычислим

$a_1=1;\ a_2\approx 0{,}01562;\quad a_3\approx -0{,}00037;\quad a_4\approx 0{,}00001.$

Ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше 0,0001.Значит

$\sqrt[4]{17}\approx$ 2(1+0,01562-0,00037)$\approx$ 2,0305.

б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx;$

Так как $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,$

то $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx=\int\limits_0^1 (1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+...)dx=(x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\frac{x^4}{4\cdot 6!}+...)\Big|_0^1=$

$=1-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\frac{1}{4\cdot 6!}+.\frac{1}{5\cdot 8!}+...$

Пятый член этого знакочередующегося ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения достаточно взять сумму первых четырех первых членов ряда, т.е. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx;\approx 0{,}7635.$

15.6.Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Пусть требуется найти решение уравнения

y' = f(x, y), (15.3)

удовлетворяющее начальному условию y(x_0)=y_0. Будем искать решение уравнения в виде:

$$y=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+... \qquad (15.4)$$

Свободный член y(x_0) этого разложения известен: он равен y_0. Подставив в (1) значение x=x_0, найдем и y'(x_0)= f(x_0, y_0).

Далее, дифференцируя (1), получаем $y''=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)y'$, (3)

откуда находим y''(x_0).

Аналогично этому, дифференцируя (3) найдем y'''(x_0) и т.д.

Пример 12. Представить решение уравнения в виде первых шести членов ряда.

$y'=x-y^2$, (4)

удовлетворяющее начальному условию y(1)=1.

Последовательно дифференцируя равенство (4), находим

$y''=1-y'2y$,
$y'''=-2(y')^2-2yy''$,
$y^{(4)}=-6y'y''-2yy''$,
$y^{(5)}=-6(y'')^2-8y'y'''-2yy^{(4)}$,
$y^{(6)}=-20y''y'''-10y'y^{(4)}-2yy^{(5)}$,
Отсюда из (4) получаем
$y'(1)=0$, $y''(1)=1$, $y'''(1)=-2$, $y^{(4)}=4$, $y^{(5)}=-14$, $y^{(6)}=68$.
Значит,

$$y=1+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{6}-\frac{7(x-1)^5}{60}+\frac{17(x-1)^6}{180}+\ldots$$

XVI. Задания к контрольной работе №4

1-10. Выполнить действия. Комплексное число Z записать в алгебраической форме и построить на комплексной плоскости. Найти
$\overline{Z}, ReZ, ImZ, |Z|, arqZ, ArqZ$.

1. $Z=\dfrac{(i^3-3)^2}{2i-1}$;
2. $Z=\dfrac{(3+2i)^2}{2i-1}$;
3. $Z=\frac{(-1-i)^2}{i-2}$;
4. $Z=\frac{2+i}{(i^2-i)^2}$;
5. $Z=\frac{i^3+2}{(2-i)^2}$;
6. $Z=\frac{i-2i^2}{(4+i)^2}$
7. $Z=\dfrac{(2+i)^2}{i-1}$;
8. $Z=\dfrac{(i-2)i^3}{(i-1)^2}$;
10. $Z=\frac{(3i-2)^2}{4+i}$.
9. $Z=\frac{(i+i^2)^2}{1-2i}$;

11-20. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

11.1. $Z=(2-2i)^4$, 11.2. $Z=\sqrt[3]{3+5i}$;
12.1. $Z=(2+3i)^4$, 12.2. $Z=\sqrt[3]{3-i}$;
13.1. $Z=(3+i)^4$, 13.2. $Z=\sqrt[3]{i-1}$;
14.1. $Z=(2+i)^4$, 14.2. $Z=\sqrt[3]{4-i}$;
15.1. $Z=(i-3)^4$, 15.2. $Z=\sqrt[3]{-1-i}$;
16.1. $Z=(1-i)^4$, 16.2. $Z=\sqrt[3]{3+4i}$;
17.1. $Z=(4+i)^4$, 17.2. $Z=\sqrt[3]{i-2}$;
18.1. $Z=(3+3i)^4$, 18.2 $Z=\sqrt[3]{-2-i}$;
19.1. $Z=(2i-1)^4$, 19.2. $Z=\sqrt[3]{2+2i}$;
20.1. $Z=(3-3i)^4$, 20.2. $Z=\sqrt[3]{-1-2i}$.

21-30. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

21.1. $2xyy'-(x^2+y^2)=0$, 21.2. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$;
22.1. $y-xy'=yln\frac{x}{y}$, 22.2. $xy'+y=e^x$;
23.1. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$, 23.2. $xy'-2y=x^2\cos x$;

24.1. $\left(2\sqrt{xy} - x\right)y' + y = 0,$ 24.2. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 1;$

25.1. $(x + y) + xy' = 0,$ 25.2. $y' - ytgx = ctgx$

26.1. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2},$ 26.2. $y' + y = \cos x;$

27.1. $(4x - 3y) = (3x - 2y)y',$ 27.2. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x;$

28.1. $(1 - x^2)y' + xy = 1,$ 28.2. $x^2y' + xy = -1;$

29.1. $xy' + (x + 2y) = 0,$ 29.2. $xy' + 2y = x^2;$

30.1. $x^2y' = y^2 + xy,$ 30.2. $y' - yctgx = \sin x.$

31-40. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

31. $y'' - 7y' + 6y = 5e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 2;$
32. $y'' - 10y' + 25y = 5 + 25x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$
33. $y'' - 3y' = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
34. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 2;$
35. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3;$
36. $y'' - 7y' + 12y = 4x^2 + x - 6, \quad y(0) = y'(0) = 5;$
37. $y'' - 4y' + 4y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 2;$
38. $y'' + 4y' = 4\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$
39. $y'' - 4y' + 3y = 3x^2 + 7x, \quad y(0) = y'(0) = 1;$
40. $y'' + 4y' - 5y = 2e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

41-50. Исследовать ряды на сходимость

41.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n\sqrt{n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)^2}$
42.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 5^n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^n$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+3}$
43.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n-1}$
44.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3}^n(n+1)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
45.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2^n\sqrt{n}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^n$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$
46.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n * n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+5}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n-2}$
47.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\sqrt{n}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{3n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$
48.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{2}^n(n+1)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{5n-1}\right)^{2n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$
49.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{5^n\sqrt{n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{2n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$
50.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{7^n\sqrt{n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$

51-60. Выяснить абсолютно или условно сходится ряд.

51.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$)
52.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{2^n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+3)}$
53.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{4^n(n+1)}$
54	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4^n}$
55	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)}$
56.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$
57.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n n\sqrt{n}}$

58.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
59.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$
60.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

61-70. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала(один первый столбец оставляем)

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}$
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{4^n\sqrt{n}}$
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n^2}$
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{3^n(n+1)}$
5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt[3]{n}}$
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{5^n n^2}$
7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3n!}$
8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$
9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n(n^2+1)}$
10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^n n!}$

71-80. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд, а затем проинтегрировав его почленно.

1.	$\int_0^1 e^{-x^{2/3}}dx$	16.	$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\cos x dx$
2.	$\int_0^{0,5} x arctgx dx$	17.	$\int_0^{0.5}\ln(1+\sqrt{x})dx$
3.	$\int_0^{0,5} x\ln(1-x^2)dx$	18.	$\int_0^{0,25}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$
4.	$\int_0^{0,5} arctgx^2 dx$	19.	$\int_0^{0,25}\sqrt{x}\sin^2 x dx$

5.	$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$	20.	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$

81-90. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию.

1.	$y' = \cos x + y^2$	$y(0) = 1$	6.	$y' = y^2 - x^2$	$y(0) = 2$
2.	$y' = x + y^2$	$y(0) = 0$	7.	$y' = 2x - y^2$	$y(0) = 1$
3.	$y' = x^2 - xy$	$y(0) = 0,1$	8.	$y' = 2e^y + xy$	$y(0) = 0$
4.	$y' = xy + y^2$	$y(0) = 0,1$	9.	$y' = \sin x + 0,5y^2$	$y(0) = 1$
5.	$y' = e^x + y^2$	$y(0) = 0$	10.	$y' = e^x + y$	$y(0) = 4$

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ, представляемых на рецензирование, надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не рецензируются и возвращаются студенту для переработки.

Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в ВУЗ и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту, Контрольные работы, содержащие не все задачи задания. А также содержащие задачи не своего варианта или распечатанные на компьютере, не рецензируются.

Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае. Если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условия задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Городилова М.А., Костина Г.В. Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье. Методические указания и индивидуальные задания, ДВГУПС, 2005.

2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. − 1 том.

3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. − 2 том.

4. Жукова В.И., Рукавишникова Е.И., Ушакова Г.А., Ющенко Н.Л. Интегрирование функций нескольких переменных. Учебное пособие, ДВГУПС, 2006.

5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М. :Высшая школа, 1966.

6. Костина Г.В., Марченко Л.В. Исследование функций и построение графиков.2003.

7. Костина Г.В., Марченко Л.В. Обыкновенные дифференци-альные уравнения. Учебное пособие, ДВГУПС, 2006.

8. Кузнецова Е.В. Основы математического анализа: предел и непрерывность. Учебное пособие. ДВГУПС, 2006.

9. Кулик А.В., Плотникова Т.Г. Дифференцирование. Учебное пособие, ДВГУПС,2005.

10. Лиховодова Т.Б. Функции нескольких переменных. Учебное пособие, ДВГУПС, 2009.

11. Ломакина Е.Н. Комплексные числа. Методические указания и задания для самостоятельной работы студентов первого курса ЕНФ, ДВГУПС, 2003.

12. Марченко Л.В. Метод наименьших квадратов. Методические указания к проведению практического занятия, ДВГУПС, 2002.

13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.1999.

Оглавление