

**МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ  
(МИИТ)**

---

1394

Кафедра теоретических основ электротехники

**С.П. ВЛАСОВ, А.Б. КОСАРЕВ**

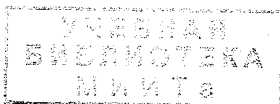
УТВЕРЖДЕНО  
редакционно-издательским  
советом университета

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ КАТУШКУ  
С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ**

Методические указания к выполнению домашнего  
задания по дисциплинам:

“Теоретические основы электротехники”,  
“Основы теории электрических цепей”,  
“Электротехника и электроника”

для студентов электротехнических и электромеханических  
специальностей университета



УДК 621.3

В 58

Власов С.П., Косарев А.Б. Расчет электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником: Методические указания.-М.: МИИТ, 2000г.-46с.

Настоящие методические указания предназначены для студентов электротехнических и электромеханических специальностей, учебными планами которых предусмотрено изучение дисциплин “Теоретические основы электротехники”, “Основы теории электрических цепей”, “Электротехника и электроника” и других подобных дисциплин.

Предлагаемое студентам методическое издание имеет своей целью оказание методической помощи студентам в самостоятельной работе над домашним заданием по расчету электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником. Оно содержит текст задания, исходные данные, краткую теоретическую справку и примеры расчетов по основным пунктам задания.

©Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 2000 .

---

Подписано к печати 15.12.00.

Формат 60x90 1/16

Усл.печ.л. 2,75

Тираж 200, экз.

Изд. № 163-00,

Заказ № 1008,

Цена - 12 руб. 00к.

---

101475, г.Москва, ул.Образцова,15

Типография МИИТа

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Для глубокого освоения курса теоретических основ электротехники, являющегося фундаментальным базовым курсом для электротехнического образования будущих специалистов электриков и электромехаников, требуется правильное сочетание теоретических знаний с расчетной и лабораторной практикой. Важным элементом расчетной практики являются индивидуальные домашние задания по основным разделам курса.

При самостоятельной работе над домашними заданиями часть студентов встречает трудности, в частности, методического характера, обусловленные недостаточными навыками в применении теоретических положений к расчету электромагнитных процессов в конкретных электрических цепях. Так, при расчете установившегося периодического режима в электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником, необходимо обратить особое внимание на особенности, свойственные цепям с нелинейными элементами, параметры которых зависят от величины протекающего тока и подведенного напряжения.

Эти особенности обусловлены нелинейностью магнитной системы катушки, вследствие чего даже при синусоидальном напряжении на такой катушке, ток в ней является несинусоидальным.

Целью данной методической разработки, содержащей расчетное задание, краткую теоретическую справку и примеры расчетов по основным пунктам задания, является оказание методической помощи студентам в самостоятельной работе над домашним заданием по расчету электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником.

В теоретической части дается краткое описание основных физических процессов, происходящих в катушке с ферромагнитным сердечником при синусоидальном напряжении. Показано, как сложная электрическая схема замещения такой катушки упрощается в том случае, если можно пренебречь потерями энергии в ферромагнитном сердечнике и в проводнике обмотки, а также магнитным потоком рассеяния.

Далее, в расчетных примерах по п. 1 задания, рассмотрены удобные для последующих расчетов способы аналитической аппроксимации кривой намагничивания стали ферромагнитного сердечника катушки, даются рекомендации по выбору опорных (характерных) точек для определения коэффициентов аппроксимирующих выраже-

ний. Используемые в задании три вида аппроксимирующих выражений анализируются с точки зрения более полного приближения к реальным кривым намагничивания.

Изучение студентами примеров по п. 2, 3 и 4 задания позволит избежать принципиальных электротехнических (отсутствие высших гармоник напряжения на катушке при синусоидальном изменении индукции в ферромагнитном сердечнике), математических (связанных, например, с представлением гиперболического синуса с гармоническим аргументом рядом Фурье) и других ошибок в своих расчетах. Анализ помещенных в пособие графиков мгновенных значений несинусоидальных токов и напряжений позволит студентам избежать ошибок в графическом представлении полученных ими расчетных результатов.

Дополнительные трудности возникают у студентов при расчете катушки, ферромагнитный сердечник которой имеет поперечный воздушный зазор. Этому вопросу также уделено должное внимание (см. п. 2.5).

Индивидуализация заданий достигается за счет использования в расчетах кривых намагничивания четырех сортов электротехнической стали, различия амплитудных значений индукции, использования трёх видов аппроксимирующих выражений кривых намагничивания стали, различия числовых данных параметров схем.

Предполагается, что студенты приступают к выполнению домашнего задания после того, как они прослушали лекции по теме домашнего задания и изучили основные положения теории по учебнику, например [Л.1]. Весьма желательно также решение и осмысление типовых задач по теме домашнего задания. Для этого можно использовать задачки [Л. 2, 3].

## ЗАДАНИЕ. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ КАТУШКУ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ.

Индукция магнитного поля в ферромагнитном сердечнике (см. рис. 1) изменяется по синусоидальному закону  $B=B_m \sin \omega t$ . Кривые намагничивания стали сердечника приведены в таблице 1. Числовые данные параметров схемы электрической цепи приведены в таблице 2. В таблице 3 указан вид аппроксимирующего выражения кривой намагничивания стали. В таблице 4 приведены шифры вариантов числовых данных домашнего задания. Сорт стали и амплитуда индукции магнитного поля в ферромагнитном сердечнике определяются только порядковым номером студента в групповом журнале, а шифры вариантов числовых данных ещё и номером группы в учебном потоке, причём число в шифре означает вариант числовых данных параметров схемы (см. табл. 2), а буква - вид аппроксимирующего выражения кривой намагничивания стали (см. табл. 3).

**Таблица 1.**

Кривые намагничивания сталей Э11, Э31, Э42, Э45 (приводятся по [Л. 2]).

Напряжённость магнитного поля $H, A/cm$	Марка стали, индукция			
	Э11 В, Тл	Э31 В, Тл	Э42 В, Тл	Э45 В, Тл
0	0	0	0	0
0,4	0,11	0,18	0,35	0,44
1,0	0,53	0,67	0,73	0,75
1,4	0,73	0,81	0,87	0,88
2,0	0,99	0,99	1,01	1,03
2,4	1,10	1,05	1,06	1,11

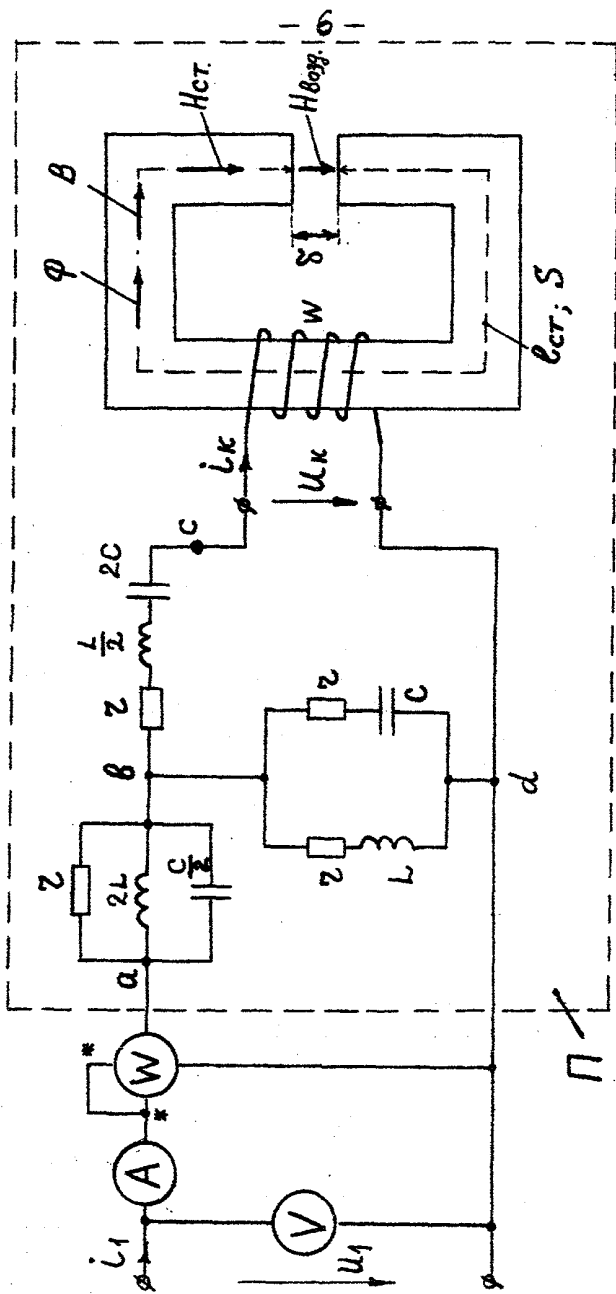


Рис.1. Электрическая цепь, содержащая катушку с ферромагнитным сердечником.

**Таблица 1. (Окончание)**

Кривые намагничивания сталей Э11, Э31, Э42, Э45 (приводятся по [Л. 2]).

4,0	1,22	1,14	1,16	1,20
6,0	1,30	1,23	1,25	1,27
8,0	1,38	1,30	1,32	1,32
10,0	1,42	1,38	1,37	1,37
12,0	1,45	1,42	1,40	1,40
14,0	1,48	1,46	1,44	1,42
18,0	1,54	1,50	1,48	1,44
22,0	1,57	1,53	1,50	1,46
24,0	1,59	1,55	1,51	1,47

**Таблица 2.**

Варианты числовых данных параметров схем (определяются по цифрам шифра из таблицы 4).

Вариант	Параметры схем							
	г, Ом	$\omega L$ , Ом	$1/\omega C$ , Ом	W, витк.	l, см	S, см <sup>2</sup>	f, Гц	$\delta$ , мм
1	15	5,0	45	500	55	6,5	50	0,5
2	30	10	90	600	60	6,0	80	0,6
3	30	30	30	700	65	5,5	100	0,6
4	45	15	135	800	70	5,0	150	0,7
5	45	45	45	900	75	4,5	90	0,7
6	60	20	180	1000	80	4,0	100	0,8
7	60	60	60	1100	85	3,5	50	0,8
8	75	25	225	1200	90	3,0	60	0,9
9	75	75	75	1300	95	2,5	80	0,9
10	90	30	270	1400	100	2,0	100	1,0
11	90	90	90	1300	90	3,0	60	1,0
12	105	35	315	1200	80	4,0	70	1,0

**Таблица 3.**

Вид аппроксимирующего выражения кривой намагничивания стали (определяется по буквенному индексу шифра из таблицы 4).

