МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ФИЛИАЛ В Г.НИЖНЕВАРТОВСКЕ

КАФЕДРА «ИНФОРМАТИКА»

Жарова Н.Р.

«Дифференциальные и разностные уравнения»

Методические указания
к выполнению заданий СРС для студентов направления
«Бизнес-информатика»

Нижневартовск
2014

УДК 517.2(07)

Одобрено
редакционно-издательским советом филиала
(протокол № 2 от 16.10.2014)

«Дифференциальные и разностные уравнения»: Методические указания к выполнению заданий СРС для студентов направления «Бизнес-информатика» / Н.Р. Жарова. – Нижневартовск, 2014. – 13 с.

Изложены основные правила использования стандартных функций для решения дифференциальных уравнений в программе MathCAD. Текст иллюстрирован примерами. Задания составлены в соответствии с ФГОС-3 по направлению обучения «Бизнес-информатика» и предназначены для формирования компетенций по данной дисциплине.

Рецензент:
профессор кафедры «Информатика», д.ф.-м.н., Р.Г. Мухарлямов

Утверждено на заседании кафедры
Протокол №2
«9» октября 2014 год

Основные этапы решения дифференциальных уравнений в системе Mathcad

Первый важный шаг подготовки решения дифференциальных уравнений (ДУ) в системе Mathcad – представление уравнения в форме, воспринимаемой системой. Для этого необходимо избавиться от производных выше второго порядка методом замены и представить исходное дифференциальное уравнение высшего порядка в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решить ДУ 2-го порядка:

$$a_2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) \pm a_1 \frac{d}{dx} y(x) \pm a_0 y(x) = 0.$$

Дифференциальное уравнение можно записать, используя операторы типа $\frac{d^n}{dx^n}$ и $\frac{d}{dx}$ или в виде $y'(x)$ (штрих вводится при помощи сочетания клавиш CTRL и F7, при необходимости нажать несколько раз).

Это уравнение содержит вторую производную, которая может быть представлена как производная от первой.

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} y(x)\right).$$

Перед представлением дифференциального уравнения в виде системы уравнений первого порядка произведем следующие замены:

$$y(x) = y_0,$$
$$\frac{d}{dx} y(x) = y_1. \qquad (1)$$

Теперь исходное дифференциальное уравнение может быть представлено в виде системы двух уравнений первого порядка, при этом вторая производная выражается через уравнение:

$$\frac{d}{dx} y(x) = y_1,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{a_1 \frac{d}{dx} y(x) \pm a_0 y(x)}{a_2}. \qquad (2)$$

В уравнении (2) произведем замену производных в соответствии с (1):

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{a_1 y_1 \pm a_o y_o}{a_2}.$$

Далее нужно зафиксировать систему уравнений в векторе – столбце D, где каждый элемент соответствует правой части определенного дифференциального уравнения в системе:

$$D(x,y)=\begin{pmatrix} y_1 \\ \dfrac{a_1 y_1 \pm a_0 y_0}{a_2} \end{pmatrix}.$$

После этого вводится вектор начальных приближений (начальные приближения известны из условия задачи):

$$y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Затем определяется интервал интегрирования (например x1=0, x2=20) и число шагов интегрирования (например n=100). Так как результат будет получен в виде матрицы (таблицы), следует дать ей имя. После чего можно использовать одну из встроенных функций решения дифференциальных уравнений – **Bulstoer**, **Rkadapt**, **rkfixed**.

Имя функции можно набрать с клавиатуры или вызвать при помощи кнопки **Вставить функцию.**

Появится одноименное диалоговое окно (рисунок 1). Необходимые функции находятся в категории Differential Equation Solving (Решение дифференциальных уравнений).

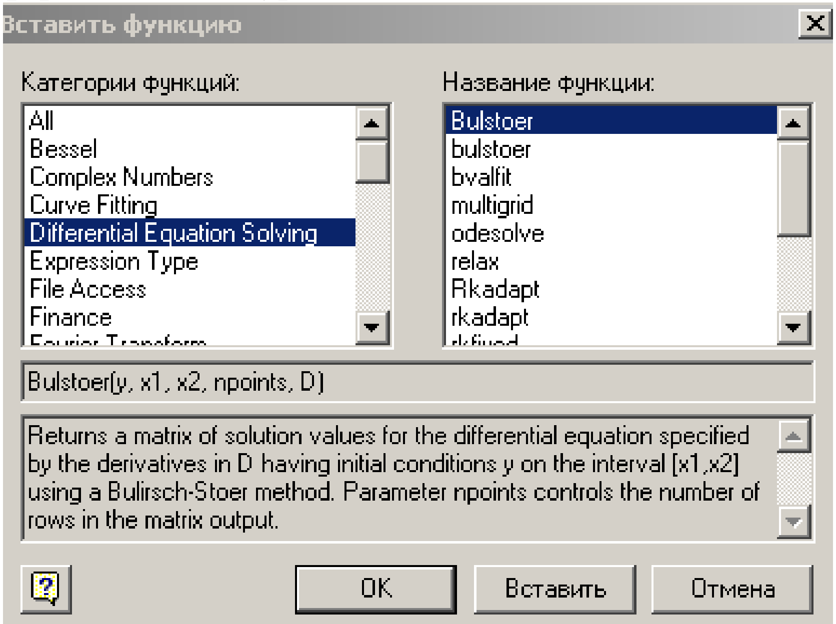


Рисунок 1 – Диалоговое окно **Вставить функцию**

Синтаксис функций:

X=Bulstoer(y,x1,x2,n,D),

X=Rkadapt(y,x1,x2,n,D),

X=rkfixed(y,x1,x2,n,D),

где y – имя вектора начальных приближений;

x1 – начальное значение независимой переменной;

x2 – конечное значение независимой переменной;

n – число шагов интегрирования;

D – правые части системы уравнений, записанные в векторе в символьном виде.

Пример 1. Решить уравнение:

$$3\frac{d^2}{dx^2}y(x)+2\frac{d}{dx}y(x)+5y(x)=4+x\,.$$

Предварительный этап.

Определяем элементы замены:

$$y(x)=y_0,$$

$$\frac{d}{dx}y(x)=y_1,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=\frac{-2\frac{d}{dx}y(x)-5y(x)+4+x}{3}$$

или, произведя замену:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=\frac{-2y_1-5y_o+4+x}{3}\,.$$

Составляем систему уравнений:

$$\frac{d}{dx}y(x)=y_1,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=\frac{-2y_1-5y_o}{3}\,.$$

Решение. В рабочем листе MathCAD вводим вектор системы, вектор начальных значений (рисунок 2). Начальное, конечное значения независимой переменной и число шагов интегрирования указываются в численном виде.

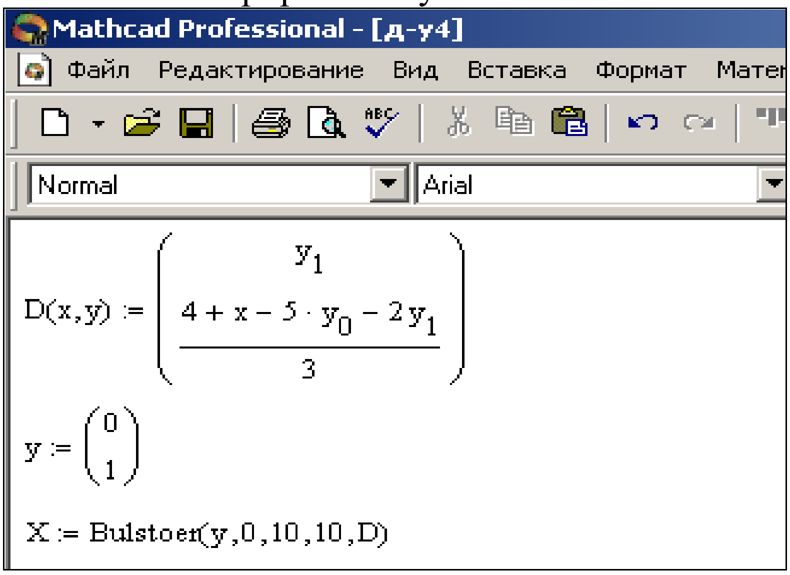
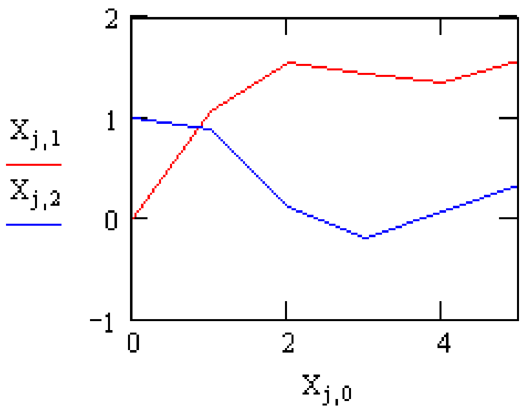


Рисунок 2 – Ввод данных в рабочем листе

Решение выводится в виде матрицы (рисунок 3). Первый столбец содержит значения независимой переменной на каждом шаге интегрирования. Второй столбец – значения функции y(x). Третий столбец – значения второй искомой функции и т. д. Если результаты расчета помещены, например, в матрицу X, то значения первого столбца (независимой переменной) будут определяться переменной $X_{j,0}$, значения функции – переменной $X_{j,1}$ т. д. Индекс j определяет число рассматриваемых значений (строк) и должен быть определен заранее в виде дискретной переменной, например j: =1..100.

Полученные результаты можно представить графически (рисунок 3).

$j := 0..10$



X =

	0	1	2
0	0	0	1
1	1	1.061	0.891
2	2	1.554	0.104
3	3	1.446	-0.199
4	4	1.354	0.068
5	5	1.58	0.344
6	6	1.941	0.334
7	7	2.202	0.187
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Рисунок 3 – Табличное и графическое представление результатов решения

Пример 2. Материальная точка массой **m** движется вдоль оси **y** и на нее в каждый момент действует сила, пропорциональная отклонению точки от начала координат и направленная к началу координат (Например, при перемещении массы производится сжатие пружины). Найти закон движения точки.

Обозначим ординату движущейся точки в момент времени **t** через **y(t)**. Тогда $\frac{d^2y}{dt^2}$ – ускорение точки в этот момент. Согласно второму закону Ньютона сила, действующая на тело, равна произведению его массы на ускорение. Поэтому

$$F = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$

где **F** – сила, действующая на материальную точку. По условию задачи она пропорциональна отклонению движущейся точки от начала координат и направлена в его сторону:

$F = -k \cdot y(t)$.

Функция y(t) удовлетворяет уравнению

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y(t).$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}y(t) = x1,$$

$$\frac{dx2}{dt} = -\frac{k \cdot y(t)}{m}.$$

Первый шаг в подготовке процесса решения системы уравнений включает следующие операции:

– представление правых частей системы дифференциальных уравнений в форме вектора, например D, в символьном виде;

– определение начального и конечного значений независимой переменной времени протекания исследуемого процесса t1 и t2;

– определение фиксированного числа шагов интегрирования – n;

– определение вектора начальных значений искомых функций – y.

На втором этапе проводится решение, и его результаты представляются в графическом и табличном виде (рисунок 4).

