

Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

В. В. Сотников, Л. Ф. Макарова



Основы теории управления

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки
“Информатика и вычислительная техника”

Санкт-Петербург
2014

УДК 66-5 (681.51)

Сотников, В. В. Основы теории управления: методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения / В. В. Сотников, Л. Ф. Макарова. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2014. – 56 с.

В методических указаниях приведены задания и примеры выполнения контрольных работ по учебной дисциплине “Основы теории управления”, позволяющие закрепить и проверить знания, полученные при освоении учебного курса.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 230100 “Информатика и вычислительная техника” и соответствуют рабочей программе дисциплины “Основы теории управления”, изучение которой направлено на формирование следующих общекультурных и профессиональных компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- знание основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10);
- освоение методики использования программных средств для решения практических задач (ПК-2);
- обоснование применяемых проектных решений, осуществление постановки и выполнения экспериментов по проверке их корректности и эффективности (ПК-6).

Рис. 11, табл. 12, библиогр. 17 назв.

Рецензент: В. А. Холоднов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов СПбГТИ(ТУ)

Утверждены на заседании учебно-методической комиссии факультета информатики и управления, протокол №8 от 24.03.2014.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

© СПбГТИ(ТУ), 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Задание на выполнение контрольных работ.....	4
1 Контрольная работа №1	5
1.1 Передаточные функции и дифференциальные уравнения.....	5
1.1.1 Задание 1.1.....	6
1.1.2 Примеры выполнения задания 1.1.....	8
1.2 Преобразование структурных схем.....	9
1.2.1 Задание 1.2.....	10
1.2.2 Пример выполнения задания 1.2.....	15
1.3 Одноконтурная система управления, законы регулирования.....	16
1.3.1 Задание 1.3.....	20
1.3.2 Примеры выполнения задания 1.3.....	21
1.4 Частотные характеристики.....	22
1.4.1 Задание 1.4.....	23
1.4.2 Пример выполнения задания.....	24
2 Контрольная работа №2.....	26
2.1 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.....	26
2.1.1 Задания 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.....	27
2.1.2 Примеры выполнения заданий 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.....	30
2.2 Частотные критерии устойчивости.....	33
2.2.1 Задание 2.2.1.....	33
2.2.2 Пример выполнения задания 2.2.1.....	34
2.2.3 Задание 2.2.2.....	36
2.2.4 Пример выполнения задания 2.2.2.....	37
3 Контрольная работа №3.....	40
3.1 Показатели качества управления.....	40
3.1.1 Задание 3.1.....	44
3.1.2 Пример выполнения задания 3.1.....	44
3.2 Анализ управляемости и наблюдаемости.....	45
3.2.1 Задание 3.2.....	47
3.2.2 Примеры выполнения задания 3.2.....	48
3.3 Моделирование систем управления: связь структурной схемы с дифференциальным уравнением.....	50
3.3.1 Задание 3.3.....	51
3.3.2 Пример выполнения задания 3.3.....	52
Литература.....	54

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Учебным планом дисциплины "Основы теории управления" для заочного отделения предусмотрено выполнение трех контрольных работ.

Контрольные работы должны быть выполнены до начала экзаменационной сессии. Студенту необходимо представить преподавателю отчёт со всеми тремя контрольными работами, выполненными в соответствии с данными методическими указаниями. Номер варианта задания формируется согласно последним двум цифрам номера зачетной книжки (таблица).

Таблица – Варианты заданий

Две последние цифры номера зачётной книжки	Номер варианта	Две последние цифры номера зачётной книжки	Номер варианта
01, 26, 51, 76	1	14, 39, 64, 89	14
02, 27, 52, 77	2	15, 40, 65, 90	15
03, 28, 53, 78	3	16, 41, 66, 91	16
04, 29, 54, 79	4	17, 42, 67, 92	17
05, 30, 55, 80	5	18, 43, 68, 93	18
06, 31, 56, 81	6	19, 44, 69, 94	19
07, 32, 57, 82	7	20, 45, 70, 95	20
08, 33, 58, 83	8	21, 46, 71, 96	21
09, 34, 59, 84	9	22, 47, 72, 97	22
10, 35, 60, 85	10	23, 48, 73, 98	23
11, 36, 61, 86	11	24, 49, 74, 99	24
12, 37, 62, 87	12	00, 25, 50, 75	25
13, 38, 63, 88	13		

Отчёт о выполнении контрольных работ должен включать: титульный лист, условие каждой задачи и подробную процедуру ее решения, аналогично тому, как это представлено в примерах выполнения контрольных заданий.

На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер варианта, а также наименования кафедры и изучаемой дисциплины.

Отчет о выполнении контрольных работ оформляется либо на листах формата А4, либо в тетради, печатным или рукописным (при условии разборчивого почерка) способом.