Обозначение аппроксимирующего выражения	a	b	c
Вид аппроксимирующего выражения.	$H = a_1B + a_3B^3$	$H = a_1B + a_5B^5$	$H = \alpha Sh\beta B$

### **ТРЕБУЕТСЯ:**

1. Определить коэффициенты аппроксимирующего выражения рабочего участка кривой намагничивания стали ферромагнитного сердечника Вашего варианта домашнего задания. Построить на чертеже кривую намагничивания стали по полученному аппроксимирующему выражению  $B(H)_{\text{расч.}}$  и сравнить её с заданной кривой  $B(H)$ , построенной на том же чертеже по таблице 1.
2. Считая, что воздушный зазор в сердечнике отсутствует ( $\delta = 0$ ), и пренебрегая магнитным потоком рассеяния, потерями в стали и активным сопротивлением обмотки, определить ток в катушке со стальным сердечником  $i_k$  и напряжение на катушке  $U_k$ . Построить на одном чертеже кривые мгновен-



**Таблица № 4. Варианты числовых данных**

Порядковый номер студента в групповом журнале	Сорт стали	Амплитуда магнитной индукции $B_m, \text{Tл}$	Шифры вариантов числовых данных в таблицах № 2 и 3 для студентов групп:												
			211	212	213	214	221	222	223	224	231	232	233		
1	Э11	1,45	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б		
2	Э31	1,42	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а		
3	Э42	1,40	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с		
4	Э45	1,40	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б		
5	Э11	1,42	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а		
6	Э31	1,48	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с		
7	Э42	1,37	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а	5 б		
8	Э45	1,37	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с	4 а		
9	Э11	1,38	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б	3 с		
10	Э31	1,30	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а	2 б		
11	Э42	1,32	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с	1 а		
12	Э45	1,32	2 б	3 с	4 а	5 б	6 с	7 а	8 б	9 с	10 а	11 б	12 с		
13	Э11	1,42	12 а	1 б	2 с	3 а	4 б	5 с	6 а	7 б	8 с	9 а	10 б		
14	Э31	1,38	11 с	12 а	1 б	2 с	3 а	4 б	5 с	6 а	7 б	8 с	9 а		
15	Э42	1,37	10 б	11 с	12 а	1 б	2 с	3 а	4 б	5 с	6 а	7 б	8 с		
16	Э45	1,37	9 а	10 б	11 с	12 а	1 б	2 с	3 а	4 б	5 с	6 а	7 б		

Таблица № 4. (Окончание) Варианты числовых данных

	Цифры вариантов числовых данных в таблицах № 2 и 3 для студентов групп:												
	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а		
17	Э11	1,38	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а
18	Э31	1,30	7б	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с
19	Э42	1,32	6а	7б	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б
20	Э45	1,32	5с	6а	7б	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а
21	Э11	1,30	4б	5с	6а	7б	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с
22	Э31	1,23	3а	4б	5с	6а	7б	8с	9а	10б	11с	12а	1б
23	Э42	1,25	2с	3а	4б	5с	6а	7б	8с	9а	10б	11с	12а
24	Э45	1,27	1б	2с	3а	4б	5с	6а	7б	8с	9а	10б	11с
25	Э11	1,38	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а	7б	8с	9а	10б
26	Э31	1,30	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а	7б	8с	9а
27	Э42	1,32	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а	7б	8с
28	Э45	1,32	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а	7б
29	Э11	1,30	8с	9а	10б	11с	12а	1б	2с	3а	4б	5с	6а
30	Э31	1,23	7б	8с	9а	10б	10с	12а	1б	2с	3а	4б	5с

ных значений тока в катушке  $i_k(\omega t)$  и напряжения на катушке  $u_k(\omega t)$ .

3. Определить напряжение и ток на входе цепи  $u_1(\omega t)$  и  $i_1(\omega t)$ . Построить кривые мгновенных значений этих величин на отдельном чертеже.
4. Определить показания измерительных приборов электродинамической системы.
5. При тех же допущениях, что были приняты в п.2 ( $\varphi_\sigma = 0$ ,  $R_{ст} = 0$ ,  $r_0 = 0$ ) и таком же напряжении на катушке  $u_k$ , какое было получено в п.2, определить ток в катушке  $i_k'$  при наличии в сердечнике катушки поперечного зазора длиной  $\delta$ . Сопоставить токи в катушке без зазора в ферромагнитном сердечнике ( $\delta = 0$ ) и при наличии зазора длиной  $\delta$ :
  - по гармоническому составу;
  - по амплитудам отдельных гармоник;
  - по действующим значениям;
  - по коэффициентам амплитуды и искажения (см. табл. 5).

Таблица 5.

Таблица сопоставлений

	$I_{m1}, A$	$I_{m3}, A$	$I_{m5}, A$	$I_m, A$	$I, A$	$K_a$	$K_{\delta}$
$\delta = 0$							
$\delta = \dots$ мм							

Сделать выводы о влиянии воздушного зазора на эти соотношения и коэффициенты.

---

Примечание. На некоторых специальностях и специализациях по указанию лектора потока отдельные пункты задания могут не выполняться. Для упрощения п. 3 может считаться закороченным участок цепи **ab** (или **bc**) или разомкнутой (отсутствующей) ветвь **bd**.

## 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником - электрический дроссель широко применяется в различных электротехнических устройствах, в частности, в устройствах радиотехники, связи, СЦБ и т.д. в качестве индуктивного элемента. Трансформатор в режиме холостого хода также может рассматриваться как электрический дроссель.

При изучении зависимостей между подведенным напряжением, током в обмотке и магнитным потоком при небольших частотах необходимо учитывать следующие основные электромагнитные процессы, происходящие в этом устройстве ( см. рис. 2а). Под воздействием подведенного напряжения, которое в большинстве случаев является синусоидальным, по обмотке протекает переменный, как правило, несинусоидальный ток. Намагничивающей силой обмотки  $i_w$  создается магнитный поток. Силовые линии основной части магнитного потока замыкаются по ферромагнитному сердечнику, образуя основной магнитный поток  $\Phi_0$ . Некоторая, в большинстве случаев незначительная часть магнитных силовых линий замыкается вокруг проводников обмотки по воздуху, образуя магнитный поток рассеяния  $\Phi_\sigma$ . Соотношение между этими потоками зависит от напряженности магнитного поля в ферромагнитном сердечнике. При малых значениях напряженности, соответствующих начальному участку кривой намагничивания стали  $B(H)$ , соотношение между  $\Phi_0$  и  $\Phi_\sigma$  определяется геометрическими размерами ферромагнитного сердечника и сортом стали. При увеличении напряженности магнитного поля с выходом на участок насыщения кривой намагничивания  $B(H)$  магнитный поток рассеяния  $\Phi_\sigma$  увеличивается в большей степени, чем основной магнитный поток.

Переменный магнитный поток в сердечнике  $\Phi_0$  непрерывно перемагничивает ферромагнитный сердечник, вызывая тем самым потери энергии на перемагничивание (потери на гистерезис). Этим же потоком в объемах стали в плоскостях, перпендикулярных силовым магнитным линиям, индуцируются вихревые электродвижущие силы ( $\epsilon_{\text{вихр}}$ ), под воздействием которых в стали, также в плоскостях перпендикулярных магнитным силовым линиям, протекают вихревые токи, нагревающие сталь. Таково происхождение потерь в стали от вихревых токов. Потери в стали от гистерезиса и от вихревых токов

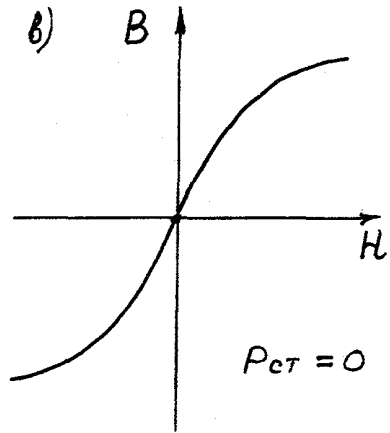
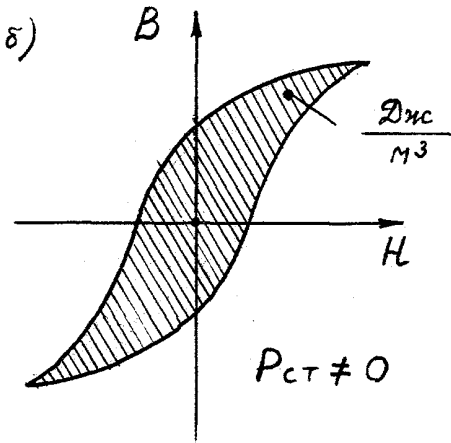
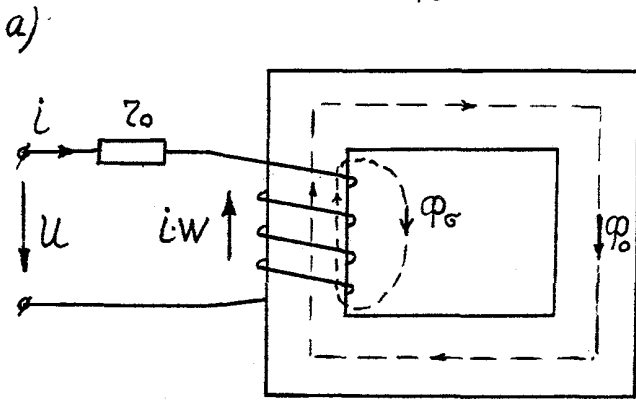


Рис.2. Катушка с ферромагнитным сердечником (а), петля гистерезиса ферромагнитного материала сердечника при наличии потерь в стали (б) и кривая намагничивания материала сердечника в отсутствии потерь в стали (в).

называются общими потерями в стали. Площадь петли гистерезиса (см. рис 2б), имеющая размерность Дж/м<sup>3</sup>, характеризует потери энергии в единице объема ферромагнитного сердечника за один цикл перемагничивания.

При протекании электрического тока по обмотке наблюдается нагрев проводников этой обмотки. Учет процесса преобразования электрической энергии в тепло в проводнике обмотки осуществляется с помощью идеализированного элемента цепи - активного сопротивления обмотки  $r_0$ .

Таким образом, рассмотрение электромагнитных процессов в реальной катушке с ферромагнитным сердечником при небольших частотах предполагает учет и определение основного магнитного потока  $\Phi_0$ , магнитного потока рассеяния  $\Phi_\sigma$ , мощности потерь в ферромагнитном сердечнике  $P_{ст}$  и потерь энергии в обмотке с помощью активного сопротивления обмотки  $r_0$ .

На рис. 3а и 3б изображены подробная векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником и соответствующая этой диаграмме последовательно-параллельная схема замещения этой катушки. Векторная диаграмма построена в предположении, что подведенное к катушке напряжение синусоидально, а несинусоидальный ток в катушке заменен эквивалентным синусоидальным током; при этом кривые магнитных потоков  $\Phi_0$  и  $\Phi_\sigma$  стали также синусоидальными. Напомним, что действующее значение эквивалентного синусоидального тока равно действующему значению реального несинусоидального тока, а фазовые сдвиги эквивалентного синусоидального тока относительно подведенного напряжения и основного магнитного потока определяются исходя из равенства потерь энергии в реальной цепи с несинусоидальным током и в расчетной схеме с эквивалентным синусоидальным током.

Основной ветвью последовательно-параллельной схемы замещения катушки со стальным сердечником (см. рис. 3б) является ветвь намагничивания с намагничивающим током  $\dot{I}_\mu$ . Именно эта ветвь соответствует наличию основного магнитного потока  $\dot{\Phi}_0$ , которым индуцируется основная ЭДС самоиндукции  $\dot{E}_{L_0} = -\dot{U}_0$ . Нелинейный элемент этой ветви - катушка с ферромагнитным сердечником характеризуется динамической кривой намагничивания  $B_m(H_m)$ , представляющей собой геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса.

