Расчетные задания

Задача 1. Найти и изобразить области определения следующих функций:

№	$z(x,y)$	№	$z(x,y)$
1	$z=\dfrac{\sqrt{y^2-2x+4}}{2y}$	**15**	$z=\ln\,(x^2+y^2-3)+\sqrt{\ln y}$
2	$z=\ln(9-y^2-x^2)+\sqrt{\ln x}$	**16**	$z=\dfrac{\ln\ (y)}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$
3	$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}$	**17**	$z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-6}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
4	$z=\dfrac{e^{\sqrt{s^2+y^2-1}}}{\sqrt{x+y}}$	**18**	$z=\arccos\,(x+y)$
5	$z=\ln(y)+\ln\,(\sin x)$	**19**	$z=\sqrt{4-x^2+y}$
6	$z=\arcsin(x-y)$	**20**	$z=\sqrt{\ln(x^2+y^2)}$
7	$z=\sqrt{y^2-x^2}$	**21**	$z=\sqrt{xy}+\sqrt{x-y}$
8	$z=\ln(x)+\ln\,(\cos y)$	**22**	$z=\dfrac{\ln\,(y-1)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$
9	$z=\dfrac{\ln\,(x)}{\sqrt{x^2+y^2-6}}$	**23**	$z=e^{\sqrt{s^2-y^2}}$
10	$z=\ln(x^2-2y+4)+\sqrt{x}$	**24**	$z=\ln\,(4-y^2-x^2)+\sqrt{x}$
11	$z=\sqrt{9-y^2-x^2}+\sqrt{xy}$	**25**	$z=\dfrac{\ln\,(2x^2-y+6)}{\sqrt{x}}$
12	$z=\arccos\,(x+2y)$	**26**	$z=\sqrt{2x^2-y^2}$
13	$z=\dfrac{\ln\,(2x)}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$	**27**	$z=\arcsin\,(2x-y)$
14	$z=\ln\,(y^2-3x+6)$	**28**	$z=\ln(x)+\ln\,(\sin y)$

Задача 2. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=f\,(x,y)$ данному уравнению

№	$z=f\,(\,x,y)$	уравнение
1.	$z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$	$(z'_x)^2-\left(z'_y\right)^2=z''_{yy}-z''_{xx}$
2.	$z=e^{xy}$	$x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0$

№	$z = f(x, y)$	уравнение
3.	$z = x^{y^2}$	$z_{yy} - z_{y}{}^{y} = \dfrac{2}{z}$
4.	$z = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$y z''_{yy} - x z''_{xy} = 0$
5.	$z = \sin(x - 3y)$	$z''_{yy} - 9 z''_{xx} = 0$
6.	$z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$	$z'_{xx} + z'_{yy} = 0$
7.	$z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$	$z'_x z''_{xy} - z'_y z''_{xx} = 0$
8.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z'_y \cdot z'_x + z \cdot z'_x{}'_y = 0$
9.	$z = e^{x^2 + xy + y^2}$	$\dfrac{z'_x \cdot z'_y}{z} + z = z'_{xy}$
10.	$z = \cos\left(x + y^2\right)$	$z''_{yy} - 2 z'_x = 2y z''_{xy}$
11.	$z = \sin^2(y - 3x)$	$9 z''_{yy} = z''_{xx}$
12.	$z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$z'_{xx} + z'_{yy} = 0$
13.	$z = (y - x)\sin y + \cos x$	$(x - y) z''_{xy} - z'_y = 0$
14.	$z = \dfrac{y}{x}$	$x^2 z''_{xx} + 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$
15.	$z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0$
16.	$z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$	$\dfrac{1}{x} z'_x + \dfrac{1}{y} z'_y - \dfrac{z}{y^2} = 0$
17.	$z = e^{xy}$	$x^2 z''_{xx} - 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} + 2xyz = 0$
18.	$z = \arcsin(xy)$	$z''_{xx} + z''_{yy} = xy(x^2 + y^2) z''_{xy}$
19.	$z = tg\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$z'_{xy} + \dfrac{x}{y} z'_{xx} = 0$
20.	$z = \sin(x + 7y)$	$z''_{yy} - 49 z''_{xx} = 0$
21.	$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$	$z''_{xx} + 2 z''_{xy} + z''_{yy} = 0$
22.	$z = x \sin y + y \cos x$	$z''_{xx} + z''_{yy} + z = 0$
23.	$z = x e^{xy}$	$x^2 z''_{xx} + 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$

№	$z = f(x, y)$	уравнение
24.	$z = y^{x}$	$x \cdot z'_{x} + z = y \cdot z''_{xy}$
25.	$z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$	$z''_{xx} + z''_{yy} = 0$
26.	$z = \dfrac{\sin x}{\cos y}$	$z'_{x} \cdot z'_{y} = z \cdot z''_{xy}$
27.	$z = \dfrac{x}{y}$	$xz'_{xy} - z'_{y} = 0$
28.	$z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$	$z'_{xy} = z'_{yx}$

Задача 3. Найти производные сложной функции.