Во время защиты отчёта студент должен уметь обосновать представленные в отчёте решения. При положительно оцененном отчете о выполнении контрольных работ студент допускается к сдаче экзамена по дисциплине.

1 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Темы:

- передаточные функции и дифференциальные уравнения;
- преобразования структурных схем;
- одноконтурные системы управления, законы регулирования;
- частотные характеристики.

1.1 Передаточные функции и дифференциальные уравнения

Основной формой представления математической модели системы автоматического управления (САУ) является дифференциальное уравнение.

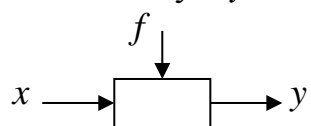
В теории автоматического управления принято пользоваться передаточными функциями (ПФ). ПФ может быть получена с помощью преобразований Лапласа. В этом случае ПФ звена (системы) численно равна отношению изображения его выходной величины к изображению его входной величины при нулевых начальных условиях. ПФ зависит только от параметров звена (системы) и не зависит от входной величины. ПФ так же, как и дифференциальное уравнение полностью определяет динамические свойства звена (системы).

В теории управления широко используется также и операторная форма записи ПФ, которая получается из дифференциального уравнения, записанного в операторной форме, путем деления многочлена правой части уравнения на многочлен левой части, т. е. выходной величины на входную.

Передаточную функцию в форме изображения Лапласа можно получить из ПФ в операторной форме, если в последней сделать подстановку $p = s$. В общем случае это следует из того, что дифференцированию оригинала – символическому умножению оригинала на p – при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на комплексное число s .

Сходство между передаточной функцией, записанной в форме изображений Лапласа $W(s)$ и в операторной форме $W(p)$, чисто внешнее и оно имеет место только в случае стационарных звеньев (систем), т. е. если коэффициенты дифференциального уравнения не зависят от времени.

Например, рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка, связывающее выходную y и входные (x и f) переменные звена уравнением (1.1)



The diagram shows a rectangular block with an input arrow labeled 'x' on the left and an output arrow labeled 'y' on the right. A downward arrow labeled 'f' points to the top of the block.

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x + c_0 f, \quad (1.1)$$

которое в операторной форме имеет вид

$$a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p x + b_1 x + c_0 f \quad (1.2)$$

При записи и преобразовании дифференциальных уравнений оператор p (или s) можно рассматривать как алгебраический множитель, а выражение, например, Tr – как произведение, не обладающее свойством коммутативности (нельзя записать pT). Учитывая это, уравнение (1.2) можно переписать так:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) \cdot y = (b_0 p + b_1) \cdot x + c_0 f \quad (1.3)$$

В соответствии с приведенным выше определением ПФ в операторной форме рассматриваемое звено можно характеризовать двумя ПФ: ПФ $W_1(p)$ по входной величине x и ПФ $W_2(p)$ по входной величине f , т.е.

$$W_1(p) = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}; \quad W_2(p) = \frac{c_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (1.4)$$

Теперь исходное уравнение (1.1) можно записать в компактной форме

$$y = W_1(p) \cdot x + W_2(p) \cdot f \quad (1.5)$$

В изображениях Лапласа уравнение (1.1) можно записать так:

$$Y(s) = W_1(s) \cdot X(s) + W_2(s) \cdot F(s) \quad (1.6)$$

Это уравнение адекватно уравнению (1.5) только при нулевых начальных условиях.

Обычно линейные дифференциальные уравнения не выше 2-го порядка с постоянными коэффициентами записывают в стандартной форме. При этом члены, содержащие выходную величину и ее производные, записывают в левой части уравнения, а все остальные члены – в правой; коэффициент при выходной величине делают равным единице. Если в правой части содержатся производные, их объединяют в одну группу и коэффициент при соответствующей входной величине выносят за скобки.

В стандартной операторной форме уравнение (1.1) принимает вид

$$(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1) \cdot y = k_1 (T_2 p + 1) \cdot x + k_2 f,$$

где $T_0^2 = \frac{a_0}{a_2}$; $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$; $k_1 = \frac{b_1}{a_2}$; $T_2 = \frac{b_0}{b_1}$; $k_2 = \frac{c_0}{a_2}$;

Постоянные величины T_0 , T_1 , T_2 имеют размерность времени и называются постоянными времени, а коэффициенты k_1 и k_2 – передаточными коэффициентами (коэффициентами передачи). Постоянные времени характеризуют инерционность звена (системы) и являются динамическими характеристиками, а коэффициенты передачи – статическими характеристиками звена (системы).