Потери энергии, фактически присутствующие в сердечнике, вынесены из него; они учитываются ветвью потерь с сопротивлением  $r_n$  (сопротивление потерь) и током  $\dot{I}_n$  (током потерь). Отметим,

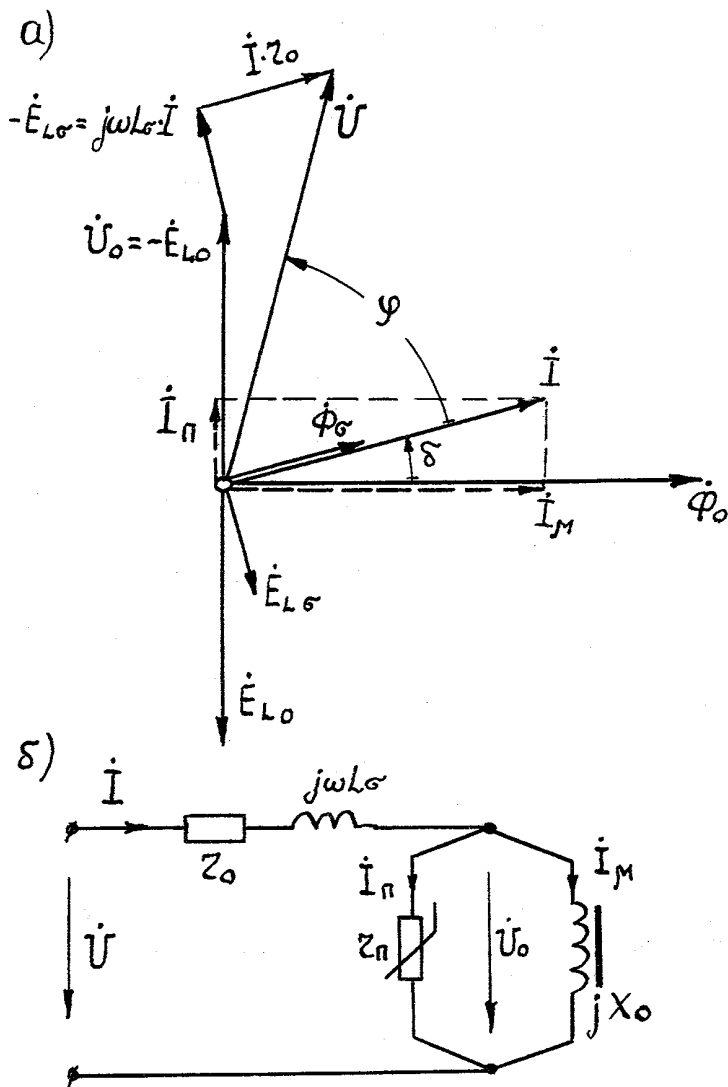


Рис.3. Подробная векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником (а) и электрическая схема замещения реальной катушки (б).

что с увеличением мощности потерь в стали  $P_{ст}$ , величина сопротивления  $r_{п}$ , эквивалентирующего эти потери, уменьшается, а ток потерь  $\dot{I}_{п}$  увеличивается.

Из-за наличия потерь в стали эквивалентный синусоидальный ток  $\dot{I}$  в катушке с сердечником и основной магнитный поток  $\dot{\Phi}_0$  сдвинуты по фазе на угол  $\delta$  - угол потерь (см. векторную диаграмму на рис. 3а). Математически геометрическое разложение тока  $\dot{I}$  на намагничивающий ток  $\dot{I}_{\mu}$  и ток потерь  $\dot{I}_{п}$ , определяет наличие параллельных ветвей в электрической схеме замещения (см. рис. 3б).

Магнитный поток рассеяния  $\dot{\Phi}_{\sigma}$  совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , так как какие-либо потери энергии в воздухе от потока рассеяния, естественно, отсутствуют. Наличие потока рассеяния учитывается в электрической схеме замещения индуктивностью рассеяния  $L_{\sigma}$ . На том же элементе имеет место падение напряжения  $j\omega L_{\sigma}\dot{I}$ , компенсирующее электродвижущую силу  $\dot{E}_{L_{\sigma}}$ , которая индуцируется в обмотке магнитным потоком рассеяния  $\dot{\Phi}_{\sigma}$ .

На активном сопротивлении проводов обмотки имеет место падение напряжения  $r_0\dot{I}$ .

Таким образом, напряжение источника можно условно разделить на три составляющие:

⇒ основная часть напряжения источника уравнивает (компенсирует) электродвижущую силу самоиндукции  $e_{L_0}$ , наводимую в обмотке основным потоком  $\Phi_0$

$$u_0 = - e_{L_0} = W (d\Phi_0/dt)$$

(в символической записи  $\dot{U}_0 = - \dot{E}_{L_0} = j\omega W \dot{\Phi}_0$ );

⇒ другая часть напряжения источника уравнивает (компенсирует) электродвижущую силу самоиндукции  $e_{L_{\sigma}}$ , наводимую в обмотке магнитным потоком рассеяния  $\Phi_{\sigma}$

$$u_{\sigma} = - e_{L_{\sigma}} = W(d\Phi_{\sigma}/dt) = L_{\sigma}(di/dt)$$

(в символической записи  $\dot{U}_{\sigma} = - \dot{E}_{L_{\sigma}} = j\omega W \dot{\Phi}_{\sigma} = j\omega L_{\sigma} \dot{I}$ );

⇒ третья составляющая напряжения источника «теряется» в виде падения напряжения на активном сопротивлении провода обмотки  $r_0\dot{I}$  (в символической записи  $r_0\dot{I}$ ).



Таким образом, напряжение источника (см. рис. 3а) :

$$\dot{U} = - \dot{E}_{L0} - \dot{E}_{L\sigma} + r_0 \dot{I} = \dot{U}_0 + j\omega L_{\sigma} \dot{I} + r_0 \dot{I} .$$

Определение тока в реальной катушке с ферромагнитным сердечником (при учете потерь энергии в стали, в проводах обмотки и потока рассеяния) представляет достаточно сложную задачу и выполняется обычно методом последовательных приближений.

## ИДЕАЛИЗИРОВАННАЯ КАТУШКА С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Если дроссель изготовлен из высококачественных электротехнических материалов, то при выполнении электрических расчетов без большого ущерба для точности этих расчетов можно пренебречь потерями энергии в стали дросселя ( $P_{ст} = 0$ ), в проводниках обмотки ( $r_0 = 0$ ) и магнитным потоком рассеяния ( $\Phi_{\sigma} = 0$ ). При этом основной магнитный поток становится единственным потоком  $\Phi_0 = \Phi$ . Электрическая схема замещения такой идеализированной катушки с ферромагнитным сердечником приведена на рис. 4а, а на рис. 4б приведена кривая намагничивания стали сердечника, при отсутствии потерь энергии в стали ( $P_{ст} = 0$ ), петля гистерезиса «вырождается» в однозначную зависимость - кривую намагничивания  $B(H)$ .

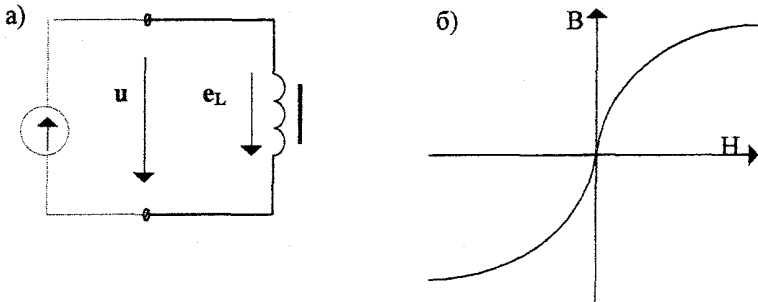


Рис. 4. Электрическая схема идеальной катушки с ферромагнитным сердечником (а) и кривая намагничивания материала сердечника (б).

Для этой цепи

$$u = - e_L = W(d\Phi/dt) , \text{ откуда}$$

$$\Phi = (1/W) \int u dt.$$

При синусоидальном напряжении на входе цепи  $u = U_m \cos\omega t$  получим, что магнитный поток также синусоидален и отстает по фазе на четверть периода от подведенного напряжения:

$$\Phi = (1/W) \int u dt = \frac{U_m}{\omega W} \sin\omega t = \Phi_m \sin\omega t , \text{ где}$$

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega W} \quad \text{или} \quad \Phi_m = \frac{U}{4,44Wf} .$$

Индукция магнитного поля в сердечнике повторяет форму кривой магнитного потока

$$B = \Phi/S = (\Phi_m/S)\sin\omega t = B_m \sin\omega t .$$

Взаимное расположение векторов  $\dot{U}$ ,  $\dot{E}_L$ ,  $\dot{\Phi}$  и  $\dot{B}$  для рассматриваемого случая питания идеальной катушки со стальным сердечником от источника синусоидального напряжения показано на векторной диаграмме, изображенной на рис 5.

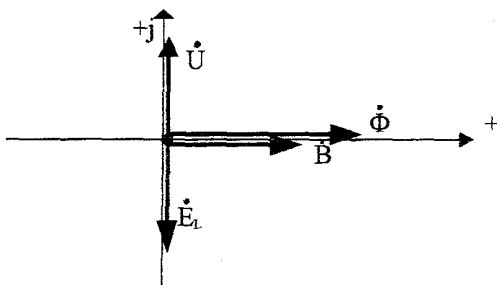


Рис. 5. Векторная диаграмма идеальной катушки с ферромагнитным сердечником

Так как взаимосвязь мгновенных значений индукции магнитного поля и напряженности поля в стали сердечника характеризуется нелинейной зависимостью - кривой намагничивания  $\mathbf{B(H)}$ , представленной на рис. 4б, то при изменении индукции во времени по синусоидальному закону напряженность магнитного поля в стали является несинусоидальной функцией. Кривая тока, который связан с напряженностью поля законом полного тока, также является несинусоидальной кривой.

В рассматриваемом домашнем задании взаимосвязь мгновенных значений индукции и напряженности магнитного поля в ферромагнитном сердечнике предлагается аппроксимировать аналитической функцией. Так как кривая намагничивания стали ферромагнитного сердечника  $\mathbf{B(H)}$  симметрична относительно начала координат, то аппроксимирующие выражения должны обладать соответствующими свойствами. Предлагаются следующие аппроксимирующие функции:

$$H = a_1 B + a_3 B^3, \quad (a)$$

$$H = a_1 B + a_5 B^5, \quad (b)$$

$$H = \alpha Sh\beta B. \quad (c)$$

Коэффициенты этих аналитических выражений  $a_1$  и  $a_3$ ,  $a_1$  и  $a_5$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , определяются путём решения систем из двух уравнений, составленных для двух характерных (опорных) точек рабочего участка кривой намагничивания. Одна из этих опорных точек должна соответствовать амплитудному значению индукции магнитного поля  $B_m$ , задаваемому условиями домашнего задания. Это позволяет правильно определить амплитудные значения напряжения на катушке, магнитного потока, напряженности магнитного поля в стали и тока в катушке. Другая опорная точка должна быть взята на колене кривой намагничивания.

Для аппроксимирующего выражения (а) получим уравнения:

$$\begin{cases} H_1 = a_1 B_1 + a_3 B_1^3, \\ H_2 = a_1 B_2 + a_3 B_2^3. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдём коэффициенты  $a_1$  и  $a_3$  аппроксимирующего выражения (а). Аналогично определяются коэффициенты аппроксимирующих выражений (b) и (c).

При рекомендуемом выборе характерных (опорных) точек расчетная кривая намагничивания стали, построенная по аппроксимирующему выражению  $B(H)_{\text{расч}}$ , достаточно точно будет аппроксимировать рабочий участок кривой намагничивания  $B(H)$ .