№	$u(x, y)$	*производные*
1	$u = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right), \quad y = \frac{1}{3}x^3 + x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx}$ – ?
2	$u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad x = \sin t,\ y = \cos t$	$\frac{du}{dt}$ – ?
3	$u = x^{y} + y^{x}, \quad x = v^2 + w^2,\ y = w^2 - v^2$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v}$ – ?
4	$u = x^2 z + y^3 + yz^3, \quad x = t^2 + 1,\ y = t^3,\ z = 4 - t^4$	$\frac{du}{dt}$ – ?
5	$u = \frac{v}{w} + \frac{w}{v}, \quad w = y\sin x,\ v = x\cos y$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ – ?
6	$u = arc\,tg\left(\frac{x+1}{y}\right), \quad x = e^{2t},\ y = \ln(2t+1)$	$\frac{du}{dt}$ – ?
7	$u = e^{x}\ln\left(x^2 + y^2\right), \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx}$ – ?
8	$u = \sqrt{v - w} + \ln(v^2 + w), \quad w = y\,e^{x},\ v = xe^{y}$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ – ?
9	$u = xz^3 + x^2y^2 + y^3z, \quad x = t^{-2}, \quad y = t^3,\ z = t^{-4}$	$\frac{du}{dt}$ – ?
10	$u = \frac{e^{xy}}{\sqrt{x + y}}, \quad x = v\cos w,\ y = w\sin v$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v}$ – ?
11	$u = \frac{x^2 + xy}{1 + y}, \quad y = x\cos x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx}$ – ?

№	$u(x,y)$	*производные*
12	$u = y^2\, tg(x), \quad x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t$	$\frac{du}{dt} - ?$
13	$u = \frac{v}{w^2} + 2w, \quad w = \sqrt{y}\, x,\ v = y \cos x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} - ?$
14	$u = \frac{e^x + e^y}{x^2}, \quad y = x \ln x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx} - ?$
15	$u = x\, arctg(xy), \quad x = e^t + 1, y = t^3$	$\frac{du}{dt} - ?$
16	$u = \frac{e^{xy}}{\sqrt{x+y}}, \quad x = v \cos w,\ y = w \sin v$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v} - ?$
17	$u = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy}}, \quad y = x\, tgx$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx} - ?$
18	$u = x^2 y^3 + xz^3, \quad x = t^2 + 1,\ y = t^3,\ z = \sin t$	$\frac{du}{dt} - ?$
19	$u = \frac{\arcsin v}{w^2}, \quad w = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}y^7,\ v = \ln(xy)$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} - ?$
20	$u = e^{xy}\sqrt{y}, \quad x = \ln(w),\ y = w \sin v$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v} - ?$
21	$u = \frac{xy - 2y^2}{\sqrt{1+y}}, \quad y = xe^x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx} - ?$
22	$u = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right), \quad x = \sin t,\ y = \cos t$	$\frac{du}{dt} - ?$
23	$u = tg(xy), \quad x = \ln\left(w^2 + v^2\right), y = \frac{w^2}{v^2}$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v} - ?$
24	$u = \frac{v + 2w}{w^3}, \quad w = x^5 + y^7 - 2,\ v = \cos(xy)$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} - ?$
25	$u = \ln\left(e^x + e^{-y}\right), \quad y = \frac{1}{3}x^3 + x$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{dx} - ?$
26	$u = arctg\left(\frac{x}{y}\right), \quad x = \cos t,\ y = \sin t$	$\frac{du}{dt} - ?$
27	$u = arc\,tg(xy), \quad x = \ln\left(w^2 - v^2\right), y = wv^2$	$\frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial u}{\partial v} - ?$
28	$u = x^2 y^3 z^4, \quad x = \ln(t+1),\ y = t^2 + 1,\ z = t^3$	$\frac{du}{dt} - ?$

Задача 4. Найти первую производную неявной функции.

№	функция	№	функция
1.	$\sin\left(x^3 y + y^3\right) + 2x = 5$.	15.	$z = x + y^2 tg\, z$
2.	$x^2 - y^2 - z^2 = \cos z$.	16.	$5z - \ln\left(x^2 + y^2\right) = 2$
3.	$e^{xz} + 2yz = x^2 + y^2$	17.	$xe^{2y} - y\ln x = 7$
4.	$x^2 y^3 + xz^3 + y^2 = 0$	18.	$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$
5.	$\ln\left(x^2 + y^2\right) = arctg(xy)$	19.	$x^2 y^3 - 2x^2 - 3y + 5xy^5 = 0$
6.	$3x^2 z + z^3 = 2xy$	20.	$xz^5 + y^3 z - x^3 = 0$
7.	$xe^y + ye^x = 2$	21.	$x^y = y^x$
8.	$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3z = 1$	22.	$x^2 + y^2 + z^2 = \sin z$
9.	$x^4 y^2 + 2x^2 y^2 + 3x^2 y^4 = 2$	23.	$tg\,(x + y) - 2x^2 y^3 = 1$
10.	$2(x + y + z) = e^{x+y+z} - 1$	24.	$xyz + z^3 = 7x$
11.	$\cos\left(\frac{x}{y}\right) = xy$	25.	$arctg(xy) = \frac{x}{y}$
12.	$xyz + 5z^2 = 2x$	26.	$x + y + z + arctg\, z = 0$
13.	$x^2 y - y^2 z + xe^z = 0$	27.	$\cos\left(x^2 y + y^2\right) + 2x = 2$
14.	$x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$	28.	$2x^2 y^3 + xz^3 + y^2 z = 0$

Задача 5. Найти дифференциалы n -го порядка $\left(d^n u\right)$ следующих функций (x, y, z - независимые переменные).

1.	$u = e^y \cos x,\quad n = 3.$	**7.**	$u = x^3 y^5 + 3\ln x + 5\ln y,\quad n = 3.$
2.	$u = x^3 + y^3 + z^3 + 2xyz,\quad n = 2.$	**8.**	$u = e^{xyz},\quad n = 2.$
3.	$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\quad n = 3.$	**9.**	$u = x^{3/5} + \sin^2 y,\quad n = 3.$
4.	$u = e^{x-2y+3z},\quad n = 2.$	**10.**	$u = x^2 y + y^2 z + z^2 x,\quad n = 2.$
5.	$u = \sin(2x)\cos(3y),\quad n = 3.$	**11.**	$u = \ln\cos\frac{x}{y},\quad n = 3.$
6.	$u = \ln(x + y + z),\quad n = 2.$	**12.**	$u = e^{-2x+3y-4z},\quad n = 2.$

13.	$u = y^2 - 3\cos^2 x, \quad n = 3.$	**21.**	$u = \dfrac{x}{y^2} + y\sin x, \quad n = 3.$
14.	$u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}, \quad n = 2.$	**22.**	$u = \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{x}{y}, \quad n = 2.$
15.	$u = xy^{1/5} + \dfrac{1}{x}, \quad n = 3.$	**23.**	$u = \sqrt{2x + 3y}, \quad n = 3.$
16.	$u = x^2 + y^2 + z^2 + (xyz)^2, \quad n = 2.$	**24.**	$u = \ln(3x + 2y + z), \quad n = 2.$
17.	$u = \ln\sin\dfrac{y}{x}, \quad n = 3.$	**25.**	$u = e^x \sin y, \quad n = 3.$
18.	$u = x^3 y + y^3 z + z^3 x, \quad n = 2.$	**26.**	$u = \cos(xyz), \quad n = 2.$
19.	$u = \ln 2x \cdot \ln 3y, \quad n = 3.$	**27.**	$u = \sqrt{3x + 2y}, \quad n = 3.$
20.	$u = e^{4x + 2y - 5z}, \quad n = 2.$	**28.**	$u = x^{1/2} y^{2/3} + y^{3/4} z^{4/5}, \quad n = 2.$

Задача 6. Вычислить приближенное значение функции $z(x, y)$ в точке A.

№	**z(x,y)**	**координаты точки А**	**№**	**z(x,y)**	**координаты точки А**
1	$\sqrt[3]{2x^2 - 3xy}$	(3,94; 2,01)	15	$3x^2 + 2y^2 - xy$	(-0,98; 2,97)
2	$5 + 2xy - x^2$	(1,98; 3,92)	16	$x^2 + y^2 + 2x + y - 1$	(1,98; 3,91)
3	$\ln(2x^2 + 2y^2)$	(0,48; 0,54)	17	$2y + \mathrm{arctg}(xy)$	(0,01; 2,95)
4	$3x^2 - xy + x + y$	(1,06; 2,92)	18	$2x^2 + \cos(xy) + 5y$	(1,99; 0,02)
5	$\sqrt{x + 7y}$	(1,94; 1,03)	19	$x^2 + xy + y^2$	(1,02; 1,96)
6	$e^{4x^2 - y^2}$	(0,98; 2,03)	20	$\sqrt[3]{2x^2 + 6y}$	(0,97; 0,98)
7	$x^2 + 2y\sin(xy)$	(0,05; 1,96)	21	$x^2 - y^2 + 5x + 4y$	(3,05; 1,98)
8	$\ln(3x^2 - 2xy)$	(1,03; 0,98)	22	$e^{2x^2 + y^2 - 3xy}$	(0,98; 2,03)
9	$x^2 + 3xy - 6y$	(3,96; 1,03)	23	$x^2 + 2xy + 3y^2$	(1,96; 1,04)
10	$\arcsin(xy^2) + 10x^2$	(3,99; 0,01)	24	$2y + \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$	(0,05; 4,98)
11	$e^{x^2 - 2xy}$	(0,05; 2,97)	25	$2xy + 3y^2 - 5x$	(3,04; 3,95)
12	$x^2 - y^2 + 6x + 3y$	(2,02; 2,97)	26	$x^2 + y^2 + 2\sin(xy)$	(0,04; 2,97)
13	$\sqrt{x^3 + y^2 + xy}$	(2,06; 1,96)	27	$e^y \ln(x + 2y)$	(0,98; 0,03)
14	$2 + \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$	(0,04; 3,96)	28	$xy + 2y^2 - 2x$	(0,97; 2,03)

Задача 7. Разложить функцию $z(x,y)$ по формуле Тейлора в точке M, ограничиваясь членами второго порядка включительно

№	$z(x,y)$	M	№	$z(x,y)$	M
1.	$\sin x \cos y$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	6.	e^{xy}	(0, 1)
2.	e^{x+2y}	(4, -2)	7.	$\sin x \sin y$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
3.	x^y	(1, 1)	8.	$\ln(2x-y)$	(2, 3)
4.	$\ln(x^3+y^2)$	(1, 0)	9.	$\sqrt{3x-2y}$	(2, 1)
5.	$\sqrt{2x+y}$	(4, 1)	10.	$\dfrac{\sin x}{\sin y}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Разложить функцию $z(x,y)$ по формуле Маклорена в точке M, ограничиваясь членами третьего порядка включительно

№	$z(x,y)$	№	$z(x,y)$	№	$z(x,y)$
11.	$e^x \cos y$	14.	$\sin x \ln(1-y)$	17.	$e^x \ln(y+1)$
12.	$\cos x \sin y$	15.	$e^y \sin x$	18.	$\cos y \ln(1+x)$
13.	$e^y \ln(2x+1)$	16.	$\cos x \cos y$	19.	$e^y \cos x$

Разложить функцию $z(x,y)$ по формуле Тейлора в точке M

№	$z(x,y)$	M	№	$z(x,y)$	M
20.	$-xy^2+5x+4y$	(-1, 2)	25.	$3x^2-xy+x+y$	(-1, 3)
21.	$x^2+y^2+2x+y-1$	(3, -2)	26.	$x^2-y^2+6x+3y$	(1, -2)
22.	$x^2-y^2+5x+4y$	(1, 1)	27.	$x^2y+6x+3y$	(2, 3)
23.	$x^2+2xy+3y^2$	(1, -1)	28.	$3x^2+2y^2-xy$	(2, 1)
24.	$xy+2y^2-2x$	(4, 1)			

Задача 8. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к указанной поверхности в точке A.

№	поверхность	A
1	$xy^2 + z^3 = 12$	(1; 2; 2)
2	$z = 3x^2 - xy + x + y$	(1; 3; 4)
3	$3xyz - z^3 = 8$	(0; 2; -2)
4	$z = x^2 + 3xy - 6y$	(4; 1; 22)
5	$z = \ln\left(x^2 - 2y^2\right)$	(3; 2; 0)
6	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$	(2; 2; 3)
7	$z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$	(2; 3; 16)
8	$x^2 y + 2x + z^3 = 5$	(1; 2; 1)
9	$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z = -8$	(-2; 0; 1)
10	$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$	(3; 2; 28)
11	$x^2 - xy - 8x + z^3 = 2$	(2; -3; 2)
12	$z = x^2 + 2xy + 3y^2$	(2; 1; 11)
13	$3x^2 - 4xy + 12xz - 3yz + z^2 + 15 = 0$	(-1; -1; 2)
14	$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$	(1; 0; 0)
15	$x^4 + y^4 + z^4 = 3$	(1; 1; 1)
16	$z = 3x^2 + 2y^2 - xy$	(-1; 3; 24)
17	$6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 = -3$	(1; 2; 3)
18	$x^3 + y^3 - 3z^3 = 13$	(2; 2; 1)
19	$z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$	(2; 3; 19)
20	$xy + e^{xz} = 0$	(5; -1/5; 0)
21	$z = \ln\left(5x^2 - y^2\right)$	(1; 2; 0)
22	$z = xy + 2y^2 - 2x$	(1; 2; 8)
23	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$	(1; 2; -1)
24	$x^4 + 2y^3 + 3z^3 = 20$	(1; 2; 1)
25	$z = x^2 + xy + y^2$	(1; 2; 7)

№	поверхность	A
26	$x^2 - xy + xz + 3yz + 2z^2 + 2 = 0$	(1; 1; 1)
27	$z = \ln\left(8x^2 - y^2\right)$	(-1/2; 1; 0)
28	$z = 2xy + 3y^2 - 5x$	(3; 4; 57)

Задача 9. Дана функция $z(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}(x_1, y_1)$.

Найти: 1) $grad\, z$ в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

№	z(x,y)	A	$\bar{a}$
1	$arctg(2xy)$	(-1, 2)	(-3, 4)
2	$5x^2 + y^2 - 3xy$	(3, 2)	(2, 3)
3	$\ln\left(4x^2 + 2y^2\right)$	(2, 2)	(1, -1)
4	$3x^4 + 2x^2 y^3$	(-1, 2)	(4, -3)
5	$\sqrt{x^2 + y^2 - xy}$	(2, 2)	(-4, 3)
6	$\ln\left(5x^2 + 4y^2\right)$	(1, 1)	(2, -1)
7	$3x^2 y^2 + 5xy^2$	(1, 1)	(2, 1)
8	$e^{x^2 y - y^2}$	(2, 4)	(3, 1)
9	$2x^2 + 3xy + y^2$	(2, 1)	(3, -4)
10	$arctg(x^3 y)$	(-1, 3)	(-1, -4)
11	$\sqrt[3]{2x^2 - xy^2 + 2}$	(3, 2)	(-5, 1)
12	$\left(x^2 + \frac{1}{y}\right)^2$	(2, -1)	(1, 4)
13	$\arcsin\left(\frac{y^2}{x}\right)$	(2, 1)	(-1, 1)
14	$\sin\left(x^3 y - xy^2\right)$	(2, 4)	(-1, 3)
15	$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^3$	(2, -1)	(-2, 1)
16	$x^2 + y^2 + xy$	(1, 1)	(2, -1)

№	z(x,y)	*A*	$\bar{a}$
17	e^{y^4-2xy}	(4, 2)	(6, 8)
18	$\ln\left(5x^2+3y^2\right)$	(1, 1)	(3, 2)
19	$\sqrt[3]{3x^2-xy-y^2}$	(3, 4)	(1, 1)
20	$5x^2+6xy$	(2, 1)	(1, 2)
21	$arctg(xy^2)$	(2, 3)	(4, -3)
22	$\arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$	(1, 2)	(5,-12)
23	$\ln\left(3x^2+4y^2\right)$	(1, 3)	(2, -1)
24	$7x^2+y^2-2xy$	(3, 1)	(-2, 3)
25	$\sqrt{x^4-5xy^2+4}$	(3, 2)	(5, 1)
26	e^{x^2-4y}	(2, 1)	(-3, 1)
27	$\ln\left(3x^2y^2+y^3\right)$	(-2, 3)	(2, 3)
28	$\sin\left(x^2y+xy^2\right)$	(-2, 2)	(1, -1)

Задача 10. Найти экстремумы функции двух переменных $z(x, y)$.

№	$z(x, y)$	№	$z(x, y)$
1	$x^3+8y^2+\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$	**8**	$\ln(x+y)-2x^4-2y^4$
2	$-3x^4-3y^4+12x+12y$	**9**	$x^2y^2-xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
3	$3x^2+y-6\ln x-8\ln y$	**10**	$3xy+\frac{4}{x}+\frac{5}{y}$
4	$3x^3+3y^3+x^2y+xy^2-3x-3y$	**11**	$\ln\left(x^2y\right)-x^2-9y^3$, $(x>0)$
5	$5xy+\frac{6}{x}+\frac{5}{y}$	**12**	$4+xy+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{y}$
6	$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2y^2}+xy$	**13**	$4x^4+y^3-\ln x-3\ln y$
7	$x^3+y^3+x^2y+xy^2-24x-24y$	**14**	$2x^3+2y^3+x^2y+xy^2-9x-9y$

№	$z(x, y)$	№	$z(x, y)$
15	$x^3+y^3+x^2y+xy^2-6x-6y$	**22**	$xy+\frac{1}{x}+\frac{7}{y}$
16	$x^2y+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$	**23**	$x^3+y^3+2x^2y+2xy^2-9x-9y$
17	$x^2+y^3-32\ln x-24\ln y$	**24**	$x^2+y^3-8\ln x-81\ln y$
18	$2x^4+2y^4-64x-64y$	**25**	$3xy+\frac{7}{x}+\frac{9}{y}$
19	$4xy+\frac{5}{x}+\frac{6}{y}$	**26**	$2x^3+2y^3+3x^2y+3xy^2-5x-5y$
20	$9x^3+2y^2-\ln(xy)$	**27**	$x^3+y^2-3\ln x-54\ln y$
21	$5x+6y-\ln x-12\ln y$	**28**	$xy+\frac{8}{x}+\frac{9}{y}$

Задача 11. Найти экстремумы функции трех переменных $u(x, y, z)$.

№	$u(x, y, z)$	№	$u(x, y, z)$
1	$x^2+2y^2+2z^2+2xy+2y-4z$	**10**	$x^2+y^2+4z^2+xy-8z+3y$
2	$x^4+y^4+z^4+2x^3+x^2+4y+4z$	**11**	$\sqrt[6]{xyz}-\frac{x+y+z}{6}, (x>0, y>0, z>0)$
3	$\sqrt[4]{xyz}-\frac{x+y+z}{4}, (x>0, y>0, z>0)$	**12**	$x^2+4y^2+\frac{z^2}{9}-2xy-6y-\frac{2z}{9}$
4	$x^2+y^2+z^2+xz+zy-3x-3y-4z$	**13**	$x^4+y^4+z^4+2x^3-2x^2-\frac{y}{2}+4z$
5	$x^2+4y^2+9z^2-162\ln x-288\ln y-72\ln z$	**14**	$\sqrt[3]{xyz}-\frac{x+y+z}{3}, (x>0, y>0, z>0)$
6	$x^2+y^2+z^2-xy-zy+xz-3x+y-4z$	**15**	$\frac{1}{xyz}+\frac{x+y+z}{16}$
7	$\sqrt[5]{xyz}-\frac{x+y+z}{5}, (x>0, y>0, z>0)$	**16**	$x+\frac{y^2}{x}+\frac{2z^2}{y}+\frac{1}{z}, (z>0)$
8	$x^2+y^2+z^2+\frac{xy}{2}-\frac{zy}{3}-xz-4x-12y-2z$	**17**	$\frac{1}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+z$
9	$x^4+y^4+z^4-2x^3+x^2+4y-4z$	**18**	$\frac{1}{x^3y^3z^3}+3(x+y+z)$

№	$u(x,y,z)$	№	$u(x,y,z)$
19	$x+\frac{y^2}{x}+\frac{8z^2}{y}+\frac{2}{z},\ (z>0)$	**24**	$\frac{2x^2}{z}+\frac{16z^2}{y}-\frac{2}{x}+y,\ (x>0)$
20	$x^4+y^4+z^4-2x^3-2x^2+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}$	**25**	$\frac{5x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{1}{y}+\frac{z}{5}$
21	$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{16}{x}+z$	**26**	$\frac{8}{x}+\frac{2x^2}{y}+\frac{16y^2}{z}+z,\ (x>0)$
22	$\frac{2x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{2}+\frac{1}{y},\ (y>0)$	**27**	$\frac{1}{x^4y^4z^4}+4(x+y+z)$
23	$\frac{1}{x^2y^2z^2}+2(x+y+z)$	**28**	$y+\frac{x^2}{y}+\frac{2z^2}{x}-\frac{4}{z},\ (z>0)$

Задача 12. Найти условный экстремум функции $z(x,y)$ при указанном уравнении связи.

№	**z(x,y)**	**уравнение связи**
1	$6-5x-4y$	$x^2+y^2=9$
2	$\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{y}}$	$2x+4y=1$
3	$\frac{\sqrt[3]{y}}{x^2}-2\ln x+\frac{\ln y}{3}$	$\frac{6x}{5}-\frac{y}{5}=1$
4	$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{8}$
5	$12x^2+12xy+3y^2+4$	$4x^2+y^2=25,\ (x>0)$
6	xy	$x^2+y^2=1,\ (x>0)$
7	$5-3x-4y$	$x^2+y^2=25$
8	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{\sqrt[3]{y}}$	$8x+32y=1$
9	$\frac{xy}{5}+\frac{x}{6}-\frac{y}{6}$	$x^2+y^2=1\ \ (x<0,\ y>0)$
10	$2x^2+12xy+y^2$	$x^2+4y^2=25,\ (x>0)$
11	$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y^2}$	$x-y=2$

№	z(x,y)	уравнение связи
12	$2\sqrt{x}+3\sqrt{y}$	$4x+6y=1$
13	$x^2-2xy+2y^2-4y$	$x+2y=8$
14	$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$	$\frac{4}{x^2}+\frac{6}{y^2}=\frac{1}{10}$
15	$x+8y+10$	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{5}$
16	x^2+xy+y^2	$x^2+y^2=1,\ (x>0)$
17	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{y}}+\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln y}{7}$	$\frac{7x}{5}-\frac{2y}{5}=1$
18	$4+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2y^2}$	$x+y=3$
19	$\frac{5xy}{2}-3x-3y$	$x^2+y^2=1\ \ (x<0,y<0)$
20	$x+y$	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$
21	$x^3y^7+3\ln x+7\ln y$	$\frac{3x}{10}+\frac{7y}{10}=1$
22	$1-4x-8y$	$x^2-8y^2=8$
23	$2\sqrt{x}-3\sqrt{y}$	$4x-6y=-1$
24	$5-2x-2y$	$x^2-4y^2=12$
25	$-\frac{xy}{3}+\frac{x}{7}-\frac{y}{7}$	$x^2+y^2=1\ \ (x>0,y<0)$
26	x^2y+4x	$x+2y=1$
27	$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}$	$x^2+y^2=1$
28	$\frac{22}{7}x^7+y^{11}$	$x^3+\frac{1}{2}y^3=\frac{3}{2}\quad(x>0,y>0)$

Задача 13. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z(x, y)$ в замкнутой области D , заданной системой неравенств.

№	z(x,y)	область D
1	$x^2 + 2xy - y^2 - 4x$	$y \le x+1,\quad y \ge 0,\quad x \le 3$
2	xy	$x^2 + y^2 \le 1$
3	$x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$	$x + y + 1 \le 0,\quad y \ge 0,\quad x \ge -3$
4	$x^3 + y^3 + 2xy$	$-1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2$
5	$5x^2 - 3xy + y^2 + 4$	$x + y \le 1,\quad y \ge -1,\quad x \ge -1$
6	$4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$	$x + y \le 1,\quad y \ge 0,\quad x \ge 0$
7	$x^2 + y^2 - 9xy + 27$	$0 \le x \le 3,\quad 0 \le y \le 3$
8	xy^2	$x^2 + y^2 \le 1$
9	$x^2 + y^2 - xy - x - y$	$x + y \le 3,\quad y \ge 0,\quad x \ge 0$
10	$x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$	$y \le x + 2,\quad y \ge 0,\quad x \le 2$
11	$x^2 + 2y^2 + 1$	$x + y \le 3,\quad y \ge 0,\quad x \ge 0$
12	$4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$	$x + y + 2 \ge 0,\quad y \le 0,\quad x \le 0$
13	$x^2 + 3y^2 + x - y$	$x + y \le 1,\quad y \ge -1,\quad x \ge 1$
14	$x^2 + 2xy + 2y^2$	$-1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2$
15	$10 + 2xy - x^2$	$0 \le y \le 4 - x^2$
16	$x^3 + y^3 - 6xy$	$0 \le x \le 2,\quad -1 \le y \le 2$
17	$x^2 + xy - 2$	$4x^2 - 4 \le y \le 0$
18	$x^2 + xy$	$-1 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 3$
19	$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y$	$x + 2y \le 8,\quad y \ge 1,\quad x \ge 1$
20	$x^3 + y^3 - 3xy$	$0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 2$
21	$3 - 2x^2 - xy - y^2$	$y \le x,\quad y \ge 0,\quad x \le 1$
22	$x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$	$0 \le x \le 2,\quad -1 \le y \le 1$
23	$x^2 y(5 - 2x - 3y)$	$x + y \le 1,\quad y \ge 0,\quad x \ge 0$
24	$x^2 + 2xy - y^2 + 4x$	$x + y + 2 \ge 0,\quad y \le 0,\quad x \le 0$

№	z(x,y)	область D
25	$x^2 y(4 - x - y)$	$x + y \le 6, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$
26	$x^2 + y^2 + xy - x - y$	$x + y \le 3, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$
27	$x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$	$0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1$
28	$\frac{xy}{3} - \frac{x^2 y}{5} - xy^2$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} \le 1, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$

Задача 14. Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента x, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX + b$, выражающую приближенно (аппроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат изобразить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y = aX + b$.

№ \ x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	6,1	6,7	5,9	2,7	4,1
2	4,4	5,4	3,7	2,3	1,7
3	5,7	6,7	5,6	3,9	3,6
4	4,2	4,6	3,6	1,2	1,9
5	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9
6	3,7	4,9	3,6	1,3	2,0
7	5,4	6,4	5,3	3,1	3,3
8	4,5	5,4	4,3	1,7	2,6
9	5,0	6,1	4,5	2,7	3,2
10	3,8	4,8	3,5	2,9	1,5
11	5,6	6,2	5,2	3,1	3,4
12	3,7	4,9	3,6	1,3	2,0
13	5,3	6,4	5,2	3,2	3,4
14	4,5	5,2	3,8	1,8	2,2
15	6,0	6,3	5,4	3,3	3,5
16	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3
17	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9
18	6,0	6,6	5,9	2,9	4,1
19	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1
20	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7
21	6,9	7,9	6,4	4,4	4,9

22	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

x_i / №	1	2	3	4	5
23	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7
24	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5
25	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9
26	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9
27	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5
28	4,7	5,9	4,6	2,3	3,0

Задача 15. Экспериментально получены значения функции $y = f(x)$, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX^2 + bX + c$ (для нечетных вариантов) и $Y = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + c$ (для четных вариантов), аппроксимирующую функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат изобразить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции.

x_i	0	1	2	3	4	5	x_i	1	2	3	4	5
1	5,2	5,7	5,3	4,9	3,6	1,8	**2**	2,5	0,8	0,4	0,3	0,0
3	-0,3	-0,9	-0,1	0,6	2,2	5,0	**4**	2,7	0,8	0,5	0,4	0,3
5	1,2	1,7	1,2	0,4	-0,7	-2,8	**6**	1,1	-1,1	-1,2	-1,5	-1,6
7	-0,5	-0,7	-0,4	0,4	2,3	4,2	**8**	2,3	0,6	0,5	0,2	0,2
9	1,2	1,6	1,5	0,6	-1,2	-3,2	**10**	4,1	1,7	1,3	1,2	0,7
11	-0,1	-1,3	-1,2	-0,2	1,4	3,9	**12**	0,6	-1,2	-1,6	-1,7	-1,7
13	1,0	1,6	1,5	0,4	-1,3	-3,7	**14**	2,5	0,8	0,4	0,4	0,3
15	-0,2	-1,2	-1,5	-1,4	0,3	2,0	**16**	1,4	-0,3	-0,8	-0,7	-1,0
17	-1,6	-0,2	0,0	-0,7	-2,5	-5,5	**18**	4,0	1,8	1,4	1,2	0,9
19	-1,5	-2,8	-2,6	-1,6	0,4	3,1	**20**	3,8	1,8	1,3	1,1	1,0
21	-0,3	-2,4	-2,8	-1,8	-0,3	2,6	**22**	2,2	-0,2	-0,5	-0,7	-0,8
23	-0,5	-1,5	-1,8	-0,8	1,6	4,5	**24**	2,5	0,8	0,4	0,2	0,1
25	-0,3	0,6	1,3	2,0	1,7	1,2	**26**	2,0	-0,4	-0,5	-0,6	-0,8
27	-0,8	0,4	0,3	-0,5	-2,0	-4,9	**28**	3,3	1,5	1,0	0,7	0,6

Задача 16. Решить прикладные задачи на наибольшее и наименьшее значения.

1. Найти размеры цилиндра наибольшего объема, изготовленного из заготовки в форме шара радиуса R.
2. Крыша дома имеет поперечное сечение в форме равнобедренного треугольника. Каковы должны быть размеры поперечного сечения помещения прямоугольной формы, встроенного на чердаке, чтобы объем помещения был наибольшим.
3. Найти размеры заготовки наибольшего периметра в форме прямоугольного треугольника, гипотенуза которого задана.
4. Изготовить из жести прямоугольную коробку (без крышки) данной емкости V с наименьшими затратами материала.
5. В шар диаметра d вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
6. Найти размеры цилиндрического сосуда наибольшей вместимости с поверхностью S.
7. Имеется прямоугольный лист железа заданных размеров. Вырезать в его углах одинаковые квадраты такого размера, чтобы объем получившейся при загибании краев емкости был наибольшим.
8. Поверхность прямоугольного параллелепипеда равна Q. Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема.
9. Сумма ребер прямоугольного параллелепипеда равна a. Найти размеры параллелепипеда наибольшего объема.
10. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при условии, что длина его диагонали равна d.
11. Найти конус вращения объема V с наименьшей полной поверхностью.
12. В шар диаметра d вписать цилиндр с наименьшей полной поверхностью.
13. Из всех прямоугольных параллелепипедов с полной поверхностью S найти тот, который имеет наибольший объем.
14. Определить размеры конуса наибольшего объема, при условии, что его боковая поверхность равна S.
15. Из всех прямоугольных треугольников площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.
16. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.
17. Из всех треугольников, имеющих периметр p, найти наибольший по площади.
18. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.
19. Из всех прямоугольных параллелепипедов объемом V найти тот, полная поверхность которого наименьшая.
20. Представить число $a > 0$ в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

21. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

22. Определить наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок d и емкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

23. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

24. В шар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

25. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

26. При каких размерах открытого прямоугольного ящика с заданным объемом V его поверхность будет наименьшей?

27. Требуется вырезать из круга сектор таким образом, чтобы из него можно было сделать конусообразный фильтр с максимальным объемом.

28. Задан объем открытой цилиндрической емкости. Каковы должны быть ее размеры, чтобы длина сварных швов была минимальной? (Заготовки: лист в форме круга – основание, прямоугольный лист – боковая поверхность).