1.1.1 Задание 1.1

Записать собственную передаточную функцию для дифференциального уравнения:

Вариант 1	$7 \frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = ku$
Вариант 2	$3 \frac{d^4 x}{dt^4} + 7 \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} + x = kf(t - \tau)$
Вариант 3	$4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} = k \frac{d^2 y}{dt^2}$
Вариант 4	$\frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + x = k \frac{dy}{dt}$
Вариант 5	$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = kf(t - \tau)$

Вариант 6 $5\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x = kf$

Вариант 7 $9\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + x = k(3y - f)$

Вариант 8 $25\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{dx}{dt} + x = k\frac{d^2u}{dt^2}$

Записать обобщенную передаточную функцию для дифференциального уравнения:

Вариант 9 $\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = ku$

Вариант 10 $3\frac{d^3x}{dt^3} + 7\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = kf(t - \tau)$

Вариант 11 $2\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x = k\frac{df(t - \tau)}{dt}$

Вариант 12 $6\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = k\frac{dy}{dt}$

Вариант 13 $3\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = k\frac{du}{dt}$

Вариант 14 $5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} = k\frac{df}{dt}$

Записать дифференциальные уравнения по известным передаточным функциям:

Вариант 15 $W(s) = \frac{k}{10s^2 + 2s + 1}$

Вариант 16 $W(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{5s^3 + 2s^2 + s + 1}$

Вариант 17 $W(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{4s^2 + s + 1}$

Вариант 18 $W(s) = \frac{ks}{9s^3 + s + 1}$

Вариант 19 $W(s) = \frac{ks}{s^3 + s^2 + s + 1} Y(s)$

Вариант 20 $W(s) = \frac{ks^2}{3s^3 + 2s^2 + s + 1}$

Вариант 21 $W(s) = \frac{ks^3}{s^4 + s^2 + 1} Y(s)$

Вариант 22 $W(s) = \frac{ks^3}{5s^3 + 10s^2 + 1} Y(s)$

Вариант 23 $W(s) = \frac{ks^2}{2s^3 + 2s^2 + s + 1} Y(s)$

Вариант 24 $W(s) = \frac{kse^{-\tau s}}{s^4 + s^3 + s^2 + s + 1} Y(s)$

Вариант 25 $W(s) = \frac{ks^2e^{-\tau s}}{s^5 + s^3 + s + 1}$

1.1.2 Примеры выполнения заданий 1.1

1) Дано дифференциальное уравнение системы управления в виде:

$$5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = ky \quad (1.7)$$

Получить для него обобщенную и собственные передаточные функции.

Решение. Уравнение (1.7) в операторной форме:

$$5p^2 x + 3px + x = ky$$

Запишем уравнение (1.7) в изображениях по Лапласу, заменив оператор дифференцирования p на переменную s :

$$(5s^2 + 3s + 1) X(s) = kY(s) \quad (1.8)$$

Так как передаточная функция в форме изображений Лапласа

$$W(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}, \quad (1.9)$$

то из (1.8) можно записать решения:

- обобщенная передаточная функция:

$$W(s) = \frac{k}{5s^2 + 3s + 1} Y(s) \quad (1.10)$$

- собственная передаточная функция, которая записывается из (1.10) при $Y(s) = 1$:

$$W(s) = \frac{k}{5s^2 + 3s + 1}$$

2) Дана обобщенная передаточная функция в виде:

$$W(s) = \frac{k}{4s^2 + s + 1} Y(s) \quad (1.11)$$

Записать соответствующее ей дифференциальное уравнение.

Решение. Учитывая уравнение (1.9), запишем из (1.11) выражение:

$$X(s) = \frac{k}{4s^2 + s + 1} Y(s) \quad (1.12)$$

Освободившись от знаменателя, получим

$$(4s^2 + s + 1)X(s) = kY(s) \quad (1.13)$$

Произведя замену s на p , запишем (1.13) в операторной форме:

$$(4p^2 + p + 1)X(p) = kY(p) \quad (1.14)$$

Учитывая, что $p \equiv \frac{d}{dt}$ (где p – символ операции дифференцирования), и переходя от операторной формы уравнения (1.14) к оригиналу, получим искомое решение:

$$4 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = ky$$

3) Дана собственная передаточная функция в виде

$$W(s) = \frac{k}{10s^3 + 5s^2 + 1} \quad (1.15)$$

Записать соответствующее ей дифференциальное уравнение.

Решение. Учитывая (1.9) и (1.15), запишем

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{k}{10s^3 + 5s^2 + 1},$$

откуда
$$X(s) = \frac{k}{10s^3 + 5s^2 + 1} Y(s)$$

Далее, выполняя действия, аналогичные действиям с уравнениями (1.13) и (1.14) из примера 2, получим решение:

$$10 \frac{d^3 x}{dt^3} + 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = ky$$

1.2 Преобразование структурных схем

Структурная схема – это графическое изображение математической модели САУ в виде соединений звеньев. