

**ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2 «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»
 ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТА ФН
 3 КУРСА 6 СЕМЕСТРА НА 2015/16 УЧЕБНЫЙ ГОД
 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,
 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
 И ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ»**

Задача 1. Пусть π_t - одномерный пуассоновский процесс с интенсивностью λ .

1) Найти функцию распределения случайной величины τ , равной моменту первого попадания процесса π_t во множество G . Построить ее график. Вычислить математическое ожидание τ^{-1} .

2) Смоделировать 100 траекторий пуассоновского процесса и по ним построить оценки для λ и для функции распределения τ . Привести графики.

Номер варианта	λ	$G = \{(t, \pi_t) : (t, \pi_t) \in A\}, A :$
1	2.1	$([0, 2] \times [1.5, 3.5]) \cup ([2, 3] \times [1.5, 2.5]) \cup ([3, 4] \times [2.5, 3.5])$
2	1.75	$([0, 1] \times [1.5, 2.5]) \cup ([1, 2] \times [2.5, 3.5]) \cup ([2, 3] \times [1.5, 2.5])$
3	0.9	$([1, 3] \times [2.5, 3.5]) \cup ([3, 4] \times [1.5, 2.5])$
4	0.4	$([0, 3] \times [1.5, 2.5]) \cup ([3, 4] \times [2.5, 3.5])$
5	2.5	$([1, 2] \times [0, 1.5]) \cup ([2, 4] \times [1.5, 2.5])$
6	0.8	$([0, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 3] \times [2.5, 3.5]) \cup ([3, 4] \times [1.5, 3.5])$
7	1.2	$([0, 2] \times [2.5, 3.5]) \cup ([2, 4] \times [1.5, 2.5])$
8	1	$([1, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 4] \times [0, 1.5])$
9	0.4	$([0, 1] \times [2.5, 3.5]) \cup ([1, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 3] \times [0.5, 1.5])$
10	1/3	$([0, 1] \times [3.5, 4.5]) \cup ([1, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 3] \times [2.5, 3.5])$
11	1.6	$([0, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([3, 4] \times [2.5, 3.5])$
12	1.9	$([0, 2] \times [3.5, 4.5]) \cup ([2, 4] \times [1.5, 2.5])$
13	0.5	$([0, 2] \times [2.5, 3.5]) \cup ([2, 3] \times [0.5, 1.5])$
14	2	$([1, 2] \times [1.5, 3.5]) \cup ([3, 4] \times [1.5, 3.5])$
15	2.8	$([0, 1] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 4] \times [2.5, 4.5])$
16	2/3	$([1, 3] \times [0.5, 1.5]) \cup ([3, 4] \times [1.5, 3.5])$
17	1.25	$([0, 1] \times [1.5, 2.5]) \cup ([1, 2] \times [2.5, 3.5]) \cup ([2, 3] \times [0.5, 1.5])$
18	1.5	$([0, 2] \times [1.5, 2.5]) \cup ([2, 3] \times [2.5, 3.5]) \cup ([3, 4] \times [0.5, 1.5])$
19	2.3	$([0, 1] \times [1.5, 2.5]) \cup ([1, 2] \times [2.5, 3.5]) \cup ([2, 3] \times [3.5, 4.5])$
20	3	$([1, 3] \times [2.5, 3.5]) \cup ([3, 4] \times [3.5, 4.5])$

Задача 2.

Заданы числовые характеристики случайного процесса ξ_t и линейный оператор L_t . Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и спектральную плотность процесса $L_t \eta_t = \xi_t$ и взаимную корреляционную функцию процессов ξ_t и η_t .

$$P = \frac{d}{dt}$$

Номер вар.	L_t	m_ξ	$K_\xi(\tau)$
1	$P^2 + 1$	1	$\cos 3\tau$
2	$P - P^2$	-2	$e^{-4\tau^2}$
3	$P^2 + 2P + 1$	-3	$\frac{1}{4 + \tau^2}$
4	$-P^2 + 1$	2	$\tau^2 e^{-2 \tau }$
5	$P^2 - 3P + 2$	1.5	$e^{-2 \tau } \cos 2\tau$
6	$P^2 + 5P + 4$	-1	$e^{- \tau } \sin 2 \tau $
7	$P^2 + 4P + 4$	1	$\sin \tau $
8	$P^2 + 3P + 2$	-1.5	$e^{- \tau }$
9	$P^2 + 2P$	1	$\cos 2\tau$
10	$P^2 - 1$	-2	$e^{-9\tau^2}$
11	$P^2 - 2P$	2	$\sin 2 \tau $
12	$P + P^2$	-1	$e^{-3 \tau }$
13	$P^2 - 2P + 1$	-1.5	$2 \cos \tau$
14	$P^2 + 4$	1	$e^{-\tau^2}$
15	$P^2 - P - 2$	-2	$\frac{1}{1 + \tau^2}$
16	$P^2 + P - 2$	2	$\tau^2 e^{- \tau }$
17	$P^2 - 4P + 4$	1	$e^{- \tau } \cos 2\tau$
18	$P^2 + 3P + 2$	-3	$e^{-2 \tau } \sin \tau $
19	$P^2 + 2P - 2$	2	$\sin 3 \tau $
20	$P^2 - 4$	1.5	$e^{-2 \tau }$

Задача 3.

Вариант 1,5,9,12,16. В двух ящиках поровну разложено $2n$ шаров, из которых m белых. На каждом шаге из каждого ящика берут r шаров и меняют местами. Состояние системы в момент t - число белых шаров в первом ящике.

- 1) Найти матрицу вероятностей перехода; вероятности состояний системы за первые 10 шагов, считая в начальный момент времени система находилась в любом возможном состоянии с равными вероятностями.
- 2) Для стационарного режима найти распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию для ξ_t .
- 3) Оценить скорость сходимости точного распределения к стационарному. По графику разности вероятностей предложить теоретическую оценку для скорости сходимости.

Вариант	n	m	r
1	5	3	1
5	4	3	2
9	5	4	1
13	3	4	2
17	4	4	2

Вариант 2,6,10,14,18. На столе лежит n -угольная пирамида. На основании написано число 0, на остальных гранях - $1 - (n-1)$. Грани с номерами из множества A окрашены. Число на нижней грани в момент времени t обозначим ξ_t . Каждую секунду пирамида опрокидывается с на любую грань, соседнюю с нижней, причем вероятность переворота на окрашенную в r раз больше, чем на неокрашенную; вероятности переворота на все окрашенные (неокрашенные) грани, соседние с нижней, одинаковы. Все опрокидывания независимы между собой. Найти

- 1) Найти матрицу вероятностей перехода; вероятности состояний системы за первые 10 шагов, считая в начальный момент времени система находилась в любом возможном состоянии с равными вероятностями.
- 2) Для стационарного режима найти распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию для ξ_t .
- 3) Оценить скорость сходимости точного распределения к стационарному. По графику разности вероятностей предложить теоретическую оценку для скорости сходимости.

Вариант	n	r	A
2	4	1	0
6	5	2	0,3
10	5	3	1,2,3

14	4	2	0,1,2
18	4	2	2,3

Вариант 3,7,11,15,19. В ящике лежит n шаров, из которых m белых. На каждом шаге из ящика берут r шаров и заменяют на k белых и $r - k$ черных. Состояние системы в момент t - число белых шаров в ящике.

- 1) Найти матрицу вероятностей перехода; вероятности состояний системы за первые 10 шагов, считая в начальный момент времени система находилась в любом возможном состоянии с равными вероятностями.
- 2) Для стационарного режима найти распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию для ξ_t .
- 3) Оценить скорость сходимости точного распределения к стационарному. По графику разности вероятностей предложить теоретическую оценку для скорости сходимости.

Вариант	n	m	r	k
3	5	3	2	1
7	4	3	3	2
11	5	2	2	1
15	4	2	3	1
19	6	2	3	2

Вариант 4,8,12,16,20. Два игрока играют игру на следующих правилах. Проигравший игрок отдает одну монету сопернику. Если один из игроков разорился, то второй отдает ему r монет, после чего игра продолжается. При ничьей оба игрока сохраняют свой капитал. В начальный момент времени игроки имели по n монет. Вероятности выигрыша каждой партии для игроков равны p_1 и p_2 . Пусть ξ_t - капитал первого игрока после t партий.

- 1) Найти матрицу вероятностей перехода; вероятности состояний системы за первые 10 шагов, считая в начальный момент времени система находилась в любом возможном состоянии с равными вероятностями.
- 2) Для стационарного режима найти распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию для ξ_t .
- 3) Оценить скорость сходимости точного распределения к стационарному. По графику разности вероятностей предложить теоретическую оценку для скорости сходимости.

Вариант	n	r	p_1	p_2
4	5	1	0.2	0.3
8	4	3	0.5	0.4
12	4	1	0.5	0.5
16	3	2	0.3	0.2
20	5	3	0.5	0.5

Задача 4.