При этом площади фигур  $S_1$  и  $S_2$  будут примерно одинаковыми (рис. 6). В противном случае точку «1» следует сменить по кривой намагничивания  $B(H)$  и повторить расчет по определению коэффициентов.

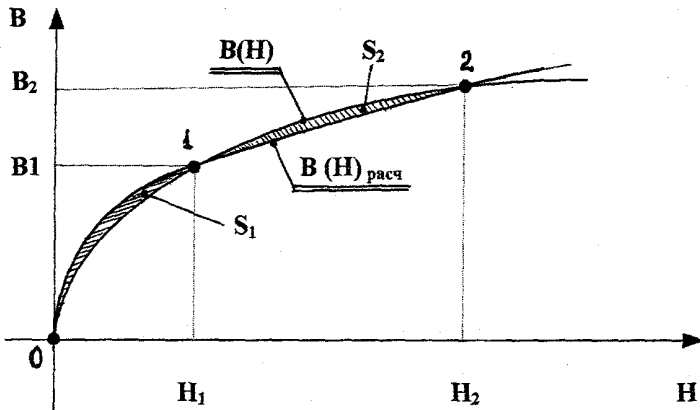


Рис. 6. Кривые намагничивания стали :

$B(H)$  - исходная кривая, заданная таблицей 4;

$B(H)_{\text{расч}}$  - расчетная кривая, построенная по аппроксимирующему выражению.

Методика последующих расчетов (определение напряженности магнитного поля, тока в обмотке, напряжения на катушке, тока и напряжения на входе электрической цепи и т.д.) изложена в приводимых далее примерах.

## 2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ПУНКТАМ ЗАДАНИЯ

### 2.1. АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ НАМАГНИЧИВАНИЯ СТАЛИ ФЕРРОМАГНИТНОГО СЕРДЕЧНИКА.

#### ПРИМЕР №1

Определить коэффициенты  $a_1$  и  $a_3$  аппроксимирующего выражения  $H = a_1 B + a_3 B^3$  кривой намагничивания стали Э11, если по условию домашнего задания  $B_m = 1,28$  Тл.

#### РЕШЕНИЕ

Рабочий участок кривой намагничивания стали при заданных условиях:  $-B_m = -1,28$  Тл  $\div 0 \div B_m = 1,28$  Тл,  $-H_m = -5$  А/см  $\div 0 \div H_m = 5$  А/см.

В качестве опорных точек выбираем характерные точки:  $B_2=B_m=1,28$  Тл,  $H_2=H_m=5$  А/см,  $B_1=0,73$  Тл,  $H_1=1,4$  А/см.

Составляем систему уравнений, обеспечивающую прохождение расчетной кривой  $B(H)_{расч}$  через эти характерные точки (и начало координат):

$$\begin{cases} 1,4 = a_1 0,73 + a_3 0,73^3, \\ 5 = a_1 1,28 + a_3 1,28^3. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, методом определителей, найдём коэффициенты  $a_1$  и  $a_3$ .

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1,4 & 0,73^3 \\ 5 & 1,28^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,73 & 0,73^3 \\ 1,28 & 1,28^3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1,4 & 0,398 \\ 5 & 2,097 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,73 & 0,398 \\ 1,28 & 2,097 \end{vmatrix}} = \frac{2,936 - 1,945}{1,531 - 0,498} = \frac{0,991}{1,033} = 0,959 \approx 0,96$$

$$a_3 = \frac{5 - 1,28a_1}{1,28^3} = \frac{3,771}{2,097} = 1,798 \approx 1,8$$

Таким образом, аппроксимирующее выражение рабочего участка кривой намагничивания стали Э11, для заданных условий варианта задания, получилось следующим:

$$H = 0,96 B + 1,8 B^3, \quad (1)$$

где индукция  $B$  измеряется в Тл, а напряженность магнитного поля в А/см.

По полученному аппроксимирующему выражению рассчитываем кривую намагничивания  $B(H)_{\text{расч}}$  (см. табл. 6) и построим её на рис. 7 для сравнения с заданной кривой  $B(H)$ .

Таблица 6.

Кривая намагничивания, полученная по формуле (1).

$B,$ Тл	0	0,5	0,73	1,00	1,15	1,28
$H_{\text{расч}},$ А/см	0	0,7	1,4	2,76	3,84	5,00

Сопоставление кривых  $B(H)_{\text{расч}}$  и  $B(H)$  (см. рис. 7) указывает на наличие существенных расхождений между ними. Смещение опорной точки «1» по кривой намагничивания  $B(H)$  может лишь весьма незначительно уменьшить расхождение кривых.

### ПРИМЕР № 2

Определить коэффициенты  $a_1$  и  $a_5$  аппроксимирующего выражения  $H = a_1 B + a_5 B^5$  кривой намагничивания стали Э31, если по условию домашнего задания  $B_m = 1,46$  Тл.

**Решение** В качестве опорных точек выбираем  $B_2 = B_m = 1,46$  Тл,  $H_2 = H_m = 14$  А/см;  $B_1 = 0,81$  Тл,  $H_1 = 1,4$  А/см.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1,4 = a_1 0,81 + a_5 0,81^5; \\ 14 = a_1 1,46 + a_5 1,46^5. \end{cases}$$

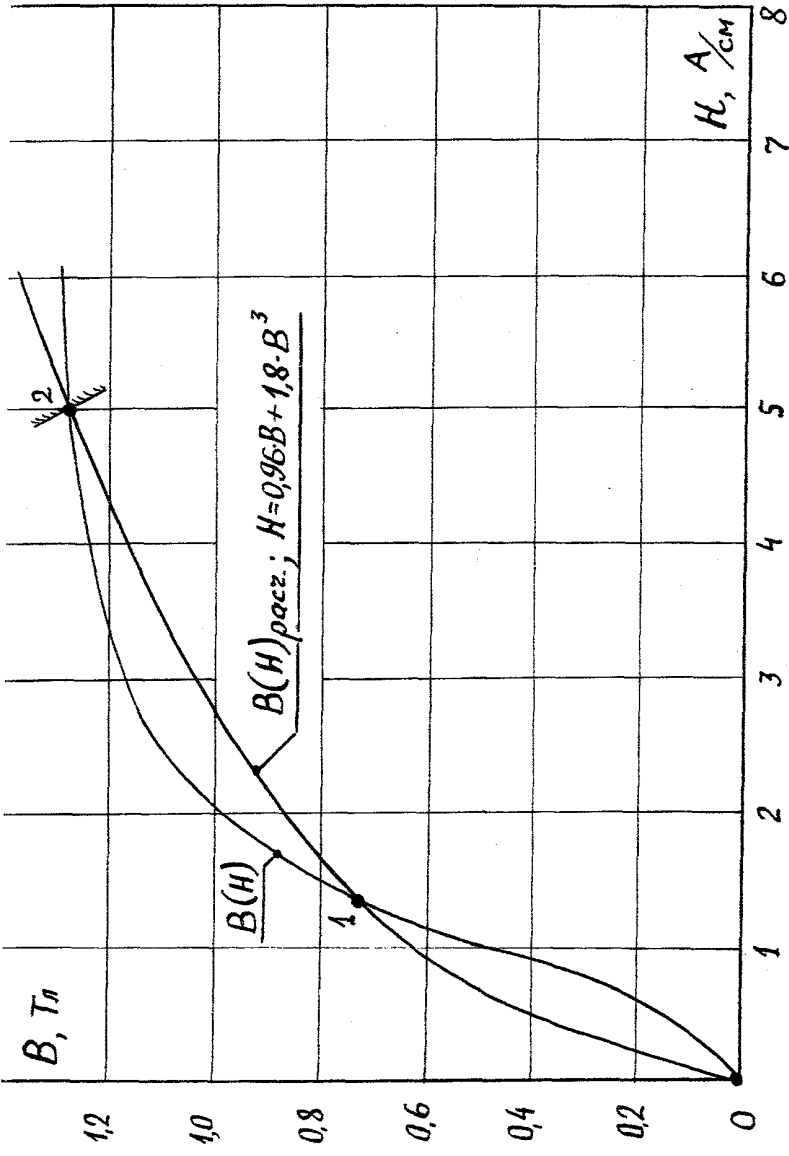


Рис. 7. Сопоставление кривых намагничивания стали Э11:

$B(H)$ - исходная кривая (см.табл.1);

$B(H)$  расч. - аппроксимирующая кривая, построенная по выражению (1).

Решив эту систему уравнений ,получим:

$$a_1 = 0,905, \quad a_5 = 1,911.$$

В тексте домашнего задания решение подобных систем уравнений должно быть подробным.

По полученному аппроксимирующему выражению

$$H = 0,905 B + 1,911 B^5, \quad (2)$$

где  $[B] = [Тл]$ ,  $[H] = [А/см]$

рассчитаем кривую  $B(H)_{расч.}$  ( см. табл.7) и сопоставим ее с заданной кривой  $B(H)$  ( см. рис.8).

Таблица №7. Кривая намагничивания  $B(H)$  расч., полученная по формуле (2).

B, Тл	0	0,4	0,6	0,81	1,05	1,23	1,30	1,38	1,46
H расч, А/см	0	0,38	0,69	1,40	3,51	6,49	8,27	10,8	14

Сопоставление кривых указывает на их достаточно хорошее соответствие. Расхождение кривых в рассмотренном варианте аппроксимации, несмотря на больший рабочий участок , значительно меньше, чем в первом примере.

### ПРИМЕР N3.

Определить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  аппроксимирующего выражения  $H = \alpha \cdot Sh\beta B$  кривой намагничивания стали Э 45, если по условию домашнего задания  $B_m = 1,42$  Тл.

### РЕШЕНИЕ.

В качестве опорных точек выбираем  $B_2 = B_m = 1,42$  Тл,  $H_2 = H_m = 14$  А/см,  $B_1 = 1,03$  Тл,  $H_1 = 2$  А/см. Получим систему трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} 2 = \alpha \operatorname{Sh} 1,03\beta & (1) \\ 14 = \alpha \operatorname{Sh} 1,42\beta & (2) \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений графическим методом. Разделив первое уравнение системы на второе , получим:

$$0,143 = \frac{\operatorname{Sh} 1,03\beta}{\operatorname{Sh} 1,42\beta} .$$



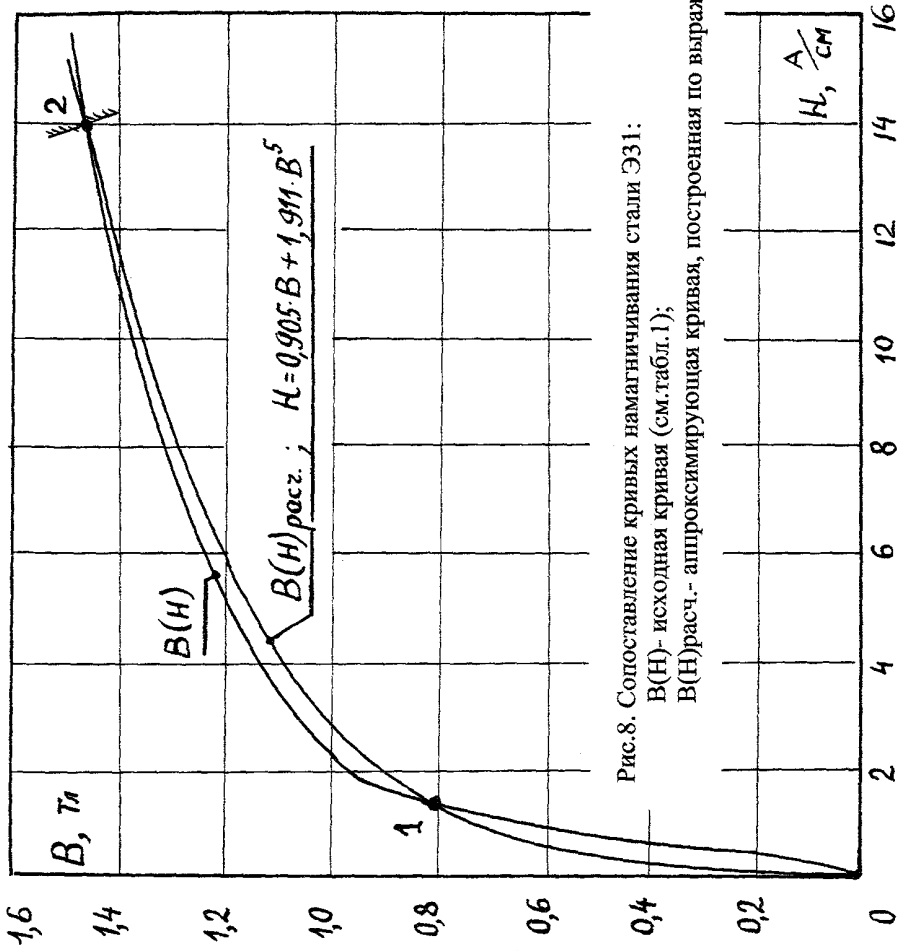


Рис.8. Сопоставление кривых намагничивания стали Э31:  
 $V(H)$ - исходная кривая (см.табл.1);  
 $V(H)_{расч.}$ - аппроксимирующая кривая, построенная по выражению (2).

Обозначив  $\frac{\text{Sh } 1,03\beta}{\text{Sh } 1,42\beta} = f(\beta)$  и придавая  $\beta$

различные значения, например:  $\beta'=1$ ,  $\beta''=2$ ,  $\beta'''=3$  и т.д., определим значения функции  $f(\beta)$  при этих значениях  $\beta$  (см. табл.8).

Таблица № 8. Результаты расчетов  $f(\beta)$

$\beta$	1	2	3	4	5	6
$f(\beta)$	0,63	0,45	0,31	0,21	0,142	0,096

С помощью графика  $f(\beta)$ , построенного по результатам вычислений (см. рис.9), по известному соотношению

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{2}{14} = 0,143, \text{ находим коэффициент } \beta = 5,0.$$

Второй коэффициент легко определяется по выражению (1):

$$\alpha = \frac{2}{\text{Sh } \beta 1,03} = \frac{2}{\text{Sh } 5 \cdot 1,03} = \frac{2}{\text{Sh } 5,15} = \frac{2}{172,4/2} = 0,0232,$$

или по выражению (2)

$$\alpha = \frac{14}{\text{Sh } \beta 1,42} = \frac{14}{\text{Sh } 7,1} = \frac{14}{1211,96/2} = 0,0232.$$

Таким образом, аппроксимирующее выражение рабочего участка кривой намагничивания стали Э45 для данного варианта задания получилось следующим:

$$H = 0,0232 \text{ Sh } 5 \cdot B \quad (3).$$

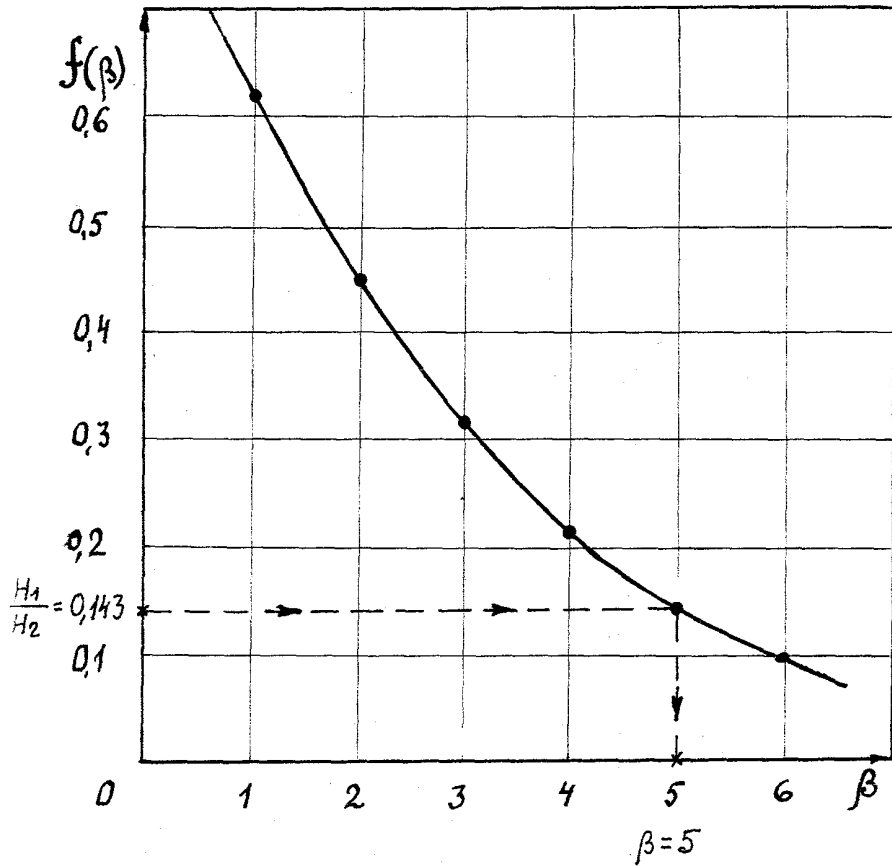


Рис.9 Определение коэффициента  $\beta$  по результатам расчетов, приведенным в табл. 8.

По полученному аппроксимирующему выражению рассчитаем кривую намагничивания  $B(H)_{\text{расч.}}$  (см.табл.9).

Кривая намагничивания  $B(H)_{\text{расч.}}$ , полученная по аппроксимирующему выражению (3), построена на рис.10.

Табл.9

B,Тл	0	0,44	0,75	0,88	1,03	1,11	1,20	1,27	1,32	1,37	1,40	1,42
Hрасч, А/см	0	0,10	0,50	0,94	2,0	3,0	4,68	6,64	8,52	10,95	12,72	14,0

Сопоставление кривой  $B(H)_{\text{расч.}}$  с заданной кривой намагничивания  $B(H)$  (см. рис.10) указывает на их весьма хорошее совпадение.

Анализ кривых намагничивания  $B(H)_{\text{расч.}}$ , полученных по трем рассмотренным выше аппроксимирующим выражениям, указывает на то, что наилучшее приближение к действительной (исходной, заданной) кривой намагничивания обеспечивает аппроксимирующее выражение вида  $H = \alpha \text{Sh} \beta B$ ; несколько уступает ему аппроксимирующее выражение вида  $H = a_1 B + a_5 B^5$ , а самое простое аппроксимирующее выражение вида  $H = a_1 B + a_3 B^3$  является наименее точным.

## **2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ИДЕАЛЬНОЙ КАТУШКЕ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ И ТОКА В КАТУШКЕ.**

### **2.2.1. Определение напряжения на катушке.**

#### **ПРИМЕР N 4.**

В соответствии с заданием известна индукция магнитного поля в ферромагнитном сердечнике

$$B = B_m \sin \omega t = 1,28 \sin 2\pi 80t = 1,28 \sin 502t, \quad [\text{Тл}].$$

Площадь поперечного сечения стали сердечника  $S = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Количество витков обмотки  $W = 600$ . Определить напряжение на катушке  $u_k(\omega t)$ .

#### **РЕШЕНИЕ.**

В случае идеальной катушки ( $r_0 = 0$ ,  $P_{\text{ст}} = 0$ ,  $\Phi_{\sigma} = 0$ ) подведенное к ней напряжение полностью уравнивается электродвижущей силой самоиндукции  $u_k = -e_L$ ,

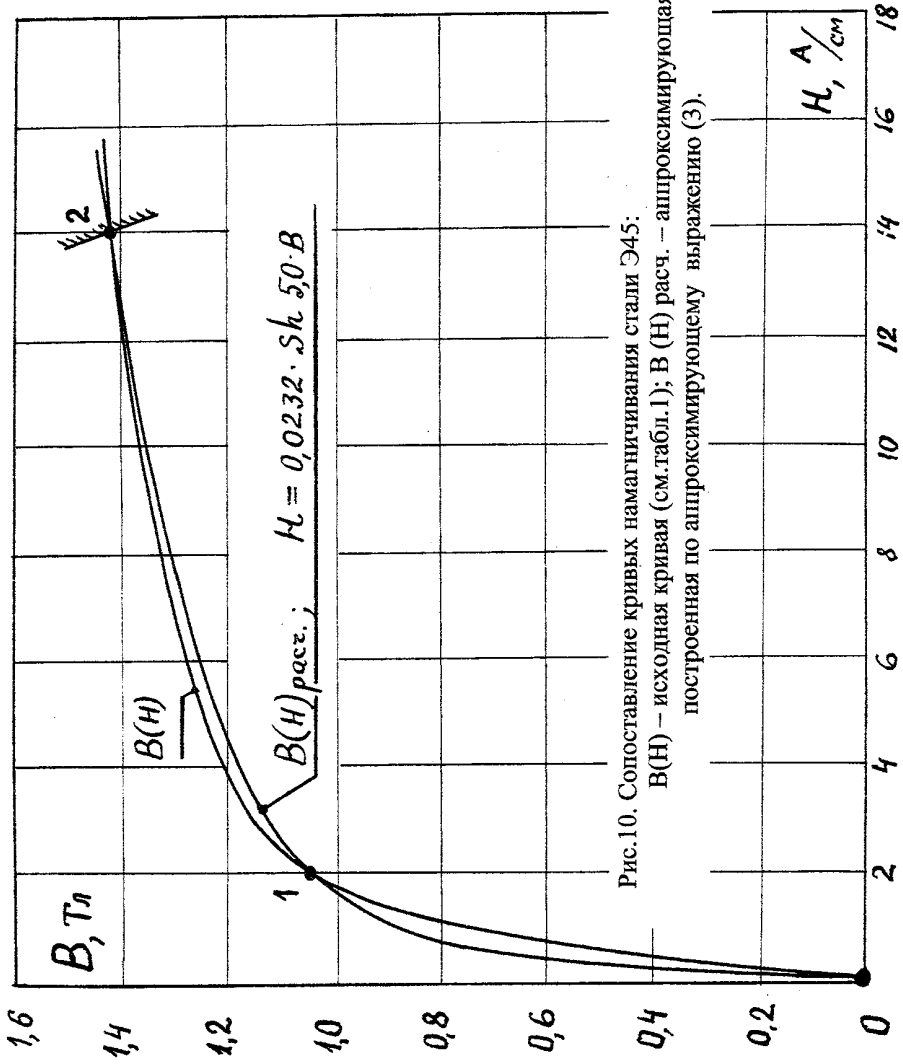


Рис.10. Сопоставление кривых намагничивания стали Э45:

$B(H)$  — исходная кривая (см.табл.1);  $B(H)_{расч.}$  — аппроксимирующая кривая, построенная по аппроксимирующему выражению (3).

$$\text{так как } e_L = -W \frac{d\Phi}{dt}, \text{ то } u_k = W \frac{d\Phi}{dt},$$

$$\text{где } \Phi = BS = B_m S \sin \omega t = 1,28 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \sin 502t = \\ = 7,68 \cdot 10^{-4} \sin 502t \quad [\text{Вб}].$$

$$u_k = W \frac{d\Phi}{dt} = 600 \cdot 7,68 \cdot 10^{-4} 502 \cos 502t = \\ = 231 \cos 502t = 231 \sin (502t + 90^\circ) \quad [\text{В}].$$

Символическое изображение этого напряжения

$$\dot{U}_{km} = j231 = 231e^{j90^\circ} \quad [\text{В}].$$

Комплекс действующего значения напряжения на катушке

$$\dot{U}_k = \frac{j231}{\sqrt{2}} = j164 = 164e^{j90^\circ} \quad [\text{В}].$$

### 2.2.2. Определение тока в катушке с ферромагнитным сердечником без воздушного зазора.

#### ПРИМЕР N 5.

В соответствии с заданием индукция магнитного поля в ферромагнитном сердечнике

$$B = B_m \sin \omega t = 1,28 \sin 502t \quad [\text{Тл}].$$

Определено аппроксимирующее выражение рабочего участка кривой намагничивания стали

$$H = a_1 B + a_3 B^3 = 0,219B + 2,966B^3,$$

где  $B$  - [Тл],  $H$  - [А/см].

Длина сердечника по средней силовой магнитной линии

$$l = 60 \text{ см}, \quad \text{количество витков обмотки } W = 600.$$

Определить ток в обмотке.

**РЕШЕНИЕ.**

Используя аппроксимирующее выражение  $H(B)$  по известной индукции найдем напряженность магнитного поля в сердечнике

$$\begin{aligned} H &= 0,219 B + 2,966 B^3 = \\ &= 0,219 \cdot 1,28 \sin 502t + 2,966 \cdot 1,28^3 \sin^3 502t = \\ &= 1,28 \sin 502t + 6,22 \left( \frac{3}{4} \sin 502t - \frac{1}{4} \sin 1506t \right) = \\ &= 4,945 \sin 502t - 1,555 \sin 1506t \quad [A/cm]. \end{aligned}$$

Для определения тока в обмотке при известной напряженности магнитного поля в ферромагнитном сердечнике используем закон полного тока.

$$\oint H dl = \sum i_k W$$

Для рассматриваемого случая однородной магнитной цепи без воздушного зазора

$$Hl = i_k W, \quad \text{откуда}$$

$$i_k = \frac{l}{W} H.$$

Для условий рассматриваемого примера получаем

$$\begin{aligned} i_k &= \frac{60 \text{ см}}{600} (4,945 \sin 502t - 1,555 \sin 1506t) A/cm = \\ &= 0,494 \sin 502t - 0,156 \sin 1506t \quad [A]. \end{aligned}$$

Вследствие нелинейности кривой намагничивания стали  $B(H)$  на рабочем участке характеристики при изменении индукции по синусоидальному закону напряженность магнитного поля в сердечнике и ток в обмотке оказываются несинусоидальными. Их гармонический состав и амплитуды гармоник зависят от степени нелиней-

ности рабочего участка кривой намагничивания стали  $B(H)$ , что должно быть правильно отражено в аппроксимирующей зависимости  $B(H)_{\text{расч.}}$ .

**ПРИМЕР N 6.**

В соответствии с заданием известна индукция магнитного поля в сердечнике

$$B = 1,57 \sin 314 t \text{ [Тл]}.$$

Определено аппроксимирующее выражение рабочего участка кривой намагничивания стали  $B(H)_{\text{расч.}}$  :

$$H = a_1 B + a_5 B^5 = 0,92 B + 1,58 B^5,$$

где  $B$  - Тл;  $H$  - А/см.

Длина сердечника по средней силовой магнитной линии

$\ell = 85$  см; количество витков обмотки  $W = 1100$ .

Определить ток в обмотке.

**РЕШЕНИЕ.**

Находим напряженность магнитного поля

$$\begin{aligned} H &= 0,92 B + 1,58 B^5 = 0,92 \cdot 1,57 \sin 314 t + 1,58 \cdot 1,57^5 \sin^5 314 t = \\ &= 1,44 \sin 314 t + 15,07 (5/8 \sin 314 t - 5/16 \sin 942 t + \\ &+ 1/16 \sin 1570 t) = 10,86 \sin 314 t - 4,71 \sin 942 t + \\ &+ 0,94 \sin 1570 t \quad [\text{А/см}]. \end{aligned}$$

По закону полного тока находим ток в обмотке

$$\begin{aligned} i &= \frac{\ell}{W} H = \frac{85 \text{ см}}{1100} (10,86 \sin 314 t - 4,71 \sin 942 t + \\ &+ 0,94 \sin 1570 t) \text{ А/см} = 0,84 \sin 314 t - 0,36 \sin 942 t + \\ &+ 0,07 \sin 1570 t \text{ [А]}. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР N 7.**

В соответствии с заданием известна индукция магнитного поля в ферромагнитном сердечнике  $B = 1,45 \sin 440 t$  Тл.

Определено аппроксимирующее выражение рабочего участка кривой намагничивания стали

$$H = \alpha \text{Sh} \beta B = 0,7 \text{Sh } 2,43 B, \quad [B - \text{Тл}, H - \text{А/см}].$$

Длина сердечника по средней силовой магнитной линии

$\ell = 80$  см, количество витков обмотки  $W = 1200$ .

Определить ток в обмотке.



**РЕШЕНИЕ.**

Находим напряженность магнитного поля в ферромагнитном сердечнике

$$H = 0,7 \text{Sh } 2,43 \cdot 1,45 \sin 440 t = 0,7 \text{Sh } (3,52 \sin 440 t),$$

Гиперболический синус удобно заменить рядом Фурье

$$\text{Sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ограничимся первыми тремя членами ряда Фурье; получим:

$$\begin{aligned} H &\cong 0,7 [3,52 \sin 440 t + \frac{(3,52 \sin 440 t)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(3,52 \sin 440 t)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}] = \\ &= [0,7 \cdot 3,52 \sin 440 t + \frac{3,52^3}{6} (\frac{3}{4} \sin 440 t - \\ &- \frac{1}{4} \sin 1320 t) + \frac{3,52^5}{120} (\frac{5}{8} \sin 440 t - \\ &- \frac{5}{16} \sin 1320 t + \frac{1}{16} \sin 2200 t)] = \\ &= 8,25 \sin 440 t - 2,25 \sin 1320 t + 0,2 \sin 2200 t \quad [\text{A/cm}] . \end{aligned}$$

Ток в обмотке находим с использованием закона полного тока

$$\oint H d\ell = \sum i_k W, \text{ откуда } i_k = H\ell / W,$$

$$i_k = \frac{\ell}{W} H = \frac{80 \text{ см}}{1200} (8,25 \sin 440 t - 2,25 \sin 1320 t +$$

$$+ 0,2 \sin 2200 t) \text{ A/cm} = 0,55 \sin 440 t - 0,15 \sin 1320 t + 0,013 \sin 2200 t \quad [\text{A}].$$

Кривая мгновенных значений тока в катушке  $i_k(\omega t)$  и кривые трех его гармонических составляющих  $i_k^{(1)}(\omega t)$ ,  $i_k^{(3)}(\omega t)$ ,  $i_k^{(5)}(\omega t)$  приведены на рис. 11. На этом же рисунке приведена кривая мгновенных значений напряжения на катушке  $u_k(\omega t)$ , а именно

$$u_k = 306 \sin(440 t + 90^\circ) \quad [\text{В}].$$

Действительно, так как в рассматриваемом примере  $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , то

$$u_k = -e_L = W \cdot S \frac{dB}{dt} =$$

$$= 1200 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \frac{d}{dt} [1,45 \sin 440 t] =$$

$$= 1200 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,45 \cdot 440 \cos 440 t = 306 \sin(440 t + 90^\circ) \quad [\text{В}].$$

### 2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА НА ВХОДЕ ЦЕПИ

#### ПРИМЕР N8.

Определение напряжения и тока источника по известному синусоидальному напряжению на катушке  $u_k(\omega t)$ , известному несинусоидальному току в ней  $i_k(\omega t)$  и известным параметрам цепи рассмотрим на примере электрической цепи, изображенной на рис. 12.

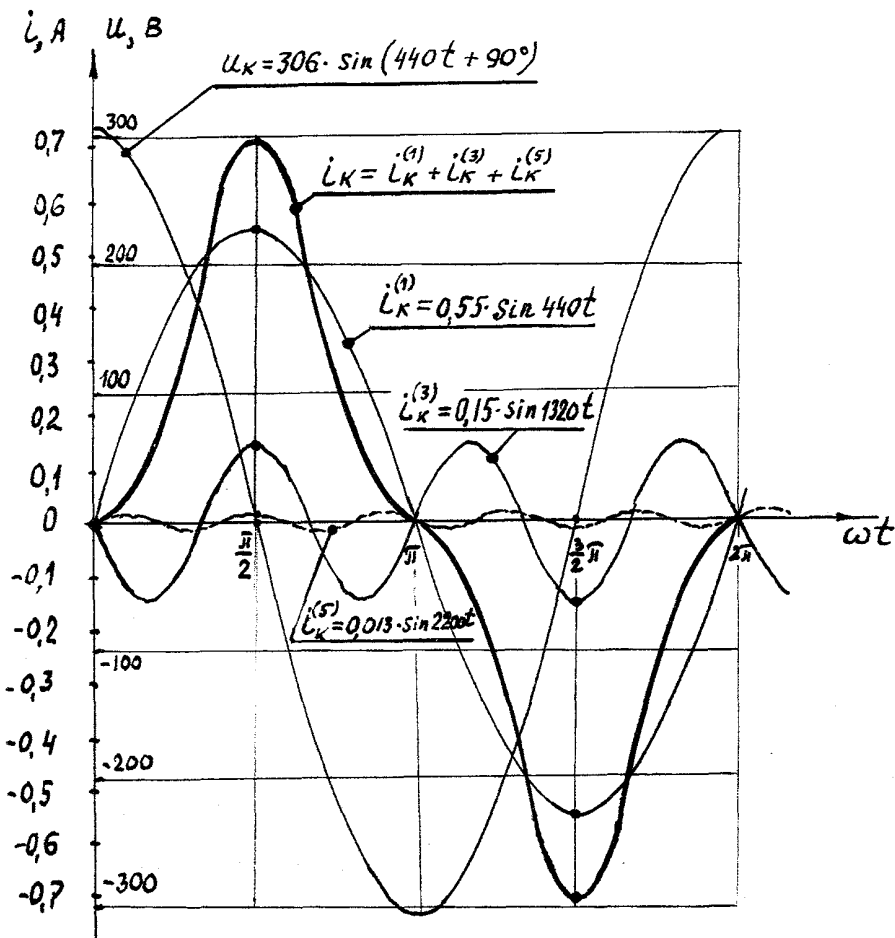


Рис.11. Кривые мгновенных значений тока в катушке  $i_{k(\omega t)}$ , его гармоник  $i_k^{(1)}(\omega t)$ ,  $i_k^{(3)}(\omega t)$ ,  $i_k^{(5)}(\omega t)$  и напряжения на катушке  $U_{k(\omega t)}$ .

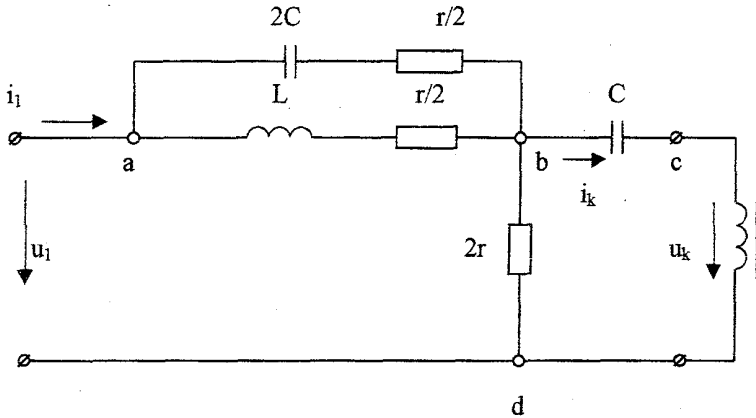


Рис.12. Электрическая цепь к Примеру № 8 по расчету напряжения и тока на входе цепи

Известно:

$$r = 30 \text{ Ом}, \quad \omega L = 100 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 50 \text{ Ом},$$

$$u_k = 200 \sin(314 t + 90^\circ), \text{ В}$$

$$i_k = 1,16 \sin 314 t - 0,49 \sin 942 t, \text{ А}$$

Расчет цепей несинусоидального тока выполняется методом наложения; на каждой гармонике выполняется самостоятельный расчет символическим (комплексным) методом.

Электрическая схема замещения для частоты первой гармоники изображена на рис. 12а.

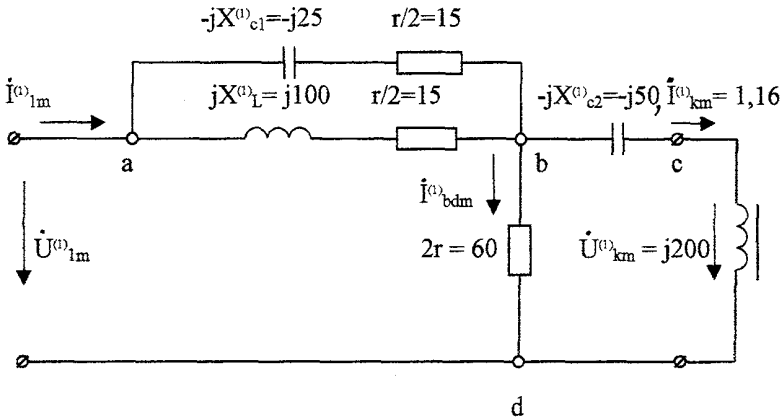


Рис.12а. Электрическая цепь к Примеру № 8 на частоте первой гармоники.

Расчет выполняем в амплитудных значениях. Используя законы Кирхгофа и закон Ома последовательно определяем напряжения и токи на участках цепи.

$$\dot{U}_{bdm}^{(1)} = \dot{I}_{km}^{(1)}(-jX_{c2}) + \dot{U}_{km}^{(1)} = 1,16(-j50) + j200 = j142,$$

$$\dot{I}_{bdm}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{bdm}^{(1)}}{2r} = \frac{j142}{60} = j2,37.$$

Ток источника

$$\dot{I}_{lm}^{(1)} = \dot{I}_{km}^{(1)} + \dot{I}_{bdm}^{(1)} = 1,16 + j2,37 = 2,64 e^{j64^\circ}.$$

Сопротивление параллельных ветвей участка «ab».

$$Z_{ab}^{(1)} = \frac{(r/2 + jX_L)(r/2 - jX_{c1})}{r + jX_L - jX_{c1}} = \frac{(15 + j100)(15 - j25)}{30 + j100 - j25} = 36,5 e^{-j46^\circ} \text{ Ом.}$$

Напряжение на участке «ab»

$$\dot{U}_{abm}^{(1)} = \dot{I}_{lm}^{(1)} Z_{ab}^{(1)} = 2,64 e^{j64^\circ} \cdot 36,5 e^{-j46^\circ} = 96,4 e^{j18^\circ}.$$

Напряжение источника

$$\dot{U}_{lm}^{(1)} = \dot{U}_{abm}^{(1)} + \dot{U}_{bdm}^{(1)} = 96,4 e^{j18^\circ} + j142 = 92 + j172 = 195 e^{j62^\circ}.$$

На рис. 12б представлена электрическая схема замещения для частоты третьей гармоники.

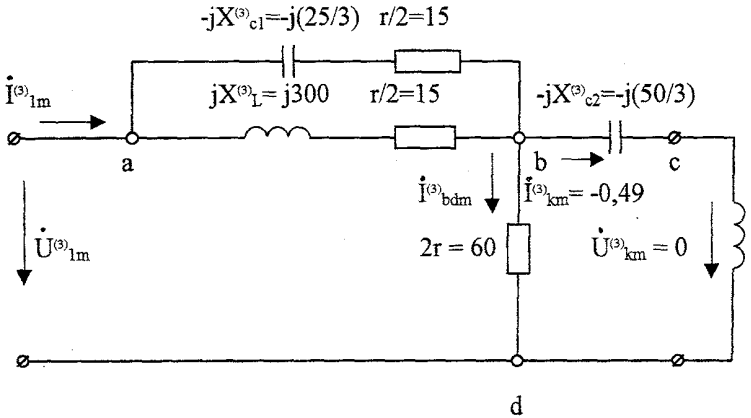


Рис. 12б. Электрическая цепь к примеру №8 на частоте третьей гармоники.

Обратим внимание на то обстоятельство, что на частоте третьей гармоники индуктивное сопротивление стало больше в три раза, а сопротивление конденсаторов - меньше в три раза по сравнению с сопротивлениями этих же элементов на частоте первой гармоники. Активные сопротивления не изменились (поверхностным эффектом пренебрегаем). Следует также отметить, что на катушке с ферромагнитным сердечником отсутствуют высшие гармоники напряжения; по условию задания напряжение на катушке синусоидально.

Выполняем расчет на частоте третьей гармоники аналогично расчету на частоте первой гармоники. Получим:

$$\dot{U}_{bdm}^{(3)} = \dot{I}_{km}^{(3)}(-jX_{c2}^{(3)}) + \dot{U}_{km}^{(3)} = -0,49(-j(50/3)) = j8,17 \quad ,$$

$$\dot{I}_{bdm}^{(3)} = \frac{\dot{U}_{bdm}^{(3)}}{2r} = \frac{j8,17}{60} = j0,14.$$

Ток источника

$$\dot{I}_{1m}^{(3)} = \dot{I}_{km}^{(3)} + \dot{I}_{bdm}^{(3)} = -0,49 + j0,14 = 0,51 e^{j164^\circ}.$$

Сопrotивление параллельных ветвей участка «ab»

$$Z_{ab}^{(3)} = \frac{(15-j(25/3))(15+j300)}{30+j300-j(25/3)} = 17,6e^{-j26^\circ}$$

Напряжение источника

$$\dot{U}_{1m}^{(3)} = \dot{I}_{1m}^{(3)} Z_{ab}^{(3)} + \dot{U}_{bdm}^{(3)} = 0,51e^{j64^\circ} \cdot 17,6e^{-j26^\circ} + j8,17 = 8,98e^{j38^\circ} + j8,17 = -6,67 + j6,01 + j8,17 = -6,67 + j14,18 = 15,7e^{j115^\circ}$$

При наличии пятой гармоники в составе тока катушки должен быть выполнен аналогичный расчет на частоте пятой гармоники.

Результаты расчетов запишем в виде сумм гармонических составляющих:

$$u_1(\omega t) = 195\sin(314t+62^\circ) + 15,7\sin(942t+115^\circ) \text{ [В]},$$

$$i_1(\omega t) = 2,64\sin(314t+64^\circ) + 0,51\sin(942t+164^\circ) \text{ [А]}.$$

Графики мгновенных значений напряжения и тока источника приведены на рис. 12 в.

При построении графиков следует обратить внимание на то обстоятельство, что период третьей гармоники напряжения и тока в три раза меньше периода первой гармоники. По оси абсцисс откладываются значения угла  $\omega t$  в электрических градусах в масштабе первой гармоники. Все углы (в том числе начальные фазы) третьих гармоник оказываются в этом масштабе утроенными.

## 2.4. Определение показаний измерительных приборов.

Амперметры и вольтметры электродинамической системы фиксируют действующие значения тока и напряжения (соответственно). Ваттметры с электродинамическим измерительным устройством измеряют среднее значение мгновенной мощности, т.е. активную мощность.

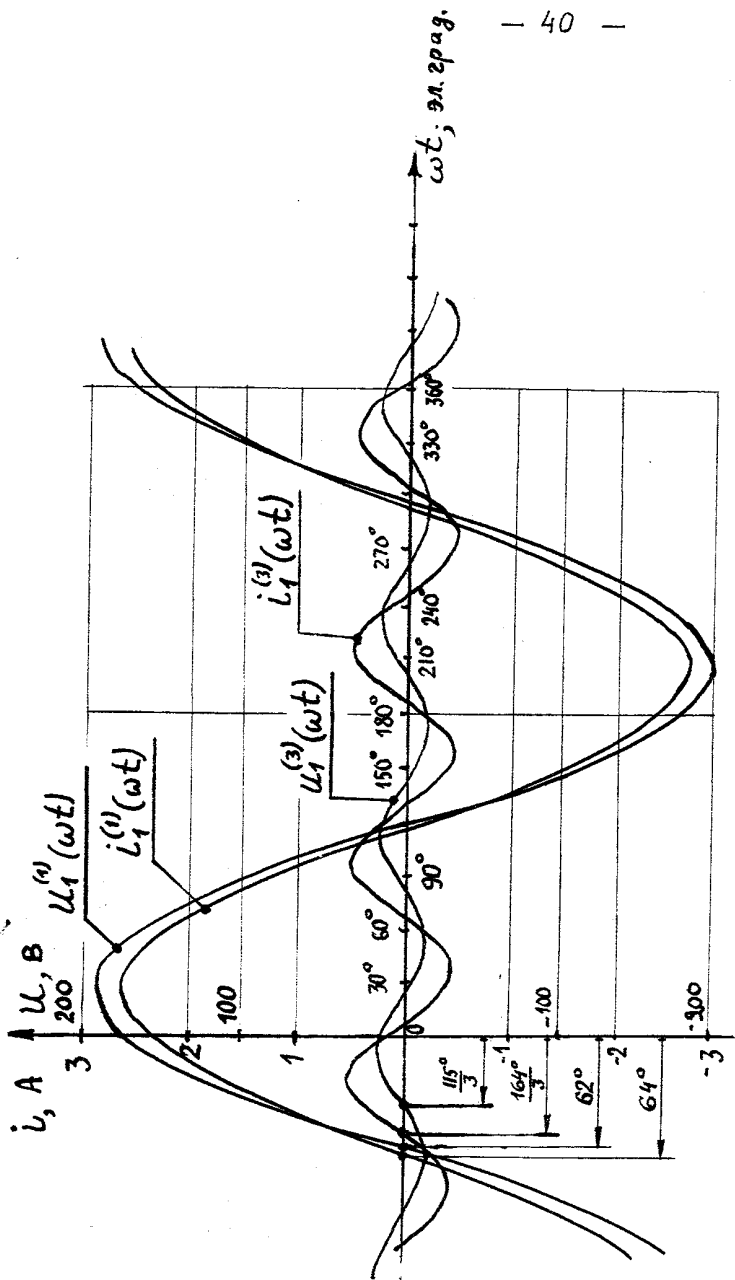


Рис.12 в. Графики мгновенных значений напряжений и тока источника энергии.