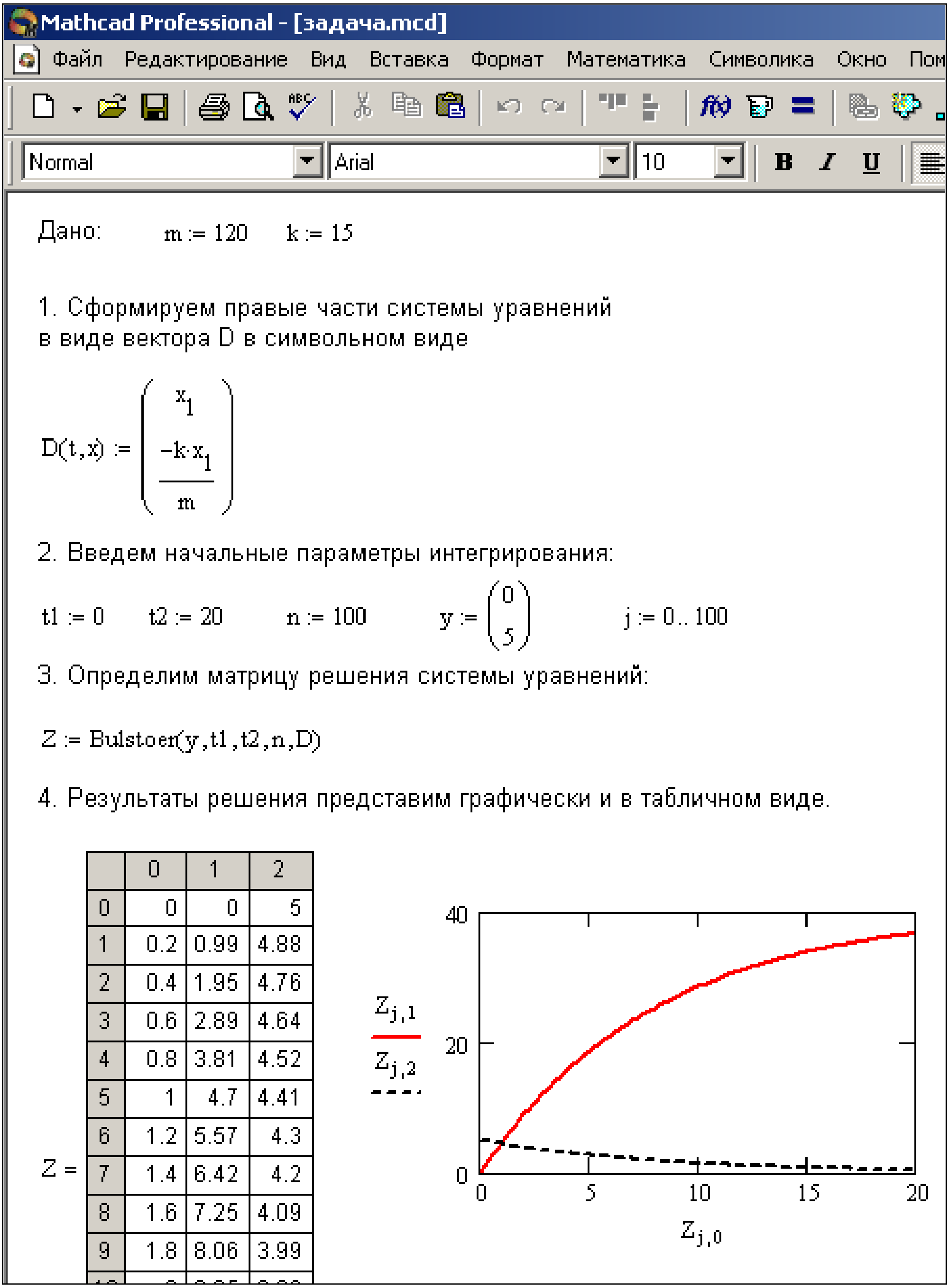


Рисунок 4 – Решение задачи, графическое и табличное представление результатов решения

Решение дифференциальных уравнений с помощью функции odesolve

Также для решения дифференциальных уравнений используется функция **odesolve**.

Синтаксис функции:

odesolve(x,b,step),

где x – переменная интегрирования;

b – конечный интервал интегрирования;

step – размер шага (необязательный параметр).

Этапы решения:

– введите ключевое слово **Given** для использования решающего блока;

– задайте дифференциальное уравнение и его ограничения, используя булево равенство (Ctrl=). Дифференциальное уравнение может быть записано с использованием операторов типа $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d^2}{dx^2}$ или в виде y'(x) и y''(x). Ограничения даются в форме y(a) =b или y'(a) =b. Конечное значение b должно превышать начальное. Ограничения могут быть заданы в любом порядке, но дифференциальному уравнению n-го порядка должны соответствовать n независимых ограничений вида равенства. Ограничения типа неравенств не разрешаются. Для начального приближения вводятся значения для y(x) и его первых производных в начальной точке. Mathcad проверит правильность типа и числа ограничений;

– введите функцию odesolve(x;b,step) с переменной интегрирования x и числовыми значениями конечной точки b и шага step. Решение можно представить в виде графика зависимости y(x) от x. Решение и вывод результатов представлены на рисунке 5.

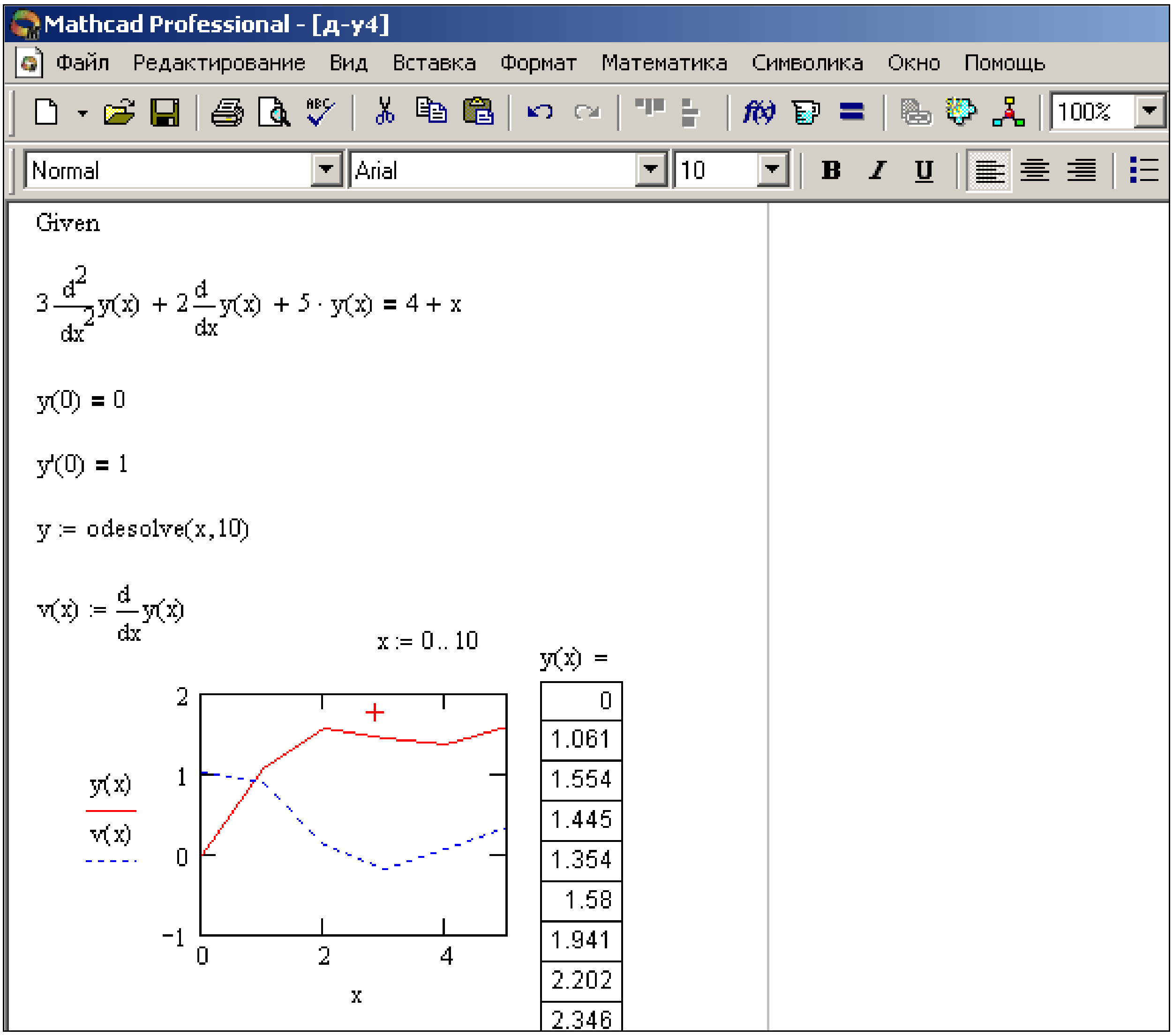


Рисунок 5 – Решение дифференциального уравнения при помощи функции odesolve и вывод результатов

Задание для самостоятельной работы

Решить дифференциальное уравнение (по варианту, см. таблицу) двумя вышеописанными способами. Начальные приближения принять произвольные. Результаты решения отобразить в виде таблицы и графически.

№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y'''(x) + \sin(y'(x)) \cdot y(x) = x \cdot e^{-x}$
2	$y''(x) + y(x) = \cos(3 \cdot x)$
3	$y''(x) - \dfrac{y'(x)}{x-1} = x \cdot (x-1)$
4	$\dfrac{d^3}{dx^3}y(x) = x \cdot \sin(x)$
5	$y''''(x) - 2y'''(x) + y''(x) = 0$
6	$(2y(x) + 3) \cdot \dfrac{d^2}{dx^2}y(x) - 2 \cdot \left(\dfrac{d}{dx}y(x)\right)^2 = 0$
7	$y'''(x) + y''(x) - 9 \cdot y'(x) + y(x) = x^2 \cdot e^{4x}$
8	$y'''(x) \cdot (x-1) - y''(x) = 0$
9	$y''''(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x))$
10	$\left(1 - x^2\right) \cdot y'' - x \cdot y' + y = 2$

11	$1.5\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 0.85\frac{d}{dx}y(x) + 14\cdot y(x) = 1.4\cos(x)$
12	$y'''(x)\cdot(\sin(x))^4 = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$
13	$\left(1 - x^2\right)y''(x) - x\cdot y'(x) + y(x) = 0$
14	$2\cdot x\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x) + \frac{d^2}{dx^2}y(x) = \frac{d^2}{dx^2}y(x) - 9$
15	$\left(1 + x^2\right)\cdot y''(x) + 1 + (y'(x))^2 = 0$
16	$1 + (y'(x))^2 = y(x)\cdot y''(x)$
17	$y''(x) - \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 0$
18	$y(x)\cdot y''(x) - (y'(x)) = 0$
19	$(y''(x))^2 = 1 + (y'(x))^2$
20	$y(x)\cdot y''(x) - (y'(x))^2 = y(x)^2\cdot\ln(y(x))$