Рассмотрим рынок с временным параметром, принимающем значения с отрезка $[0, T], T > 0$. Разобьем этот интервал на m равных частей, получив при этом временную шкалу с шагом $\tau = \frac{T}{m}$. Рассмотрим (B, S, τ)-рынок:

$$B_t^\tau - B_{t-\tau}^\tau = r(\tau) * B_{t-\tau}^\tau, \qquad B_0^\tau > 0, r(\tau) > 0$$

$$S_t^\tau - S_{t-\tau}^\tau = \rho_t(\tau) * S_{t-\tau}^\tau, \qquad S_0^\tau > 0,$$

где $(\rho_t(\tau))$ – стохастическая последовательность независимых доходностей, принимающая значения $a(\tau)$ и $b(\tau)$ с вероятностями p_τ и $1 - p_\tau$ соответственно, причем $-1 < a(\tau) < r(\tau) < b(\tau)$.

Кроме того, будем рассматривать мартингальную вероятность, то есть такую, относительно которой

$$E^* \left(\frac{S_{k\tau}}{B_{k\tau}}\right) = E^* \left(\frac{S_0}{B_0}\right), k = 0, 1, \dots, m$$

Известно, что параметр распределения Бернулли, определяющий такую вероятность, имеет вид:

$$p_\tau^* = \frac{r(\tau) - a(\tau)}{b(\tau) - a(\tau)}$$

Предположим, что вышеописанные параметры (B, S, τ)-рынка удовлетворяют условиям:

$$1 + r(\tau) = e^{r\tau}, 1 + b(\tau) = e^{\sigma\sqrt{\tau}}, 1 + a(\tau) = e^{-\sigma\sqrt{\tau}}, r \geq 0, \sigma > 0$$

1. Показать, что распределение процесса $(S_t^\tau)_{t\in[0,T]}$ сходится (относительно мартингальной вероятности) при $\tau \to 0$ к распределению процесса

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t},$$

где W_t – винеровский процесс.

2. Показать, что распределение процесса

$$A_t^\tau = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S_{k\tau}^\tau$$

Сходится к

$$A_t = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

Каков порядок сходимости?