Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра общей и экспериментальной физики

53(07)
Г951

С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Д.Г. Клещев

ФИЗИКА

Рабочая программа и контрольные задания
для студентов заочного инженерно-экономического
факультета

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2013

УДК 53(076.5)
Г951

Одобрено
учебно-методической комиссией физического факультета

Рецензенты:

д.ф-м.н., проф. Бучельников В.Д., д.ф-м.н., проф. Песин Л.А.

Гуревич, С.Ю.
Г951 Физика: рабочая программа и контрольные задания для студентов заочного инженерно-экономического факультета / С.Ю. Гуревич, Ю.В. Петров, Д.Г. Клещев – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 114 с.

Пособие соответствует федеральным государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования 3-го поколения. Содержит контрольные задания по разделам курса физики для студентов-заочников технических направлений, библиографический список и методические указания по изучению теории и решению задач. Перед каждым тематическим блоком контрольных заданий приводятся рабочая программа и примеры решения типовых задач с подробными объяснениями, что может быть полезно студентам-заочникам.

УДК 53(076.5)

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Физика» является составной частью фундаментальной физико-математической подготовки, необходимой для успешной работы инженера любого профиля. Дипломированный бакалавр в результате усвоения этой дисциплины должен:

знать

– основные понятия, законы и модели механики, электричества и магнетизма, колебаний и волн, квантовой механики, статистической физики и термодинамики;

– методы теоретического и экспериментального исследования физических процессов;

уметь использовать и применять

– физические законы в прикладных задачах будущего технического направления;

– достижения физики в практической деятельности;

овладеть

– методами физического исследования.

Для удобства студентов рабочая программа представлена в виде фрагментов, приведенных перед каждым тематическим блоком контрольных заданий.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРИИ КУРСА ФИЗИКИ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

На заочном инженерно-экономическом факультете ЮУрГУ курс физики для студентов технических направлений изучается в течение трех семестров. Учебная работа студента-заочника складывается из следующих основных элементов: проработка установочных и обзорных лекций, самостоятельное изучение материала по учебникам и учебным пособиям, решение задач, выполнение лабораторных работ и контрольных заданий.

В первом семестре изучаются разделы курса: физические основы механики, механические колебания и волны, молекулярная физика и термодинамика, электростатика (начальные сведения). Выполняется первая контрольная работа и четыре лабораторные работы. В конце семестра студент-заочник должен получить зачет (допуск) и сдать экзамен.

Во втором семестре изучаются разделы курса: электростатика (продолжение), законы постоянного электрического тока, магнитное поле в вакууме. Выполняется вторая контрольная работа и четыре лабораторных работы. В конце семестра студент-заочник должен получить зачет (допуск) и сдать экзамен.

В третьем семестре изучаются разделы курса: электромагнитная индукция и самоиндукция, волновая и квантовая оптики, атомная и ядерная физики. В конце семестра студент-заочник должен получить зачет (допуск) и сдать экзамен.

Поскольку основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа с учебным материалом, то для обеспечения этой работы следует придерживаться следующих рекомендаций.

1. При изучении теоретического курса пользоваться каким-либо одним учебником или учебным пособием, чтобы не утрачивалась логическая связь между отдельными вопросами. Но если основное пособие не дает полного или ясного ответа на некоторые вопросы программы, необходимо обратиться к другим учебникам или пособиям.

2. При чтении учебника необходимо составлять конспект, в котором записываются законы и формулы, выражающие эти законы, определения физических величин и их наименование, сущность физических явлений и методов исследования и решения типовых задач.

3. Приступая к решению задач по какому либо разделу, необходимо ознакомиться по учебной литературе с конкретными физическими понятиями и соотношениями этого раздела. Внимательно прочитать условие задачи, обязательно (если это возможно) сделать рисунок, поясняющий сущность задачи. Указать основные законы и формулы, на которых базируется решение, и дать словесную формулировку этих законов. Объяснить буквенные обозначения физических величин в формулах. Если при решении применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.

4. Каждую задачу решать в ***общем виде*** (то есть в буквенных обозначениях) до самой последней формулы так, чтобы искомая величина выражалась через заданные в условии задачи величины. При таком способе решения вычисления промежуточных величин не производятся. Кроме того, ответ, полученный в общем, виде, позволяет судить в значительной степени о правильности самого решения.

5. Подставить в правую часть полученной формулы вместо буквенных обозначений величин наименования их единиц измерения в СИ, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученное наименование единицы измерения соответствует искомой величине. Тем самым подтверждается правильность выведенной конечной формулы.

6. Подставить в рабочую формулу числовые значения величин, выраженных в СИ. Произвести расчет, руководствуясь правилами приближенного вычисления, записать в ответе числовое значение и сокращенное обозначение наименования единицы измерения искомой величины.

7. При подстановке в рабочую формулу, а также при записи ответа числовые значения величин записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень де-

сяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 надо записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и так далее.

8. Получив числовой ответ, оценить, где это целесообразно, его правдоподобность. В ряде случаев такая оценка помогает обнаружить ошибочность полученного результата. Например, коэффициент полезного действия тепловой машины не может быть больше единицы, электрический заряд не может быть меньше элементарного заряда $e = 1{,}69 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме $\upsilon = 3 \cdot 10^8$ м/с и так далее.

Следует заметить, что умение решать физические задачи приобретается систематическими упражнениями. Чтобы подготовиться к выполнению контрольного задания, следует после изучения очередного раздела учебника внимательно изучить помещенные в нем примеры решения типовых задач.

Лабораторные работы проводятся во время экзаменационно-лабораторных сессий. Цель лабораторного практикума – не только изучить те или иные физические явления, убедиться в правильности теоретических выводов, приобрести соответствующие навыки в обращении с физическими приборами, научиться обрабатывать, анализировать и оценивать погрешности результатов экспериментальных измерений, но и более глубоко овладеть теоретическим материалом.

На экзаменах в первую очередь выясняется усвоение основных теоретических положений программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Физическая сущность явлений, законов, процессов должна излагаться четко и достаточно подробно. Только при выполнении этих условий знания по курсу физики могут быть признаны удовлетворительными.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Каждое контрольное задание выполняется ***в отдельной тетради синими чернилами*** собственноручно. На обложку тетради приклеивается бланк, где указывается фамилия и инициалы студента, его шифр, номер группы и номер контрольного задания. Вариант задания должен совпадать с последней цифрой шифра.

2. ***Условия задач в задании переписываются полностью без сокращений***. Решение задач оформляется в соответствии с рекомендациями из методических указаний и примерами решения задач, приведенных в данном пособии перед каждой темой. После решения каждой задачи на страницах тетради ***оставляется место для замечаний преподавателя***.

3. Если при рецензировании контрольное задание не зачтено, студент должен в этой же тетради выполнить заново решение задач, в которых пре-

подавателем выявлены ошибки, и провести работу над ошибками и представить ее на повторную рецензию.

4. Зачтенные контрольные задания предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в его контрольное задание.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Примерные программы дисциплины «Физика» федерального компонента цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин для ФГОС 3-го поколения. – СПб, изд-во Политехнического университета, 2009 – 36 с.

2. Трофимова, Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 9-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 560 с.

3. Детлаф, А.А. Курс физики: Учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2009. – 720 с.

4. Гуревич, С.Ю. Физика: Учебное пособие для самостоятельной работы студентов / С.Ю. Гуревич, Е.Л. Шахин – 3-е изд., испр. и дополн. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. – Ч. I. – 125 с., Ч.II. – 192 с.

5. Чертов, А.Г. Задачник по физике: Учеб. пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – 8-е изд., – М.: Физматлит, 2007. – 640 с.

6. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – 3-е изд., – СПб.: Книжный мир, 2008. – 328 с.

7. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – М.: Лань, 2008. – 352 с.

8. Гуревич. С.Ю. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: Учеб. пособие по выполнению лабораторных работ / С.Ю. Гуревич С.Ю.В. Волегов, Е.В. Голубев, Е.Л. Шахин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 86 с.

9. Шульгинов А.А. Электромагнетизм: Учеб. пособие для выполнения лабораторных работ по курсу «Общая физика» / А.А. Шульгинов, Ю.В. Петров, Б.А. Андрианов; под ред. А.А. Шульгинова. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 144 с.

10. Максутов, И.А. Оптика: Учеб. пособие для выполнения лабораторных работ / И.А. Максутов, Л.А. Мишина и др.; под ред. В.Ф. Подзерко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 53 с.

11. Топольский, В.Г. Механика: Учеб. пособие по решению задач по физике / В.Г. Топольский, Н.Н. Топольская. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 57 с.

12. Топольская, Н.Н. Термодинамика. Молекулярная физика: Учеб. пособие по решению задач по физике / Н.Н. Топольская, В.Г. Топольский. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 60 с.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Студент-заочник должен решить девять задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра.

Таблица 1

Вариант	Номера задач								
0	110	120	130	140	150	160	170	180	190
1	101	111	121	131	141	151	161	171	181
2	102	112	122	132	142	152	162	172	182
3	103	113	123	133	143	153	163	173	183
4	104	114	124	134	144	154	164	174	184
5	105	115	125	135	145	155	165	175	185
6	106	116	126	136	146	156	166	176	186
7	107	117	127	137	147	157	167	177	187
8	108	118	128	138	148	158	178	178	188
9	109	119	129	139	149	159	169	179	189

Тема 1. Кинематика движения материальной точки в пространстве. Система отсчета и система координат. Радиус-вектор, его модуль. Траектория. Вектор перемещения. Средняя скорость. Мгновенная скорость. Модуль вектора скорости. Вектор ускорения и его модуль. Центростремительное и касательное ускорения. Кинематика движения твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Вектор угловой скорости

Пример решения задач

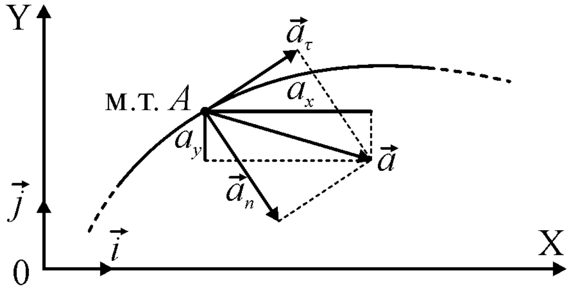
Материальная точка движется по криволинейной траектории по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + (8t - t^2)\vec{j}$, *где* $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$ *– орты координатных осей* X *и* Y. *Найти для момента времени* t = 2,00 *с её тангенциальное* a_τ, *нормальное* a_n *ускорения и радиус* R *кривизны траектории.*

Дано

$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + (8t - t^2)\vec{j}$

t = 2 с

a_n, a_τ – ?



Анализ и решение

В задаче задан ***закон движения*** материальной точки, необходимо найти ***характеристику движения*** – ускорение. Следовательно, это ***прямая*** задача кинематики. Из закона движения, которым является зависимость радиуса-вектора от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$, следует, что материальная точка движется в плоскости XOY, и каждый из векторов $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$ имеет две компоненты. Согласно теории, в случае криволинейного движения материальной точки модуль её полного ускорения может быть разложен на нормальное ускорение $\vec{a}_n$, характеризующее изменение скорости по направлению, и тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, характеризующее изменение скорости по величине (см. рисунок). Так как эти векторы взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения находится по формуле

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}\ , \tag{1}$$

где $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{R}$ и $a_\tau=\dfrac{d\upsilon}{dt}$ – модули нормального и тангенциального ускорений.

Из формулы тангенциального ускорения материальной точки видно, что для его вычисления необходимо найти модуль мгновенной скорости. Для этого воспользуемся определением вектора скорости как первой производной по времени радиуса–вектора

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2)'\vec{i} + (8t - t^2)'\vec{j} = 6t\vec{i} + (8-2t)\vec{j}\ .$$

Тогда модуль скорости в любой момент времени

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\ , \text{ или } \upsilon = \sqrt{(6t)^2 + (8-2t)^2}\ , \tag{2}$$

здесь $\upsilon_x = 6t$ м/с, $\upsilon_y = (8-2t)$ м/с – проекции (компоненты) вектора скорости на координатные оси X и У. После преобразований получаем

$$\upsilon = \sqrt{40t^2 - 32t + 64}\ . \tag{3}$$

Берем от этого выражения производную по времени

$$\left(\sqrt{40t^2 - 32t + 64}\right)' = \frac{d\upsilon}{dt} = a_\tau = \frac{80t - 32}{2\sqrt{40t^2 - 32t + 64}}\ . \tag{4}$$

Подставляем в эту формулу время t = 2,00 с и рассчитываем модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{80\cdot 2 - 32}{2\sqrt{40\cdot 2^2 - 32\cdot 2 + 64}} = 5{,}06 \text{ м/с}^2.$$

Для вычисления нормального ускорения воспользуемся равенством (1)

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ . \tag{5}$$

В этой формуле модуль полного ускорения неизвестен. Из рисунка видно, что его можно представить в виде

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

здесь $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}$ = $6{,}00$ м/с^2, $a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -2{,}00$ м/с^2. После подстановки числовых значений проекций ускорения на координатные оси в последнюю формулу, получим

$$a = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 6{,}32 \text{ м/с}^2.$$

Найденные значения полного и тангенциального ускорений подставим в формулу (5) и произведем вычисления

$$a_n = \sqrt{6{,}32^2 - 5{,}06^2} = 3{,}79 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны в данной точке траектории находим из формулы для модуля нормального ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{a_n},$$

здесь υ – модуль скорости в данный момент времени. Подставляя его значение из формулы (2), рассчитываем радиус кривизны траектории материальной точки в данный момент времени

$$R = \frac{40 \cdot 2^2 - 32 \cdot 2 + 64}{3{,}79} = 42{,}2 \text{ м.}$$

Ответ: тангенциальное ускорение $a_\tau = 5{,}06$ м/с^2, нормальное ускорение $a_n = 3{,}79$ м/с^2, радиус кривизны $R = 42{,}2$ м.

ЗАДАЧИ

101. Материальная точка движется со скоростью $\vec{\upsilon} = 1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты осей *X, Y, Z*. Найти перемещение точки за первые 2,0 секунды её движения, а также модули скорости и ускорения в момент времени t = 2,0 с.

102. Движение материальной точки задано уравнением, $\vec{r}$ = (A+ Bt)$\vec{i}$ + + Ct$^2\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты осей *X*, *Y*; A = 10,0 м; B = –5,0 м/с; C = 10,0 м/с². Найти выражения для вектора скорости и вектора ускорения. Для момента времени t = 1,0 с вычислить модули этих величин.

103. В момент времени t = 0 материальная точка вышла из начала координат в положительном направлении оси *X*. Её скорость меняется со временем по закону $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0(1 - t/\tau)$, где υ_0 = 10 м/с, τ = 5,0 с. Найти: а) координату материальной точки в момент времени t = 6,0 с; б) путь s, пройденный точкой за первые 4,0 с.

104. Лодка, имеющая скорость υ_0 = 5,0 м/с, опускает парус в момент времени t_0 = 3,0 с, но продолжает двигаться. Зависимость скорости от времени при этом гиперболическая $\upsilon = k(1/t)$. Найти ускорение a лодки в момент времени, когда её скорость уменьшилась вдвое.

105. Автомобиль, движущийся со скоростью υ = 40 км/ч, проходит поворот, радиус кривизны R которого равен 200 м. В результате торможения автомобиль приобретает ускорение a_τ = 0,3 м/с^2. Найти нормальное a_n и полное a ускорения автомобиля на повороте. Как направлен вектор полного ускорения $\vec{a}$ по отношению к радиусу R кривизны поворота?

106. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиуса R = 10,0 м с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,4 м/с^2. Какой путь s пройдет точка за время t = 6,6 с? Найти модуль вектора перемещения $\vec{r}$ материальной точки.

107. Искусственный спутник земли движется по орбите со скоростью υ = 7,75·10^3 м/с. Найти путь, пройденный спутником за t = 5,0 с после выключения тормозных двигателей, если тангенциальное ускорение изменяется по закону $a_\tau = kt$, где k = –2,0 м/с^3.

108. Материальная точка движется по окружности радиуса R = 4,0 м. Закон ее движения выражается уравнением $s = 8 - 2t^2$, где s – пройденный путь, t – время. Найти, в какой момент времени нормальное ускорение a_n частицы будет равно 9,0 м/с^2. Чему равны скорость υ, тангенциальное ускорение a_τ и полное ускорение a частицы в этот момент времени?

109. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав N = 50 полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1 = 4 об/с до n_2 = 6 об/с. Определить угловое ускорение α колеса.

110. Диск радиуса R = 20,0 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A = 3,0 рад, B = –1,0 рад, C = 0,1 рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени t = 10 с.

Тема 2. Динамика материальной точки. Сила. Масса. Законы Ньютона. Сила тяготения и вес тела. Сила трения и сила нормального давления. Основная задача динамики. Импульс. Закон сохранения импульса

Пример решения задач

Тело брошено вниз с начальной скоростью υ_0 = 10,0 *м/с. Считая силу сопротивления воздуха равной* $F_c = k\upsilon$, *определить высоту* h, *с которой тело было брошено. Масса тела* m = 5,0 *кг, время его падения до земли* τ = 20,0 *с, коэффициент сопротивления* k = 2,0 *кг/с.*

Сделаем рисунок

Дано

υ_0 = 10,0 м/с

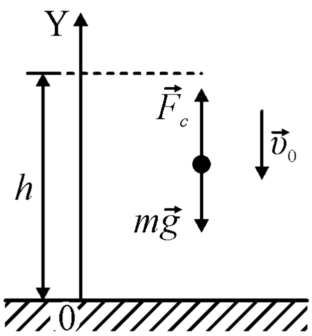
$F_c = k\upsilon$

m = 5,0 кг

τ = 20,0 с

k = 2,0 кг/с

h – ?



Анализ и решение

На движущееся тело действуют сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Сила сопротивления переменная, следовательно, тело движется с переменным ускорением. Поэтому высота, с которой было брошено тело, может быть найдена из определения его мгновенной скорости

$$\upsilon = \frac{dh}{dt} \Rightarrow h = \int_0^{\tau} \upsilon dt. \quad (1)$$

Запишем уравнение движения тела в соответствии со II законом Ньютона в векторной форме.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c.$$

Спроецируем это уравнение на ось OY

$$-ma = -mg + F_c \text{ или } ma = mg - F_c \quad (2)$$

Подставим в это уравнение ускорение $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, и силу сопротивления $F_c = k\upsilon$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon.$$

В полученном дифференциальном уравнении разделим переменные. Выполним интегрирование, учитывая, что при изменении времени от 0 до t, скорость возрастает от υ_0 до υ

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \int_0^t \frac{1}{m} dt \text{ или } -\frac{1}{k}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d(mg - k\upsilon)}{mg - k\upsilon} = \frac{1}{m} t.$$

После преобразований получаем

$$-\frac{1}{k}\ln\frac{mg - k\upsilon}{mg - k\upsilon_0} = \frac{t}{m}.$$

Из этого уравнения выразим мгновенную скорость

$$\upsilon = \frac{mg}{k} - \frac{mg - k\upsilon_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$$

и подставим её в формулу (1)

$$h = \int_0^{\tau} \left(\frac{mg}{k} - \frac{mg - k\upsilon_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt = \left.\frac{mgt}{k}\right|_0^{\tau} - \frac{mg - k\upsilon_0}{k}\left(-\frac{m}{k}\right) \cdot \left. e^{-\frac{k}{m}t}\right|_0^{\tau}.$$

После подстановки пределов получаем

$$h = \frac{mg\tau}{k} + \frac{mg - k\upsilon_0}{k} \cdot \frac{m}{k} \cdot \left(e^{-\frac{k}{m}\tau} - 1\right).$$

Проверим наименование единицы измерения высоты в системе СИ

$$\text{наимен. } h = \frac{кг \cdot м \cdot с \cdot с}{с^2 \cdot кг} + \frac{кг \cdot м \cdot с \cdot кг \cdot с}{с^2 \cdot кг \cdot кг} = м.$$

Заменим физические величины их числовыми значениями и произведём вычисления

$$h = \frac{5{,}0 \times 10{,}0 \times 20{,}0}{2{,}0} + \frac{5{,}0 \times 10{,}0 - 2{,}0 \times 10{,}0}{2{,}0} \frac{5{,}0}{2{,}0} \left(e^{-\frac{2{,}0}{5{,}0} \cdot 20{,}0} - 1\right) = 462{,}5 \text{ м.}$$

Ответ: тело брошено с высоты h = 462,5 м.

ЗАДАЧИ

111. Катер массой m = 1,8 т движется по озеру со скоростью υ_0 = 5,0 м/с. В момент времени, равный нулю, двигатель был выключен. Считая силу сопротивления воды пропорциональной скорости движения катера $F_{сопр} = k\upsilon$, найти время движения катера τ с выключенным мотором. Коэффициент сопротивления воды k = 100 Н·с/м.

112. Определить коэффициент трения между наклонной плоскостью и движущимся по ней телом, если известно, что это тело, имея начальную скорость υ_0 = 5,0 м/с и двигаясь вверх по наклонной плоскости, проходит путь s = 2,0 м. Угол наклона плоскости α = 30°.

113. При падении тела с большой высоты его скорость при установившемся движении достигает υ_0 = 20,0 м/с. Определить время τ, в течение которого, начиная с момента начала падения, скорость становится равной $\upsilon_0/2$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела $F_{сопр} = k\upsilon$.

114. Цепь длиной l = 2,0 м лежит на столе, одним концом свисая со стола. Если длина свешивающейся части превышает $(1/3)l$, то цепь соскальзывает со стола. Определить скорость υ цепи в момент ее полного отрыва со стола.

115. Две одинаковые лодки массами m = 200 кг каждая (вместе с человеком) движутся параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями υ = 1,0 м/с. Расстояние между бортами лодок является минимальным. Когда лодки поравнялись, то с первой лодки на вторую и со второй на первую одновременно перебрасывают грузы массами m_1 = 50 кг. Определить скорости u_1 и u_2 лодок после перебрасывания грузов.

116. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной лёгкими колёсами. На одном конце доски стоит человек. Масса его m_1 = 60,0 кг, масса доски m_2 = 20,0 кг. С какой скоростью u (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль неё со скоростью (относительно доски) υ = 1,0 м/с? Массой колёс пренебречь, трение не учитывать.

117. Лодка длиной l = 3,0 м и массой m = 120 кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами m_1 = 60,0 кг и m_2 = 90,0 кг. Насколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами?

118. Снаряд массой m = 10,0 кг обладал скоростью υ = 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой m_1 = 3,0 кг получила скорость υ_1 = 400 м/с в прежнем направлении. Найти скорость υ_2 второй, большей части после разрыва.

119. Плот массой m_1 = 150 кг и длиной l = 2,0 м плавает на воде. На плоту стоит человек, масса которого m_2 = 80,0 кг. С какой наименьшей скоростью υ и под каким углом α к плоскости горизонта должен прыгнуть человек вдоль плота, чтобы попасть на его противоположный край?

120. С наклонной плоскости высотой h = 3 м скользит без трения тело массой m = 0,5 кг. Определить изменение Δp импульса тела.

Тема 3. Динамика твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент импульса твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения. Момент инерции простых тел. Теорема Штейнера. Закон сохранения момента импульса

Пример решения задач

> *Через блок массой* m =1,0 *кг перекинута нить, которая с одной стороны соединена с грузом, находящимся на наклонной плоскости, а с другой с грузом, висящим вертикально. Масса первого тела* m_1 = 0,2 *кг, масса второго тела* m_2 = 0,3 *кг, угол наклона плоскости к горизонту равен* α = 30°. *Коэффициент трения первого тела с плоскостью* μ = 0,02. *Определить разность сил натяжения* $\Delta F_н$ *по обе стороны от блока. Блок считать однородным диском, а нить невесомой и нерастяжимой.*

Сделаем рисунок

Дано

m = 1,0 кг

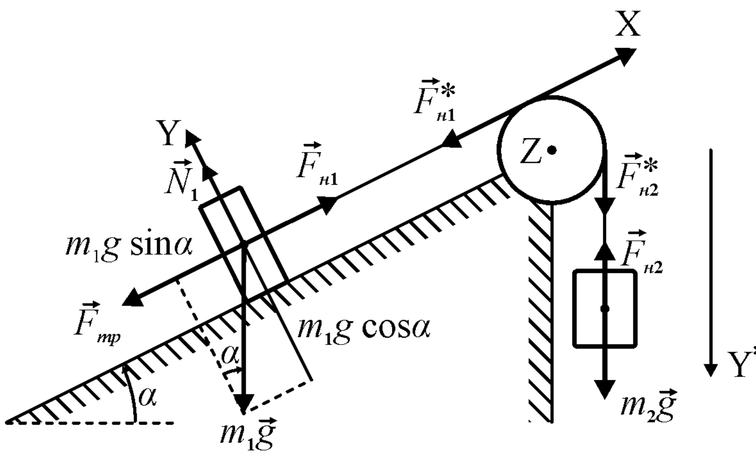
m_1 = 0,2 кг

m_2 = 0,3 кг

α = 30°

μ = 0,02

$\Delta F_н$ – ?



Анализ и решение

Заданная система состоит из трех тел – грузов m_1 и m_2 и блока m. Груз m_1 находится под действием четырех сил: силы тяжести $m_1\vec{g}$, силы натяжения нити $\vec{F}_{н1}$, силы нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения. На второй груз действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_{н2}$. Так как масса блока соизмерима с массой грузов, то силы, с которыми нить действует на грузы, не равны между собой.

Запишем для грузов второй закон Ньютона

$$\vec{F}_{н1} + \vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{тр} = m_1\vec{a}_1,$$

$$\vec{F}_{н2} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2.$$

Введем для описания движения тела m_1 оси координат X и Y, тела m_2 – ось Y* и заменим векторные уравнения скалярными, связывающими между собой проекции сил и ускорений на эти оси

$$F_{н1} - F_{тр} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1, \tag{1}$$

$$N - m_1 g \cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$m_2 g - F_{н2} = m_2 a_2. \tag{3}$$

Блок вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси Z, проходящей через его центр, следовательно, моменты сил тяжести блока и реакции оси равны нулю. Считаем, что нить не скользит относительно блока, поэтому вращение блока вызывается действием только сил натяжения нити $\vec{F}^*_{н1}$ и $\vec{F}^*_{н2}$. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для блока

$$M_{z1} - M_{z2} = J\alpha_z \text{ или } F^*_{н2}R - F^*_{н1}R = Ja_z, \tag{4}$$

где M_{z1}, M_{z2}, J, $\alpha_z = \dfrac{a_\tau}{R}$ – моменты сил натяжения, момент инерции блока относительно оси Z, проекция вектора его углового ускорения на эту ось. Так как нить невесома, то $F_{н1} = F^*_{н1}$ и $F_{н2} = F^*_{н2}$. Поскольку нить не проскальзывает относительно блока, то касательное ускорение a_τ его точек, соприкасающихся с нитью, равно ускорению нити в любой ее точке, а, следовательно, и ускорению грузов

$$a_\tau = a_1 = a_2.$$

Учитывая это, преобразуем уравнение (4)

$$(F_{н2} - F_{н1})R = J\frac{a_\tau}{R}.$$

Выразим силу трения

$$F_{тр} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos\alpha,$$

и учитывая, что момент инерции однородного диска $J = \dfrac{1}{2}mR^2$, получаем систему уравнений

$$F_{1н} - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_\tau, \tag{5}$$

$$m_2 g - F_{н2} = m_2 a_\tau, \tag{6}$$

$$\Delta F_н = \frac{1}{2} m a_\tau. \tag{7}$$

Из уравнения (7) находим ускорение a_τ, подставляем его в уравнения (5) и (6) и решаем их относительно величины $\Delta F_н$. Получаем

$$\Delta F_н = \frac{mg}{2(m_1 + m_2) + m}\left[m_2 - m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right].$$

Проверим наименование единицы измерения силы в системе СИ

$$\textit{наимен. } \Delta F_н = \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot кг} \cdot кг = Н.$$

Подставим числовые значения величин и произведём вычисления

$$\Delta F_н = \frac{1,0 \cdot 10,0}{2(0,2+0,3)+1,0} \cdot \left[0,3 - 0,2(0,02\cos 30° + \sin 30°)\right] = 0,98 \text{ Н}.$$

Ответ: разность сил натяжения $\Delta F_н =$ 0,98 Н.

ЗАДАЧИ

121. Маховик, массу которого m = 5,0 кг можно считать распределенной по ободу радиуса R = 20,0 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая n = 720 об/мин. При торможении маховик останавливается через промежуток времени t = 20,0 с. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки и изобразить векторы угловой скорости, углового ускорения, силы торможения и тормозящего момента.

122. Через блок, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 = 300 г и m_2 = 200 г. Масса блока M = 300 г. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

123. Шар массой m = 1,0 кг и радиуса R = 0,05 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр, против хода часовой стрелки. В точке, наиболее удаленной от оси вращения, на шар действует сила торможения, касательная к поверхности. Угол поворота шара меняется по закону $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, где C = –1 рад/с^2. Определить величину силы торможения и её момент. Изобразить векторы угловой скорости, углового ускорения, силы торможения и момента силы торможения.

124. По ободу шкива намотана нить, к концу которой подвешен груз массой m = 1,0 кг. На какое расстояние h должен опуститься груз, чтобы шкив получил частоту вращения n = 60,0 об/мин? Момент инерции шкива J = 0,42 кг м^2, радиус шкива R = 10,0см.

125. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и ловит мяч массой m = 0,3 кг, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии l = 60,0 см от вертикальной оси вращения скамьи. После этого скамья стала вращаться с угловой скоростью ω = 1,0 рад/с. Момент инерции человека и скамьи J = 6,0 кг м^2. Определить скорость υ мяча.

126. В ящик с песком массой m_1 = 5,0 кг, подвешенной на нити длиной l = 3,0 м попадает пуля массой m_2 = 5,0 г и отклоняет его на угол α = 10°. Определить скорость υ пули.

127. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной l = 2,4 м и массой m = 8,0 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой n_1 = 1,0 об/с. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья, если человек повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен J = 6,0 кг м^2.

128. Платформа в виде диска радиуса R = 1,0 м вращается по инерции с частотой n_1 = 6,0 об/мин. На краю платформы стоит человек, масса которого равна m = 80,0 кг. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдет в её центр? Момент инерции платформы равен J = 120 кг м^2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

129. Деревянный стержень длиной l = 1,2 м и массой m_1 = 12,0 кг может вращаться около неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой m_2 = 5,0 г, летящая перпендикулярно стержню со скоростью υ = 600 м/с и застревает в стержне. На какой максимальный угол α отклонится стержень после удара? Определить также кинетическую энергию $E^к$ стержня после удара.

130. Горизонтальная платформа массой M = 100 кг вращается около вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n_1 = 10,0 об/мин. Человек массой m = 60,0 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к её центру? Считать платформу однородным диском, а человека точечной массой.

Тема 4. Работа и мощность силы. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии

Пример решения задач

Материальная точка массой m = 2,00 кг движется под действием некоторой силы, в результате чего её скорость изменяется по закону $\vec{\upsilon} = 2\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты координатных осей X, У, Z. Определить работу A данной силы за время τ = 1,00 с, среднюю мощность $\langle N \rangle$ за это время и мгновенную мощность N в конце первой секунды.

Дано

m = 2,0 кг, τ = 1,0 с,

$\vec{\upsilon} = 2\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$

A, $\langle N \rangle$, N – ?

Анализ и решение

Работа любой силы является количественной характеристикой процесса обмена энергией между взаимодействующими телами. Как следует из условия задачи, сила, действующая на материальную точку, является переменной. Работа такой силы есть скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ и вектора элементарного перемещения $d\vec{r}$

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}). \qquad (1)$$

Силу находим из второго закона Ньютона

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} = m\ (2\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}) \text{ или}$$

$$\vec{F} = m \cdot (4\vec{j} + 6t\vec{k}). \qquad (2)$$

Вектор мгновенной скорости

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Из этого уравнения находим вектор перемещения

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt,$$

или

$$d\vec{r} = (2\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k})dt.$$

Полученные выражение силы и перемещения подставим в формулу (1)

$$dA = \left(m(4\vec{j} + 6t\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k})dt\right).$$

Произведем умножение и заметим, что скалярные произведения векторов $\vec{i}\vec{j}$, $\vec{i}\vec{k}$, $\vec{j}\vec{k}$ равны нулю, так как они взаимно перпендикулярны, а скалярные произведения векторов $\vec{i}\vec{i}$, $\vec{j}\vec{j}$, $\vec{k}\vec{k}$ равны единице, так как они совпадают по направлению.

$$dA = m(16t + 18t^3)dt.$$

Интегрируем последнее выражение

$$\int_0^A dA = \int_0^\tau m(16t + 18t^3)dt.$$

В результате получаем

$$A = m(16\frac{\tau^2}{2} + \frac{18}{4}\tau^4).$$

Проверим наименование единицы измерения работы в системе СИ

$$\textit{наимен. } A = \textit{кг}\frac{\textit{м}^2}{\textit{с}^2} = \textit{Дж}.$$

Подставим в полученную формулу численные значения массы и времени и проведем расчет

$$A = 2{,}0(16\frac{1{,}0^2}{2} + \frac{18}{4}1{,}0^4) = 25 \quad \text{Дж.}$$

Величина, характеризующая скорость совершения работы называется *мощностью*. Если за время t совершается работа A, то отношение

$$\frac{A}{t} = \langle N \rangle$$

называется *средней* мощностью. Найдем её за время τ = 1,0 с. Численное значение работы было получено ранее, следовательно

$$\langle N \rangle = \frac{25{,}0}{1{,}0} = 25{,}0 \text{ Вт.}$$

Мгновенную мощность можно определить как первую производную по времени от работы

$$N = \frac{dA}{dt},$$

либо по формуле

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}),$$

где $\vec{\upsilon}$ – мгновенная скорость материальной точки. Подставим в эту формулу выражения для силы (3) и скорости, получим

$$N = \left(m \cdot (4\vec{j} + 6\tau\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 4\tau\vec{j} + 3\tau^2\vec{k})\right).$$

Произведем умножение и заметим, что скалярные произведения векторов $\vec{i}\vec{j}$, $\vec{i}\vec{k}$, $\vec{j}\vec{k}$ равны нулю, так как вектора взаимно перпендикулярны, а скалярные произведения векторов $\vec{i}\vec{i}$, $\vec{j}\vec{j}$, $\vec{k}\vec{k}$ равны единице, так они совпадают по направлению. Получим

$$N = m \cdot (16\tau + 18\tau^3).$$

Проверим наименование единицы измерения мощности в системе СИ

$$\textit{наимен. } N = кг \cdot \frac{Дж}{c} = Вт.$$

Подставим числовые значения массы и времени и произведем расчет

$$N = 2{,}00 \cdot (16 \cdot 1{,}00 + 18 \cdot 1{,}00^3) = 68{,}0 \text{ Вт.}$$

Ответ: работа заданной силы A = 25,0 Дж, средняя мощность – $\langle N \rangle = 25{,}0$ Вт, мгновенная мощность – $N = 68{,}0$ Вт.

ЗАДАЧИ

131. Оконная горизонтальная штора массой m = 1,50 кг и длиной l = 2,0 м при открывании окна свертывается в тонкий валик наверху окна. Какая при этом совершается работа?

132. Материальная частица совершает перемещение по некоторой траектории в плоскости X, Y из точки 1 радиус-вектор которой $\vec{r}_1 = (1\vec{i} + 2\vec{j})$ м в точку 2 с радиусом-вектором $\vec{r}_2 = (2\vec{i} + 3\vec{j})$ м. При этом на точку действовали некоторые силы, одна из которых $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ Н. Найти работу, совершённую этой силой.

133. С вершины идеально гладкой сферы соскальзывает небольшой груз. С какой высоты, считая от вершины, груз сорвется со сферы? Радиус сферы R = 90,0 см.

134. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает её на x_1 = 1,0 мм. На сколько сожмет пружину эта гиря, брошенная вертикально вниз с высоты h = 0,20 м со скоростью υ = 1,0 м/с?

135. Камень массой m = 5,0 кг бросили с поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью υ_0 = 20,0 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха найти мощность силы тяжести, а также работу этой силы через t = 2 с после начала движения.

136. Тело брошено вверх под углом φ = 60° к плоскости горизонта. Кинетическая энергия E_{k0} тела в начальный момент времени равна 20,0 Дж. Определить кинетическую $E_к$ и потенциальную $E_п$ энергии тела в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

137. Паровой молот массой m = 1,20·10^4 кг падает со скоростью υ = 5,0 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемым куском железа составляет M = 2,50·10^4 кг. Определить производимую молотом работу по ковке железа и энергию, потерянную на сотрясение фундамента. Удар считать абсолютно неупругим.

138. Шар массой m_1 = 300 г движется со скоростью υ_1 = 10 м/с и сталкивается с неподвижным шаром массой m_2 = 700 г. Считая удар прямым и абсолютно упругим, определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара.

139. Винтовка массой m_1 = 3,50 кг подвешена горизонтально на двух параллельных нитях. При выстреле в результате отдачи она поднялась вверх на высоту h = 20,0 см параллельно первоначальному положению. Масса пули m_2 = 9,0 г. Определить скорость υ, с которой вылетела пуля.

140. Материальная точка массой m = 2,0 кг двигается под действием некоторой силы, направленной вдоль оси OX. Уравнение движения точки $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где A = 10,0 м, B =–2 м/с, C = 1,0 м/с^2, D = = –0,2 м/с^3. Найти мощность силы, затрачиваемую на движение точки, в момент времени t_1 = 2,0 с и t_2 = 5,0 с.

Тема 5. Механические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Сложение однонаправленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Затухающие колебания. Логарифмический декремент

Пример решения задач

Найти время, за которое материальная точка, совершающая гармонические колебания, прошла: путь s_1 от среднего положения до крайнего? Первую половину этого пути? Вторую половину этого пути? Начальные фазы колебаний:1) $\varphi_{01} = 0$*; 2)* $\varphi_{01} = \pi/2$.

Дано
$s_1 = X_0$
$s_2 = X_0/2$
$s_3 = X_0/2$
$\varphi_{01} = 0$
$\varphi_{02} = \pi/2$
$t_1,\ t_2,\ t_3$ – ?

Анализ и решение

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону

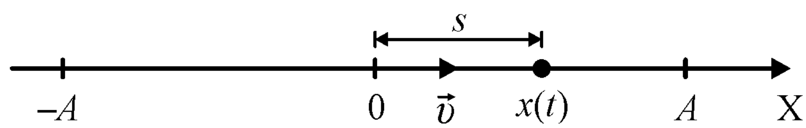
$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где x – смещение колеблющейся точки, отсчитанное от положения равновесия, A – амплитуда колебаний (максимальное смещение), $\omega_0 = 2\pi/T$ – круговая (циклическая) частота, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t, φ_0 – начальная фаза колебаний в момент времени $t = 0$.

Фаза колебаний определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени, период колебаний T определяет промежуток времени, когда фаза колебания получает приращение 2π,

Если $\varphi_{01} = 0$, то в начальный момент времени материальная точка находится в положении равновесия, то есть $x(0) = 0$. Путь, пройденный точкой за время $t \le T/4$ (см. рисунок)

$$s = x(t). \qquad (2)$$



При $t > T/4$ точка, дойдя до координаты $x = X_0$, начнет двигаться к началу координат, то есть в сторону, противоположную начальному движению, и тогда выражение (2) будет несправедливо.

Подставим в уравнение (2) путь $s = A$, координату $x(t)$ выражаем из уравнения (1) и, учитывая, что $\varphi_{01} = 0$, получим:

$$A = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1,$$

откуда

$$\sin\frac{2\pi}{T}t_1 = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{4}.$$

Для первой половины пройденного пути s

$$\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t_2,$$

откуда

$$\sin\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{12}.$$

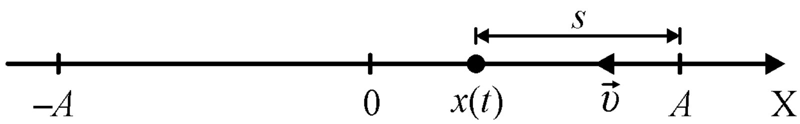
Время, необходимое для прохождения материальной точкой второй половины пройденного пути от положения равновесия до крайнего положения, равно

$$t_3 = t_1 - t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}.$$

Таким образом, двигаясь из положения равновесия, колеблющаяся точка проходит расстояние $s = X_0$ за время $t_1 = T/4$, причем первую половину этого пути она проходит за время $t_2 = T/12$, вторую – $t_3 = T/6$, то есть вдвое медленнее.

Если $\varphi_{02} = \pi/2$, то в начальный момент времени движущаяся материальная точка находится в крайнем положении, то есть $x(0) = A$, скорость точки $\upsilon_x = 0$. С увеличением времени координата x уменьшается, а путь, пройденный точкой (см. рисунок), находится по формуле

$$s = A - x(t). \qquad (3)$$



Подставим в уравнение (3), $s = A$, координату $x(t)$ выражаем из (1) с учетом того, что $\varphi_{02} = \pi/2$, получим:

$$A = A - A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{4}.$$

Для первой половины пройденного пути $s = A/2$

$$\frac{A}{2} = A - A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{6}.$$

Время, необходимое для прохождения материальной точки второй половины пройденного пути при её движении из крайнего положения, равно

$$t_3 = t_1 - t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12}.$$

Таким образом, двигаясь из крайнего положения, колеблющаяся точка проходит расстояние $s = A$ за время $t_1 = T/4$, причем первую половину этого пути она проходит за время $t_2 = T/6$, вторую – $t_3 = T/12$, то есть вдвое быстрее.

ЗАДАЧИ

141. На стержне длиной l = 30,0 см укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь.

142. Материальная точка совершает гармонические колебания частотой ν = 10,0 Гц. В начальный момент времени точка имела максимальное смещение x_{max} = 1,0 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить график колебаний.

143. Материальная точка массой m = 0,01 кг совершает гармонические колебания с периодом T = 2,0 с. Полная энергия колеблющейся точки E = 0,1 мДж. Определить амплитуду A колебаний и максимальное значение силы F_{max}, действующей на точку.

144. Складываются два гармонических колебания одного направления: $x_1 = A_1 \cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_1)$ и $x_2 = A_2 \cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_2)$. Здесь A_1 = 3,0 см, A_2 = 2,0 см, τ_1 = (1/6) с, τ_2 = (1/3) с, T = 2,0 с. Написать уравнение результирующего колебания и построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

145. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\sin\omega t$, где A = 5,0 см, ω = 2,0 $с^{-1}$. В момент времени t, когда точка обладала потенциальной энергией E = 0,1 мДж, на неё действует возвращающая сила F = 5,0 мН. Найти этот момент времени.

146. Определить период T колебаний математического маятника, если модуль его максимального перемещения от положения равновесия Δr = 18,0 см, а максимальная скорость υ_{max} = 16,0 см/с.

147. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M = 200 г, прикрепленный к горизонтально расположенной легкой пружине жесткостью k = 500 Н/м. В шар попадает пуля массой m = 10,0 г, летящая горизонтально вдоль пружины со скоростью υ = 300 м/с, и застревает в нем.

Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара.

148. Груз на пружине совершает гармонические колебания амплитудой A = 2,0 см. Определить смещение груза x относительно положения равновесия, при котором потенциальная энергия $E_п$ пружины равна кинетической энергии $E_к$ груза.

149. Шарик из меди, подвешенный на пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если медный шарик заменить алюминиевым, диаметр которого вдвое больше медного? Плотность меди ρ_1 = 8600 кг/м^3, плотность алюминия ρ_2 = 2700 кг/м^3.

150. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1 = 5,0 мин уменьшилось в два раза. За какое время t_2, считая от начального момента времени, амплитуда уменьшится в 8 раз?

Тема 6. Механические волны. Волны в упругой среде. Уравнение бегущей волны. Одномерное волновое уравнение. Стоячие волны

Пример решения задач

Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью υ = = 20,0 *м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях* x_1 = 12,0 *м и* x_2 = 15,0 *м от источника волн, колеблются с разностью фаз* $\Delta\varphi = 0,75\pi$. *Найти длину волны* λ, *написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент* $t = 1,2$ *с, если амплитуда колебаний* A = 0,1 *м.*

Дано

υ = 20,0 м/с
x_1 = 12,0 м
x_2 = 15,0 м
$\Delta\varphi$ = 0,75π.
t = 1,2 с
A = 0,1 м

λ – ?

Анализ и решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2π; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \Delta x\frac{2\pi}{\lambda} = (x_2 - x_1)\frac{2\pi}{\lambda}\ \Delta\varphi.$$

Решая это равенство относительно λ, получаем

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \qquad (1)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (1), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(15-12)}{0,75\pi} = 8\ (\text{м}).$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую частоту ω. Так как

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где $T = \lambda / \upsilon$ – период колебаний, то

$$\omega = \frac{2\pi \cdot \upsilon}{\lambda}.$$

Производим вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20{,}0}{8} = 5\pi \ (\text{с}^{-1}).$$

Зная амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω и скорость υ распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \qquad (2)$$

где A = 0,1 м, ω = 5π с$^{-1}$, υ = 20,0 м/с.

Чтобы найти смещение y указанных точек, достаточно в уравнение (2) подставить значения t и x:

$$y_1 = 0{,}1\cos\left(5\pi(1{,}2 - 12/20{,}0)\right) = 0{,}1\cos 3\pi = -0{,}1(\text{м}),$$

$$y_2 = 0{,}1\cos\left(5\pi(1{,}2 - 15/20)\right) = 0{,}1\cos 2{,}25\pi = 0{,}1\cos 0{,}25\pi = 0{,}071(\text{м}).$$

ЗАДАЧИ

151. Определить скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на Δx = = 15,0 см, равна $\pi/2$. Частота колебаний ν = 25,0 Гц.

152. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях $l_1 = 10{,}0$ м и $l_2 = 16{,}0$ м. Период колебаний T = 0,04 с; скорость распространения υ = 300 м/с.

153. Найти смещение x от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \lambda/12$ для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний A = 0,05 м.

154. Смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии l = 4,0 см, в момент времени $t = T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.

155. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью υ = 15,0 м/с. Период колебаний точек шнура T = 1,2 с. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на шнуре, и отстоящих от источника волн на расстояниях x_1 = 20,0 см, x_2 = 30,0 см.

156. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда A колебаний равна 10,0 см. Как велико смещение y точки, удаленной от источника на $x = 3\lambda/4$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9T$?

157. Наблюдатель, находящийся на расстоянии l = 800 м от источника звука, слышит звук, прошедший в воздухе, на Δt = 1,78 с позднее, чем звук, прошедший в воде. Найти скорость звука υ в воде, если температура T воздуха равна 350 К.

158. Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние l: 1) между первой и седьмой пучностями $l_{1-7}^{пуч}$ = 15,0 см; 2) между первым и четвертым узлом $l_{1-4}^{уз}$ = 15,0 см.

159. Волна распространяется в упругой среде со скоростью υ = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы которых противоположны, равно Δx = 1,0 м. Определить частоту ν колебаний.

160. Стоячая волна образуется при наложении бегущей волны и волны, отраженной от границы раздела сред, перпендикулярной направлению распространения волны. Найти положения (расстояние от границы раздела сред) узлов и пучностей стоячей волны, если отражение происходит: 1) от среды менее плотной; 2) от среды более плотной. Скорость распространения звуковых колебаний υ = 340 м/с, а их частота ν = 3,4 кГц.

Тема 7. Уравнение состояния идеального газа. Закон Дальтона. Средняя энергия молекулы. Внутренняя энергия идеального газа. Теплоёмкость идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении. Изопроцессы идеального газа. Цикл Карно и его КПД

Пример решения задач

Зависимость давления воздуха от объема задана уравнением $p = (p_0 - \alpha V)$, *где* p_0 = 2,0·10⁶ *Па*, α = 5,0·10⁷ *Па/м³*. *Масса воздуха* m = 500 *г. Определить максимальную температуру воздуха* $T_{\max}$.

Дано

$p = (p_0 - \alpha V)$

p_0 = $2{,}0 \cdot 10^6$ Па

α = $5{,}0 \cdot 10^7$ Па/м³

m = 500 г

$T_{\max}$ – ?

Анализ и решение

Для решения задачи воспользуемся *уравнением Клапейрона–Менделеева*, которое устанавливает связь между давлением, объемом и температурой для произвольного равновесного состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (1)$$

здесь m – масса газа, M – его молярная масса, R = 8,31 Дж/(моль·К) –

универсальная газовая постоянная. Подставим в это уравнение зависимость давления воздуха от его объёма

$$(p_0 - \alpha V)V = \frac{m}{M} RT .$$

В полученной формуле температура является функцией только объёма. Выразим её

$$T = \frac{M\alpha}{mR}(p_0 V - \alpha V^2).$$

Максимальной температуре $T_{\max}$ воздуха соответствует его объем, который обозначим $V_{\max}$. Для нахождения этой величины приравняем нулю производную $\frac{dT}{dV}$:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{M\alpha}{mR}(p_0 - 2\alpha V_{max}) = 0 \text{ при } T = T_{\max} .$$

В этом выражении нулю может быть равно только выражение в скобках

$$(p_0 - 2\alpha V_{max}) = 0 .$$

Отсюда находим

$$V_{\max} = \frac{p_0}{2\alpha} .$$

Из уравнения $p = (p_0 - \alpha V)$ находим давление при объеме $V_{\max}$, соответствующем максимальной температуре

$$p_{\max} = p_0 - \alpha \frac{p_0}{2\alpha} = \frac{p_0}{2} .$$

Максимальную температуру определяем, воспользовавшись уравнением состояния газа (1)

$$T_{\max} = \frac{M}{mR} p_{\max} V_{\max} = \frac{M}{mR} \frac{{p_0}^2}{4\alpha} . \qquad (2)$$

Проверим наименование единицы измерения температуры в системе СИ

$$\textit{наимен. } T = \frac{кг \cdot Па \cdot м^3 \cdot К \cdot моль}{кг \cdot моль \cdot Дж \cdot Па} = \frac{К \cdot м^3 \cdot Н}{Н \cdot м \cdot м^3} = К .$$

Подставляя в формулу (2) численные значения физических величин, получаем

$$T_{\max} = \frac{0{,}029 \cdot (2{,}0 \cdot 10^6)^2}{0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 4 \cdot 5{,}0 \cdot 10^7} = 140 \text{ К}.$$

Ответ: максимальная температура воздуха $T_{\max}$ = 140 К.

ЗАДАЧИ

161. В цилиндр длиной l = 1,6 м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью $S = 200$ см^2. Определить силу F, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1 = 10{,}0$ см от дна цилиндра.

162. Оболочка воздушного шара имеет вместимость $V = 1600$ м^3. Найти подъемную силу F водорода, наполняющего оболочку, на высоте, где давление $p = 60{,}0$ кПа и температура $T = 280$ К. При подъеме шара водород может выходить через отверстие в нижней части шара.

163. Два сосуда одинакового объёма содержат кислород. В одном сосуде давление $p_1 = 2{,}0$ МПа и температура $T_1 = 800$ К, в другом $p_2 = 2{,}5$ МПа, $T_2 = 200$ К. Сосуды соединили трубкой и охладили находящийся в них кислород до температуры $T = 200$ К. Определить установившееся в сосудах давление p.

164. В баллоне вместимостью $V = 15{,}0$ л находится смесь, содержащая $m_1 = 10{,}0$ г водорода, $m_2 = 54{,}0$ г водяного пара и $m_3 = 60{,}0$ г оксида углерода. Температура смеси $t = 27$°C. Определить давление смеси.

165. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350$ К, а также кинетическую энергию $E_к$ вращательного движения всех молекул кислорода, масса которого $m = 4{,}0$ г.

166. Вычислить удельные теплоёмкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода составляют $w_1 = 80$ % и $w_2 = 20$ %.

167. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объём $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объёма $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объёме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту, переданную газу. Построить график процесса.

168. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К. Водород сначала адиабатно расширился, увеличив свой объём в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объём газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найти температуру T в конце адиабатного расширения и работу A, совершаемую газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

169. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К. Определить термический КПД η цикла и температуру T_2 холодильника тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу A = 350 Дж.

170. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя T_1 = 500 К, температура холодильника T_2 = 250 К. Определить термический КПД η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа A_2 = 70 Дж.

Тема 8. Взаимодействие электрических зарядов. Напряженность электростатического поля, созданного в вакууме электрическими зарядами, распределенными по линии, кольцу и плоскости.

Пример решения задач

Тонкая бесконечная нить согнута под углом 90°. *Нить несет заряд, равномерно распределённый с линейной плотностью* $\tau = 1{,}0$ *мкКл/м. Определить силу* F*, действующую на точечный заряд* Q_1 = 0,1 *мкКл, расположенный на продолжении одной из сторон и удалённой от вершины угла на* a = 50,0 *см.*

Дано
$\tau = 1{,}0$ мкКл/м
Q_1 = 0,10 мкКл
a = 50 см
F – ?

Анализ и решение

Электрический заряд на нити не является точечным, поэтому для определения искомой силы применить закон Кулона нельзя. Для решения задачи воспользуемся формулой силы, с которой электростатическое поле действует на помещенный в него электрический заряд $\vec{F} = Q_1\vec{E}$. В нашем случае вектор напряженности электростатического поля заряженной нити $\vec{E}$ в том месте, где находится заряд Q_1, согласно принципу суперпозиции, равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых вертикальной $\vec{E}_I$ и горизонтальной $\vec{E}_{II}$ частями нити

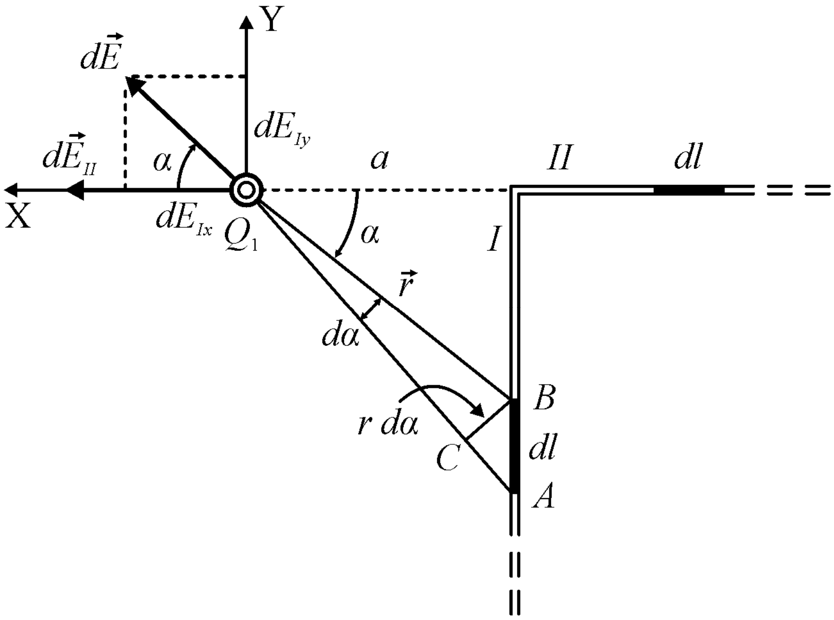
$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_{II}.$$

1. Рассмотрим вертикальную часть нити (участок I).

Выделим на ней малый участок (элемент) длиной dl. Тогда находящийся на этом участке заряд $dQ = \tau dl$ можно считать точечным. В точке пространства, где находится заряд q, он создает поле, вектор напряженности которого находится по формуле

$$d\vec{E}_I = k\frac{dQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{\tau dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

здесь $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 – диэлектрическая постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента длины нити dl к точке поля, где вычисляется напряжённость, $r = |\vec{r}|$. Чтобы найти напряженность поля, созданного вертикальной частью нити, необходимо сложить (проинтегрировать) напряженности от всех элементов нити. При этом следует учесть, что все слагаемые являются векторами и имеют различные направления.



Выберем оси ОХ и ОУ, как показано на рисунке, и спроецируем вектор $d\vec{E}_I$ на эти оси

$$dE_{Ix} = dE_I \cos\alpha,$$
$$dE_{Iy} = dE_I \sin\alpha.$$

Суммарные проекции напряженности E_{Ix} и E_{Iy} найдем интегрированием по длине нити. В качестве переменной величины удобно выбрать угол α, который составляет радиус-вектор $\vec{r}$ с нормалью к нити. Из рисунка следует, что $r = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. Через начало элемента длины нити проведём дугу *BC*, радиусом r с центром в точке, где находится заряд q. Длина дуги лежащей напротив центрального угла $d\alpha$, равна $rd\alpha$. Треугольник BQ_1C, вследствие того, что отрезок нити dl мал, можно считать прямоугольным, тогда $\dfrac{rd\alpha}{dl} = \cos\alpha$. Учитывая, что угол α изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, получаем

$$E_{Ix} = \int_l dE_{Ix} = \int_l k\frac{\tau r d\alpha}{r^2\cos\alpha}\cos\alpha = \int_l k\frac{\tau}{r}d\alpha = k\frac{\tau}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha d\alpha = k\frac{\tau}{a}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = k\frac{\tau}{a},$$

$$E_{Iy}=\int_l dE_{Iy}=\int_l k\frac{\tau r d\alpha}{r^2\cos\alpha}\sin\alpha=\int_l k\frac{\tau\sin\alpha}{r\cos\alpha}d\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\frac{\tau\sin\alpha}{a\cos\alpha}\cos\alpha d\alpha=k\frac{\tau}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha d\alpha=$$

$$=k\frac{\tau}{a}(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0)=k\frac{\tau}{a}.$$

2. Рассмотрим горизонтальную часть нити (участок II). Выделим на ней малый участок (элемент) длиной dl. Тогда находящийся на этом участке заряд $dQ=\tau dl$ можно считать точечным. В точке пространства, где находится заряд q, он создает поле, вектор напряженности которого находится по формуле

$$d\vec{E}_{II}=k\frac{dQ}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=k\frac{\tau dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Спроецируем вектор напряженности на оси ОХ и ОУ, получим

$$dE_{IIx}=k\frac{dQ}{r^2}=k\frac{\tau dl}{r^2},$$

$$dE_{IIy}=0.$$

Тогда

$$E_{IIx}=\int_l dE_{IIx}=k\int_l\frac{dQ}{r^2}=k\int_l\frac{\tau dr}{r^2}.$$

Так как изменение длины нити совпадает с изменением расстояния до заряда q, то $dl=dr$ и интегрирование ведется по длине нити от a до ∞

$$E_{IIx}=k\tau\int_l\frac{dr}{r^2}=k\tau\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^{\infty}=k\frac{\tau}{a},$$

$$E_{IIy}=0$$

Суммарные значения проекций вектора напряженности на оси ОХ и ОУ будут равны

$$E_x=E_{Ix}+E_{IIx}=k\frac{\tau}{a}+k\frac{\tau}{a}=k\frac{2\tau}{a},\ \ E_y=E_{Iy}=k\frac{\tau}{a}.$$

Так как E_x и E_y взаимно перпендикулярны, то модуль результирующей напряженности находится по формуле

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{\left(k\frac{2\tau}{a}\right)^2+\left(k\frac{\tau}{a}\right)^2}=k\frac{\tau}{a}\sqrt{4+1}=k\frac{\tau\sqrt{5}}{a}.$$

Таким образом, искомая сила, действующая на точечный заряд со стороны заряженной нити, будет равна

$$F=Q_1E=\frac{q\tau\sqrt{5}}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Проверим наименование единицы измерения силы в системе СИ

$$наимен.\ F = \frac{Кл \cdot Кл \cdot Н \cdot м^2}{Кл^2 м \cdot м} = Н.$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления

$$F = \frac{1 \cdot 10^{-7} 1 \cdot 10^{-6} \sqrt{5}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5} = 4{,}02 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: заряд Q_1 и заряженная нить взаимодействуют с силой F = 4,02 10^{-3} Н.

ЗАДАЧИ

171. В вакууме в вершинах правильного шестиугольника со стороной a = 0,1 м расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ (Q = = 0,1 мкКл). Найти силу F, действующую на заряд $Q = Q_0$, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

172. Два точечных заряда $Q_1 > 0$ и $Q_2 = -4Q_1$ закреплены на расстоянии r = 60 см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд Q_3, так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь заряд Q_3, чтобы равновесие было устойчивым.

173. Тонкое полукольцо радиусом R = 10,0 см несет равномерно распределённый заряд с линейной плотностью τ = 1,0 мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд Q = 20,0 нКл. Определить силу взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

174. Тонкий стержень длиной l = 20,0 см находится в вакууме и несет равномерно распределенный заряд Q = 150 нКл. На продолжении оси стержня, на расстоянии a = 30,0 см от ближайшего его конца находится точечный заряд Q_1 = 100 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

175. Тонкий полубесконечный стержень находится в вакууме и равномерно заряжен с линейной плотностью τ = 100 нКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восстановленном из конца стержня, находится точечный заряд Q = 50 нКл. Расстоянии a заряда от конца стержня равно 30 см. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

176. Тонкая нить длиной l = 10,0 см находится в вакууме и равномерно заряжена с линейной плотностью τ = 10,0 нКл/м. На расстоянии a = 15 см от нити, против ее середины, находится точечный заряд Q = 1,0 нКл. Вычислить силу F, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

177. Тонкий стержень длиной l = 25,5 см несет равномерно распределенный заряд Q = 100 нКл. Определить напряженность E электростатического поля, создаваемого в вакууме распределенным зарядом в точке, лежащей на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии a = 10,0 см от этого конца.

178. Тонкая полубесконечная нить несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью τ = 1,0 мкКл/м. Определить модуль и направление силы F, действующей в вакууме на точечный заряд Q = 0,1 мкКл, расположенный на расстояние a = 20,0 см от нити и удалённый от её конца на d = 40,0 см.

179. Тонкий диск радиусом R = 8,0 см несет равномерно распределенный заряд Q = 1,0 нКл. Определить напряженность E электростатического поля в вакууме в точке A, лежащей на оси диска на расстоянии a = 6,0 см от его центра.

180. Тонкое кольцо радиусом R = 8,0 см несет равномерно распределенный с заряд Q = 15,0 нКл. Определить силу F, действующую в вакууме на точечный заряд Q_1 = 25,0 нКл, расположенный в точке A, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние r = 10,0 см?

Тема 9. Поток вектора напряженности электростатического поля. Принцип суперпозиции. Теорема Гаусса и её применение для расчета напряженности электростатического поля в вакууме и веществе.

Пример решения задач

Бесконечно длинный цилиндр радиусом R_1 = 5,0 *см заряжен с объёмной плотностью* ρ = 1,0 *нКл/м*^{3}. *Вокруг цилиндра, коаксиально с общей осью с ним, расположена цилиндрическая сетка радиусом* R_2 = 10,0 *см. Сетка заряжена с поверхностной плотностью* σ = – 2,0 *нКл/м*^{2}. *Вычислить напряжённость электростатического поля* E *в точках, расположенных на расстояниях* r_1 = 2,0 *см,* r_2 = 8,0 *см,* r_3 = 15,0 *см от оси цилиндра.*

Дано

R_1 = 5,0 см

ρ = 1,0 нКл/м^3

R_2 = 10,0 см

σ = – 2,0 нКл/м^2

r_1 = 2,0 см

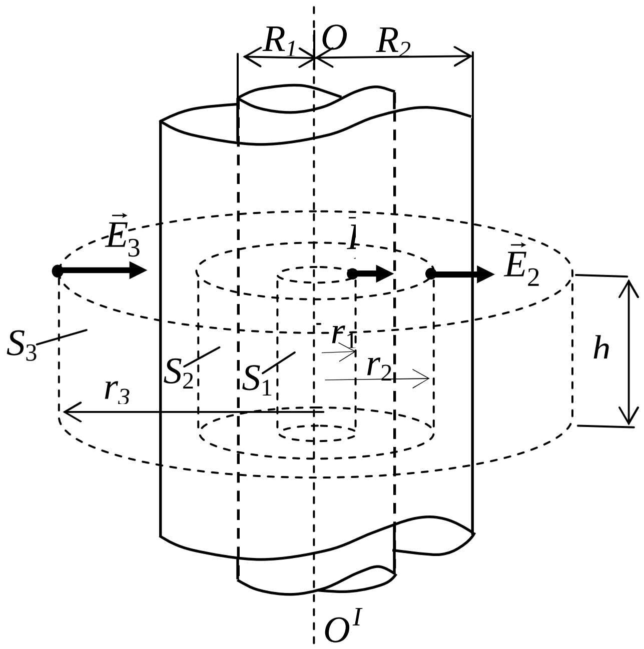
r_2 = 8,0 см

r_3 = 15,0 см

E_1, E_2, E_3 – ?

Анализ и решение

Электростатическое поле создано зарядами, равномерно распределенными по объёму цилиндра и по поверхности сетки. Эти тела являются симметричными относительно оси OO^I, проходящей через их геометрические центры. Поэтому можно считать, что поле также обладает осевой симметрией, то есть его силовые линии являются прямыми в любой плоскости, перпендикулярной оси и направлены по радиусу. Такая симметрия позволяет искать напряженность поля



с помощью теоремы Гаусса:

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на ε_0.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS\cos(\vec{E} \wedge d\vec{S}) = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i \,,$$

здесь $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен элементу поверхности dS, а его направление совпадает с направлением внешней нормали $\vec{n}$ к элементу поверхности, E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к элементу поверхности dS.

В качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбрать поверхность, коаксиальную заряженным поверхностям, то есть в виде соосного цилиндра конечной высоты. Характер зависимости $E(r)$ для точек, лежащих внутри цилиндра, между цилиндром и сеткой и вне сетки, различен. Поэтому следует использовать три вспомогательные цилиндрические поверхности S_1, S_2, S_3 с радиусами $r < R_1$, $R_1 < r_2 < R_2$ и $r_3 > R_2$ (см. рис.). Для каждой поверхности теорема Гаусса может быть записана в виде

$$\oint_{S_{1,2,3}} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i \,. \tag{1}$$

Из рисунка видно, что боковые поверхности вспомогательных цилиндров и их основания находятся в разных условиях относительно силовых линий поля. Во всех точках основания $(\vec{E} \wedge d\vec{S})$ = 90° и поток вектора напряженности сквозь основания равен нулю. На боковых поверхностях $S_{\text{бок}1,2,3}$ нормаль $\vec{n}$ совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. Поэтому

$$\oiint\limits_{S_{1,2,3}} E_n dS = \int\limits_{S_{бок1,2,3}} E_n dS,$$

т.к. при такой форме произвольной замкнутой поверхности вычисление потока вектора напряженности электрического поля сводится к арифметическим действиям вместо интегрирования. Все точки боковых поверхностей находятся в одинаковых условиях относительно зарядов, что позволяет считать E_n постоянной величиной. Тогда

$$\int\limits_{S_{\text{бок}1,2,3}} E_n dS = E_n \int\limits_{S_{\text{бок}1,2,3}} dS = E_n 2\pi r h, \qquad (2)$$

здесь r и h – радиус и высота вспомогательных поверхностей. Следует обратить внимание, что r – это расстояния от оси цилиндра до точек, в которых вычисляется напряженность поля и одновременно радиусы произвольных поверхностей.

Сумма зарядов, охваченных вспомогательной поверхностью, стоящая в правой части выражения (1), зависит от радиуса произвольной поверхности.

При $r < R_1$, внутри поверхности S_1, находится часть заряда цилиндра, а так как заряд распределён равномерно, то $Q_1 = \rho V_1$, где $V_1 = \pi r_1^2 h$ – объём, заключённый внутри поверхности S_1. Таким образом

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \rho\pi r_1^2 h.$$

Подставляя последнее выражение в (1) и заменяя интеграл по замкнутой поверхности S_1 правой частью равенства (2), получаем

$$E_{n_1} 2\pi r_1 h = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r_1^2 h, \text{ откуда } E_{n_1} = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon_0}.$$

Проверим наименование единицы измерения напряженности в системе СИ

$$\textit{наимен. } E = \frac{Кл \cdot м \cdot Нм^2}{м^3 \cdot Кл} = \frac{Н}{Кл}.$$

В полученную формулу подставим численные значения величин и произведём вычисления

$$E_{n_1} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}13 \text{ Н/Кл}.$$

При $R_1 < r_2 < R_2$ внутри поверхности S_2, находится заряд $Q_2 = \rho V_2$, где $V_2 = \pi R_1^2 h$ – объём цилиндра, заключённого внутри поверхности S_2. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_2 = \rho\pi R_1^2 h.$$

Подставляя это выражение в (1) и заменяя интеграл по замкнутой поверхности S_2 правой частью равенства (2), получаем

$$E_{n_2} 2\pi R_1 h = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi R_1^2 h, \text{ откуда } E_{n_2} = \frac{\rho R_1^2}{2 r_2 \varepsilon_0}.$$

Проверим наименование единицы измерения напряженности в системе СИ

$$\textit{наимен. } E = \frac{Кл \cdot м \cdot Нм^2}{м^3 \cdot м \cdot Кл} = \frac{Н}{Кл}.$$

Подставим числовые значения величин и произведём вычисления

$$E_{n_2} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}77 \text{ Н/м.}$$

При $r_3 > R_2$ внутри поверхности S_3 поле будет создаваться заряженными цилиндром и сеткой. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_3 = (\rho\pi R_1^2 h + \sigma 2\pi R_2 h).$$

Здесь $2\pi R_2 h$ – площадь поверхности сетки, по которой равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью σ. Подставляя значение заряда в (1) и заменяя интеграл по замкнутой поверхности S_3 правой частью равенства (2), получаем

$$E_{n_3} \cdot 2\pi r_3 h = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho\pi R_1^2 h + 2\sigma\pi R_2 h), \text{ откуда } E_{n_3} = \frac{1}{2 r_3 \varepsilon_0}(\rho R_1^2 + 2\sigma R_2).$$

Проверим наименование напряженности в системе СИ

$$\textit{наимен. } E = \frac{Н \cdot м^2}{м \cdot Кл^2}\left(\frac{Кл \cdot м^2}{м^3} + \frac{Кл \cdot м}{м^2}\right) = \frac{Н}{Кл}.$$

Подставим числовые значения величин и произведём вычисления

$$E_{n_3} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}15 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left[1{,}0 \cdot 10^{-9}(5{,}0 \cdot 10^{-2})^2 - 2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}1\right] = -149{,}8 \text{ Н/м.}$$

Знак «–» означает, что угол между векторами $\vec{E}_3$ и $d\vec{S}$ равен 180° (см. рис.).

Ответ: напряжённости поля в трёх точках соответственно равны $E_1 = 1{,}13$ Н/м, $E_2 = 1{,}77$ Н/м, $E_3 = 149{,}8$ Н/м.

ЗАДАЧИ

181. Металлическая сфера радиусом R = 10,0 см, находящаяся в вакууме, несет равномерно распределенный заряд Q = 1,0 нКл. Определить с помощью теоремы Гаусса напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии r_1 = 8,0 см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии r_3 = 15,0 см от центра сферы. Построить график зависимости $E = E(r)$.

182. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами R_1 = 6,0 см и R_2 = 10,0 см находятся в вакууме и несут соответственно заряды Q_1 = 1,0 нКл и Q_2 = –0,5 нКл. Применяя теорему Гаусса, найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1 = 5,0 см; r_2 = 9,0 см; r_3 = 15,0 см. Построить график зависимости $E = E(r)$.

183. Расстояние d между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно 16,0 см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau|$ = 1,5 мкКл/м. Найти с помощью теоремы Гаусса напряженность E поля в вакууме в точке A, удаленной на расстояние a = 10,0 см как от первой, так и от второй проволоки.

184. Две длинные тонкостенные соосные трубки радиусами R_1 = 2,0 см и R_2 = 4,0 см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями τ_1 = –1,0 нКл/м и τ_2 = 0,5 нКл/м. Определить с помощью теоремы Гаусса напряженность E поля в точках, находящихся на оси трубок на расстояниях r_1 = 1,0 см; r_2 = 3,0 см; r_3 = 6,0 см. Построить график зависимости $E = E(r)$.Трубки расположены в вакууме.

185. Эбонитовый (диэлектрическая проницаемость ε = 3) сплошной шар радиусом R = 5,0 см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью ρ = 10,0 нКл/м^3. Определить, применяя теорему Гаусса, напряженность E электрического поля в точках: 1) на расстоянии r_1 = 3,0 см от центра шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии r_3 = 10,0 см от центра шара. Построить график зависимости $E = E(r)$.

186. Полый стеклянный шар (диэлектрическая проницаемость ε = 7) несет равномерно распределенный по объему заряд. Его объемная плотность ρ = 100 нКл/м^3. Внутренний радиус R_1 шара равен 5,0 см, наружный – R_2 = 10,0 см. Вычислить с помощью теоремы Гаусса напряженность E электрического поля в точках, отстоящих от центра сферы на расстояниях r_1 = 3,0 см, r_2 = 6,0 см, r_3 = 12,0 см. Построить график $E = E(r)$.

187. Очень длинный парафиновый (диэлектрическая проницаемость ε = 2) цилиндр радиусом R = 2,0 см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью ρ = 10,0 нКл/м^3. Определить напряженность E электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстоянии: 1) r_1 = 1,0 см; 2) r_2 = 3,0 см. Построить график зависимости $E = E(r)$. Для расчета использовать теорему Гаусса.

188. Электрическое поле создано в вакууме двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1 = 2,0 нКл/м^2 и σ_2 = –5,0 нКл/м^2. Определить с помощью теоремы Гаусса напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

189. Две круглые параллельные пластины радиусом R = 10,0 см находятся в вакууме на малом (по сравнению с радиусом) расстоянии друг от друга. Пластинам сообщили одинаковые по абсолютному значению, но противоположные по знаку заряды $Q_1 = Q, Q_2 = -Q, Q > 0$. Определить этот заряд Q, если пластины притягиваются с силой F = 2,0 мН. Считать, что заряды распределены по пластинам равномерно. Для расчета напряженности электростатического поля пластин применить теорему Гаусса.

190. Равномерно заряженная плоскость, расположена в вакууме в поле тяжести Земли перпендикулярно вектору $\vec{g}$, имеет поверхностную плотность электрических зарядов σ = 12,0 мкКл/м^2. Над ней находится однородный железный шарик, имеющий заряд Q = 3,0 мкКл. Какой радиус R должен иметь шарик, чтобы он не падал? Расчет напряженности электростатического поля провести с помощью теоремы Гаусса для бесконечной плоскости.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Студент-заочник должен решить девять задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (табл. 2).

Таблица 2

Вариант	Номера задач								
0	210	220	230	240	250	260	270	280	290
1	201	211	221	231	241	251	261	271	281
2	202	212	222	232	242	252	262	272	282
3	203	213	223	233	243	253	263	273	283
4	204	214	224	234	244	254	264	274	284
5	205	215	225	235	245	255	265	275	285
6	206	216	226	236	246	256	266	276	286
7	207	217	227	237	247	257	267	277	287
8	208	218	228	238	248	258	268	278	288
9	209	219	229	239	249	259	269	279	289

Тема 10. Потенциал и потенциальная энергия электростатического поля, созданного точечными зарядами, зарядами, распределенными по линии, кольцу и плоскости. Принцип суперпозиции электростатических полей.

Пример решения задач

По тонкой проволочной нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, *равномерно распределён заряд с линейной плотностью* τ = 10,0 *нКл/м. Определить потенциал электрического поля* φ, *создаваемого этим зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити* l *составляет* 1/3 *длины окружности.*

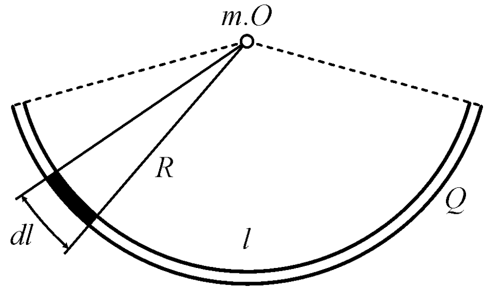
Сделаем рисунок

Дано

τ = 10,0 нКл/м

$l = \frac{1}{3}(2\pi R)$

φ – ?



Анализ и решение

Электростатическое поле создано зарядом, распределенным по тонкой дуге. Оно не обладает достаточной симметрией, и указать точную конфигурацию силовых линий электростатического поля невозможно. Поэтому для нахождения энергетической характеристики поля – потенциала φ, можно использовать только *принцип суперпозиции*. Разобьем дугу на элементарные участки длиной dl. Заряд dQ, находящийся на этом участке, можно считать точечным. Тогда потенциал $d\varphi$, создаваемый в центре кривизны таким зарядом, рассчитаем по формуле

$$d\varphi = k\frac{dQ}{r}, \qquad (1)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, r – расстояние от элемента dl до точки, потенциал в которой мы вычисляем. Потенциал результирующего поля получим интегрированием выражения (1)

$$\varphi = \int_Q \frac{dQ}{r}k. \qquad (2)$$

Равномерное распределение заряда по дуге позволяет утверждать, что

$$\frac{dQ}{dl} = \frac{Q}{l}, \text{ откуда } dQ = \frac{Q}{l}dl = \tau dl.$$

Здесь τ – линейная плотность заряда дуги. Тогда формула (2) примет вид

$$\varphi = k\int_l \frac{\tau dl}{r}.$$

Произведём интегрирование, учитывая, что $r = R$, а длина нити меняется от 0 до $l = \frac{1}{3}2\pi R$

$$\varphi = \int_0^{\frac{2}{3}\pi R} k\frac{\tau dl}{R} = k\frac{\tau}{R}l\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi R} = k\frac{\tau}{R}\frac{2\pi R}{3} \ \arcsin\theta.$$

Заменим k её значением, произведем сокращение и получим окончательную формулу

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}.$$

Проверим наименование единицы измерения потенциала в системе СИ

$$\textit{наимен. } \varphi = \frac{\textit{Кл}\cdot Y\cdot \textit{м}^2}{\textit{м}\cdot \textit{Кл}^2} = \frac{\textit{Дж}}{\textit{Кл}} = B.$$

Подставим числовые значения величин и произведём вычисления

$$\varphi = \frac{10{,}0\cdot 10^{-9}}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 188{,}3 \text{ В}.$$

Ответ: создаваемый заряженной дугой в её центре потенциал φ = 188,3 В.

ЗАДАЧИ

201. Найти потенциальную энергию E_n системы трех точечных зарядов Q_1 = 10,0 нКл, Q_2 = 20,0 нКл и Q_3 = –30,0 нКл, расположенных в вакууме в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 10,0 см.

202. Определить потенциальную энергию E_n системы из четырех точечных зарядов, расположенных в вакууме в вершинах квадрата со стороной a = 10,0 см. Заряды одинаковы по абсолютной величине $|Q_i|$ = 10,0 нКл, но два из них отрицательны, причем заряды одного знака расположены по диагоналям квадрата.

203. Тонкие стержни в вакууме образуют квадрат со стороной a. Стержни заряжены с линейной плотностью τ = 1,3 нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата.

204. По тонкому кольцу радиусом R = 10,0 см, расположенному в вакууме, равномерно распределен заряд Q = 5,0 нКл. Определить потенциал φ в точке A, лежащей на оси кольца, на расстоянии a = 5,0 см от центра.

205. Бесконечно длинная тонкая прямая нить, расположенная в вакууме, несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью τ = 0,01 мкКл/м. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ двух точек поля, удаленных от нити на расстояния r_1 = 2 см и r_2 = 20 см.

206. Тонкий стержень длиной l = 10 см, расположенный в вакууме, несет равномерно распределенный заряд Q = 1,5 нКл. Определить потенциал φ электрического поля в точке A, лежащей на оси стержня на расстоянии a = 20 см от ближайшего его конца.

207. Тонкая круглая пластина радиусом R = 10,0 см находится в вакууме. Она равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ = 1,0 нКл/м^2. Определить потенциал φ электрического поля в точке 1, расположенной в центре пластины и в точке 2, лежащей на оси, перпендикулярной плоскости пластины и отстоящей от центра пластины на a = 5,0 см.

208. В вакууме расположены две концентрические металлические сферы радиусами R_1 = 3,0 см и R_2 = 6,0 см. Заряд внутренней сферы Q_1 = –1,0 нКл, внешней $-Q_2$ = 2,0 нКл. Найти потенциал φ_i электрического поля на расстояниях r_1 = 1,0 см, r_2 = 5,0 см, r_3 = 9,0 см от центра сфер. Построить график зависимости $\varphi = \varphi(r)$.

209. Сплошной парафиновый шар (ε = 2) радиусом R = 10,0 см находится в вакууме и равномерно заряжен с объемной плотностью

ρ = 1,0 мкКл/м^3. Определить потенциал φ электрического поля в центре шара и на его поверхности. Построить график зависимости $\varphi = \varphi(r)$.

210. Эбонитовый ($\varepsilon = 3$) толстостенный полый шар находится в вакууме и несет равномерно распределенный по объему заряд с плотностью ρ = 2 мкКл/м^3 . Внутренний радиус шара R_1 = 3,0 см, наружный R_2 = 6,0 см. Определить потенциал φ шара в следующих точках: 1) на наружной поверхности шара; 2) на внутренней поверхности шара; 3) в центре шара. Построить график зависимости $\varphi = \varphi(r)$

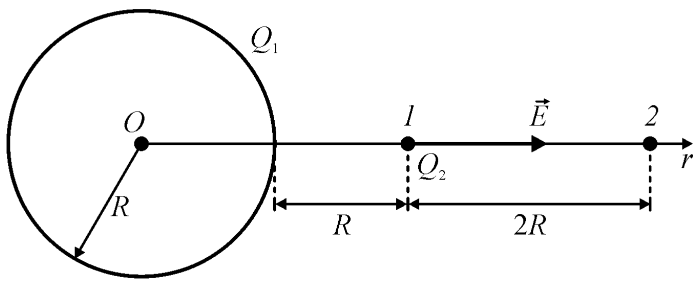
Тема 11. Работа по перемещению зарядов в электростатическом поле. Движение заряженных частиц в электростатическом поле.

Пример решения задач

Точечный заряд Q_2 = – 1,0 мкКл расположен на продолжении диаметра заряженного шара. Какую работу надо совершить, чтобы перенести этот заряд из точки 1 в точку 2 поля, созданного шаром. Потенциал шара $\varphi^{шара}$ = 1,0 кВ?

Дано
Q_2 = – 1,0 мкКл
$\varphi^{шара}$ = 1,0 кВ
A^* –

Сделаем рисунок



Анализ и решение

Работа A^*, совершаемая внешними силами при перемещении заряда Q в кулоновском поле, равна работе сил поля, взятой с обратным знаком:

$$A^* = -A_{12} = -Q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1)$$

здесь φ_1 и φ_2 – потенциалы соответственно начальной и конечной точек. Для того чтобы определить знак работы внешних сил, надо выяснить направление силовых линий поля. Как видно из рисунка, при движении заряда Q_2 из точки *1* по направлению к точке *2* заряд перемещается по силовой линии, то есть против кулоновских сил, и работа внешних сил будет положительна.

Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. Для поля с осевой симметрией, каким является поле шара, это соотношение можно записать в виде

$$E = -d\varphi / dr \text{ или } d\varphi = -Edr\,.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на r_1 и r_2 от центра шара

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{r_1}^{r_2} Edr\,. \qquad (2)$$

Используя теорему Гаусса, можно показать (см. пример из Темы 9), что равномерно заряженный шар радиуса R и зарядом Q_1, создает электростатическое поле:
вне шара $(r > R)$

$$E = k\frac{Q_1}{r^2},\ \varphi^{шара} = \int_r^{\infty} Edr = k\frac{Q_1}{r}, \qquad (3)$$

внутри шара $(r < R)$

$$E = 0,\ \varphi^{шара} = \text{const} = k\frac{Q_1}{R},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, r – расстояние от центра шара до точки поля, Q_1 – заряд шара, $\varphi^{шара}$ – его потенциал.

Из последней формулы найдем заряд Q_1 шара

$$Q_1 = \frac{1}{k}\varphi^{шара} R\,.$$

Подставим его значение в формулу (3), а её, в свою очередь, в формулу (2). Полученное выражение проинтегрируем, полагая, что $r_1 = 2R$, $r_2 = 4R$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{2R}^{4R} k\frac{Q_1}{r^2}dr = \int_{2R}^{4R} k\frac{\varphi^{шара}}{kr^2}dr = \varphi^{шара} R\int_{2R}^{4R}\frac{dr}{r^2} = \varphi R\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{2R}^{4R}.$$

Итак

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi^{шара}\left(-\frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}\right) = -\varphi^{шара}\cdot\frac{1}{R}.$$

Полученное выражение разности потенциалов точек *1* и *2* подставляем в формулу (1) и находим работу внешних сил по перемещению заряда Q_2 из точки *1* в точку *2*

$$A^* = -\frac{1}{4}Q_2\varphi^{шара}\,.$$

Проверим наименование единицы измерения работы в системе СИ

$$\textit{наимен. } A^* = \textit{Кл}\cdot\textit{В} = \textit{Дж}\,.$$

Подставим числовые значение величин и произведём вычисления

$$A^* = -\frac{(-1\cdot 10^{-9})\cdot 1\cdot 10^{3}}{4} = 2{,}5\cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Ответ: внешние силы совершают работу A^* = $2{,}5\cdot 10^{-4}$ Дж.

ЗАДАЧИ

211. Электростатическое поле создано в вакууме бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ = 2 мкКл/м^2. В этом поле вдоль прямой, составляющей угол α = 60° с плоскостью, из точки *1* в точку *2,* расстояние между которыми d = 20 см, перемещается точечный электрический заряд Q = 10 нКл. Определить работу A_{12} сил поля по перемещению заряда.

212. На прямом тонком стержня длиной l, находящимся в вакууме, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ = 1,0 Кл/м. Определить работу A_{12} сил поля по перемещению заряда Q = –1,0 Кл из точки *1,* расположенной на оси стержня на расстоянии $\alpha = l$ от одного конца стержня, в точку *2,* расположенную на оси стержня на расстоянии $b = 0{,}5l$ от другого конца стержня.

213. Тонкий стержень, находящийся в вакууме, согнут в кольцо радиуса R = 10,0 см, и несет равномерно распределенный заряд Q_1 = 11,0 нКл. Какую работу A_{12} совершат внешние силы, чтобы перенести заряд Q_2 = 5,0 нКл из точки *1* (в центре кольца) в точку *2,* расположенную на оси кольца на расстоянии a = 20,0 см от точки *1*?

214. Определить работу A_{12} сил поля по перемещению в вакууме заряда Q = 1,0 мкКл в поле, созданном равномерно заряженным проводящим шаром радиуса R, из точки *1,* расположенной на расстоянии $a_1 = R$ от поверхности шара, в точку 2, находящуюся на расстоянии $a_2 = 3R$. Потенциал φ шара равен 1 кВ.

215. Тонкая бесконечная прямая нить находится в вакууме и равномерно заряжена с линейной плотностью τ = 0,6 мкКл/м. К нити из точки *1,* находящейся на расстоянии r_1 = 1,0 м, начинает движение со скоростью υ_1 = 0,5 м/с шарик массой m = 4,0 г, имеющий заряд Q = 15,0 нКл. На какое расстояние r_2 может приблизиться шарик к нити?

216. Положительно заряженная частица, имеющая элементарный заряд, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов U = 60,0 кВ и летит на ядро атома лития, заряд которого равен трем элементарным зарядам. На какое наименьшее расстояние $r_{\min}$ частица может приблизиться к ядру?

Начальное расстояние r_2 частицы от ядра считать бесконечно большим, а массу частицы – пренебрежимо малой по сравнению с массой ядра.

217. Протон, движущийся в вакууме со скоростью υ_1 = 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле (E = 300 В/см) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь s должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?

218. Бесконечная плоскость, находящаяся в вакууме, равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ = –35,4 нКл/м^2. По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии r_1 = 5,0 см он имел кинетическую энергию T = 80,0 эВ.

219. Электрон, летевший в вакууме горизонтально со скоростью υ_1 = 1,6 Мм/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью E = 90,0 В/см. Какова будет по абсолютному значению и направлению скорость υ_2 электрона через время τ = 1,0 нс, если вектор напряженности поля направлен вертикально вверх?

220. Тонкий стержень согнут в полукольцо. Стержень заряжен с линейной плотностью τ = 133 нКл/м. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд Q = 6,7 нКл из центра полукольца в бесконечность?

Тема 12. Электростатическое поле в проводниках и диэлектриках. Индуцированные и поляризационные заряды. Вычисление напряженности и потенциала электростатического поля в проводниках и диэлектриках.

Пример решения задач

Расстояние между обкладками плоского конденсатора l = 5,0 *мм, разность потенциалов* $\Delta\varphi$ = 1,2 *кВ. Между обкладками находится диэлектрик с диэлектрической восприимчивостью* $\chi = 1$. *Определить: напряженность* E *электростатического поля в диэлектрике, поверхностную плотность* σ *свободных зарядов на обкладках, поверхностную плотность* $\sigma_{пол.}$ *поляризационных зарядов на диэлектрике.*

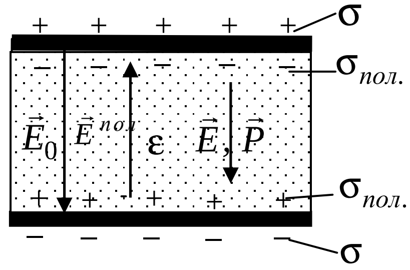
Дано

l = 5,0 мм

$\Delta\varphi$ = 1,2 кВ

$\chi = 1$

E – ?, σ – ?, $\sigma_{пол}$ – ?



Анализ и решение

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле он *поляризуется*, то есть в нем происходит смещение электрических зарядов: положительные смещаются по полю, отрицательные – против поля. Эти заряды называются *поляризационными* и распределяются по поверхности диэлектрика с плотностью $\sigma_{пол.}$. Напряженность поля поляризационных зарядов $E_{пол.}$ направлена против напряженности внешнего поля $\vec{E}_0$ и ослабляет его. *Результирующее* поле внутри диэлектрика определяется по принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{пол.} \text{ или } E = E_0 + E_{пол.}. \quad (1)$$

Для количественного описания поляризации однородных и изотропных диэлектриков пользуются векторной величиной $\vec{P}$ – поляризованностью, которая линейно зависит от напряженности поля

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \text{ или } \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E},$$

здесь χ, ε – диэлектрические восприимчивость и проницаемость диэлектрика.

Результирующее поле $\vec{E}$ в диэлектрике зависит его от свойств. Поляризационные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Потому вводят новую величину $\vec{D}$ *– вектор электрического смещения (электрической индукции)*

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad (2)$$

который характеризует электростатическое поле, создаваемое *свободными* зарядами (то есть в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется *при наличии диэлектрика*. При расчете поля в диэлектриках применяют два метода. Первый метод основан на принципе суперпозиции. Сначала рассчитывают поле свободных зарядов $\vec{E}_0$. Затем определяют поле поляризационных зарядов $\vec{E}_{пол.}$. Далее по формуле (1) находят напряженность поля $\vec{E}$ в диэлектрике. Таким же образом можно получить выражение и для потенциала φ электростатического поля в диэлектрике.

По второму методу сначала по теореме Гаусса для поля в диэлектрике находят вектор электрического смещения $\vec{D}$, затем по формуле (2) определяют напряженность $\vec{E}$ и далее (если необходимо) из соотношения $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ рассчитывают потенциал. Для решения задачи применим оба метода.

Метод суперпозиции. Поле в диэлектрике создается свободными зарядами σ, расположенными на обкладках конденсатора и поляризационными зарядами $\sigma_{пол}$, расположенными на двух параллельных обкладкам гранях диэлектрика. Напряженности электростатического поля таких заряженных систем нетрудно вычислить, применив теорему Гаусса (см. пример из Темы 9)

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},\ E_{пол.} = \frac{\sigma_{пол.}}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma_{пол}$ в диэлектрике связана с поляризованностью и напряженностью поля соотношением

$$\sigma_{пол.} = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_n = \varepsilon_0 \chi E_n, \tag{4}$$

здесь – P_n и E_n – проекции векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$ на нормаль к поверхности диэлектрика. В нашем случае $E_n = E$. Подставим в уравнение (1) значения напряженностей из (3)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{пол}}{\varepsilon_0},$$

а значение $\sigma_{пол}$ возьмем из (4), получим

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0 \chi E}{\varepsilon_0}.$$

Решая это уравнение относительно σ, найдем

$$\sigma = E\varepsilon_0(1+\chi). \tag{5}$$

Напряженность электростатического поля в диэлектрике E можно найти из известного соотношения

$$\Delta\varphi = \int_1^2 E_l dl.$$

Для однородного поля ($\vec{E} = \text{const}$), каким является поле плоского конденсатора,

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l}, \tag{6}$$

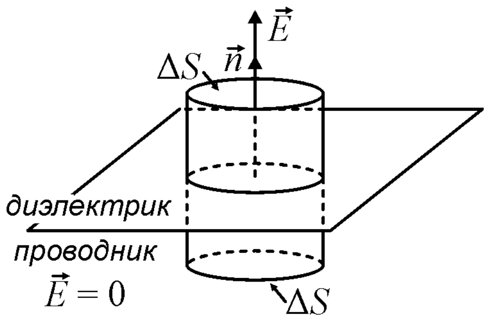
здесь $\Delta\varphi$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора, l – расстояние между ними. Подставим (6) в (4) и (5), получим

$$\sigma_{пол.} = \frac{\Delta\varphi}{l}\varepsilon_0\chi,\ \sigma = \frac{\Delta\varphi}{l}\varepsilon_0(1+\chi).$$

Метод Гаусса. По теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i \tag{7}$$

находим электрическое смещение. Для этого применим её к бесконечно малому цилиндру с основанием ΔS, пересекающему границу проводник – диэлектрик. Ось цилиндра ориентирована вдоль вектора $\vec{E}$ (см. рис.). Поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника $E_{пр}$, а значит и $D_{пр}$, равна нулю. Поэтому поток вектора Φ_D сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра, причем $D = D_n$, так как $\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{n}$. Согласно теореме Гаусса (7), этот поток равен сумме зарядов охватываемых поверхностью, то есть



$$D\Delta S = \sigma\Delta S .$$

Откуда следует, что

$$D = \sigma .$$

С другой стороны, согласно (2)

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E .$$

Сравнивая эти две формулы, получаем значение напряженности поля в диэлектрике

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Отсюда

$$\sigma = E\varepsilon_0\varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{l}\varepsilon_0(1+\chi) .$$

Далее, по формуле (4) находим поверхностную плотность поляризационных зарядов в диэлектрике

$$\sigma_{пол.} = \varepsilon_0\chi E = \varepsilon_0\chi\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \varepsilon_0\chi\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{l}\varepsilon_0(1+\chi) = \frac{\Delta\varphi}{d}\varepsilon_0\chi ,$$

что совпадает с результатами, полученными методом суперпозиции. Проверим наименование единицы измерения поверхностной плотности зарядов

$$наимен.\ \sigma = \frac{В}{м}\frac{Кл^2}{Нм^2} = \frac{В}{м}\frac{Кл^2 м}{В\,Кл\,м^2} = \frac{Кл}{м^2} .$$

Проведем числовые расчеты

$$E = \frac{1,2\cdot 10^3}{5,0\cdot 10^{-3}} = 2,4\cdot 10^5 \text{ В/м},$$

$$\sigma = \frac{1,2\cdot 10^3}{5,0\cdot 10^{-3}} 8,85\cdot 10^{-12}(1+1) = 4,3\cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\sigma_{пол.} = \frac{1,2\cdot 10^3}{5,0\cdot 10^{-3}} 8,85\cdot 10^{-12} 1 = 2,1\cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Ответ: поверхностная плотность свободных зарядов $\sigma = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2, поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma_{пол} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2, напряженность электростатического поля в диэлектрике $E = 2{,}4 \cdot 10^5$ В/м.

ЗАДАЧИ

221. Между обкладками плоского конденсатора приложена разность потенциалов U = 100 В. Расстояние между ними d = 5,0 мм. Определить напряженность электростатического поля E и поверхностную плотность поляризационных зарядов $\sigma_{пол}$ в пластинке из парафина (ε = 2), помещенной на нижнюю обкладку конденсатора. Толщина пластинки d_2 = 3,0 мм.

222. Металлический шар, радиус которого R_1 = 10,0 см, находится в вакууме и заряжен до потенциала φ_1 = 300 В. Определить потенциал φ_2 этого шара, после того как его окружат сферической проводящей оболочкой радиусом R_2 = 20,0 см и на короткое время соединят с ней проводником.

223. Между пластинами плоского конденсатора, расстояние между которыми d = 1,0 см, заряженного до разности потенциалов U = 600 В, находятся два слоя диэлектриков: стекла (ε_1 = 7) толщиной d_1 = 7,0 мм и эбонита (ε_2 = 3) толщиной d_2 = 3,0 мм. Площадь S пластин конденсатора равна 200 см^2. Найти электроемкость C конденсатора, электрическое смещение D, напряженность электростатического поля E и падение потенциала $\Delta\varphi_i$ в каждом слое.

224. В вакууме на расстоянии d = 5,0 см от бесконечной проводящей плоскости находится точечный заряд Q = 25,0 нКл. Используя метод зеркальных изображений, вычислить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке A, удаленной на расстояние r_1 = 2,5 см от плоскости и на расстояние r_2 = 4,3 см от заряда Q.

225. На пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми d = 1,0 см, подана разность потенциалов U = 500 В. Пространство между пластинами заполняется парафином (ε = 2). Найти электрическое смещение D и напряженность электростатического поля E в диэлектрике, а также поверхностную плотность поляризационных зарядов $\sigma_{пол}$. При заполнении конденсатор был отключен от источника напряжения.

226. Точечный заряд Q = 10,0 нКл находится в вакууме на расстоянии a = 1,0 см от большой тонкой металлической пластины. Определить поверхностную плотность зарядов $\sigma_{инд}$, индуцированных на пластине в точке, находящейся на расстоянии r_1 = 4,0 см от заряда. Воспользоваться методом зеркальных изображений.

227. Две концентрические металлические сферы с радиусами R_1 = 3,0 см и R_2 = 5,0 см находятся в вакууме и имеют соответственно заряды Q_1 = –1,0 нКл и Q_2 = 5,0 нКл. Пространство между сферами заполнено маслом (ε = 7). Определить потенциал электростатического поля на расстояниях r_1 = 2,0 см, r_2 = 4,0 см и r_3 = 10,0 см от центра сфер, а также разность потенциалов $\Delta\varphi$ между сферами.

228. Точечный заряд Q = 0,1 мкКл находится в вакууме. В точку A, находящуюся на расстояние r = 10,0 см от заряда Q поместили центр металлической незаряженной сферы R = 5,0 см. Найти потенциал φ сферы.

229. Поверхностная плотность зарядов на одной из обкладок конденсатора σ_1 = 2,5 нКл/м^2. Другую обкладку заземлили. Расстояние между обкладками d = 2,0 мм. Между обкладкам, параллельно им, поместили две плоскопараллельные пластинки: из стекла (ε_1 = 7) толщиной d_1 = 1,0 мм и парафина (ε_2 = 2) толщиной d_2 = 1,0 мм. Определить напряженности электростатического поля E в диэлектриках, а также поверхностные плотности поляризационных зарядов $\sigma_{пол}$ на этих диэлектриках.

230. Точечный заряд q = 100 нКл помещен в центр полого металлического шара, находящегося в вакууме. Внешний радиус шара R_1 = 10,0 см, внутренний – R_2 = 5,0 см. Определить напряженность электростатического поля E в точках, удаленных от заряда на расстояние r_1 = 25,0 см и r_2 = 2,5 см, а также разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между этими точками.

Тема 13. Энергия и плотность энергии электростатического поля

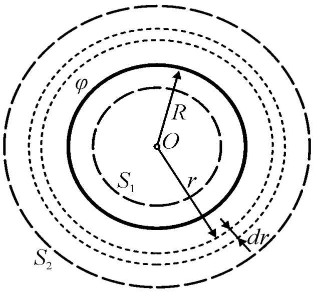
Пример решения задач

Найти энергию W уединённой сферы, радиусом R = 4,0 см заряженной до потенциала φ = 500 В.

Дано
R = 4,0 см
φ = 500 В
E_e – ?

Анализ и решение

Сделаем рисунок. Электростатическое поле, создаваемое заряженной сферой, существует вне её. Это поле является неоднородным, и его энергия распределяется в пространстве неравномерно. Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженной сферы обладает сферической симметрией. Полная энергия поля выражается интегралом $W = \int\limits_V \omega dV$, где dV – элементарный



объем, ω – объемная плотность энергии электростатического поля, определяемая формулой

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 .$$

Таким образом, решение данной задачи сводится к нахождению напряженности поля, созданного заряженной сферой.

Сферическая симметрия позволяет найти напряженность с помощью теоремы Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS \cos(\vec{E} \wedge d\vec{S}) = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i ,$$

где S – площадь вспомогательной поверхности, которой следует придать форму сферы, концентричной рассматриваемой сфере. Для расчета напряженности проведем вспомогательные поверхности S_1 и S_2 (см. рисунок). Так как заряд сферы положительный, то во всех точках каждой из этих поверхностей ($\vec{E} \wedge d\vec{S}$) = 0 и $E = \text{const}$. Тогда

$$\oint_{S_{1,2}} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S_{1,2}} E dS = E 4\pi r^2 ,$$

где r – радиус вспомогательной поверхности.

При $r < R$ сумма зарядов, охваченных поверхностью S_1

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 ,$$

так как внутри сферы зарядов нет. Следовательно,

$$E 4\pi r^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 .$$

Таким образом, внутри сферы напряженность поля E, объемная плотность его энергии ω и сама энергия E_e равны нулю.

При $r > R$ сумма зарядов, охваченных поверхностью S_2

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = Q ,$$

где Q – заряд сферы. Следовательно

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} Q .$$

Откуда

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} .$$

Тогда

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 .$$

Выражение объемной плотности энергии подставим в формулу полной энергии

$$W = \int_V \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 dV .$$

Объем dV следует выбрать в виде тонкого шарового слоя толщины dr (в пределах такого объема E и ω постоянны)

$$dV = 4\pi r^2 dr ,$$

Тогда

$$E_e = \int_V \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr .$$

Учитывая, что в пределах объема переменная r изменяется от R до ∞, получаем

$$E_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} .$$

С помощью формулы для потенциала сферы $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (см. пример из Темы 10), определим её заряд

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi .$$

Тогда выражение для энергии поля будет выглядеть следующим образом

$$W = \frac{(4\pi\varepsilon_0 R\varphi)^2}{8\pi\varepsilon_0} = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 .$$

Проверим наименование единицы измерения энергии

$$\textit{наимен. } W = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 = \frac{Кл^2}{Нм^2} мВ^2 = \frac{Кл^2 В^2}{Нм} = \frac{Дж^2}{Дж} = Дж .$$

Подставим в полученную формулу числовые значения и произведём вычисления

$$W = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2 = 0{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

ЗАДАЧИ

231. Уединенный проводящий бесконечно длинный цилиндр радиусом R = 5,0 см, находящийся в вакууме, заряжен с поверхностной плотностью σ = –100 нКл/м^2. Определить энергию поля W, заключенного в цилиндре радиусом R_1 = 50,0 см, коаксиальным (соосным) с заряженным, с образующей l = 0,5 м.

232. Заряд равномерно распределён по объёму бесконечно длинного цилиндра радиуса R = 1,5 см, с объёмной плотностью ρ = 50 нКл/м^3. Определить энергию W электростатического поля внутри цилиндра, приходящуюся на 1 м этого цилиндра. Цилиндр находится в вакууме.

233. Шар радиуса R_1 = 10,0 см заряжен до потенциала φ_1 = 300 В**,** а шар радиуса R_2 = 15,0 см – до потенциала φ_2 = 600 В. Шары привели в соприкосновение друг с другом. Какая по величине энергия W выделится при этом? Принять, что шары находятся в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε = 6,5.

234. В вакууме радиус равномерно заряженной сферической оболочки увеличивается от R_1 = 5,0 см, до R_2 = 10,0 см. Найти работу A_{12} сил поля, если заряд оболочки Q = 1,15 мкКл.

235. Две концентрические сферы несут равномерно распределенные заряды $Q_1 = -2Q_2$ = 5 мкКл. Радиус первой сферы R_1 = 0,5 м, радиус второй сферы R_2 = 4 м. Пространство между сферами заполнено изотропным диэлектриком с ε = 6,5. Найти энергию электростатического поля W между этими сферами.

236. Заряд равномерно распределен по объему изотропного диэлектрика (ε = 3), имеющего форму шара. Радиус шара R = 20,0 см, объёмная плотность заряда ρ = 15,0 нКл/м^3. Определить энергию W электростатического поля внутри шара. Шар находится в вакууме.

237. Электрическое поле создано в вакууме двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями σ_1 = 5,0 нКл/м^2 и σ_2 = –15,0 нКл/м^2, которые расположены на расстоянии d = 10,0 см друг от друга. Между пластинами находится слой изотропного диэлектрика с ε = 7. Определить: а) объемную плотность энергии электростатического поля ω между пластинами и вне пластин; б) энергию W электростатического поля между пластинами, приходящуюся на 1 м^2 поверхности пластины.

238. Бесконечно длинный эбонитовый (ε = 3) цилиндр радиусом R = 5,0 см равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Чему равен радиус R_1 коаксиального (соосного) цилиндра, разделяющего заряженный цилиндр на две соосные части, энергии W которых равны?

239. Точечный заряд Q = 1,5 мкКл находится в центре шарового слоя из изотропного диэлектрика (ε = 2). Внутренний радиус слоя R_1 = 2,0 м, внешний – R_2 = 3,0 м. Найти энергию электростатического поля W в пространстве, ограниченном концентрическими сферами радиусом R_3 = 0,5 м и R_4 = 5,0 м. Принять, что вне диэлектрика величина ε = 1.

240. Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра равномерно заряжены с линейными плотностями τ_1 = – 0,5 и τ_2 = 750 нКл/м. Радиус первого цилиндра R_1 = 1,0 см, радиус второго – R_2 = 4,0 см. Пространство между цилиндрами заполнено изотропным диэлектриком с ε = 3. Найти энергию электростатического поля W между цилиндрами, приходящуюся на 1 м их длины.

Тема 14. Электрический ток. Закон Ома для однородного и неоднородного участков электрической цепи. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца

Примеры решения задач

1. *Сила тока в проводнике равномерно нарастает от* I_0 = 0 *до* I = 3,0 *А в течении времени* τ = 10,0 *с. Определить заряд* Q*, прошедший в проводнике.*

Дано

$I = I_0 + kt$

$I_0 = 0$

I = 3,0 А

τ = 10,0 с

Q – ?

Анализ и решение

Так как сила тока в проводнике изменяется со временем, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dQ = Idt$ и проинтегрируем:

$$Q = \int_0^\tau Idt .$$

Подставим в эту формулу выражение для тока, как функцию времени

$$Q = \int_0^\tau (I_0 + kt)dt = I_0\int_0^\tau dt + k\int_0^\tau tdt .$$

Полученное выражение проинтегрируем по времени

$$Q = \left.\left(I_0 t + k\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^\tau = \left(I_0\tau + k\frac{\tau^2}{2}\right). \qquad (1)$$

Значение коэффициента пропорциональности k найдем из формулы $I = I_0 + kt$, если заметим, что при t = 10,0 с, I = 3,0 А

$$k = \frac{(I - I_0)}{\tau} = \frac{3,0}{10,0} = 0,3 \text{ А/с}.$$

Проверим наименование единицы измерения заряда в системе СИ

$$\text{наимен. } Q = A\cdot c + \frac{A\cdot c^2}{c} = Кл.$$

Подставив значения физических величин в формулу (1), найдем

$$Q = 0\cdot\tau + 0{,}3\frac{(10{,}0)^2}{2} = 15{,}0 \text{ Кл.}$$

Ответ: заряд, прошедший по проводнику Q = 15,0 Кл.

2. *Сила тока в проводнике сопротивлением* R = 12,0 *Ом равномерно убывает в течение времени* t = 2,0 *с от* I_0 = 5,0 *А, до* I = 0. *Какое количество теплоты* Q_1, *выделяется в этом проводнике за первую секунду, и* Q_2 *– за вторую?*

Дано
$I = I_0 - kt$
R = 12,0 *Ом*
I_0 = 5,0 *А*
I = 0
t = 2,0 *с*
Q_1 – ? Q_2 – ?

Анализ и решение

Прохождение электрического тока по проводнику сопровождается выделением в нем тепла. При постоянном токе количество теплоты, выделившееся в проводнике, определяется по закону Джоуля–Ленца

$$Q = I^2Rt.$$

Если сила тока в проводнике изменяется, то данный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2Rdt, \tag{1}$$

где сила тока I является функцией времени. В данном случае

$$I = I_0 - kt,$$

где k – коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока ΔI к интервалу времени Δt, за который произошло это приращение

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Для нашего случая

$$k = \frac{I_0 - I}{t} = k = \frac{5{,}0 - 0}{2{,}0} = 2{,}5 \ (А/с).$$

Подставим зависимость силы тока от времени в формулу (1)

$$dQ = (I_0 - kt)^2 Rdt.$$

Для определения количества теплоты, выделившегося за данный промежуток времени, проинтегрируем полученное выражение в пределах от t_1 до t_2

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}(I_0 - kt)^2 Rdt = -\frac{R}{k}\int_{t_1}^{t_2}(I_0 - kt)^2 d(I_0 - kt) = -\frac{R}{k}\cdot\left.\frac{(I_0 - kt)^3}{3}\right|_{t_1}^{t_2}.$$

Или

$$Q=-\frac{R}{3k}\left[(I_0-kt_2)^3-(I_0-kt_1)^3\right]. \qquad (2)$$

Проверим наименование единицы измерения теплоты в системе СИ

$$\textit{наимен. } Q=\frac{Ом\cdot c}{A}\cdot A^3=\frac{B\cdot c}{A}\cdot A^2=\frac{B\cdot c\cdot Кл}{c}=B\cdot Кл=Дж.$$

При определении количества теплоты, выделившегося за первую секунду пределы интегрирования в формуле (2) t_1 = 0, t_2 = 1,0 с и, следовательно

$$Q_1=-\frac{12{,}0}{3\cdot 2{,}5}\left[(5{,}0-2{,}5\cdot 1{,}0)^3-(5{,}0-2{,}5\cdot 0)^3\right]=175\ (Дж).$$

За вторую секунду пределы интегрирования в формуле (2) t_1 = 1,0 *с*, t_2 = 2,0 *с* и, следовательно

$$Q_2=-\frac{12{,}0}{3\cdot 2{,}5}\left[(5{,}0-2{,}5\cdot 2{,}0)^3-(5{,}0-2{,}5\cdot 1{,}0)^3\right]=25{,}0\ (Дж).$$

Найдем требуемое отношение количеств теплоты

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{25{,}0}{175}=\frac{1}{7}.$$

Таким образом, за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз меньше, чем за первую секунду.

Ответ: за первую секунду в проводнике выделилось Q_1 = 25,0 *Дж*, за вторую секунду Q_2 = 175 *Дж*. Соответствующее отношение количеств теплоты – 1/7.

ЗАДАЧИ

241. Сила тока в проводнике уменьшается по закону $I(t)=I_0e^{-at}$, где I_0 = 10,0 А, a = 0,1 с$^{-1}$. Определить заряд Q, прошедший в проводнике в интервале времени от t_1 = 2,0 с, до t_2 = 5,0 с.

242. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от I_0 = 0 до некоторого максимального значения $I_{\max}$ в течение времени τ = 15,0 с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты Q = 1,0 кДж. Определить скорость нарастания тока dI/dt в проводнике, если сопротивление его R = 3,0 Ом.

243. На участке цепи сопротивлением R = 3,0 Ом напряжение изменяется по закону $U(t)=U_0/(1+\alpha t)$, где U_0 = 12,0 В, a = 1,5 с$^{-1}$. Определить заряд Q, прошедший по проводнику в интервале времени от t_1 = 0 с, до t_2 = 2,0 с.

244. К источнику тока с э.д.с. ε = 1,5 В присоединили сопротивление R = 0,1 Ом. Амперметр показал силу тока I_1 = 0,5 А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же э.д.с, то сила тока в том же сопротивление стала I_2 = 0,4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

245. Ток в проводнике изменяется со временем t по уравнению $I(t) = (2 + \frac{1}{2}t)^2$, где I измеряется в амперах, t – в секундах. Какой заряд Q проходит через поперечное сечение проводника за время от t_1 = 0,5 с до t_2 = 2,5 с? При каком постоянном токе I_0 через поперечное сечение проводника за то же время проходит такой же заряд?

246. Имеется N одинаковых гальванических элементов с э.д.с. ε и внутренним сопротивлением r каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока I во внешней цепи, имеющей сопротивление R, будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление батареи $R_Б$ при этом значении n?

247. Найти заряд Q, который прошел через поперечное сечение проводника в интервале времени от t_1 = 4,0 с, до t_2 = 6,0 с, если в течении времени τ = 10,0 с сила тока в нем уменьшилась от I_0 = 10,0 А до I_1 = 5,0 А по линейному закону.

248. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 12,5 Ом равномерно возрастает от I_0 = 0 до некоторого максимального значения I_{max} в течение времени τ = 5,0 с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты Q = 7,5 кДж. Найти среднюю силу тока $\langle I \rangle$ в проводнике за этот промежуток времени.

249. К батарее аккумуляторов с э.д.с. ε = 8,0 В и внутренним сопротивлением r = 1,0 Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P, которая при этом выделяется в проводнике.

250. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 100 Ом изменяется по закону $I(t) = I_0(1 - e^{-at})$, где I_0 = 5,0 А, a = 0,15 с$^{-1}$. Определить количество теплоты Q, выделившееся в проводнике в интервале времени от t_1 = 1,0 с, до t_2 = 3,0 с.

Тема 15. Магнитное поле в вакууме. Закон Био–Савара–Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей. Индукция магнитного поля прямолинейного и кругового проводников с током

Пример решения задач

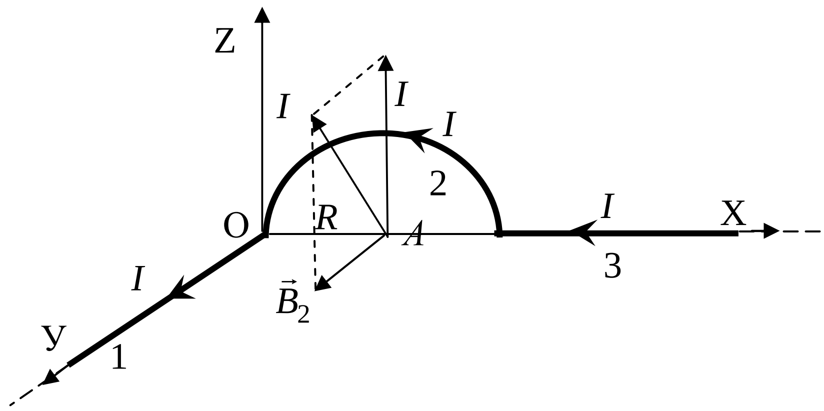
Проводник, по которому течет ток I = 5,0 А, имеет вид, показанный на рисунке. Радиус изогнутой части проводника R = 10,0 см, прямолинейные части проводника очень длинные. Определить индукцию магнитного поля созданного током в центре полукольца.

Дано

I = 5,0 А

R = 10,0 см

B – ?



Анализ и решение

Для вычисления индукции магнитного поля воспользуемся законом Био–Савара–Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей. В силу этого принципа магнитная индукция $\vec{B}$ в любой точке магнитного поля проводника с током равна векторной сумме магнитных индукций $d\vec{B}$, созданных в этой точке всеми его элементами $Id\vec{l}$, то есть

$$\vec{B} = \int\limits_l d\vec{B}, \qquad (1)$$

где l означает, что интегрирование распространяется на всю длину проводника.

Из принципа суперпозиции полей следует также, что если магнитное поле создано несколькими проводниками с током, то вектор $\vec{B}$ в какой-либо точке этого поля равен векторной сумме индукций магнитных полей, созданных в этой точке каждым током в отдельности

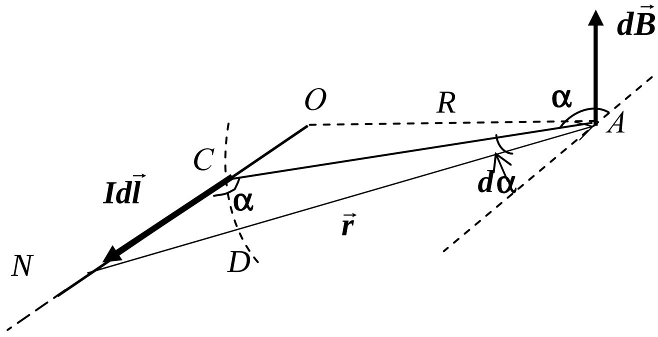
$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i . \qquad (2)$$

Чтобы получить правильный результат, применяя соотношения (1) и (2), необходимо знать направления складываемых векторов $d\vec{B}$ или $\vec{B}_i$.

Разобьем проводник с током на три участка: два прямолинейных отрезка 1 и 3, ограниченных с одного конца, и полукольцо 2. Согласно (2), индукция магнитного поля в центре полукольца будет равна

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 .$$

Рассмотрим участок проводника 1 (см. рис.).



Выделим на нем элемент тока $Id\vec{l}$ и запишем закон Био–Савара–Лапласа в векторной форме

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left[d\vec{l}\ \vec{r}\right], \qquad (3)$$

здесь $d\vec{B}_1$ – индукция магнитного поля, создаваемая элементом провода dl с током I в точке, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$, μ_0 – магнитная постоянная, $d\vec{l}$ – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током, r – модуль радиуса-вектора $\vec{r}$.

Как следует из (3), вектор $d\vec{B}_1$ перпендикулярен к плоскости, содержащей векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Направление $d\vec{B}_1$ можно найти по правилу правого винта: если поступательное движение винта совпадает с направлением тока в элементе, то направление вращения винта укажет направление вектора $d\vec{B}_1$ в данной точке.

Поскольку у нас проводник с током и точка A, в которой определяется $\vec{B}_1$, лежат в одной плоскости, все элементарные векторы $d\vec{B}_1$ направлены вдоль одной прямой. Тогда выражение (1) можно переписать в скалярной форме.

$$B_1 = \int_l dB_1 = \int_l \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\alpha, \qquad (4)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы в нем была одна переменная, например, угол α. Из прямоугольного треугольника OAC можно выразить модуль радиуса-вектора

$$r = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

Для определения dl проведем дугу $СД$ радиуса r с центром в точке A и найдем ее длину по формуле $СД = r\ d\alpha$, где $d\alpha$ – центральный угол, лежащий напротив дуги. Так как участок провода с током $CN = dl$ мал, то дугу можно заменить её хордой. Получившийся треугольник *СДN* можно считать прямоугольным и из него, с учетом (5), следует

$$dl = \frac{СД}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{r\,d\alpha}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha.$$

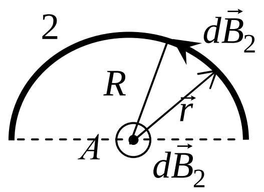
Подставим в формулу (4) полученные значения r и dl

$$B_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\frac{R\,d\alpha}{\sin^2\alpha}\sin\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

Так как участок проводника ограничен с одной стороны, то угол α меняется от $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$ до $\alpha_2 = \pi$. В результате получим

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Рассмотрим участок проводника 3. Как следует из закона Био–Савара в скалярной форме (4), угол, образованный любым элементом тока $I\,d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным от элемента в точку A, равен π. Следовательно, $\sin(d\vec{l} \wedge \vec{r}) = 0$ и $dB_3 = 0$. Отсюда следует, что и $B_3 = 0$, то есть, участок 3 в точке A магнитного поля не создает.



Рассмотрим участок проводника 2. Выделим на нем элемент тока $I\,d\vec{l}$. Вектор $d\vec{B}_2$, в соответствии с законом Био–Савара и правилом правого винта, в точке A будет перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен к нам (см. рисунок). По причине, указанной выше, туда же будет направлен и вектор $\vec{B}_2$. Угол, образованный элементом тока $I\,d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$, равен $\pi/2$. Следовательно, $\sin(d\vec{l} \wedge \vec{r}) = 1$ Тогда модуль $d\vec{B}_2$ будет равен

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl.$$

Согласно принципу суперпозиции, индукция B_2 в точке A определяется интегрированием

$$B_2 = \int_0^{\pi R}\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}l\Big|_0^{\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ взаимно перпендикулярны, следовательно

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{4R}\right)^2}.$$

Итак

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi^2}+1}.$$

Проверим наименование единицы измерения индукции магнитного поля в системе СИ

$$наимен.\ B = \frac{Гн \cdot А}{м \cdot м} = \frac{Вб \cdot А}{А \cdot м \cdot м} = \frac{Тл \cdot м^2}{м^2} = Тл.$$

Подставим числовые значения физических величин и сделаем вычисления.
Ответ: индукция магнитного поля в точке A равна $6{,}0 \cdot 10^{-6}$ Тл.

ЗАДАЧИ

251. Тонкой ленте шириной l = 50,0 см, придали форму цилиндра радиуса R = 20,0 см. По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток силой I = 250 А. Найти напряженность магнитного поля H в точке A, расположенной на оси трубки в площади основания цилиндра.

252. Проводник, имеющий форму квадрата со стороной a = 20,0 см, находится в вакууме. По нему течет ток силой I = 15,5 А. Определить величину индукции магнитного поля B_0 в точке пересечения диагоналей квадрата. Сравнить с величиной индукции магнитного поля B_1 в центре кругового провода с таким же током, если его длина равна длине окружности, вписанной в квадрат.

253. В вакууме по двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам, расположенным на расстоянии d = 20,0 см друг от друга, текут токи силой I_1 = 50,0 А и I_2 = 100 А в противоположных направлениях. Определить индукцию магнитного поля B в точке A, удаленной на расстояние r_1 = 25,0 см от первого и на r_2 = 40,0 см от второго провода.

254. Два бесконечно длинных прямых провода в вакууме скрещены под прямым углом. По проводам текут токи силой I_1 = 60,0 А и I_2 = 80,0 А. Расстояние d между проводами равно 15,0 см. Определить индукцию магнитного поля B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние $r_1 = r_2$ = 7,5 см.

255. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой I_1 = 20,0 А и I_2 = 30,0 А в одном направлении. Расстояние d между проводами равно 10,0 см. Вычислить напряженность магнитного поля H в точке A, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние $r_1 = r_2$ = 8 см.

256. Напряженность магнитного поля H_1 в центре кругового витка радиусом R = 15,0 см равна 30,0 А/м. Определить напряженность H_2 в точке, расположенной на оси витка на расстоянии d = 6,0 см от его центра.

257. Тонкий прямой стержень длиной l = 20,0 см согнут посередине под углом α = 120°. По нему течет ток силой I = 50,0 А. Найти напряженность магнитного поля H в точке, лежащей на биссектрисе угла α и удаленной от его вершины на расстояние a = 5,0 см.

258. По контуру в виде ромба с длиной стороны a = 10,0 см и углом α = 60° идет ток силой I = 10 А. Определить напряженность магнитного поля H в точке пересечения диагоналей ромба.

259. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом r = 53,0 пм. Вычислить силу эквивалентного кругового тока I и напряженность H поля в центре окружности.

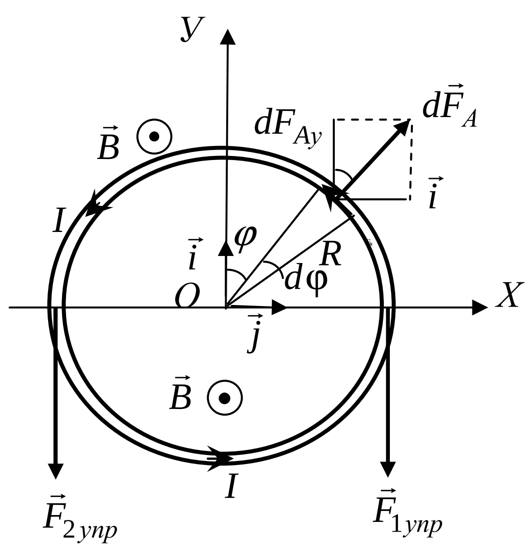
260. По тонкому проволочному кольцу радиусом R течёт ток I. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму равностороннего треугольника. Во сколько раз изменилась индукция магнитного поля B_0 в центре контура?

Тема 16. Магнитное поле в вакууме. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (сила Ампера)

Пример решения задач

Проводящее кольцо поместили в однородное магнитное поле. По кольцу циркулирует ток I = 40,0 А. Если проволока кольца выдерживает на разрыв нагрузку F = 15,0 Н, то при какой индукции магнитного поля B кольцо разорвется? Радиус кольца R = 20,0 см, его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции.

Дано	*Анализ и решение*
I = 40,0 А F = 15,0 Н R = 20,0 см	Сделаем рисунок
B – ?	



На каждый элемент кольца dl, по которому течет ток, со стороны магнитного поля действует сила $d\vec{F}_A$ (сила Ампера). Величина и направление этой силы определяется по закону Ампера

$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l}\vec{B}\right]. \tag{1}$$

По условию во всех точках кольца $(d\vec{l} \wedge \vec{B}) = \pi/2$. Поэтому в скалярной форме уравнение (1) имеет вид

$$dF_A = IdlB\sin(d\vec{l} \wedge \vec{B}) = IdlB. \tag{2}$$

Если ток в кольце течет против хода часовой стрелки, а вектор внешнего магнитного поля направлен на нас (см. рисунок), то силы $d\vec{F}_A$, действующие на все элементы кольца, лежат в одной плоскости (в плоскости рисунка), направлены по радиусам кольца и стремятся растянуть его. В результате, внутри сечения кольца возникает упругая сила, препятствующая растяжению. Чтобы определить эту силу, надо из кольца вырезать элемент и приложить к разрезам силы со стороны остальной части кольца. Так как кольцо находится в равновесии, то и выделенный элемент под действием всех сил, приложенных к нему, так же будет находиться в равновесии.

В качестве элемента удобно взять верхнюю половину кольца. К местам разреза приложим силы $\vec{F}_{1упр}$ и $\vec{F}_{2упр}$, которые действуют со стороны нижней половины кольца. Так как верхняя половина кольца должна находится в равновесии, то

$$\vec{F}_A + \vec{F}_{1упр} + \vec{F}_{2упр} = 0, \tag{3}$$

здесь $\vec{F}_A$ – сила Ампера, действующая на полукольцо с током со стороны внешнего магнитного поля. Если эта сила будет больше сил упругости, то кольцо с током разорвется. Чтобы найти силу Ампера, необходимо сложить (проинтегрировать) силы $d\vec{F}_A$, действующие на все элементы полукольца

$$\vec{F}_A = \int_{(l)} d\vec{F}_A.$$

Здесь индекс l означает, что интегрирование ведется по полукольцу. При этом следует учесть, что все слагаемые являются векторами и имеют различные направления.

Выразим вектор $d\vec{F}_A$ через его проекции dF_{Ax} и dF_{Ay} на оси координат OX и OY (см. рисунок)

$$d\vec{F}_A = \vec{i}dF_{Ax} + \vec{j}dF_{Ay},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Как следует из рисунка,

$$dF_{Ax} = dF_A\sin\varphi = IBdl\sin\varphi,$$
$$dF_{Ay} = dF_A\cos\varphi = IBdl\cos\varphi,$$

Тогда

$$\vec{F}_A = \vec{i}\int\limits_{(l)} IB\cdot dl\sin\varphi + \vec{j}\int\limits_{(l)} IBdl\cos\varphi .$$

При переходе от одного элемента dl к другому угол φ изменяется, то есть подынтегральные выражения содержат две переменные. Необходимо перейти к одной. Из рисунка видно, что $dl = R\,d\varphi$, где R – радиус кольца. Тогда при интегрировании по полукольцу меняться будет только угол φ: от $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

Итак, первый интеграл

$$\vec{i}IBR\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sin\varphi d\varphi = \vec{i}IBR(-\cos\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 0 .$$

Второй интеграл

$$\vec{j}IBR\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\varphi d\varphi = \vec{j}IBR\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \vec{j}\,2IBR .$$

Таким образом,

$$\vec{F}_A = \vec{j}\,2IBR .$$

Из этой формулы видно, что вектор силы Ампера, действующей на полукольцо, совпадает с положительным направлением оси *ОУ*, а его модуль равен

$$F_A = 2IBR .$$

Спроецируем уравнение равновесия (3) на ось *ОУ* и с учетом того, что $F_{1упр} = F_{2упр} = F$, запишем

$$F_A - 2F = 0 .$$

Если $F_A > 2F$,то проволочное кольцо разорвется, когда

$$2IBR > 2F ,$$

а величина магнитной индукции

$$B > \frac{F}{IR} .$$

Подставим числовые значения величин и найдем

$$B > \frac{15{,}0}{40{,}0\cdot 20{,}0\cdot 10^{-2}} > 1{,}87 \quad \text{Тл.}$$

Ответ: кольцо разорвется, если индукция магнитного поля $B > 1{,}87$ Тл.

ЗАДАЧИ

261. В вакууме прямоугольная проволочная рамка со сторонами b и $a = 2b$ расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что ее стороны a параллельны проводу. По рамке и проводу текут токи силой I_1 = 20,0 А и I_2 = 30,0 А, соответственно. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии $d = b$.

262. По тонкому стержню, находящемуся в вакууме и согнутому в виде кольца радиусом R = 20,0 см, течет ток силой I = 10,0 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией B = 0,8 Тл. Найти силу F, растягивающую кольцо.

263. По трем длинным параллельным прямым проводникам, находящимся в вакууме на одинаковом расстоянии a = 10,0 см друг от друга, текут одинаковые токи силой I_1 = I_2 = I_3 = I = 50,0 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной l = 1 м каждого проводника.

264. Из тонкого стержня сделан замкнутый контур в виде контура сектора круга радиусом R = 10,0 см с центральным углом $\alpha = \pi/4$, по которой течет ток силой I = 10,0 А. Найти силу F, которая будет действовать в вакууме на контур в однородном магнитном поле с индукцией B = 1,5 Тл, если плоскость контура перпендикулярна линиям индукции.

265. По четырем параллельным прямым проводникам, расположенным в вакууме по вершинам квадрата со стороной a = 10,0 см и перпендикулярным его плоскости, текут токи I_1 = 15,0 А, I_2 = I_3 = 25,0 А, I_4 = 50,0 А. Токи I_1 и I_2 имеют одинаковое, а токи I_3 и I_4 – противоположное направление. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной l = 1 м каждого проводника.

266. В магнитном поле очень длинного провода с током I_1 = 100 А в вакууме расположен согнутый под прямым углом проводник с током I_2 = 50,0 А (см. рис. 3.1 приложения). Определить магнитную силу F, действующую на этот проводник, если d = l = 0,1 м.

267. По двум бесконечно длинным параллельным проводам в вакууме в одном направлении текут токи $I_1 = 2I_2$. Расстояние d между проводами равно 1 см. Найти силы токов I_1 и I_2 в проводах, если известно, что они взаимодействуют с силой F = 1,0 мН на каждый метр своей длины.

268. В магнитное поле, созданное в вакууме очень длинным проводником с током I_1 = 50,0 А, помещают второй проводник длиной l = 25,0 см с током I_2 = 100 А, так, как показано на рис. 3.2 приложения. Найти силу F, действующую на второй проводник, если $d = 4l$.

269. Тонкий стержень, согнутый в виде дуги окружности радиусом R = 10,0 см с центральным углом $\alpha = \pi/3$, находится в вакууме в однородном магнитном поле с индукцией B = 1,0 Тл. По проводу течет ток силой I = 10,0 А. Найти силу F, действующую на стержень, если плоскость, в которой лежит дуга окружности, перпендикулярна линиям индукции, а проводящие провода находятся вне поля.

270. В вакууме по двум длинным тонким параллельным проводникам в одном направлении текут постоянные токи I_1 = 10,0 А и I_2 = 25,0 А. Оба проводника лежат в одной плоскости, расстояние между ними b = 15,0 см. Найти силу взаимодействия между проводниками в расчете на единицу их длины.

Тема 17. Магнитное поле в вакууме. Магнитный момент замкнутого контура с током. Механический момент, действующий на замкнутый контур с током

Пример решения задач

Рамка шириной a = 40,0 см и длиной b = 1,0 м расположена в одной плоскости с прямым, бесконечно длинным проводом с током. Расстояние от провода до середины рамки l = 1,0 м. Вычислить относительную погрешность γ при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если считать поле в пределах рамки однородным, а магнитную индукцию B равной её значению в центре рамки.

Дано
a = 40,0 см
b = 1,0 м
l = 1,0 м
γ – ?

Анализ и решение

Относительная погрешность γ служит для оценки качества измерений. В нашем случае она будет определяться соотношением

$$\gamma = \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{\Phi_1} 100\% . \qquad (1)$$

В этой формуле Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий рамку при условии, что внешнее магнитное поле, создаваемое бесконечно длинным проводом с током I, неоднородное. Индукция такого поля в области, ограниченной шириной рамки, является функцией расстояния r от провода с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \qquad (2)$$

Магнитный поток Φ_2 рассчитывается при условии, что внешнее магнитное поле в пределах рамки однородное не зависит от расстояния до провода с током, его индукция постоянна и равна её значению в центре рамки

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} . \qquad (3)$$

В формулах (2) и (3) μ_0 – магнитная постоянная.

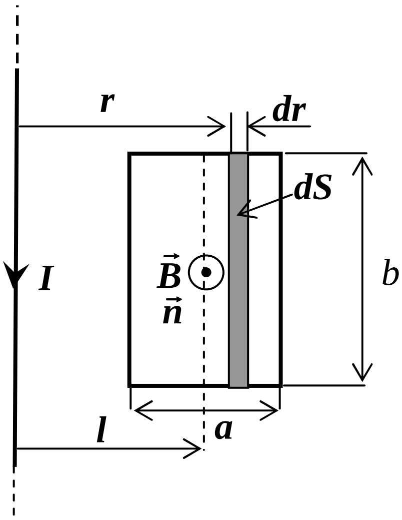
Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) Φ через площадку dS называется скалярная величина, равная

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}) = B_n dS, \tag{4}$$

где $B_n = B\cos(\vec{B}\wedge d\vec{S})$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к площадке dS, $d\vec{S} = dS\,\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен элементарной площадке dS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к ней. Магнитный поток может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos(\vec{B}\wedge d\vec{S})$.

Направление вектора $\vec{B}$ можно найти по правилу правого винта: *если поступательное движение винта совпадает с направлением тока в проводе, то направление вращения винта (по ходу или против хода часовой стрелки) укажет направление вектора $\vec{B}$ в данной точке.* Направление нормали $\vec{n}$ выбирается произвольно.

Рассчитаем магнитный поток Φ_1. По правилу правого винта определяем, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки и направлен к нам (см. рисунок). Нормаль $\vec{n}$ к плоскости рамки направляем туда же. Тогда $(\vec{B}\wedge\vec{n}) = \pi/2$. Так как магнитное поле прямолинейного проводника с током неоднородно, поверхность, ограниченную рамкой, разобьем на элементарные полоски, параллельные проводу с током. Длина полоски b, ширина – dr. Так как ширина полоски мала, индукция магнитного поля на ней будет постоянной. Магнитный поток сквозь такую полоску, расположенную от провода с током на расстоянии r, рассчитывается по формуле (4). Для нашего случая она принимает вид



$$d\Phi_1 = B\ dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} b\ dr.$$

Здесь модуль вектора $\vec{B}$ дается формулой (2), $\cos(\vec{B}\wedge\vec{n}) = 1$, $dS = bdr$.

Магнитный поток сквозь всю рамку

$$\Phi_1 = \int_S d\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_{l-\frac{a}{2}}^{l+\frac{a}{2}} \frac{dr}{r},$$

где $(l - \frac{a}{2})$ и $(l + \frac{a}{2})$ – пределы интегрирования по переменной r (см. рисунок выше).

После интегрирования и подстановки пределов, получим

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int\limits_{l-\frac{a}{2}}^{l+\frac{a}{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \, \ln \frac{2l+a}{2l-a}.$$

Величину магнитного потока Φ_2 рассчитаем следующим образом. По условию задачи внешнее магнитное поле в пределах рамки однородное и его индукция постоянная. Тогда

$$\Phi_2 = \int\limits_S d\Phi_2 = \int\limits_S B\, dS = B \int\limits_S dS = BS .$$

Модуль вектора индукции $\vec{B}$ дается формулой (3), а площадь рамки $S = ab$. Итак

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} ab = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \frac{a}{l},$$

здесь l – расстояние от провода с током до центра рамки.

Полученные значения магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 подставляем в формулу (1), сокращаем на общий множитель $\frac{\mu_0 I}{2\pi} b$ и определяем относительную погрешность

$$\gamma = \left(1 - \frac{a}{l \cdot \ln \frac{2l+a}{2l-a}} \right) 100\% .$$

Подставим в формулу числовые значения сторон рамки a, b и расстояния l, получим

$$\gamma = \left(1 - \frac{0,4}{1,0 \cdot \ln 1,5} \right) 100\,\% = \left(1 - \frac{0,4}{0,41} \right) 100\% = 1,24\% .$$

Ответ: относительная погрешность равна 1,24 %.

ЗАДАЧИ

271. Рамка гальванометра, содержащая N = 200 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити в однородном магнитном поле с индукцией B = 5,0 мТл. Площадь рамки S = 1,0 см^2, нормаль к плоскости рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции. Когда через гальванометр был пропущен ток силой I = 2,0 мкА, рамка повернулась на угол α = 30°. Найти постоянную C кручения нити.

272. Тонкостенная однородная металлическая сфера радиусом R = 10,0 см, несущая равномерно распределенный по поверхности заряд Q = 3 мКл, находится на гироскопической опоре. Сферу привели во вращательное движение с постоянной угловой скоростью ω = 10 рад/с относительно оси, проходящей через центр сферы, так что ось вращения перпендикулярна линиям индукции. Найти: 1) магнитный момент p_T кругового тока, создаваемый вращением сферы; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m / L), если масса сферы m = 100 г.

273. По тонкому стержню длиной l = 20,0 см равномерно распределен заряд Q = 240 нКл. Стержень приведен во вращение с частотой n = 10 с$^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить: 1) магнитный момент p_T кругового тока, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m / L), если стержень имеет массу m = 12 г.

274. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом r = 53,0 пм. Вычислить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока и механический момент M, действующий на круговой ток, если атом помещен в магнитное поле, линии, индукции которого параллельны плоскости орбиты электрона. Магнитная индукция поля B = 0,1 Тл.

275. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найти отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. Заряд электрона и его массу считать известными. Указать направления векторов p_m и L.

276. Тонкое кольцо радиусом R = 10,0 см несет заряд Q = 10,0 нКл. Кольцо равномерно вращается с частотой n = 10 с$^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Найти: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m / L), если масса кольца m = 10,0 г.

277. Короткая катушка с площадью поперечного сечения S = 150 см^2 содержит N = 200 витков провода, по которому течет ток силой I = 4,0 А находится в вакууме. В окрестности катушки создали однородное магнитное поле напряженностью H = 8,0 кА/м. Определить магнитный момент p_m катушки, а также вращающий момент M, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол α = 60°с линиями индукции.

278. Рамка гальванометра, содержащая N = 200 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити. Площадь S рамки равна 1,0 см^2. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции (B = 5,0 мТл). Когда через гальванометр был пропущен ток силой

I = 2,0 мкА, то рамка повернулась на угол α = 30°. Найти постоянную C кручения нити, т.е. отношение α/I.

279. Проволочный виток радиусом R = 5,0 см находится в однородном магнитном поле напряженностью H = 2,0 кА/м. Плоскость витка образует угол α = 30° с направлением поля. По витку течет ток силой I = 4,0 А. Найти механический момент M, действующий на виток.

280. Виток диаметром d = 20,0 см может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с одним из диаметров витка. Виток установили в плоскости магнитного меридиана и пустили по нему ток силой I = 10,0 А. Найти механический момент M, который нужно приложить к витку, чтобы удержать его в начальном положении. Горизонтальную составляющую $B_Г$ магнитной индукции поля Земли принять равной 20,0 мкТл.

Тема 18. Магнитное поле в вакууме. Работа перемещения проводника и контура с током во внешнем магнитном поле

Пример решения задач

Виток радиусом R = 2,0 *см, по которому течет ток силой* I = 10,0 *А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией* B = 1,5 *Тл. Определить работу внешних сил при повороте витка на угол* φ = 180° *вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. При повороте витка сила тока в нем поддерживается постоянной.*

Дано

R = 2,0 см
I = 10,0 А
B = 1,5 Тл
φ = 90°

A = ?

Анализ и решение

На виток с током, помещенный во внешнее магнитное поле действует пара сил (силы Ампера), поворачивая его определенным образом. Вращающий момент этих сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств витка и определяется выражением

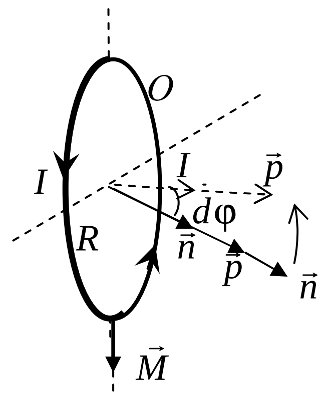
$$\vec{M} = \left[\vec{p}_м \vec{B}\right],$$

где $\vec{p}_м$ – вектор магнитного момента витка с током, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции. Для плоского витка с током I

$$\vec{p}_м = IS\vec{n},$$

где S – площадь поверхности витка, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности витка. Направление $\vec{p}_м$ совпадает с направлением положительной нормали. Модуль вращающего момента витка находится по формуле

$$M = p_м B \sin\varphi, \qquad (1)$$



где φ = ($\vec{p}_м \wedge \vec{B}$). По условию задачи, в начальном положении виток свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил равен нулю, а значит и угол $\varphi = 0$, то есть векторы $\vec{p}_м$ и $\vec{B}$ совпадают по направлению. Если внешние силы выведут виток из положения равновесия, то возникший механический момент сил, определяемый формулой (1), будет стремиться возвратить виток в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами.

Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота φ), то для расчета работы применим формулу работы для вычисления поворота витка на элементарный угол $d\varphi$

$$dA = Md\varphi.$$

Подставив сюда выражение момента из формулы (1) и учтя, что $p_м = IS$, получим

$$dA = IB\,S\sin\varphi\,d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу поворота витка на конечный угол φ:

$$A = IBS\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi = IBS(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = 2IBS = 2IB\pi R^2. \qquad (2)$$

Проверим наименование единицы измерения работы в системе СИ

$$наимен.\ A = А\cdot Тл\cdot м^2 = А\frac{Н}{А\cdot м}м^2 = Н\cdot м = Дж.$$

Подставим в формулу числовые значения величин и произведём вычисления

$$A = 2\cdot 10{,}0\cdot 1{,}5\cdot 3{,}14\cdot(2{,}0\cdot 10^{-2})^2 = 3{,}75\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Задачу можно решить и другим способом. Работа внешних сил по перемещению витка с током в магнитном поле равна произведению силы тока I на изменение магнитного потока $\Delta\Phi$, пронизывающего виток:

$$A = -I\Delta\Phi = I\left(\Phi_1 - \Phi_2\right), \qquad (3)$$

здесь Φ_1 и Φ_2 – конечное и начальное значение магнитного потока, пронизывающего виток. По определению магнитный поток сквозь поверхность контура

$$\Phi = \int_S BdS\cos\alpha.$$

Для однородного поля и плоского витка эта формула принимает вид $\Phi = BS\cos\alpha$, где B – магнитная индукция поля, S – площадь ограниченная витком, α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$, проведённой к плоскости витка. Для данной задачи в первом положении витка $\alpha = 0$, тогда $\Phi_1 = BS\cos 0 = BS$. Во втором положении витка $\alpha = 180°$ и $\Phi_2 = -BS$. Следовательно, как следует из (3),

$$A = I\left(BS - (-BS)\right) = 2IBS = 2IB\pi R^2,$$

что совпадает с полученным ранее выражением (2).

Ответ: для поворота витка с током нужно совершить работу A = 3,75·10^{-2} Дж.

ЗАДАЧИ

281. Тонкостенная однородная металлическая сфера радиусом R = 15,0 см, несущая равномерно распределенный по поверхности заряд Q = 3,0 мкКл, находится на гироскопической опоре в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Сферу привели во вращательное движение с постоянной угловой скоростью ω = 5,0 рад/с относительно оси, проходящей через центр сферы, так что ось вращения перпендикулярна линиям индукции. Найти: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемый вращением сферы; 2) работу сил поля A при повороте сферы в устойчивое положение.

282. Плоский проводящий контур с током S = 10,0 А свободно установился в однородном магнитном поле (B = 1,0 Тл). Площадь контура S = 200 см^2. Под действием внешних сил контур повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол α = 60°. Определить совершенную работу внешних сил A.

283. Прямой бесконечно длинный провод с током I_1 = 8,0 А и прямоугольная рамка, по которой протекает ток I_2 = 4,0 А, находятся в вакууме и расположены в одной плоскости. Ближайшая сторона рамки длиной l = 25,0 см, параллельна прямому току и отстоит от него на расстояние $r_1 = b$, где b – длина другой стороны рамки (см. рис. 3.3 приложения). Определить работу A сил поля по перемещению рамки параллельно самой себе до расстояния от ее ближайшей к току I_1 стороны $r_2 = 3b$.

284. Виток, по которому течет ток силой I = 20 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,016 Тл. Диаметр d витка равен 10 см. Определить работу внешних сил A, которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha_1 = \pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром. Определить работу внешних сил, если угол $\alpha_2 = 2\pi$.

285. По кольцу из тонкого гибкого провода радиусом R = 5,0 см, течёт ток силой I = 100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле индукцией B_0 = 0,5 Тл, совпадающей по направлению с вектором индукции B_1 собственного магнитного поля кольца. Определить работу внешних сил A, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму правильного треугольника, лежащего в той же плоскости, что и кольцо.

286. В вакууме в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому протекает ток I_1 = 25,0 А, расположена проволочная прямоугольная рамка со сторонами b = 5,0 см и l = 30,0 см (см. рис. 3.3 приложения). Длинные стороны рамки параллельны прямому току, причем ближайшая находится от него на расстоянии r = 15,0 см и в ней течет ток I_2 = 2,0 А в том же направлении. Найти работу A, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку на угол $\alpha = \pi$ вокруг оси, проходящей через ближнюю от прямого провода длинную сторону рамки.

287. Однородный диск радиуса R = 5 см несёт равномерно распределенный по поверхности заряд Q = 1 мкКл и находится на гироскопической опоре в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл. Линии индукции параллельны плоскости диска. Диск привели во вращательное движение с угловой скоростью ω = 10 рад/с относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Ось вращения перпендикулярна линиям индукции. Найти: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемый вращением диска; 2) работу сил поля A при повороте диска в устойчивое положение, когда $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$.

288. По контуру, лежащему на столе и сделанного из мягкой проволоки в форме прямоугольника со сторонами a = 10,0 см и b = 20,0 см, течет ток силой I = 10,0 А. Включают однородное магнитное поле индукцией B = 0,2 Тл. Плоскость контура и вектор индукции магнитного поля образуют угол α = 55 . Под действием сил Ампера контур деформируется в окружность, оставаясь на столе. Определить работу A сил Ампера.

289. Тонкий стержень длиной l = 10,0 см, равномерно заряженный с линейной плотностью τ = 1,0 мкКл/м, находится на гироскопической опоре в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,25 Тл. Стержень привели во вращательное движение с частотой n = 50 $с^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс. Ось вращения составляет угол $\alpha = \pi/3$ с вектором $\vec{B}$. Найти работу сил поля A при повороте стержня в устойчивое положение.

290. Тонкое кольцо радиуса R = 7,5 см несет равномерно распределенный заряд Q = 10,0 нКл и находится на гироскопической опоре в однородном магнитном поле индукцией B = 1,0 Тл. Кольцо привели во вращательное движение с угловой скоростью ω = 100 рад/с относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. так что $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{B}$. $\vec{B}$. Найти работу A внешних сил, при повороте оси вращения кольца на угол $\alpha = \pi/3$ относительно первоначального направления.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

Студент-заочник должен решить девять задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра, (табл. 3).

Таблица 3

Вариант	Номера задач								
0	310	320	330	340	350	360	370	380	390
1	301	311	321	331	341	351	361	371	381
2	302	312	322	332	342	352	362	372	382
3	303	313	323	333	343	353	363	373	383
4	304	314	324	334	344	354	364	374	384
5	305	315	325	335	345	355	365	375	385
6	306	316	326	336	346	356	366	376	386
7	307	317	327	337	347	357	367	377	387
8	308	318	328	338	348	358	368	378	388
9	309	319	329	339	349	359	369	379	389

Тема 19. Явление и закон электромагнитной индукции

Пример решения задач

Прямой бесконечный проводник с током и прямоугольная рамка расположены в одной плоскости. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha t^3$, *где* α = 2,0 *А/с*^{3}. *Ближняя сторона рамки* l = 1,0 *м параллельна проводнику и отстоит от него на расстоянии* r_0 = 2,0 *см. Длина другой стороны рамки* b = 20,0 *см. Определить силу тока в рамке в момент времени* t = 10,0 *с, если её омическое сопротивление* R = 7,0 *Ом.*

Дано

l = 1,0 м, b = 20,0 см,
r_0 = 2,0 см, $I = \alpha t^3$,
α = 2,0 А/с^3, t = 10,0 с,
R = 7,0 Ом

I – ?

Анализ и решение

Явление, заключающееся в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, пронизывающего этот контур, возникает э.д.с. индукции, называется *электромагнитной индукцией*. В нашем случае, вследствие изменения силы тока I в проводнике, магнитный поток Φ через рамку изменяется и в ней возникает индукционный ток I_i. Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы (э.д.с.) ε_i. Согласно закону Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

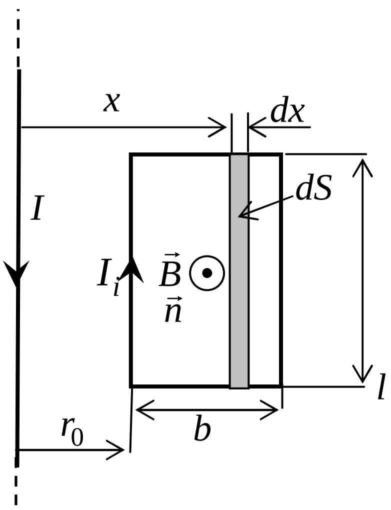
то есть ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Знак минус выражает *правило Ленца*: индукционный ток I_i в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток. Силу индукционного тока можно найти из закона Ома

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}. \qquad (2)$$

Рамка находится в неоднородном магнитном поле, поэтому для расчета магнитного потока разделим площадь рамки на столь узкие полоски, чтобы в пределах каждой из них магнитное поле можно было считать однородным (см. рисунок). Элементарный магнитный поток сквозь узкую полоску

$$d\Phi = B\, dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S}),$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен элементарной площадке dS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к ней.



Индукция B магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводом с током там, где находится элемент площади рамки, рассчитывается по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

где x – расстояние от элемента площади $dS = l dx$ до провода с током, $(\vec{B} \wedge \vec{n})$ = 0°, $I = \alpha t^3$. Тогда

$$d\Phi = \frac{\mu_0 \alpha\, l dx}{2\pi x} t^3.$$

Интегрируя это уравнение по x в пределах от r_0 до $(r_0 + b)$, находим

$$\int_{r_0}^{r_0+b} d\Phi = \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{\mu_0 I\ l dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0 \alpha l}{2\pi} t^3 \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 \alpha l}{2\pi} t^3 \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 \alpha l}{2\pi} t^3 \ln\frac{r_0 + b}{r_0}.$$

По закону Фарадея (1) определяем э.д.с. индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 \alpha l}{2\pi} t^3 \ln\frac{r_0+b}{r_0}\right) = -\frac{3\mu_0 \alpha l}{2\pi} \ln\frac{r_0+b}{r_0} t^2,$$

а по закону Ома для участка цепи (2) силу индукционного тока

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{3\mu_0 \alpha l}{2\pi R} \ln\frac{r_0+b}{r_0} t^2.$$

Проверим наименование единицы измерения силы тока в системе СИ

$$\text{наимен. } I_i = \frac{В \cdot с \cdot А \cdot м \cdot с^2}{А \cdot м \cdot с^3 \cdot Ом} = \frac{В \cdot А}{В} = А.$$

Подставим числовые значения величин и проведем вычисления

$$I_i = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}0}{2\pi \cdot 7{,}0} \ln\frac{2{,}0+20{,}0}{2{,}0} = 4{,}11 \cdot 10^{-7} \text{ А}.$$

ЗАДАЧИ

301. В однородном магнитном поле индукцией B = 1 Тл находится прямой проводник длиной l = 20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление всей цепи R = 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью υ = 2,5 м/с.

302. Рамка из провода, сопротивлением R = 0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией B = 0,5 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь S рамки равна 100 см^2. Найти количество электричества Q протекающее через рамку за время ее поворота: 1) от угла α_1 = 0 до угла α_2 = 30°; 2) от угла α_2 до угла α_3 = 60°; 3) от угла α_3 до угла α_4 = 90°;

303. К источнику тока с э.д.с. ε = 0,5 В и ничтожно малым внутренним сопротивлением присоединены два металлических стержня, расположенные горизонтально и параллельно друг другу. Расстояние l между стержнями равно 20,0 см. Стержни находятся в однородном магнитном поле, направленном вертикально, индукцией B = 1,5 Тл. По стержням под действием сил поля скользит со скоростью υ = 1 м/с прямолинейный проводник сопротивлением R = 0,02 Ом. Сопротивление стержней пренебрежимо мало. Определить: 1) э.д.с. индукции ε_i; 2) силу F, действующую на провод со стороны магнитного поля; 3) силу тока I в цепи; 4) мощность P_1 расходуемую на движение провода; 5) мощность P_2, расходуемую на нагревание проводника; 6) мощность P_3, отдаваемую в цепь источником тока.

304. Тонкий медный провод массой m = 1 г согнут в виде квадрата, а концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле индукцией B = 0,1 Тл так, что плоскость его перпендикулярна линиям индукции поля. Определить количество электричества Q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за его противоположные вершины, вытянуть в линию.

305. Рамка площадью S = 200 см^2 равномерно вращается с частотой n = 10 с$^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля (B = 0,2 Тл). Каково среднее значение э.д.с. индукции ε_i за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку изменится от нуля до максимального значения?

306. Короткая катушка площадью S = 100 см^2, содержащая N = 1000 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией B = 0,4 Тл. Угловая скорость катушки ω относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля, равна 5,0 рад/с. Определить мгновенное значение э.д.с. индукции ε_i для моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол α = 60° с линиями индукции поля.

307. По длинному прямому проводу, расположенному в вакууме, течет ток. Вблизи провода расположена квадратная рамка стороной a = 10,0 см из тонкого провода сопротивлением R = 0,02 Ом. Провод лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны a_1 = 10,0 см, a_2 = 20,0 см. Найти силу тока I в проводе, если при его включении через рамку протекло количество электричества Q = 693 нКл.

308. В однородном магнитном поле индукцией B = 0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной l = 10,0 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня, частота вращения стержня n = 16 с$^{-1}$. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$, возникающую на концах стержня.

309. Рамка площадью S = 100 см^2 содержит N = 2000 витков провода сопротивлением R_1 = 12,0 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление R_2 = 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле (B = 0,5 Тл) с частотой n = 8,0 с$^{-1}$. Определить максимальную мощность $P_{\max}$ переменного тока в цепи.

310. Прямой проводник длиной l = 10,0 см помещен в однородном магнитном поле индукцией B = 1,0 Тл. Концы его замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи R = 0,4 Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать провод перпендикулярно линиям индукции со скоростью υ = 20,0 м/с?

Тема 20. Явления и законы самоиндукции и взаимной индукции

Пример решения задач

Катушка индуктивностью L = 1,50 *Гн и сопротивлением* R_1 = 15,0 *Ом и лампа сопротивлением* R_2 = 150 *Ом соединены параллельно и подключены через ключ к источнику тока э.д.с. которого* ε = 60,0 *В. Определить напряжение на зажимах катушки через* t = 0,01 *с после размыкания цепи.*

Дано

L = 1,50 Гн
R_1 = 15,0 Ом
R_2 = 150 Ом
t = 0,01 с
ε = 60,0 В

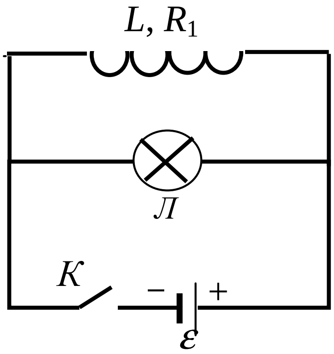
U_L – ?

Анализ и решение

При установившемся режиме сила тока I_0 в электрической цепи равна сумме сил токов, текущих через катушку индуктивности I_1 и лампу I_2, причем по закону Ома

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}. \qquad (1)$$

При размыкании ключа *К* ток I_1 начнет убывать и, согласно закону Фарадея, в катушке возникает э.д.с. *самоиндукции*



$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

которая препятствует исчезновению тока. Э.д.с. самоиндукции возникает только в катушке, так как лампа и подводящие провода считаются безиндуктивными. После отключения источника замкнутую цепь составят катушка индуктивности L и лампа *Л*, соединенные теперь последовательно. В момент времени t = 0, соответствующий моменту размыкания, сила тока в этой цепи одинакова и равна установившейся силе тока I_1 в катушке (ток в лампе исчезает мгновенно). Напряжение на концах катушки индуктивности после отключения источника в любой момент времени

$$U_L = IR_2, \qquad (2)$$

где I – текущее значение силы тока, зависящее от времени.

Вид зависимости силы тока I от времени t может быть найден из закона Ома для замкнутой цепи.

$$I = \frac{\varepsilon_{si}}{(R_1 + R_2)},$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{si} = I(R_1 + R_2),$$

или

$$-L\frac{dI}{dt}=I\left(R_1+R_2\right).$$

После разделения переменных это уравнение примет вид

$$\frac{dI}{I}=-\frac{R_1+R_2}{L}dt.$$

При $t=0$ ток в катушке $I=I_1$ (установившаяся сила тока в катушке индуктивности). Интегрируем последнее уравнение в пределах от $t=0$ до некоторого t, когда сила тока принимает значение I, получаем

$$\int_{I_1}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{R_1+R_2}{L}\int_0^t dt,\quad \ln I\Big|_{I_1}^{I}=-\frac{R_1+R_2}{L}t\Big|_0^t.$$

Подставив пределы интегрирования, получим

$$\ln\frac{I}{I_o}=-\frac{R_1+R_2}{L}t\;\Rightarrow I=I_1\exp(-\frac{R_1+R_2}{L}t).$$

Учитывая формулы (1) и (2), находим

$$U_L=\varepsilon\frac{R_2}{R_1}\exp(-\frac{R_1+R_2}{L}t).$$

Подставим числовые значения заданных величин и произведём вычисления

$$U_L=60\frac{150}{15,0}\exp(-\frac{15,0+150}{1,50}0,01)=200\quad \text{В}.$$

Как видно из полученного результата, напряжение на зажимах катушки на очень короткое время значительно превышает э.д.с. источника. Значит, в момент размыкании цепи лампа должна ярко вспыхнуть, что и наблюдается в действительности.

ЗАДАЧИ

311. Индуктивность катушки L = 4,0 мГн, её сопротивление R_1 = 0,5 Ом. Катушка соединена параллельно с сопротивлением R_2 = 2,5 Ом и подключена к источнику постоянного тока. При этом в сопротивлении R_2 течёт постоянный ток силой I = 1,0 А. Определить количество электричества Q, которое будет индуцировано в катушке при отключении источника тока.

312. Индуктивность L катушки равна 2,0 мГн. Ток частотой ν = 50 Гц, протекающий по катушке, изменяется по гармоническому закону: $I=I_0\cos 2\pi\nu t$, где амплитудное значение силы тока I_0 = 10,0 А. Определить среднюю величину э.д.с. самоиндукции $\langle\varepsilon_{si}\rangle$, которая возникает за интервал времени Δt, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения.

313. В цепи шел ток силой I_0 = 50,0 А. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Вывести формулу и определить силу тока I в этой цепи через τ = 0,01 с после отключения ее от источника тока. Сопротивление R цепи равно 20,0 Ом, ее индуктивность L = 0,1 Гн.

314. Электрическая цепь содержит источник тока с ε = 12,0 В, сопротивление R = 15,0 Ом и катушку индуктивностью L = 0,1 Гн. Вывести формулу и рассчитать ток I в цепи через τ = 1,0 мс после отключения источника тока, не разрывая электрическую цепь.

315. Определить индуктивность L двухпроводной линии на участке длиной l = 1 км (μ = 1). Радиус R провода равен 1,0 мм, расстояние d между осевыми линиями равно 0,4 м. Учесть только внутренний магнитный поток, т.е. поток, пронизывающий контур, ограниченный проводами.

316. Электрическая цепь состоит из соленоида индуктивностью L = 0,33 Гн и источника тока. Источник отключили, не разрывая цепи. Через время τ = 0,1 с сила тока в соленоиде уменьшилась в 500 раз от своего первоначального значения. Определить сопротивление R соленоида.

317. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет N_1 = 251 витков. Средний диаметр $\langle D \rangle$ тороида равен 8,0 см, диаметр d витков равен 2,0 см. На тороид намотана вторичная обмотка, имеющая N_2 = 100 витков. При замыкании первичной обмотки в ней в течение времени τ = 1,0 мс устанавливается ток силой I_1 = 3,0 А. Найти среднюю величину э.д.с. индукции $\langle \varepsilon_{i2} \rangle$, возникающей во вторичной обмотке.

318. Источник тока замкнули на катушку индуктивности с сопротивлением R = 5,0 Ом и индуктивностью L = 0,1 Гн. Вывести формулу для расчета силы тока I в такой электрической цепи и найти время τ, по истечении которого сила тока достигает 75 % своего максимального значения.

319. Соленоид сопротивлением R = 3,0 Ом и индуктивностью L = = 0,15 Гн соединили с источником тока с внутренним сопротивлением r = 0,5 Ом, и э.д.с. ε = 12,0 В. Какой электрический заряд Q пройдет по соленоиду, если источник тока отключить от цепи, не разрывая ее? Вывести формулу для силы тока I, возникающего в электрической цепи.

320. К источнику тока с внутренним сопротивлением r = 2,0 Ом подключают катушку индуктивностью L = 0,5 Гн и сопротивлением R = 8,0 Ом. Через время τ = 1 с ток в катушке, нарастая, достигает значения, отличающегося от максимального на 1 %. Найти величину сопротивления R.

Тема 21. Энергия и плотность энергии магнитного поля. Электромагнитные колебания

Пример решения задач

По цилиндрическому медному проводнику течет электрический ток I = 100 А. Считая проводник очень длинным, найти энергию магнитного поля $E_м$ сосредоточенного внутри участка проводника длиной l = 1,0 м.

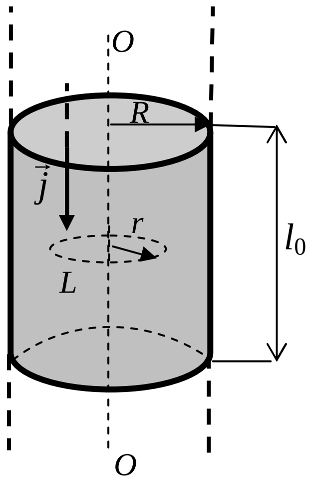
Дано
I = 100 А
l = 1,0 м
$E_м$ – ?

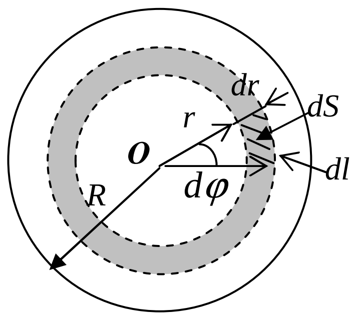
Анализ и решение

Вследствие большой длины проводника магнитным полем подводящих проводов можно пренебречь и считать, что внутри провода магнитное поле обладает осевой симметрией. Это значит, что линии индукции имеют форму окружностей с центром на оси проводника и плоскость любой из них перпендикулярна оси. Симметричность поля позволяет применить для расчета $\vec{B}$ теорему о циркуляции индукции магнитного поля

$$\oint_L \vec{B}d\vec{L} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i . \qquad (1)$$

Здесь учтено, что магнитная проницаемость μ меди постоянна и практически равна единице.





Энергия магнитного поля в объёме $V = \pi R^2 l_0$, где l_0 – произвольная длина участка проводника,

$$E_м = \int_V \omega_м dV , \qquad (2)$$

где $\omega_м = \dfrac{dW}{dV} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ – плотность энергии магнитного поля.

Выберем контур интегрирования L в форме окружности, совпадающей с одной из линий индукции, радиус которой $r < R$. Если направление обхода контура совпадает с направлением линий индукции, то $(\vec{B} \wedge d\vec{l}) = 0$ и $B = \mathrm{const}$ во всех точках контура интегрирования. Тогда

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl = B2\pi r. \tag{3}$$

Если плотность тока j постоянна по поперечному сечению проводника, то сумма токов, сцепленных с контуром интегрирования,

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = jS_L = \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2. \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в (1):

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \tag{5}$$

Элементарный объём dV в выражении (2) должен быть таким, чтобы в нем плотность энергии а, следовательно, и индукция магнитного поля оставались постоянными. Этому условию удовлетворяет часть цилиндра высотой l_0 и площадью основания $dS = dl\,dr = r\,d\varphi dr$ (см. рисунок)

$$dV = rd\varphi\; dr\; l_0.$$

Тогда подынтегральное выражение в равенстве (2) с учетом (5) будет

$$\omega_м dV = \left(\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}\right) rdr\; d\varphi\; l_0.$$

Вся энергия магнитного поля, сосредоточенного внутри участка проводника согласно формуле (2):

$$W_м = \frac{\mu_0 I^2 l_0}{8\pi^2 R^4}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I^2 l_0}{8\pi^2 R^4}\frac{r^4}{4}\bigg|_0^R \cdot \varphi\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I^2 l_0}{4\pi R^4}\frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0 I^2 l_0}{16\pi}.$$

Проверим наименование единицы измерения в системе СИ

$$наимен.\; E_м = \frac{В \cdot с \cdot А^2 \cdot м}{А \cdot м} = Вт \cdot с = Дж.$$

Подставим численные значения данных величин и сделаем расчет

$$E_м = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot 1{,}0}{16\pi} = 2{,}50 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Ответ: энергия магнитного поля внутри медного проводника $2{,}50 \cdot 10^{-4}$ Дж.

ЗАДАЧИ

321. Напряжение на концах соленоида сопротивлением R = 5,0 Ом и индуктивностью L = 0,5 Гн увеличивается по закону $U(t) = 0{,}1t^2$, В. Найти в момент времени t_1 = 10,0 с э.д.с. самоиндукции ε_{si}, и энергию магнитного поля $E_м$ соленоида.

322. В колебательном контуре конденсатор электроемкостью C = 500 пФ соединен параллельно с катушкой длиной l = 40,0 см и площадью сечения, S = 5,0 см^2. Катушка с немагнитным сердечником ($\mu = 1$) содержит N = 1000 витков. Найти период T колебаний в контуре и длину волны λ, на которую он настроен.

323. Катушка индуктивности сопротивлением R = 15,0 Ом и индуктивностью L = 200 мГн, через ключ подключают к источнику тока с э.д.с. ε = 36,0 В. Вычислить энергию магнитного поля $E_м$ соленоида в момент времени t_1 = 0,03 с после замыкания цепи?

324. В идеальном колебательном контуре три конденсатора электроемкостями C_1 = 2,0 мкФ, C_2 = 5,0 мкФ и C_3 = 1,0 мкФ соединены между собой параллельно и подключены к катушке индуктивностью L = 5,0 мГн. После того как конденсаторы зарядили до напряжения U_0 = 100 В, их замкнули на катушку индуктивности. Найти период T колебаний в контуре и амплитудное значение тока I_0, протекающего через катушку.

325. Соленоид длиной l содержит немагнитный сердечник диаметром D = 2,5 см. Витки медного провода сечением S = 1,0 мм^2 плотно прилегают друг к другу. Через какое время τ в обмотке выделится количество теплоты Джоуля–Ленца Q, равное энергии магнитного поля $E_м$ в сердечнике. Нагревом обмотки пренебречь.

326. Электрическое напряжение на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре изменяется согласно уравнению $U = 30\sin(10^4 t)$, В. Емкость конденсатора C = 0,15 мкФ. Найти период T_0 электромагнитных колебаний в контуре, его индуктивность L и закон изменения со временем тока $I(t)$ в контуре.

327. Тороид с немагнитным сердечником имеет квадратное сечение: наружный диаметр D тороида равен 40,0 см, а внутренний – d = 20,0 см. По его обмотке, содержащей N = 1000 витков, течёт ток I = 10,0 А. Определить максимальную $\omega_{м\max}$ и минимальную $\omega_{м\min}$ плотности энергии магнитного поля в тороиде.

328. Катушка с немагнитным сердечником длиной l = 50,0 см и площадью сечения S_1 = 3,0 см^2 содержит N = 1000 витков. Она соединена параллельно с конденсатором, состоящим из двух пластин площадью S_2 = 75,0 см^2 каждая. Расстояние d между пластинами равно 5,0 мм, диэлектрик – воздух. Определить период T колебаний колебательного контура и длину волны λ, на которую он настроен.

329. Соленоид с немагнитным сердечником и однослойной обмоткой из алюминиевой проволоки диаметром d = 0,6 мм (витки обмотки плотно прилегают друг к другу) имеет длину l = 0,5 м и поперечное сечение S = 25,0 см^2. Какой ток I течет по обмотке при напряжении U = 15,0 В? За какое время t_1 в ней выделяется количество теплоты Джоуля–Ленца Q, равное энергии магнитного поля $E_м$ внутри соленоида? Нагревом обмотки пренебречь.

330. Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью C = 1,0 мкФ и катушки индуктивностью L = 30,0 мГн. При каком сопротивлении R контура его энергия уменьшится на порядок за N = 25 полных колебаний? Чему равен логарифмический декремент затухания δ?

Тема 22. Когерентность и монохроматичность световых волн. Оптическая длина пути и оптическая разность хода. Интерференция света от двух точечных источников. Интерференция света в тонких пленках и пластинках

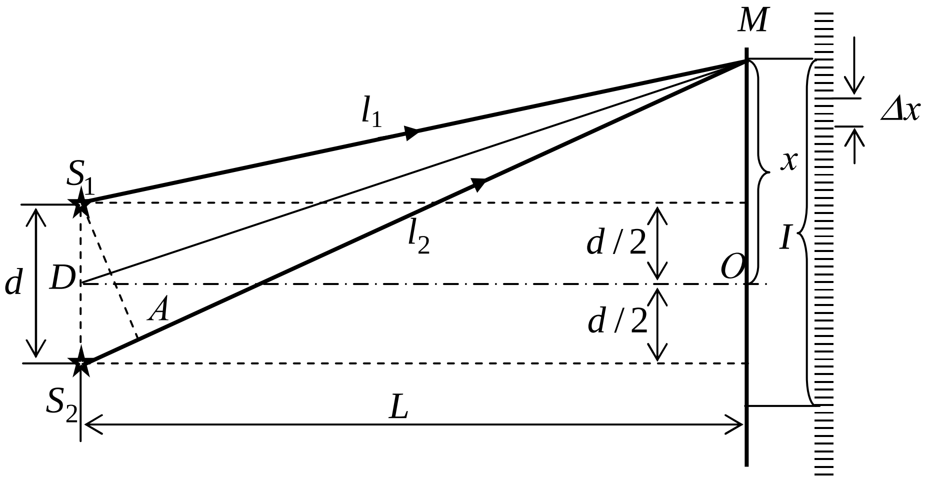
Примеры решения задач

1. *Рассчитать интерференционную картину от двух когерентных источников света, расположенных в вакууме на расстоянии* d = 5,0 *мм друг от друга и на расстоянии* L = 6,0 *м от экрана. Определить положение на экране пятого максимума* $x_{макс}$, *третьего минимума* $x_{мин}$, *а также расстояние между соседними максимумами* $\Delta x_{макс}$ *и минимумами* $\Delta x_{мин}$. *Длина световой волны в вакууме* λ_0 = 500 *нм*.

Анализ и решение

Дано
d = 5,00 мм
L = 6,0 м
λ_0 = 500 нм
k = 3, 5
$x_{макс}$, $\Delta x_{макс}$, $x_{мин}$, $\Delta x_{мин}$ – ?

Сделаем рисунок (см. ниже). До встречи в произвольной точке M, в которой оценивается результат интерференции, каждая из волн проходит соответствующий оптический путь L_1 и L_2, равный произведению геометрического пути l на показатель преломления среды n. Считая начальные фазы колебаний равными нулю, а амплитуды одинаковыми, запишем уравнения волн, излучаемых данными источниками



$$E_1 = E_{01}\sin(2\pi\nu t - \frac{2\pi L_1}{\lambda_0}),\; E_2 = E_{01}\sin(2\pi\nu t - \frac{2\pi L_2}{\lambda_0})$$

где ν – частота световых колебаний, $L_1 = l_1 n_0$, $L_2 = l_2 n_0$ – оптические пути, проходимые волнами, n_0 – показатель преломления вакуума.

Результирующее колебание в точке M находится по принципу суперпозиции

$$E = E_1 + E_2 = 2E_{01}\cos(\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta)\sin(2\pi\nu t + \frac{\pi}{\lambda_0}\Delta),$$

где $\Delta = (L_1 - L_2)$ – оптическая разность хода интерферирующих волн. Как видно из формулы, результат сложения есть гармоническое колебание с частотой ν и амплитудой

$$E_0 = 2E_{01}\cos(\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta), \tag{1}$$

которая зависит от параметра $(\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta)$. Так как интенсивность света определяется квадратом амплитуды светового вектора $\vec{E}$, то, возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим распределение интенсивности света на экране:

$$I = 4I_{01}\cos^2(\frac{\pi}{\lambda_0}\Delta) = 2I_{01}\left[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta)\right].$$

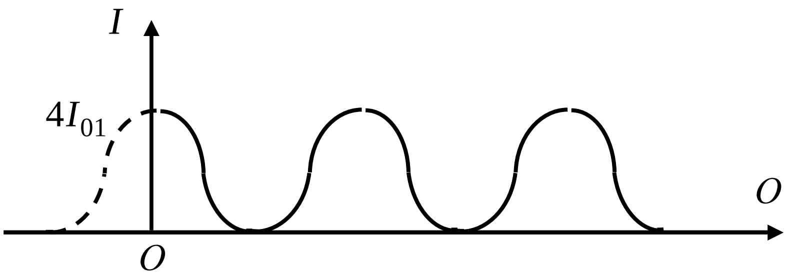
Найдем связь оптической разности хода волн Δ с координатой x точки M на экране. Если величины d и x много меньше l, то, как следует из рисунка, треугольники AS_1S_2 и DOM можно приближенно считать подобными. Тогда

$$\frac{\Delta}{d}=\frac{x}{L} \Rightarrow \Delta=\frac{d}{L}x\,.$$

Таким образом, распределение интенсивности имеет вид

$$I = 2I_{01}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{d}{L}x\right)\right]. \qquad (2)$$

График функции (2) представлен на рисунке.



Учитывая условие интерференционного максимума

$$\Delta = \pm k\lambda_0$$

и интерференционного минимума

$$\Delta = \pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda_0\,,$$

определяем на экране координаты максимумов, минимумов, а так же расстояние между соседними максимумами и минимумами:

$$x_{макс}=\frac{L}{d}\Delta=\frac{L}{d}k\lambda_0\,,\;\; x_{мин}=\frac{L}{d}\Delta=\frac{L}{d}\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda_0\,,$$

$$x_{макс}=x_{мин}=x_{k+1}-x_k=\frac{L}{d}\lambda_0\,.$$

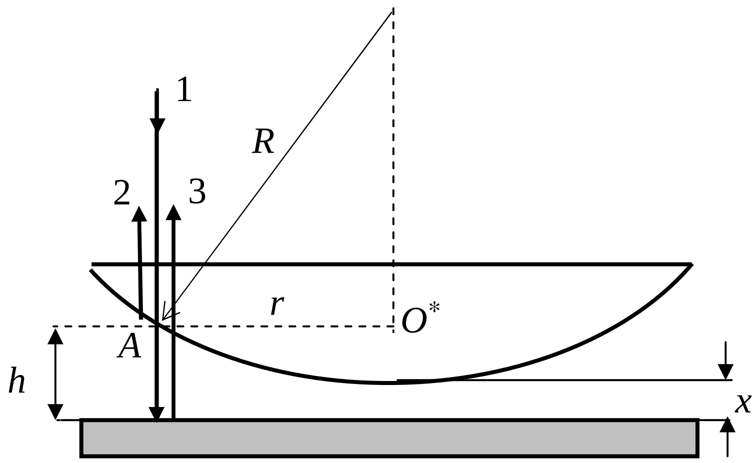
Проведем расчет:

$$x_{5\,макс}=\frac{5\cdot 6\cdot 500\cdot 10^{-9}}{5{,}0\cdot 10^{-3}}=3\cdot 10^{-3}\text{ м},\quad x_{3\,мин}=\frac{\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 6\cdot 500\cdot 10^{-9}}{5{,}0\cdot 10^{-3}}=2{,}1\cdot 10^{-3}\text{ м},$$

$$\Delta x_{макс}=\Delta x_{мин}=\frac{6\cdot 500\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-3}}=6\cdot 10^{-4}\text{ м}.$$

2*. Плоско-выпуклая линза положена на стеклянную пластинку, причем между линзой и пластинкой нет контакта (см. рис.). Диаметры пятого и пятнадцатого темных колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, соответственно равны* D_5 = 0,70 *и* D_{15} = 1,70 *мм. Найти радиус кривизны* R *выпуклой поверхности линзы, если система освещается светом с длиной волны* λ_0 = 581 *нм.*

Дано	*Анализ и решение*
D_5 = 0,7 м D_{15} = 1,7 мм λ_0 = 581 нм. n = 1 R – ?	Сделаем рисунок. Если на систему, состоящую из линзы и пластинки, падает свет (для простоты будем считать, что свет (луч 1) падает нормально к поверхности пластинки), то происходит следующее: в точке А световой пучок частично отразится (луч 2) а частично пройдет в воздушный зазор между линзой и отразится от поверхности пластинки (луч 3).



В точке A обе части светового пучка встречаются, имея разность хода

$$\Delta = 2hn \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

где h – толщина зазора, соответствующего точке A, n – показатель преломления среды между линзой и пластинкой. Наличие $\lambda_0/2$ обусловлено потерей полуволны при отражении света от стеклянной пластинки. С другой стороны условием интерференционного минимума является

$$\Delta = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda_0,$$

где k = (0, 1, 2, …), λ_0 – длина световой волны в вакууме. Таким образом

$$2hn + \frac{\lambda_o}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda_0.$$

Откуда для толщины зазора, при котором наблюдается минимум интенсивности световых волн, получаем:

$$h = k\frac{\lambda_0}{2n}.$$

Радиус r темного кольца для случая отсутствия оптического контакта выражается формулой (см. рисунок)

$$r^2 = R^2 - \left[R - (h - x)\right]^2,$$

или

$$r^2 = R^2 - \left[R^2 - 2R(h-x) + (h-x)^2 \right],$$

где R – радиус поверхности линзы. Слагаемое $(h-x)^2$ мало по сравнению с $2R(h-x)$, поэтому им можно пренебречь. Тогда последняя формула примет вид

$$r^2 = 2R(h-x).$$

Подставим значение h для темного кольца, получим

$$r^2 = 2R(k\frac{\lambda_0}{2n} - x).$$

В условии задачи известны радиусы двух темных колец r_k и r_i:

$$r_k^2 = R(k\frac{\lambda_0}{n} - 2x) \text{ и } r_i^2 = R(i\frac{\lambda_0}{n} - 2x).$$

Взяв разность r_k^2 и r_i^2, исключаем неизвестную величину зазора x:

$$r_k^2 - r_i^2 = R\lambda_0(k-i),$$

откуда

$$R = \frac{(D_k^2 - D_i^2)n}{4\lambda_0(k-i)}.$$

Подставляя числовые значения заданных величин, получаем

$$R = \frac{(1,7^2 - 0,7^2)10^{-6} \cdot 1}{4 \cdot 581 \cdot 10^{-9}(15-5)} = 0,1 \text{ (м)}.$$

Ответ: радиус кривизны линзы равен 0,1 м.

ЗАДАЧИ

331. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равны a = 48,0 см, b = 6,0 м (см. рис. 4.1 Приложения). Показатель преломления бипризмы n = 1,50, преломляющий угол θ = 20 минут. Определить длину волны света λ_0, если ширина интерференционных полос Δx = 0,65 мм.

332. Пучок монохроматических световых волн (λ_0 = 600 нм) падает на стеклянную пластинку с показателем преломления n = 1,50. В каких пределах может изменяться толщина d пластинки, чтобы в отраженном свете можно было наблюдать интерференционный максимум 12-го порядка?

333. Между двумя плоскопараллельными пластинками положили очень тонкую проволочку, расположенную параллельно линии соприкосновения пластинок и находящуюся на расстоянии l = 75,0 мм от нее. Пластинки освещаются нормально падающим монохроматическим светом (λ_0 = 0,50 мкм). В отраженном свете на верхней пластинке на протяжении a = 30,0 мм наблюдается N = 16 светлых интерференционных полос. Найти диаметр D поперечного сечения проволочки.

334. Интерференционная картина в виде колец Ньютона наблюдается с помощью двух плосковыпуклых линз, сложенных вплотную выпуклыми поверхностями (плоские поверхности параллельны). Пространство между линзами заполнено жидкостью с показателем преломления $n_{ж} = 1{,}4$. Радиусы кривизны линз $R_1 = 1{,}0$ м и $R_2 = 2{,}0$ м. Определить радиус $r_2^{св.}$ второго светлого интерференционного кольца, наблюдаемого в отраженном свете ($\lambda_0 = 660$ нм) при нормальном падении света на поверхность верхней линзы.

335. Во сколько раз в опыте Юнга нужно изменить расстояние до экрана, чтобы 5-я светлая полоса новой интерференционной картины оказалась на том же расстоянии от нулевой, что и 3-я светлая в прежней картине? То же для четвертой темной и шестой светлой. То же для третьей темной и седьмой темной.

336. Световой луч падает на пленку под углом $\alpha = 30°$. Найти минимальную толщину пленки ($n = 1{,}33$), при которой свет с длиной волны $\lambda_{01} = 0{,}64$ мкм отражается от пленки максимально, а свет с длиной волны $\lambda_{02} = 0{,}40$ мкм полностью пленкой поглощается.

337. Мыльная пленка ($n = 1{,}33$), расположенная вертикально, образует клин. Свет от ртутной дуги ($\lambda_0 = 546{,}1$ нм) падает на клин под углом $\alpha = 15°$. При наблюдении интерференции полос в отраженном свете оказалось, что расстояние между пятью полосами $l = 2{,}0$ см. Найти угол γ клина.

338. В установке для наблюдения колец Ньютона свет с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}5$ мкм падает нормально на плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R_1 = 1{,}0$ м. Линза положена выпуклой стороной на вогнутую поверхность плосковогнутой линзы с радиусом $R_1 = 2{,}0$ м. Пространство между линзами заполнено жидкостью, показатель преломления которой $n_{ж} = 1{,}4$. Найти радиус третьего темного кольца Ньютона $r_3^{т}$, наблюдаемого в отраженном свете.

339. При освещении зеркал Френеля монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_0 = 486$ нм на экране, отстоящем на расстоянии $a = 1{,}0$ м от линии пересечении зеркал, наблюдают интерференционную картину (см. рис. 4.2 Приложения). Угол между зеркалами $\alpha = 10$ минут. Источник света находится на расстоянии $r = 10{,}0$ см от линии пересечения зеркал. Определить расстояние между интерференционными полосами Δx на экране. Сколько интерференционных полос можно видеть на экране?

340. На поверхность плоскопараллельной пленки падает под углом $\alpha = 30°$ параллельный пучок белого света. Показатель преломления пленки n = 1,30. При какой наименьшей толщине $d_{мин}$ пленка будет наиболее прозрачна одновременно для света с длинами волн λ_{01} = 0,6 мкм и λ_{02} = 0,5 мкм? Наблюдение ведется в проходящем свете.

Тема 23. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Дифракция Фраунгофера на одной щели. Дифракционная решетка. Поляризация световых волн. Степень поляризации. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и двойном лучепреломлении. Закон Брюстера

Примеры решения задач

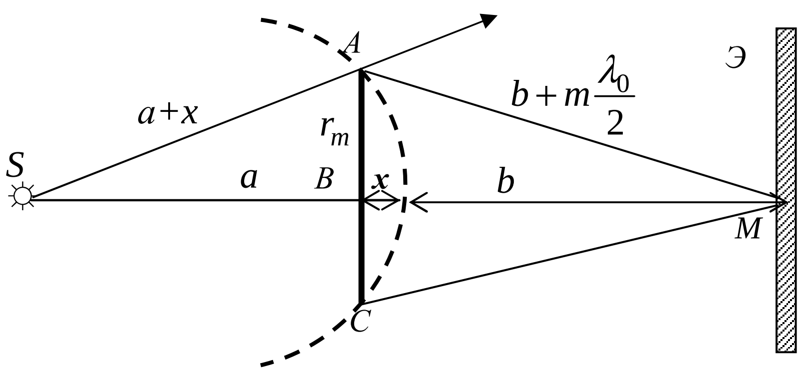
1. *Дифракция наблюдается на расстоянии* l *от точечного источника монохроматического света (*λ = 0,5 *мкм). Посередине между источником света и экраном находится непрозрачный диск диаметром* D = 5,0 *мм. Определить расстояние* l*, если диск закрывает только центральную зону Френеля.*

Анализ и решение

Дано
D = 5,0 мм
λ_0 = 500 нм.
n = 1,0
m = 1
$a = b = l/2$
l – ?

Дифракция света – явление, наблюдаемое при распространении света в среде вблизи непрозрачных тел, сквозь малые отверстия и связанное с отклонениями от законов геометрической оптики. Расчет дифракционной картины на диске можно провести с помощью метода *зон Френеля*. Зоны Френеля – это участки волнового фронта (геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t), выделенные таким образом, что расстояния от соответствующих точек двух соседних зон до точки, в которой определяется действие этой волновой поверхности, отличаются на $\lambda_0/2$. На рисунке S – точечный источник света, AC – диск, $Э$ – экран, r_m – радиус m-ой зоны Френеля, b – расстояние от волнового фронта до точки наблюдения M, a – расстояние от источника света до диска. Волновой фронт источника изображен пунктирной линией.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABS и выразим из него ради-



ус $m-$ ной зоны Френеля r_m^2

$$r_m^2 = (a + x)^2 - a^2 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2.$$

Так как $x<<a$, то величиной x^2 можно пренебречь тогда

$$r_m^2 = 2ax. \quad (1)$$

Рассмотрим треугольник ABM и найдем из него r_m^2

$$r_m^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x)^2,$$

или

$$r_m^2 = b^2 + mb\lambda + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 - b^2 - 2bx - x^2.$$

Величинами $\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2$ и x^2 можно пренебречь, так как $b<<\frac{\lambda}{2}$ $x<<b$. Тогда

$$r_m^2 = mb\lambda - 2bx. \quad (2)$$

По условию задачи $r_m = \frac{D_m}{2}$, $a = b = \frac{l}{2}$. Учитывая это, запишем уравнения (1) и (2) в виде

$$\frac{D_m^2}{4} = 2\frac{l}{2}x, \text{ или } \frac{D_m^2}{4} = m\frac{l}{2}\lambda - 2\frac{l}{2}x = m\frac{l}{2}\lambda - \frac{D_m^2}{4}.$$

Решаем последнее уравнение относительно ***l***, получаем

$$l = \frac{D_m^2}{m\lambda} = \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-3})^2}{1 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-7}} = 50{,}0(м).$$

2. На *щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Расположенная за щелью линза с фокусным расстоянием* F = 2,0 *м проецирует на экран дифракционную картину в виде светлых и темных полос. Ширина центральной светлой полосы* l = 5,0 *см. Как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран при любой его ширине?*

Анализ и решение

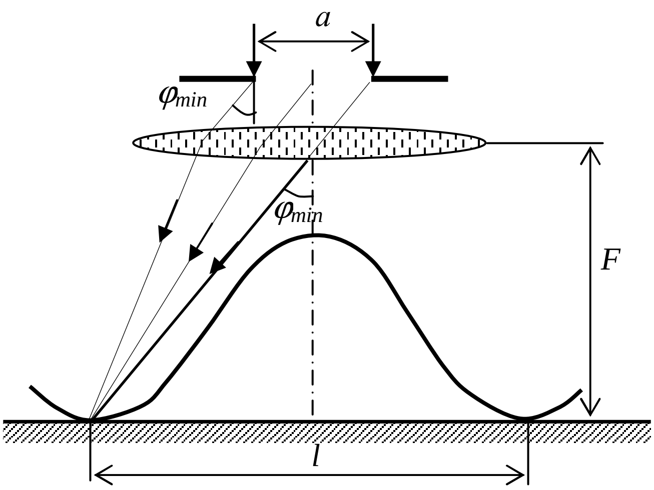
Дано
F = 2,0 м
l = 5,0 см
a_2 – ?

Сделаем рисунок (см. ниже). Кривая на рисунке показывает распределение интенсивности света на экране. Центральная светлая полоса заключена между двумя минимума первого порядка. Ёе ширина l зависит от угла дифракции φ, который соответствует первому минимуму. В свою очередь угол φ связан с шириной щели a формулой

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda_0, \quad (1)$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме, $k = 1$.

Так как при изменении ширины щели от a_1 до a_2 величины λ_0, k остаются постоянными, то из формулы (1) следует



$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}, \tag{2}$$

где φ_1, φ_2 – углы первых дифракционных минимумов, соответствующих размерам щели a_1, a_2. Из условия видно, что угол φ_1 очень мал. Поэтому

$$\sin\varphi_1 \approx \mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{l}{2F}.$$

С другой стороны, чтобы центральная полоса занимала весь экран при его любой ширине, должно выполняться соотношение

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2},\ \sin\varphi_2 = 1.$$

Подставив найденные значения $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ в формулу (2), получим

$$a_2 = \frac{b}{2F}a_1 = \frac{5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 2}a_1 = \frac{a_1}{80}.$$

Таким образом, ширину щели следует уменьшить в 80 раз.

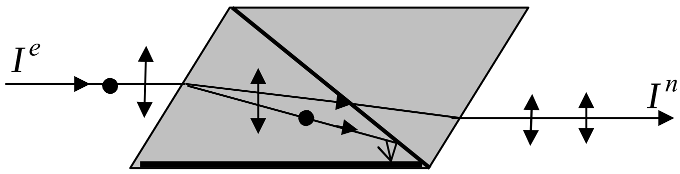
3. *Частично поляризованный свет проходит через николь. При его повороте на угол* $60°$ *от положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшается в к* $= 2$ *раза. Пренебрегая поглощением света в николе, определить отношение интенсивностей естественного и плоскополяризованного света* (I^e / I_0^n)*, составляющих данный частичнополяризованный свет и степень поляризации падающего света* P.

Анализ и решение

Дано
$\alpha = 60°$
$к = 2$
$(I^e / I_0^n) - ?$
$P - ?$

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Световые волны, в которых направления колебаний светового вектора $\vec{E}$ быстро и хаотически меняются, называется естественным светом. Если колебания вектора $\vec{E}$ в световых волнах каким-то образом упорядочены, то свет будет поляризованным. Световые волны, в которых колебания вектора $\vec{E}$ одного направления преобладают над колебаниями других направлений, называется частично поляризованным светом.

Для преобразования естественного света в плоскополяризованный используются поляризаторы, в частности призма Николя: двойная призма из исландского шпата (см. рисунок). Естественный свет, падая на грань призмы Николя, расщепляется, вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа. Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна



плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света вследствие полного отражения от границы соединения отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок проходит через призму без отклонения, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения.

Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николь всегда пропускает половину падающего на него естественного света (превращая его в плоскополяризованный). Интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через николь, зависит, согласно закону Малюса

$$I^n = I_0^n \cos^2 \alpha,$$

от угла α между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора. Поэтому полная интенсивность частично поляризованного света, прошедшего через николь

$$I = 0{,}5 I^e + I_0^n \cos^2 \alpha,$$

где I^e и I_0^n – интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николь.

При первом положении николя, соответствующем максимальному пропусканию света, через николь проходит свет, интенсивность которого составляет половину интенсивности естественного света и весь ранее поляризованный свет I_0^n.

$$I_1^n = 0,5I^e + I_0^n .$$

При втором положении николя прошедший свет имеет интенсивность:

$$I_2^n = 0,5I^e + I_0^n \cos^2 60^0 = 0,5I^e + 0,25I_0^n .$$

По условию задачи

$$I_1^n = 2I_2^n .$$

Тогда

$$0,5I^e + I_0^n = 2(0,5I^e + 0,25I_0^n),$$

откуда

$$I^e = I_0^n .$$

Следовательно, отношение интенсивностей естественного и плоскопараллельного света равно единице

$$\frac{I^e}{I_0^n} = 1.$$

Степень поляризации определяется отношением интенсивности поляризованного света к общей интенсивности света или отношением:

$$p = \frac{I_{макс}^n - I_{мин}^n}{I_{макс}^n + I_{мин}^n},$$

где $I_{макс}^n$ и $I_{мин}^n$ – максимальная и минимальна интенсивности в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Максимальная интенсивность света, пропускаемая николем,

$$I_{макс}^n = I_1^n = 0,5I^e + I_0^n ,$$

или учитывая, что $I^e = I_0^n$,

$$I_{макс}^n = 1,5I_0^n$$

При этом положении плоскости поляризации николя и падающего света параллельны.

При повороте николя на 90° свет, ранее поляризованный, не пройдет, а на экран будет падать свет с минимальной интенсивностью:

$$I_{мин}^n = 0,5I^e = 0,5I_0^n .$$

Подставляем значения максимальной и минимальной интенсивностей в формулу степени поляризации, получаем:

$$p = \frac{1,5I_0^n - 0,5I_0^n}{1,5I_0^n + 0,5I_0^n} = 0,5 .$$

ЗАДАЧИ

341. На непрозрачную преграду с отверстием радиуса R =1,0 мм падает плоская монохроматическая световая волна. При расстоянии от преграды до установленного за ней экрана b_1 = 0,58 м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. Если расстояние увеличить до b_2 = 0,86 м, то максимум интенсивности сменяется минимумом. Найти длину λ_0 световой волны.

342. Плоская монохроматическая световая волна падает на длинную прямоугольную щель шириной a = 12,0 мкм под углом α = 30° к её нормали. Определить длину световой волны λ_0, если первый дифракционный максимум наблюдается под углом $\varphi_{макс}$ = 33°.

343. Дифракционная решетка состоит из ряда непрозрачных штрихов шириной b = $2{,}5{\cdot}10^{-3}$ мм, разделенных прозрачными участками такой же ширины. Какую толщину h должна иметь плоскопараллельная стеклянная пластинка, чтобы в ней максимум третьего порядка для длины световой волны λ_0 = 600 нм наблюдался под тем же углом, что и у дифракционной решетки? Показатель преломления стекла n =1,50.

344. На плоскопараллельную стеклянную пластинку падает естественный свет. Показатель преломления стекла n = 1,52. Угол падения α равен углу полной поляризации отраженного света $\alpha_Б$. Какую часть интенсивности падающего света составит при этом интенсивность отраженного света? Для решения воспользоваться формулой Френеля

$$I^n = 0{,}5 I_0^e \sin^2(\alpha_Б - \gamma),$$

где I^n, I_0^e – интенсивности отраженного и падающего света, $\alpha_Б$, γ – углы падения и преломления.

345. На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого P = 0,6, поставили анализатор так, что интенсивность I света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность I света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол α = 30°?

346. Точечный источник световых волн (λ_0 = 0,5 мкм) находится на расстоянии L = 11,0 м от экрана. Между источником света и экраном на расстоянии b = 5,0 м от экрана помещена ширма с круглым отверстием, диаметр которой D = 4,2 мм. Как изменится освещенность в точке, находящейся в центре дифракционной картины, если ширму убрать?

347. На щель нормально падает параллельный пучок монохроматического света. Длина волны падающего света λ_0 укладывается в ширине щели 8 раз. Какова ширина нулевого максимума в дифракционной картине, проецируемой линзой на экран, отстоящий от линзы на расстояние l = 1,0 м?

348. Применяя формулу разрешающей способности дифракционной решетки, найти, какое наименьшее число штрихов $N_{мин}$ она должна иметь, чтобы можно было различать две желтые линии натрия (λ_{01} = 589,0 нм и λ_{02} = 589,6 нм)? Период решетки d = 2,9 мкм. Какая длина L будет у такой решетки?

349. Световые волны падают из воздуха в жидкость, налитую в стеклянный сосуд ($n_{ст}$ = 1,50). Отраженный от дна сосуда свет, будет полностью поляризован, если его угол падения $\alpha_Б$ = 41° (рис. 4.3 Приложения). Определить показатель преломления жидкости $n_ж$ и угол падения света $\alpha_{пред}$ на дно сосуда, при котором наблюдалось бы его полное отражение.

350. На николь падает луч частично-поляризованного света. При некотором положении николя, интенсивность света I, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол α = 45°, интенсивность I света возросла в $к$ = 1,5 раза. Найти степень поляризации света.

Тема 24. Квантовая оптика. Характеристики теплового излучения. Законы теплового излучения (Кирхгофа, Стефана–Больцмана, Вина). Давление света. Фотоны

Примеры решения задач

1. *Определить установившуюся температуру тонкой пластинки, расположенной вблизи Земли за пределами её атмосферы перпендикулярно лучам Солнца. Интенсивность солнечной радиации в месте нахождения пластинки* I =1,80 *кВт/м²*. *Рассмотреть два случая: 1) пластинка – абсолютно черное тело; 2) пластинка – серое тело.*

Дано

I = 1,8 кВт/м^2

σ = 5,67·10^{-8} Вт/м^{2}К^4

T_1, T_2 – ?

Анализ и решение

1. Независимо от свойств пластинки её температура установится тогда, когда *поток излучения* $\varPhi_1$, испускаемый нагретой пластинкой, станет равным потоку $\varPhi_2$, поглощаемому пластинкой (поток энергии, излучаемый Солнцем)

$$\varPhi_1 = \varPhi_2. \qquad (1)$$

Потоком излучения $\varPhi$ называется величина, определяемая отношением энергии W, переносимой излучением, к времени переноса t, измеряется в Ваттах. Если пластинка обладает свойствами *абсолютно черного тела* (тело, способное поглощать при любой температуре все падающее на него излучение любой частоты), то она поглощает весь падающий на неё поток излучения. Поэтому

$$\Phi_2 = IS\,, \tag{2}$$

здесь S – площадь поверхности пластинки, обращенной к Солнцу, I – *интенсивность излучения* (плотность потока излучения) – количество энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения излучения.

Поток излучения пластинки Φ_1 найдем по *закону Стефана–Больцмана* согласно которому, *энергетическая светимость* (*интегральная излучательная способность*) абсолютно черного тела R пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры T

$$R = \sigma T^4\,,$$

здесь σ – постоянная Стефана–Больцмана.

Энергетическая светимость измеряется потоком излучения, испускаемым единицей площади светящейся поверхности

$$R = \frac{\Phi}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW}{dt}\,.$$

Учитывая, что излучают обе стороны пластинки, имеем

$$\Phi_1 = \sigma T^4 2S\,. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) находим

$$IS = \sigma T^4 2S\,, \tag{4}$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{2\sigma}}\,.$$

2. Не являясь черным телом, пластинка будет поглощать и излучать меньше энергии, чем в первом случае. Поэтому теперь вместо (4) запишем

$$a_n IS = a_u \sigma T^4 2S\,, \tag{5}$$

где a_n – *коэффициент поглощения*, показывающий, какая часть энергии, излученной абсолютно черным телом и падающей на поверхность данного тела, им поглощается; a_u – *коэффициент излучения*, показывающий, какую часть составляет энергетическая светимость данного тела от энергетической светимости абсолютно черного тела, взятого при той же температуре. Как показывает теория, для *серого* тела

$$a_n = a_u\,.$$

Значит, согласно уравнению (5), температуры серой и черной пластинок одинаковы.

Проверим наименование единицы измерения температуры в системе СИ

$$наимен.\ T = \sqrt[4]{\frac{Вт \cdot м^2 \cdot К^4}{м^2 \cdot Вт}} = К.$$

Проведем расчет

$$T_1 = T_2 = \sqrt[4]{\frac{1{,}8 \cdot 10^3}{2 \cdot 5{,}6710^{-8}}} = 355\ (\text{К}).$$

2. *Лампа мощностью* P = 600 *Вт излучает свет равномерно по всем направлениям. Средняя длина световой волны* $\langle \lambda_0 \rangle$ = 550 *нм. Определить силу давления* F *на плоское круглое зеркало площадью* S = 10,0 *см*^{2}*, расположенное на расстоянии* r = 50,0 *см перпендикулярно к падающим лучам, и концентрацию* n *фотонов около зеркала.*

Дано

P = 600 Вт
S = 10,0 см^2
r = 50,0 см
ρ = 1,
$\langle \lambda_0 \rangle$ = 550 нм
h = 6,63·10^{-34}Дж

F – ?, n – ?

Анализ и решение

Давление света на поверхность равно импульсу, который передают поверхности в одну секунду N фотонов:

$$p = (1+\rho)\frac{h\nu}{c}N = \frac{E_э}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho),$$

где ρ – коэффициент отражения света от поверхности $E_э$ – *энергетическая освещенность* – энергия всех фотонов, падающих на один квадратный метр в секунду, $\omega = \dfrac{E_э}{c}$ – *объёмная плотность энергии* излучения, ν – частота колебаний, h – постоянная Планка. Энергетическая освещенность характеризует величину потока излучения, падающего на единичную площадь освещенной поверхности

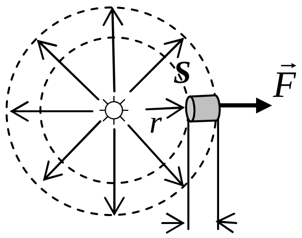
$$E_э = \frac{\Phi}{S}$$

Поток излучения в свою очередь, определяется отношением энергии переносимой излучением, к времени переноса, то есть мощности излучения

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{t} = P.$$

Сила давления света на зеркало

$$F = pS = \frac{E_э}{c}(1+\rho)S.$$



Энергетическая освещенность зеркала такая же, как и поверхности сферы с радиусом, равным расстоянию от лампы до зеркала (см. рисунок)

$$E_э = E_{э\ сф} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Тогда сила давления

$$F = \frac{\Phi S}{4\pi r^2 c}(1+\rho).$$

Проверим наименование силы в системе СИ

$$наимен.\ F = \frac{Вт \cdot м^2 \cdot c}{м^2 \cdot м} = \frac{Дж \cdot c}{c \cdot м} = \frac{Н \cdot м}{м} = Н.$$

Подставим данные в задаче величины и сделаем расчет

$$F = \frac{600 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (50 \cdot 10^{-2})^2 3 \cdot 10^8} = 1{,}27 \cdot 10^{-9}\ (\text{Н}).$$

Концентрацию фотонов около зеркала можно найти как отношение числа фотонов в некотором объёме к величине этого объёма. Объём представим в виде цилиндра длиной cdt, где c – скорость света, и основанием, равным площади зеркала $S_{зерк}$ (см. рисунок). В этом элементарном объёме находится dN фотонов. Тогда их концентрация

$$n = \frac{dN}{S_{осн.ц} \cdot cdt} = \frac{dN}{dt}\frac{1}{S_{осн.ц} c}. \qquad (1)$$

Число фотонов, падающих за одну секунду на поверхность $\frac{dN}{dt}$, определяется как отношение энергии всех фотонов к энергии одного фотона

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{t} = \frac{W}{\varepsilon t} = \frac{W}{h\nu t} = \frac{W\langle\lambda\rangle}{hct}. \qquad (2)$$

Энергию падающих фотонов можно найти из общего определения энергетической освещенности

$$E_э = \frac{W}{St} \Rightarrow W = E_э S_{зерк} t. \qquad (3)$$

Как было показано выше, энергетическая освещенность зеркала такая же, как и освещенность поверхности сферы с радиусом, равным расстоянию от лампы до зеркала.

$$E_э = E_{э\ сф} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi r^2}. \qquad (4)$$

После подстановки в формулу (1) значений величин из формул (2), (3) и (4), получим

$$n = \frac{dN}{Scdt} = \frac{W\langle\lambda_0\rangle}{hct}\frac{1}{S} = \frac{E_э St\langle\lambda_0\rangle}{hctSc} = \frac{P\langle\lambda_0\rangle}{4\pi r^2 hc^2}.$$

Проверим наименование концентрации фотонов в системе СИ

$$наимен.\ n = \frac{Вт \cdot м \cdot c^2}{м^2 \cdot Дж \cdot c \cdot м^2} = \frac{1}{м^3}.$$

Проведем расчет искомой величины

$$n = \frac{600 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 1{,}76 \cdot 10^{12} \ (\frac{1}{м^3}).$$

Ответ: концентрация фотонов вблизи зеркала равна 1, 76·10^{12} $м^{-3}$.

ЗАДАЧИ

351. Определить установившуюся температуру тонкой пластинки, расположенной перпендикулярно лучам Солнца вблизи Земли за пределами ее атмосферы. Интенсивность солнечной радиации (поверхностная плотность потока излучения) I = 1,77 10^3 Вт/м^2.

352. Найти величину давления p на плоскую поверхность при зеркальном отражении параллельного светового потока с интенсивностью I = 0,5 Вт/см^2, если коэффициент отражения поверхности ρ = 0,6, а угол между направлением света и нормалью к поверхности α = 30°.

353. Нить накала лампы излучает как серое тело с коэффициентом поглощения α_T = 0,30. Диаметр нити d = 0,03 мм, ее длина l = 15,0 см. Определить длину световой волны λ_0, соответствующей максимуму энергии излучения лампы накаливания. Мощность, потребляемая лампой P = 10,0 Вт. Считаем, что 20 % потребляемой энергии расходуется не на излучение.

354. Пользуясь квантовыми представлениями, найти силу светового давления F на плоскую поверхность при зеркальном отражении параллельного пучка света. Поток энергии Φ = 0,60 Вт. Угол между направлением света и нормалью к зеркалу α = 60°, коэффициент отражения зеркала ρ = 0,80.

355. Электрическая печь потребляет мощность P = 1,00 кВт. Температура ее внутренней поверхности T при открытом отверстии площадью S = 25,0 см^2 равна 1,2 кК. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно чёрное тело, определить, какая часть потребляемой мощности рассеивается ее стенками.

356. Короткий импульс света с энергией E = 7,5 Дж в виде узкого, почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения ρ = 0,6. Угол падения α = 30°. Определить с помощью корпускулярных представлений о свете импульс фотонов, переданный пластинке.

357. В спектре Солнца максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны λ_0 = 0,47 мкм. Приняв, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, найти интенсивность I солнечной радиации (т.е. плотность потока энергии излучения) вблизи Земли за пределами ее атмосферы.

358. Свет в виде узкого параллельного пучка падает на зеркальную пластинку. Угол падения α = 30°, коэффициент отражения пластинки ρ = 0,6. Определить с помощью корпускулярных представлений энергию светового пучка E, если пластинке был передан импульс P = 3,48·10^{-8} кгм/с.

359. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током I_1 = 1,00 А до температуры T_1 = 1000 К. Удельные сопротивления и коэффициенты излучения вольфрама при температурах T_1 и T_2, равны: ρ_1 = 25,7·10^{-8} Ом·м, ρ_2 = 96,2·10^{-8} Ом·м, α_1 = 0,115, α_2 = 0,334. При каком токе I_2 нить накалится до температуры T_2 = 3000 К?

360. Давление p на плоское зеркало при падении на него под углом α = 30° параллельного пучка света, равно 2,0·10^{-5} Па. Коэффициент отражения зеркала ρ = 0,95. Определить интенсивность I светового потока.

Тема 25. Импульс и энергия фотона. Эффект Комптона. Комптоновская длина волны

Примеры решения задач

1. *Фотон с энергией* ε = 0,75 *МэВ рассеялся на свободном электроне под углом* θ = 60°. *Считая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном пренебрежимо малы, определить: 1) энергию рассеянного фотона; 2) кинетическую энергию электрона отдачи; 3) направление его движения.*

Дано

ε = 0,75 МэВ
θ = 60°
ε^*, $E^к$, φ – ?

Анализ и решение

1. Упругое рассеяние коротковолнового излучения (рентгеновского и γ-излучения) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны называется *эффектом Комптона*. Энергию рассеянного фотона ε^* можно найти, воспользовавшись формулой описывающей этот эффект

$$\Delta\lambda = \lambda^* - \lambda = \lambda_к(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

где λ и λ^* – длина волны падающего и рассеянного излучений; θ – угол рассеяния; $\lambda_к = \dfrac{h}{m_0 c}$ = 2,43 *пкм – комптоновская длина волны*, h – постоянная Планка, m_0 – масса электрона отдачи, c – скорость света в вакууме.

Выразим длины волн λ и λ^* через энергии ε и ε^* соответствующих фотонов

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon^* = h\nu^* = h\frac{c}{\lambda^*} \Rightarrow \lambda^* = \frac{hc}{\varepsilon^*}.$$

Подставим в уравнение (1), получим

$$\frac{hc}{\varepsilon^*} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta).$$

Разделим обе части этого равенства на hc:

$$\frac{1}{\varepsilon^*} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{(1-\cos\theta)}{m_0 c^2}.$$

Отсюда, обозначив для краткости энергию покоя электрона $m_0 c^2 = 0{,}51\,МэВ$ через E_0, найдем

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1+\dfrac{\varepsilon}{E_0}(1-\cos\theta)}. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения величин, проведем расчет

$$\varepsilon^* = \frac{0{,}75}{1+\dfrac{0{,}75}{0{,}51}(1-\cos 60^\circ)} = 0{,}43 \text{ (МэВ)} = 6{,}88\cdot 10^{-14} \text{ (Дж)}.$$

2. В процессе упругого столкновения рентгеновского фотона со свободным электроном выполняются *законы сохранения импульса и энергии*. Как следует из закона сохранения энергии для нашего случая

$$\varepsilon = E^к + \varepsilon^*.$$

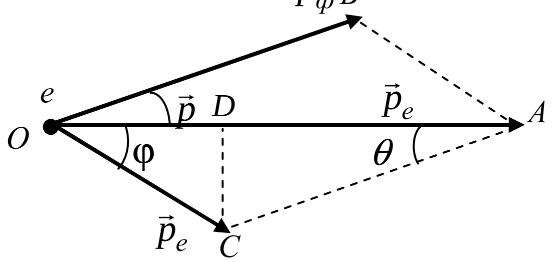
Кинетическая энергия электрона отдачи равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε^* рассеянного фотона:

$$E^к = \varepsilon - \varepsilon^* = 0{,}75 - 0{,}43 = 0{,}32 \text{ (МэВ)} = 5{,}12\cdot 10^{-12} \text{ (Дж)}.$$

3. Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса. Согласно этому закону импульс падающего фотона $\vec{p}_ф$ равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона $\vec{p}_ф^{\,*}$ и электрона отдачи $\vec{p}_e = m\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p}_ф = \vec{p}_ф^{\,*} + \vec{p}_e.$$

Изобразим на рисунке векторную диаграмму импульсов. Все векторы проведены из точки O, где находился электрон в момент соударения с фотоном. Угол φ определяет направление движения электрона отдачи. Из треугольника $ОСД$ находим



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|CD|}{|OD|} = \frac{|CA|\sin\theta}{|OA| - |CA|\cos\theta},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p^*\sin\theta}{p - p^*\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{p}{p^*} - \cos\theta}.$$

Так как $p = \frac{\varepsilon}{c}$ и $p^* = \frac{\varepsilon^*}{c}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} - \cos\theta}. \qquad (3)$$

Преобразуем формулу (3) так, чтобы угол φ выражался непосредственно через величины ε и θ, заданные в условии задачи. Из формулы (2) следует

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} = \frac{\varepsilon}{E_0}(1 - \cos\theta) + 1.$$

Подставим это соотношение в формулу (3)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{(1 + \frac{\varepsilon}{E_0})(1 - \cos\theta)}.$$

Учитывая, что $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ и $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, после соответствующих преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{(1 + \frac{\varepsilon}{E_0})}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Подставим числовые значения заданных величин и найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}30^\circ}{\left(1 + \frac{0,75}{0,51}\right)} = 0,7.$$

Откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg}(0,70) = 35^\circ.$$

Ответ: энергия рассеянного фотона равна $6,88 \cdot 10^{-14}$ *Дж*, кинетическая энергия электрона отдачи равна $5,12 \cdot 10^{-12}$ *Дж*, угол, под которым движется электрон отдачи 35°.

ЗАДАЧИ

361. Длина волны рентгеновского излучения после комптоновского рассеяния увеличилась с λ_1 = 2,00 пм до λ_2 = 2,40 пм. Импульс вылетевшего электрона P_e = $1,82 \cdot 10^{-22}$ кг м /с. Найти угол рассеяния θ рентгеновского излучения, а также угол φ между направлениями вылета электронов и падающего излучения.

362. Квант с энергией ε = 1,53 МэВ был рассеян при эффекте Комптона на угол θ. Определить угол рассеяния, если кинетическая энергия электрона отдачи $E_к$ = 0,51 МэВ.

363. Фотон с длиной волны λ_1 = 15,0 пм рассеялся на свободном электроне. Длина волны рассеянного фотона λ_2 = 16,0 пм. Определить угол рассеяния θ. Какова кинетическая энергия $E_к$ вылетающих электронов и их скорость υ_e?

364. Какая доля энергии фотона приходится на электрон отдачи при эффекте Комптона, если рассеяние фотона приходится на угол $\theta = \pi/2$? Энергия фотона до рассеяния ε = 0,51 МэВ.

365. Фотон при эффекте Комптона был рассеян на свободном электроне на угол $\theta = \pi/2$. Определить импульс P_e**,** приобретенный электроном, если энергия фотона до рассеяния была ε = 1,02 МэВ.

366. Фотон рентгеновского излучения с энергией ε = 0,15 МэВ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda$ = 1,50 пм. Угол рассеяния фотона θ = 67°. Под каким углом α вылетел комптоновский электрон отдачи?

367. В результате эффекта Комптона фотон с энергией ε = 1,02 МэВ был рассеян на свободном электроне на угол θ = 150°. Определить энергию ε^* рассеянного фотона, а также направление движения электрона отдачи.

368. Фотон с энергией ε = 0,51 МэВ был рассеян при эффекте Комптона на свободном электроне на угол θ = 50°. Определить кинетическою энергию $E^к$ электрона отдачи и угол α, между направлениями вылета электрона и падающего излучения.

369. Фотон с энергией ε = 0,51 МэВ при рассеянии на свободном электроне потерял половину своей энергии. Определить угол рассеяния θ и направление движения комптоновского электрона.

370. Найти модуль импульса $\vec{P}_e$ электрона отдачи, если фотон с энергией ε = 1,53 МэВ в результате рассеяния на свободном электроне потерял одну треть своей энергии. Для решения задачи применить формулу Комптона.

Тема 26. Элементы квантовой механики. Корпускулярно-волновой дуализм вещества. Гипотеза и волны де-Бройля. Соотношение неопределенностей

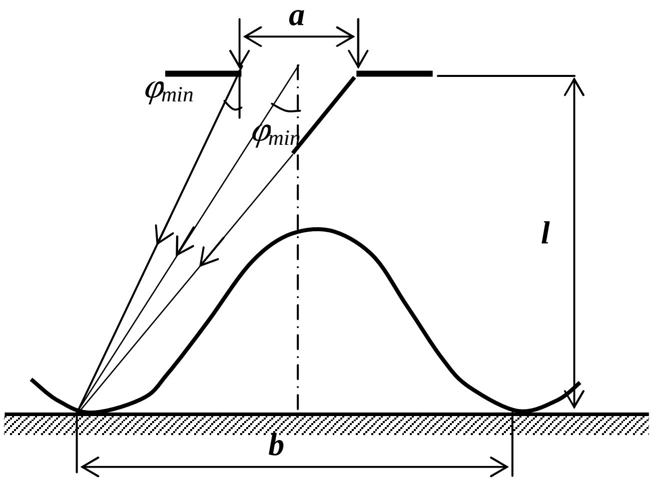
Примеры решения задач

1. *Параллельный пучок электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой* a = 2,0 *мкм. Определить скорость электронов, (считая её одинаковой для всех частиц), если известно, что на экране, который находится от щели на расстоянии* l = 50,0 *см, ширина центрального дифракционного максимума* b = 80,0 *мкм.*

Дано
a = 2,0 мкм
l = 50,0 см
b = 80,0 мкм
υ – ?

Анализ и решение

Сделаем рисунок.



Де-Бройль утверждал, что не только *фотоны*, но и *электроны* и любые другие *частицы* материи наряду с *корпускулярными* обладают также *волновыми свойствами.* С каждой микрочастицей связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики – энергия $E = h\nu$ и импульс $p = \dfrac{h}{\lambda}$, а с другой – волновые характеристики – частота ν и длина волны λ. Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с длиной волны, определяемой по формуле де-Бройля. Так как дифракция электронов является следствием волновой природы частиц, то для определения скорости электронов применим формулу

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{h}{m\lambda}. \qquad (1)$$

Чтобы найти длину волны де-Бройля воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении её параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона. Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определить по формуле

$$a \sin\varphi = \pm \kappa\lambda \quad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (2)$$

если понимать в ней под λ длину волны де-Бройля для электрона.

Изображенная на рисунке кривая показывает распределение интенсивности пучка электронов на экране. Центральный дифракционный максимум заключен между двумя минимумами первого порядка. Его ширина b зависит от угла дифракции φ, соответствующего первому минимуму. В свою очередь, угол φ связан с шириной щели a по формуле (2). Из условия задачи видно, что угол φ весьма мал. Поэтому для углов менее 5°

$$\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{2l}.$$

Отсюда, полагая, что в формуле (2) k = 1, имеем $\lambda = \frac{ab}{2l}$. Подставив это значение λ в (1), найдем

$$\upsilon = \frac{h2l}{mab}. \qquad (3)$$

Проверим наименование единицы измерения скорости в системе СИ

$$\text{наимен. } \upsilon = \frac{Дж \cdot с \cdot м}{кг \cdot м \cdot м} = \frac{нм \cdot с}{кг \cdot м} = \frac{кгм \cdot мс}{с^2 \cdot кгм} = \frac{м}{с}.$$

Произведем вычисления, предположив, что $\upsilon << c$. Считаем электрон классической частицей, тогда m = m_0 = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг* и расчет дает

$$\upsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 0{,}5}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 4{,}55 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

Так как в действительности масса движущегося электрона не меньше его массы покоя m_0, то истинное значение скорости υ, определяемое по (3), будет не больше, чем вычисленное нами. Таким образом, предположение о том, что $\upsilon << c$, соответствует действительности и, значит полученный результат правильный. Если бы полученный результат противоречил неравенству $\upsilon << c$, это означало бы, что электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, масса которой зависит от скорости. Тогда, чтобы получить правильный ответ, надо подставить в (3) вместо m её значение

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

и решить квадратное относительно υ уравнение.

2. *Исходя из соотношения неопределенностей, найти наименьшую неточность* Δx*, с которой можно вычислить координату электрона в атоме водорода, если его средняя кинетическая энергия* $\langle E^{к} \rangle$ *в невозбужденном атоме равна* $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ *Дж.*

Дано
$\langle E^{к} \rangle = 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-19}$ кг
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Δx – ?

Анализ и решение

Как следует из соотношения неопределённостей

$$\Delta x \Delta p_x \geq h,$$

где Δx, Δp_x – неопределенности координаты и проекции импульса на ось X микрочастицы, h – постоянная Планка, неточность координаты электрона в атоме водорода

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p_x}. \qquad (1)$$

Величина Δp_x неизвестна, однако сам импульс p (точнее его среднее квадратичное значение) легко найти, так как нам известна средняя кинетическая энергия электрона. Так как $\langle E \rangle << m_0 c^2$, то электрон можно считать нерелятивистской частицей. Тогда его импульс p и кинетическая энергия $\langle E^{к} \rangle$ связаны соотношением

$$\langle E_e^{к} \rangle = \frac{m_e \upsilon^2}{2} = \frac{m_e^2 \upsilon^2}{2m_e} = \frac{p^2}{2m_e}.$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2m_e \langle E_e^{к} \rangle}. \qquad (2)$$

Теперь сравним величины Δp_x и p. Поскольку импульс $\vec{p}$ – вектор, то последняя формула позволяет лишь вычислить модуль этого вектора, тогда как его направление остается неизвестным. Поэтому проекция импульса p_x на ось X оказывается неопределенной: её величина лежит в интервале $(-p, p)$. Это значит, что неопределенность проекции импульса на ось X равна

$$\Delta p_x = 2p \text{ или } \Delta p_x \sim p,$$

то есть величины Δp_x и p одного порядка. Поэтому, заменив Δp_x в формуле (1) величиной p и учитывая соотношение (2), получим ответ

$$\Delta x \geq \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \langle E_e^{к} \rangle}}.$$

Произведя вычисления, найдем

$$\Delta x \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}18 \cdot 10^{-18}}} = 3{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Следовательно, наименьшая, допустимая соотношением неопределенностей минимальная неточность (Δx), с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка 10^{-10} м.

ЗАДАЧИ

371. Найти длину волны де Бройля $\lambda_Д$ для электрона, обладающего кинетической энергией $E^к$: 1) 100 эВ; 2) 3,00 МэВ.

372. Приняв, что минимальная энергия E нуклона в ядре равна 10,0 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры l ядра.

373. Какую энергию необходимо сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны $\lambda_Д$ уменьшилась от 100 до 50,0 пм?

374. Электрон в атоме водорода движется по первой боровской орбите. Неопределенность скорости $\Delta\upsilon$ электрона составляет 10 % от её числового значения. Определить неопределенность координаты Δx электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

375. Электрон обладает кинетической энергией $E^к$ = 1,02 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля $\lambda_Д$, если кинетическая энергия электрона уменьшится в два раза?

376. Используя соотношение неопределенностей, показать, что ядра атомов не могут содержать электронов. Принять радиус ядра $r_я = 1{,}00\cdot10^{-13}$ см.

377. Найти длину волны де Бройля $\lambda_Д$ электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$: 1) 1,00 кВ; 2) 1,00 МВ.

378. При какой относительной погрешности $(\Delta L/L)$ момента импульса электрона на первой боровской орбите его угловая координата $\Delta\varphi$ окажется совершенно неопределенной?

379. Определить, при каком числовом значении кинетической энергии $E^к$ длина волны де Бройля $\lambda_Д$ электрона равна его комптоновской длине волны $\lambda_К$.

380. Атом испустил фотон с длиной волны λ = 600 нм. Продолжительность излучения τ = 20,0 нс. Определить наибольшую неточность $\Delta\lambda$, с которой может быть измерена длина волны излучения.

Тема 27. Строение атомных ядер. Модели ядра. Дефект массы. Энергия связи ядра. Ядерные реакции

Примеры решения задач

1. *Вычислить энергию связи* $E_{св}$ *и дефект массы* Δm *ядра гелия* ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$.

Дано
He – гелий
$m_a = 6{,}6443 \cdot 10^{-27}$ кг
$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг
$m_n = 1{,}6721 \cdot 10^{-27}$ кг
$E_{св}$ – ? Δm – ?

Анализ и решение

Опытным путем было установлено, что масса покоя ядра $m_я$ всегда меньше суммы масс покоя составляющих его нуклонов. Но так как всякому изменению массы должно соответствовать изменение энергии, то, следовательно, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Энергия равная работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны (протоны и нейтроны) и удалить их друг от друга на расстояния, при которых они практически не взаимодействуют, называется *энергией связи ядра* $E_{св}$

$$E_{св} = c^2 \left\{ \left[Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_я \right\},$$

здесь c – скорость света в вакууме; m_p, m_n, $m_я$ – соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z – количество протонов в ядре; A – массовое число (число нуклонов в ядре); $(A - Z) = N$ – число нейтронов в ядре.

Это соотношение практически не нарушится, если заменить массу протона m_p массой атома водорода m_H, а массу ядра $m_я$ – массой атома m_a. Указанная замена будет означать добавление к уменьшаемому и вычитаемому выражениям, стоящим в фигурных скобках, одинаковой величины, равной Zm_e где m_e – масса электрона

$$Zm_H - m_a = Z(m_p + m_e) - (m_я + Zm_e) = Zm_p - m_я.$$

Тогда

$$E_{св} = c^2 \left\{ \left[Zm_H + (A - Z)m_n \right] - m_a \right\}. \qquad (1)$$

Это соотношение удобнее предыдущего, потому что в таблицах даются обычно не массы ядер $m_я$, а массы атомов m_a.

Величина

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_я,$$

или

$$\Delta m = \left[Zm_H + (A - Z)m_n \right] - m_a \qquad (2)$$

называется *дефектом масс ядра*. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

В состав ядра ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$, входят два протона ($Z = 2$) и два нейтрона ($A - Z$) = 2. Подставляя эти величины в формулу (1) получим

$$E_{св} = 9\cdot 10^{16}\left[2\cdot 1{,}6736\cdot 10^{-27} + 2\cdot 1{,}6721\cdot 10^{-27} - 6{,}6443\cdot 10^{-27}\right] = 4{,}239\cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Рассчитаем дефект масс по формуле (2)

$$\Delta m = \left[2\cdot 1{,}6736\cdot 10^{-27} + 2\cdot 1{,}6721\cdot 10^{-27} - 6{,}6443\cdot 10^{-27}\right] = 4{,}71\cdot 10^{-29} \text{ кг.}$$

Ответ: энергия связи ядра гелия $E_{св}$ = 4,24·10^{-12} Дж, дефект масс Δm = 4,71·10^{-29} кг.

В ядерной физике часто пользуются внесистемной единицей энергии, при которой значение энергии системы численно равно значению её массы. Она называется атомной единицей энергии (а.е.э) и её можно определить с помощью соотношения $\varepsilon = mc^2$:

1 *а.е.э.* = 1 *а.е.м.*·c^2 = 1,66·10^{-27}·*кг* (3·10^8)^2 *м*^{2}/*с*^{2} = 1,49·10^{-10} *Дж* = 931 *МэВ*.

Массу частиц в ядерной физике принято выражать в атомных единицах массы (а.е.м.), являющейся так же внесистемной единицей измерения. За 1 *а.е.м. принята* 1/12 *массы изотопа углерода* ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$*:*

1 *а.е.м.* = = 1,6605655·10^{-27} *кг.*

2. *Определить энергию E ядерной реакции деления ядра азота нейтронами* ${}^{14}\mathrm{N}(n,p){}^{14}\mathrm{C}$, *если энергии связи ядра азота и ядра углерода соответственно равны* $E_{св\ N}$ = 104,66 *МэВ и* $E_{св\ C}$ = 105,29 *МэВ*.

Дано
$E_{св\ N}$ = 104,66 МэВ
$E_{св\ C}$ = 105,29 МэВ
$E_{дел}$ – ?

Анализ и решение

Согласно условию задачи здесь нужно применить не стандартное решение с использованием таблиц масс ядер, а решение с использованием данных энергий связи. В ядерной реакции

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n = {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

число нейтронов $(N = A - Z = 8)$, а и число протонов (Z = 7) не изменяется. Поэтому, если представить энергию покоя ядра как разность энергий свободных нуклонов и энергии их связи

$$E_0 = c^2(Zm_p + Nm_n) - W_{св},$$

то энергии свободных нуклонов в уравнении закона сохранения энергии

$$E_{дел} = (W_N + W_n) - (W_C + W_p)$$

взаимно уничтожатся. Действительно,

$$E_{дел} = [c^2(7m_p + 7m_n + m_p) - E_{свN}] - [c^2(6m_p + 8m_n + m_p) - E_{свC}] = E_{свC} - E_{свN},$$

то есть энергия в ядерной реакции выделяется в виде тепла за счет изменения энергии связи ядра. Подставив данные в задаче величины, получим

$$E_{дел} = 105{,}29 - 104{,}66 = 0{,}63 \text{ (МэВ).}$$

ЗАДАЧИ

381. При бомбардировке изотопа ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ дейтонами ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ образуются две α-частицы ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ и выделяется энергия ΔE = 22,3 МэВ. Найти массу изотопа лития.

382. Какая энергия связи $E_{св}$ выделится при образовании m = 1,00 г гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ из протонов и нейтронов.

383. При соударении α-частицы с ядром бора ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ произошла ядерная реакция в результате которой образовалось два новых ядра. Одно из них – ядро атома водорода ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$. Определить порядковый номер Z и массовое число A второго ядра. Записать ядерную реакцию и определить её энергетический эффект.

384. При бомбардировке с помощью α-частиц бора ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ наблюдается вылет нейтронов. Написать уравнение ядерной реакции, приводящей к вылету одного нейтрона. Каков энергетический выход E этой реакции?

385. Определить массу m изотопа ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$, если изменение массы Δm при образовании ядра ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$ составляет $0{,}2508 \cdot 10^{-27}$ кг.

386. Найти энергию реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, считая, что кинетические энергии и направления движения ядер неизвестны.

387. Какую наименьшую энергию связи $E_{св}$ нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$?

388. При отрыве нейтрона ${}^{1}_{0}n$ от ядра гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ образуется ядро ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$. Определить энергию связи $E_{св}$, которую необходимо для этого затратить.

389. Определить энергию связи $E_{св}$ бериллия ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ и полную выделившуюся энергию E, если при реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{10}_{5}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n$ подверглись превращению все ядра, содержащиеся в 1,00 г бериллия.

390. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи $E_{св}$ ядра изотопа лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

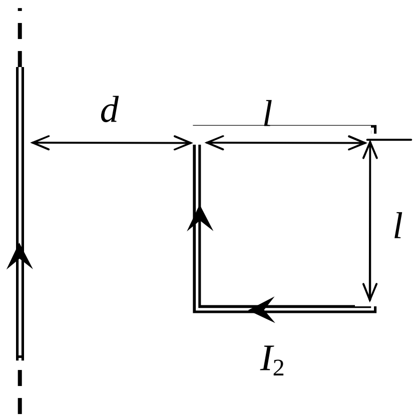


Рис. 3.1

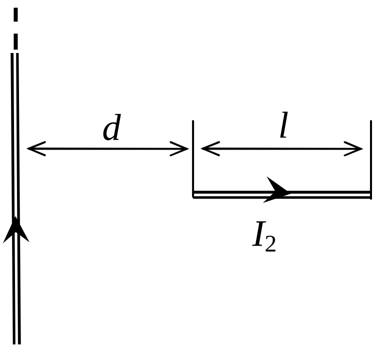


Рис. 3.2

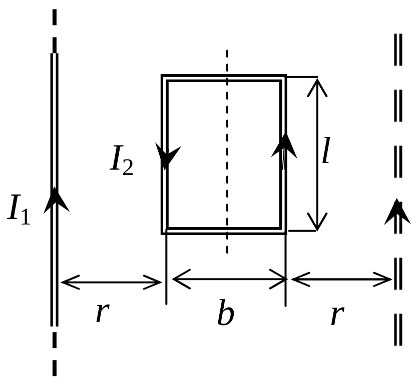


Рис. 3.3

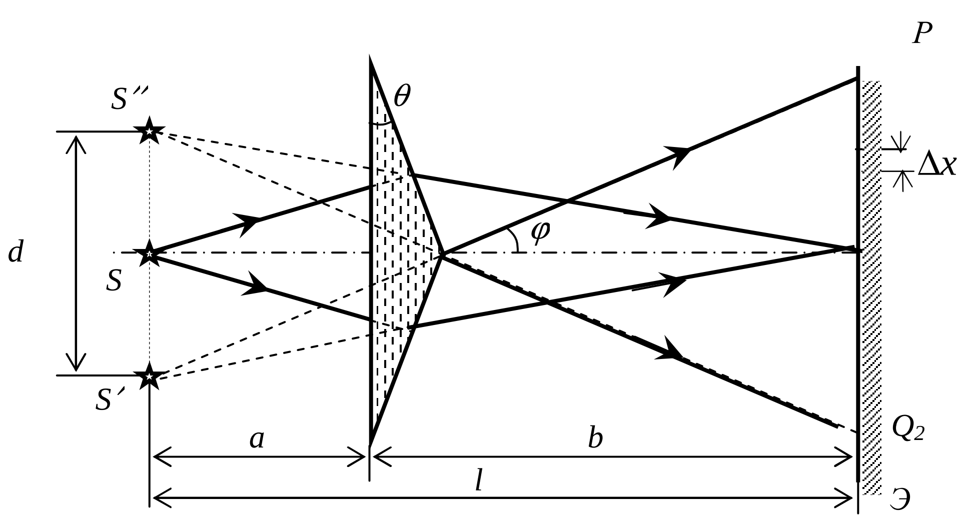


Рис. 4.1

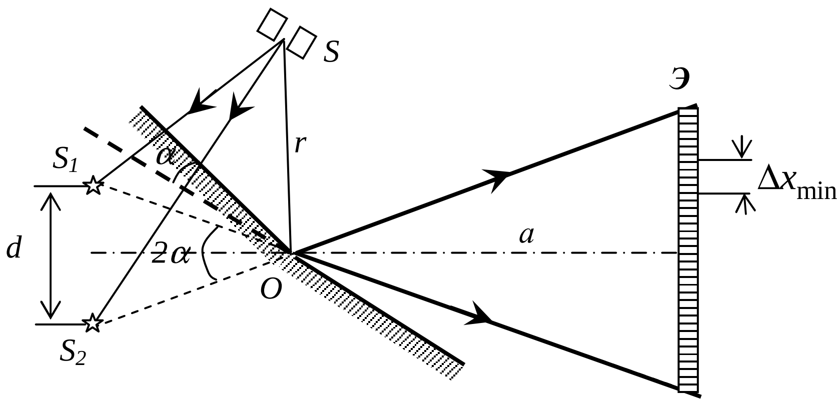


Рис. 4.2

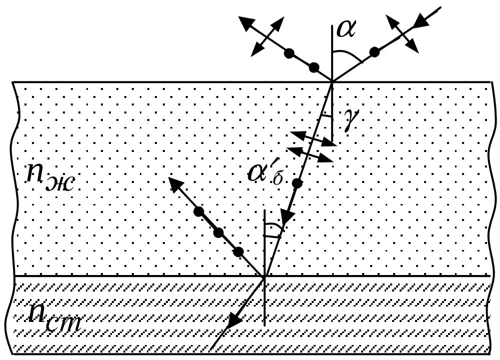


Рис. 4.3

ОГЛАВЛЕНИЕ