

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

## **ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Домашнее задание № 2  
по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация»

Москва 2013

## **ЦЕЛИ РАБОТЫ**

1. Ознакомиться с методиками обработки результатов многократных косвенных измерений.
2. Научиться определять погрешность результатов косвенных измерений

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1. Основные теоретические положения
2. Пример выполнения работы
3. Задания для выполнения
4. Требования к оформлению отчета
5. Приложения

## 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Все измерения можно разделить на:

- **прямые** (в этом случае требуемая физическая величина измеряется непосредственно с помощью средства измерения);
- **косвенные** (в этом случае измеряется одна или несколько физических величин, а требуемая величина находится путем подстановки значений измеренных величин в определенное аналитическое соотношение).

В лабораторной практике большинство измерений – **косвенные**, и интересующая нас величина является функцией одной или нескольких непосредственно измеряемых величин.

***Косвенным измерением** называют определение значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.*

Пусть искомая величина  $y$  определяется в результате измерений некоторых величин  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , т.е. является функцией от этих величин

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \quad (1)$$

В условиях отсутствия в результатах измерений систематической погрешности рассчитаем случайную составляющую погрешности прямых измерений величин  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , а также погрешность косвенных измерений.

1. Каждая из  $k$  физических величин  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , входящих в определение искомой величины  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ , измеряется  $n$  раз.

2. Для каждой физической величины рассчитывается среднее арифметическое  $\bar{x}$  (формула 2) и СКО среднего арифметического  $\sigma_{\bar{x}}$  (формула 3).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (3)$$

3. Определяется случайная погрешность прямых измерений каждой измеряемой величины. Для этого выбирается значение доверительной вероятности  $P$ , для заданного количества измерений определяется коэффициент Стьюдента  $t_p(n)$  и с использованием выражений (4) рассчитываются значения погрешностей:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{x}_1}; \\ \Delta x_2 &= t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{x}_2}; \\ &\dots \\ \Delta x_k &= t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{x}_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Вычисляется среднее значение функции  $y$ :

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k) \quad (5)$$

5. Вычисляется среднеквадратическая ошибка функции  $y$ :

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \sigma_{\bar{x}_i} \right)^2}, \quad (6)$$

где

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  – частная производная функции  $y$  по переменной  $x_i$ ;

$\sigma_{\bar{x}_i}$  – СКО среднего арифметического соответствующей переменной  $x_i$ .

6. Выбирается значение доверительной вероятности  $P$ , для заданного количества измерений определяется коэффициент Стьюдента  $t_p(n)$  и рассчитывается доверительный интервал

$$\Delta y = t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{y}}. \quad (7)$$

Значение погрешности  $\Delta y$  можно также рассчитать с использованием выражения (8)

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \Delta x_i^2}, \quad (8)$$

где

$\Delta x_i$  – погрешность прямого измерения  $i$ -ой величины ( $i=1 \dots k$ ).

7. Рассчитывается относительная погрешность измерений

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}}. \quad (9)$$

8. Записывается результат

$$y = \bar{y} \pm \Delta y \text{ с вероятностью } P, \quad (10)$$

относительная погрешность измерений –  $\delta_y$ .

## 2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

При проведении 5 измерений ( $n=5$ ) массы  $m$ , диаметра  $d$  и длины  $l$  образца, имеющего форму цилиндра, получены следующие значения (см. табл. 1).

Таблица 1 – Результаты измерений параметров образца

$n$	$m$ , кг	$d$ , мм	$l$ , мм
1	0,349	22,38	103,5
2	0,350	22,39	103,4
3	0,351	22,40	103,6
4	0,348	22,41	103,6
5	0,352	22,42	103,4

Необходимо рассчитать случайную погрешность при определении плотности  $\rho$  образца. Расчетная формула для  $\rho$  имеет вид

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 l}. \quad (11)$$

1. С использованием выражения (2) определим среднее арифметическое каждой измеренной физической величины. Получим следующие значения:

$$\bar{m} = 0,350 \text{ кг}, \quad \bar{d} = 22,40 \text{ мм}, \quad \bar{l} = 103,5 \text{ мм}.$$

2. С помощью выражения (3) определим СКО среднего арифметического значения измеренных величин. Результаты промежуточных вычислений занесем в таблицу (см. табл. 2).