Вариант 1,5,9,13,17. Клиенты приходят в банк пуассоновским потоком с интенсивностью λ . Каждый из них подает от одной до m заявок в соответствии с распределением $\mathcal{P}$. Заявки обслуживают l операционистов с интенсивностью ν . Если все операционисты заняты, то заявки становятся в очередь, максимальная длина которой равна N . Если клиент приходит в банк, когда все места в очереди заняты, то он не подает заявок. Если же свободных мест в очереди меньше, чем потенциальное число возможных заявок, то он подает любое возможное число заявок с равными вероятностями.

- 1). Найти вероятность того, что в системе не будет очереди из заявок в момент t .
- 2). В стационарном режиме найти распределение вероятностей, среднее число занятых операционистов, среднее число заявок в очереди.
- 3). Какое нужно минимальное число операционистов, чтобы в стационарном режиме средняя длина очереди была не больше 2?

Вариант	m	$\mathcal{P}$	l	N	λ	ν
1	2	$p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$	1	5	3	4
5	2	$p_1 = 0.5, p_2 = 0.5$	2	4	2	2
9	3	$p_1 = 0, p_2 = 0.4, p_3 = 0.6$	2	4	4	4
12	3	$p_1 = 0.5, p_2 = 0, p_3 = 0.5$	2	4	4	3
16	3	$p_1 = 0.8, p_2 = 0.2$	1	3	5	2

Вариант 2,6,10,14,18. Устройство состоит из n одновременно работающих элементов и m запасных. Устройство обслуживает l рабочих. Каждый элемент ломается с интенсивностью λ . При поломке работающего элемента он заменяется на запасной, если он есть, и производится ремонт сломавшегося элемента, а поломанные элементы ремонтируются, если хотя бы один рабочий свободен или становятся в очередь на ремонт. Интенсивность ремонта для каждого рабочего равна ν . Устройство отказывает, если число исправных элементов меньше n , при этом ремонт поломанных элементов продолжается с прежней интенсивностью. Нарботка на отказ – время работы устройства до первой остановки.

- 1). Найти функцию распределения и математическое ожидание времени работы устройства до первого отказа (наработка на отказ) при наличии и при отсутствии ремонта.
- 2). Для стационарного режима найти распределение вероятностей, среднее число неисправных элементов, среднее число занятых рабочих.

Вариант	n	m	l	λ	ν
2	1	4	1	2	1
6	2	2	2	1	1

10	3	3	1	1.5	2
14	2	3	2	1	0.7
18	3	2	2	0.5	1

Вариант 3,7,11,15,19.. В автопарк, рассчитанный на N мест, приезжают легковые и грузовые машины. Легковые машины приезжают пуассоновским потоком с интенсивностью λ , грузовые --- с интенсивностью μ . Легковая машина занимает 1 место, грузовая – m . В среднем каждая грузовая машина стоит 5 часов, легковая – 2 часа. Если машина приезжает, когда свободных мест нет (или недостаточно), то она уезжает.

- 1). Найти вероятность того, что грузовая машина, приехавшая в момент t , не сможет встать на стоянку. Найти эту же вероятность для легковой машины.
- 2). В стационарном режиме найти среднее число свободных мест на стоянке. Чему должно быть равно N , чтобы в среднем не менее n мест было свободно?

Вариант	N	m	n	λ	μ
3	5	1	2	3	1
7	6	2	2	1	2
11	7	3	3	1.5	0.5
15	8	2	2	0.3	1.7
19	4	1	1	1.5	1

Вариант 4,8,12,16,20. Вызовы приходят на телефонную станцию типа 1 или 2 пуассоновским потоком с интенсивностью λ . Одновременно i -я станция может обслуживать не более N_i вызовов. Среднее время разговора на i -й станции равно m_i мин. Если вызов приходит в момент, когда все каналы заняты, то он отклоняется.

- 1). Для каждой системы найти функцию распределения времени до первого отклоненного вызова. Для какой из двух систем среднее время меньше?
- 2). В стационарном режиме вычислить среднее число обслуживаемых вызовов, долю простоя системы, пропускную способность системы и пропускную способность на 1 канал.

Вариант	N_1	N_2	m_1	m_2	λ
4	5	3	2	1	2
8	6	3	3	1.5	2
12	7	4	1	0.7	1
16	8	5	2	1	1.5
20	4	3	3	2	3