**ПРИМЕР № 9**

Определить показания приборов электродинамической системы в электрической цепи (см. рис. 13), в которой:

$$u_1 = 60\sin(314t-39^\circ) + 21\sin(942t+119^\circ) + 3,2\sin(1570t-46^\circ) \text{ [В]},$$

$$i_1 = 2,78\sin(314+6^\circ) + 0,38\sin(942t+172^\circ) + 0,08\sin(1570t-4^\circ) \text{ [А]}.$$

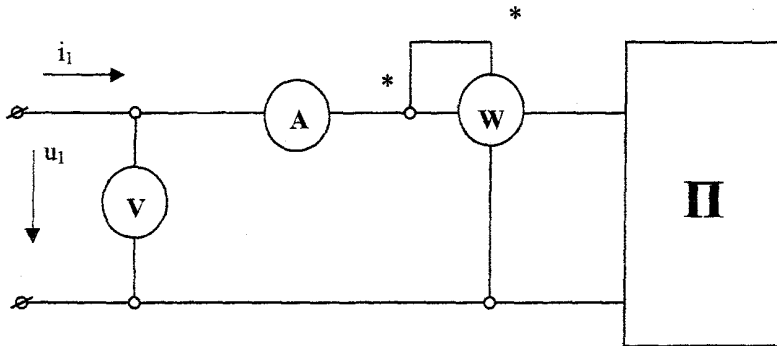


Рис. 13. Схема включения измерительных приборов в рассматриваемую электрическую цепь (II).

Показание вольтметра определяем как действующее значение несинусоидального напряжения на входе цепи:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{(60/\sqrt{2})^2 + (21/\sqrt{2})^2 + (3,2/\sqrt{2})^2} = 63,65 \text{ В}.$$

Показание амперметра находим как действующее значение несинусоидального тока на входе двухполюсника:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{(2,78/\sqrt{2})^2 + (0,38/\sqrt{2})^2 + (0,08/\sqrt{2})^2} = 2,81 \text{ А}.$$

Показания ваттметра находим как активную мощность на входе двухполюсника при несинусоидальных напряжении и токе:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=1}^5 U_k I_k \cos \varphi_k = 0,5 \cdot 60 \cdot 2,78 \cdot \cos(-39^\circ - 6^\circ) + \\ + 0,5 \cdot 21 \cdot 0,38 \cdot \cos(119^\circ - 172^\circ) + 0,5 \cdot 3,2 \cdot 0,08 \cdot \cos(-46^\circ + 4^\circ) = 61,47 \approx \\ \approx 61,5 \text{ Вт.}$$

Так как определяется активная мощность на входе **пассивного** двухполюсника, то мощности на каждой из гармоник должны быть положительными (или равными нулю).

## 2.5. Определение тока в катушке с ферромагнитным сердечником при наличии поперечного зазора в сердечнике.

### ПРИМЕР № 10

В ферромагнитном сердечнике катушки, рассмотренной в примерах № 4 и 5, сделан поперечный зазор длиной  $\delta = 1$  мм. Определить ток в обмотке  $i_k$  при таких же исходных данных ( $r_0=0$ ,  $P_{ст} = 0$ ,  $\Phi_{ст} = 0$ ,  $H = 0,219B + 2,966 B^3$ ,  $W=600$ ,  $S=6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $\varphi_{ст} = \varphi - \delta \approx 60,0$  см) и таком же напряжении на катушке  $u_k = 231 \sin(502t + 90^\circ)$  [В], что и в примере №5.

### РЕШЕНИЕ

В рассматриваемом случае идеальной катушки ( $r_0=0$ ,  $P_{ст} = 0$ ,  $\Phi_{\delta} = 0$ ) напряжение на катушке уравнивается только электродвижущей силой самоиндукции  $u = -e_L$ . Так как  $e_L = -W(d\Phi/dt)$ , то  $u = W(d\Phi/dt)$ , откуда следует, что магнитный поток в ферромагнитном сердечнике изменяется по синусоидальному закону  $\Phi = \Phi_m \cdot \sin \omega t$ , а его амплитудное значение определяется по формуле  $\Phi = U_m / (\omega W)$  или по формуле

$$\Phi_m = U / (4,44 W f).$$

Находим амплитуду магнитного потока:

$$\Phi_m = U_m / (\omega W) = 231 / (502 \cdot 600) = 7,669 \cdot 10^{-4} \quad [B6].$$

Амплитудные значения индукции магнитного поля в ферромагнитном сердечнике и в воздушном зазоре одинаковы («выпучиванием» магнитных силовых линий в зазоре пренебрегаем ввиду его незначительной длины  $\delta$ ):

$$B_{m\text{ ст}} = B_{m\text{ возд}} = \Phi_m/S = (7,669 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}) / (6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2) = 1,28 \text{ [Тл]}.$$

Мгновенное значение индукции магнитного поля в сердечнике и воздушном зазоре

$$B_{\text{ст}} = B_{\text{возд}} = B_m \sin \omega t = 1,28 \sin 502t \quad [\text{Вб}].$$

Напряженность магнитного поля в сердечнике находим с помощью аппроксимирующего выражения рабочего участка кривой намагничивания стали:

$$H = 0,219B + 2,966B^3 = 0,219 \cdot 1,28 \sin 502t + 2,966(1,28 \sin 502t)^3 = 4,945 \sin 502t - 1,555 \sin 1506t \quad [\text{А/см}].$$

Как и следовало ожидать, при неизменном синусоидальном напряжении на идеальной катушке со стальным сердечником ( $i_0=0$ ,  $P_{\text{ст}} = 0$ ,  $\Phi_{\sigma} = 0$ ) появление поперечного зазора в сердечнике не приводит к изменению магнитного потока, индукции и напряженности магнитного поля в сердечнике. Однако, появление указанного зазора вследствие большого падения магнитного напряжения в этом зазоре приводит к значительному увеличению тока в обмотке. Действительно, напряженность магнитного поля в воздушном зазоре очень большая:

$$H_{\text{возд}} = B_{\text{возд}}/\mu_0 = B_{\text{возд}}/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_{\text{возд}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1,28 \sin 502t = 1,024 \cdot 10^6 \sin 502t \quad [\text{А/м}].$$

Из закона полного тока  $\oint H d\ell = \sum i_k W$  при наличии воздушного зазора следует:  $H_{\text{ст}} \ell_{\text{ст}} + H_{\text{возд}} \delta = i_k W$ , откуда

$$i_k = (H_{\text{ст}} \ell_{\text{ст}} + H_{\text{возд}} \delta) / W = H_{\text{ст}} \ell_{\text{ст}} / W + H_{\text{возд}} \delta / W \cong H_{\text{ст}} \ell_{\text{ст}} / W + H_{\text{возд}} \delta / W = (60 \text{ [см]} / 600) (4,945 \sin 502t - 1,555 \sin 1506t) [\text{А/см}] + (10^3 / 600) \cdot 1,024 \cdot 10^6 \sin 502t [\text{А/м}] = 2,301 \sin 502t - 0,156 \sin 1506t \quad [\text{А}].$$

Таким образом, появление в ферромагнитном сердечнике поперечного воздушного зазора длиной  $\delta = 1$  мм, привело к

увеличению тока первой гармоники в  $2,301/0,494 \cong 4,66$  раза. Это объясняется необходимостью «проталкивания» не изменившегося магнитного потока через воздушный промежуток, магнитное сопротивление которого вследствие низкой магнитной проницаемости воздуха очень велико. Так как воздушный промежуток является линейным элементом магнитной цепи ( $\mu_{\text{возд}}=1 = \text{const}$ ), то третья гармоника тока остаётся неизменной.

Сопоставим ток в катушке без поперечного зазора в сердечнике  $i_k = 0,494\sin 502t - 0,156\sin 1506t$  (см. пример № 5) и с зазором:

$i'_k = 2,301\sin 502t - 0,156\sin 1506t$  (данный пример) по гармоническому составу, по амплитудным значениям отдельных гармоник и «полных» токов, по действующим значениям, по коэффициентам амплитуды и искажения (см табл. 10).

Соотношение амплитудных значений отдельных гармоник очевидно. Амплитудное значение тока  $i_k$  при ( $\delta = 0$ )  $I_{km} = I_{km}^{(1)} + I_{km}^{(3)} = 0,494 + 0,156 = 0,65$  А;

амплитудные значения тока  $i'_k$  при наличии зазора длиной  $\delta = 1$  мм  $I'_{km} = I'^{(1)}_{km} + I'^{(3)}_{km} = 2,301 + 0,156 = 2,457$  А.

Действующие значения токов  $i_k$  и  $i'_k$

$$I_k = \sqrt{(0,494/\sqrt{2})^2 + (0,156/\sqrt{2})^2} = 0,366 \text{ А};$$

$$I'_k = \sqrt{(2,301/\sqrt{2})^2 + (0,156/\sqrt{2})^2} = 1,631 \text{ А};$$

Коэффициенты амплитуды этих токов:

$$K_a = I_{km} / I_k = 0,65/0,366 = 1,776;$$

$$K'_a = I'_{km} / I'_k = 2,457/1,631 = 1,506 .$$

Коэффициенты искажения:

$$K_{\text{и}} = I^{(3)}_k / I_k = 0,954 ;$$

$$K'_{\text{и}} = I'^{(3)}_k / I'_k = 0,998 .$$

Сопоставление коэффициентов амплитуды и искажения для рассматриваемых кривых токов  $i_k$  и  $i'_k$  свидетельствует о том, что появление воздушного зазора в сердечнике приводит к уменьшению нелинейности катушки с сердечником, уменьшению удельного веса высших гармоник в составе тока, уменьшению несинусоидальности кривой тока, её приближению к синусоидальной форме кривой.

**Таблица 10.** Сопоставление токов в катушке без зазора в сердечнике и при наличии поперечного зазора.

$\delta$ , мм	$I_{m1}$ , А	$I_{m3}$ , А	$I_m$ , А	$I$ , А	$K_a$	$K_{\text{и}}$
0	0,494	0,156	0,65	0,366	1,776	0,954
1	2,301	0,156	2,457	1,631	1,506	0,998

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории цепей. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Изд. 5.М., Энергоатомиздат, 1989.-528 с.
2. Поливанов К.М. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория цепей). Изд. 3.М., Энергия, 1973.- 304 с.
3. Сборник задач с решениями по теоретическим основам электротехники. Часть 3. Власов С.П., Воротников В.С., Горохова Н.А., Щуров А.И. Изд. МИИТ, 1980. – 72 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие.....	3
Задание. Расчет электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником .....	5
1. Основные теоретические положения.....	12
2. Примеры расчетов по отдельным пунктам задания .....	21
2.1. Аппроксимация кривых намагничивания стали ферромагнитного сердечника .....	21
2.2. Определение напряжения на идеальной катушке с ферромагнитным сердечником и тока в катушке .....	28
2.2.1. Определение напряжения на катушке .....	28
2.2.2. Определение тока в катушке с ферромагнитным сердечником без воздушного зазора .....	30
2.3. Определение напряжения и тока на входе цепи .....	34
2.4. Определение показаний измерительных приборов .....	39
2.5. Определение тока в катушке с ферромагнитным сердечником при наличии поперечного зазора.....	42
Список литературы.....	45

**Цена – 12 руб. 00 коп.**  
**(по себестоимости)**