Таблица 2 – Сводная таблица результатов расчетов

$n$	$m_i$ , кг	$\Delta m_i$ , кг	$\Delta m_i^2$ , кг <sup>2</sup>	$d_i$ , мм	$\Delta d_i$ , мм	$\Delta d_i^2$ , мм <sup>2</sup>	$l_i$ , мм	$\Delta l_i$ , мм	$\Delta l_i^2$ , мм <sup>2</sup>
1	0,349	0,001	0,000001	22,38	0,020	0,0004	103,5	0,000	0,00
2	0,350	0,000	0,000000	22,39	0,010	0,0001	103,4	0,100	0,01
3	0,351	0,001	0,000001	22,40	0,000	0,0000	103,6	0,100	0,01
4	0,348	0,002	0,000004	22,41	0,010	0,0001	103,6	0,100	0,01
5	0,352	0,002	0,000004	22,42	0,020	0,0004	103,4	0,100	0,01
	$\bar{m} = 0,350$		<b>0,000010</b>	$\bar{d} = 22,40$		<b>0,0010</b>	$\bar{l} = 103,5$		<b>0,04</b>

Используя результаты промежуточных вычислений, рассчитаем СКО:

$$\sigma_{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta m_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,000010}{5 \cdot 4}} = 0,0007071 \text{ кг}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta d_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0010}{5 \cdot 4}} = 0,007071 \text{ мм}$$

$$\sigma_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta l_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,04}{5 \cdot 4}} = 0,04472 \text{ мм}$$

3. Рассчитаем случайную погрешность измерений каждой величины. Выбираем доверительную вероятность  $P=0,95$ . По таблице (приложение 1) определяем значение коэффициента Стьюдента  $t_p = 2,7764$  и рассчитываем значения погрешностей:

$$\Delta m = t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{m}} = 2,7764 \cdot 0,0007071 = 0,001963 \text{ кг} \approx 0,0020 \text{ кг}$$

$$\Delta d = t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{d}} = 2,7764 \cdot 0,007071 = 0,01963 \text{ мм} \approx 0,020 \text{ мм}$$

$$\Delta l = t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{l}} = 2,7764 \cdot 0,04472 = 0,12416 \text{ мм} \approx 0,12 \text{ мм}$$

4. Рассчитаем среднее значение плотности  $\bar{\rho}$ , используя выражение (11).  
При расчете  $\bar{\rho}$  значения диаметра  $\bar{d}$  и длины  $\bar{l}$  укажем в метрах.

$$\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\pi\bar{d}^2\bar{l}} = \frac{4 \cdot 0,350}{3,1416 \cdot (22,40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 103,5 \cdot 10^{-3}} = 8581 \text{ кг/м}^3. \quad (12)$$

4. Вычислим абсолютную случайную ошибку определения плотности образца. Для этого с использованием выражения (6) рассчитаем СКО  $\bar{\rho}$ .

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \sigma_{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \cdot \sigma_{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l} \cdot \sigma_{\bar{l}}\right)^2}, \quad (13)$$

где

$\frac{\partial \rho}{\partial m}, \frac{\partial \rho}{\partial d}, \frac{\partial \rho}{\partial l}$  – частные производные.

Выведем выражения для расчетов частных производных, используя формулу для определения плотности (11) с учетом выражения (12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial m} &= \frac{4}{\pi\bar{d}^2\bar{l}} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{m}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial d} &= \frac{-8\bar{m}}{\pi\bar{d}^3\bar{l}} = -\frac{2 \cdot \bar{\rho}}{\bar{d}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial l} &= \frac{-4\bar{m}}{\pi\bar{d}^2\bar{l}^2} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{l}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя частные производные (14) в выражение (13) получим

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \bar{\rho} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_{\bar{l}}}{\bar{l}}\right)^2}. \quad (15)$$

Рассчитаем значение  $\sigma_{\bar{\rho}}$  :



$$\sigma_{\bar{\rho}} = 8581 \cdot \sqrt{\left(\frac{0,0007071}{0,350}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,007071}{22,40}\right)^2 + \left(\frac{0,04472}{103,5}\right)^2} = 18,54 \text{ кг/м}^3$$

Выбираем доверительную вероятность  $P=0,95$ . По таблице (приложение 1) определяем значение коэффициента Стьюдента  $t_p = 2,7764$  и рассчитываем доверительный интервал:

$$\Delta\rho = t_p(n) \cdot \sigma_{\bar{\rho}} = 2,7764 \cdot 18,54 = 51,468 \text{ кг/м}^3 \approx 51 \text{ кг/м}^3.$$

5. Рассчитаем относительную погрешность измерений:

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{51,468}{8581} = 0,005998 \approx 0,6\%.$$

6. Запишем результат:

$$\rho = (8581 \pm 51) \text{ кг/м}^3, \text{ с } P = 0,95;$$

$$\delta = 0,6\%.$$

### **3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ**

#### **3.1. ЗАДАНИЕ**

1. Изучить типы измерений.
2. Изучить порядок обработки результатов косвенных измерений.
3. На основе данных результатов косвенных измерений определить значения искомой физической величины.

#### **3.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ**

1. Получить задание и исходные данные у преподавателя.
2. Рассчитать погрешности прямых измерений каждой физической величины, используя выражения (2), (3) и (4). Результаты промежуточных вычислений занести в таблицу.
3. Рассчитать среднее значение исследуемой физической величины, определяемой путем косвенных измерений, используя выражение (5).
4. Определить абсолютную погрешность измерения исследуемой физической величины, используя выражения (6) и (7), либо с помощью выражения (8).
5. Определить относительную погрешность измерения исследуемой физической величины, используя выражения (9).
6. Записать результат измерений.

#### **4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА**

Отчет о выполнении домашнего задания должен содержать нижеприведенные материалы и удовлетворять следующим условиям:

**1. Титульный лист** с обязательным указанием названия работы, Ф.И.О. студента, номера группы, Ф.И.О. преподавателя, проверяющего задание (приложение 2).

**2. Основные теоретические положения**, определения и формулы.

**3. Основные расчеты**

- исходные данные;
- расчетные формулы;
- результаты промежуточных и окончательных расчетов.

**4. Выводы** по работе.

Отчет по домашнему заданию выполняется рукописным способом, аккуратно, формулы записываются четко.

## 5. ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

**Значения t-критерия Стьюдента**  
для уровня значимости (0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3)

<b>n-1</b>	<b>P – 0,01</b>	<b>P – 0,05</b>	<b>P – 0,1</b>	<b>P – 0,15</b>	<b>P – 0,2</b>	<b>P – 0,25</b>	<b>P – 0,3</b>
<b>1</b>	63,65674	12,7062	6,313752	4,1653	3,077684	2,414214	1,962611
<b>2</b>	9,924843	4,302653	2,919986	2,281931	1,885618	1,603567	1,386207
<b>3</b>	5,840909	3,182446	2,353363	1,92432	1,637744	1,422625	1,249778
<b>4</b>	4,604095	2,776445	2,131847	1,778192	1,533206	1,344398	1,189567
<b>5</b>	4,032143	2,570582	2,015048	1,699363	1,475884	1,300949	1,155767
<b>6</b>	3,707428	2,446912	1,94318	1,650173	1,439756	1,273349	1,134157
<b>7</b>	3,499483	2,364624	1,894579	1,616592	1,414924	1,254279	1,119159
<b>8</b>	3,355387	2,306004	1,859548	1,592221	1,396815	1,240318	1,108145
<b>9</b>	3,249836	2,262157	1,833113	1,573736	1,383029	1,229659	1,099716
<b>10</b>	3,169273	2,228139	1,812461	1,559236	1,372184	1,221255	1,093058

**Образец оформления титульного листа отчета о домашнем задании**

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н.Э. БАУМАНА

Кафедра РЛ-5 «Элементы приборных устройств»

**ОТЧЕТ**

о выполнении домашнего задания по курсу  
«Метрология, стандартизация и сертификация»

**ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ  
КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

(Домашнее задание № 2)

Студент \_\_\_\_\_

Группа \_\_\_\_\_

Вариант № \_\_\_\_\_

Дата выполнения \_\_\_\_\_

Преподаватель \_\_\_\_\_

Москва – 2013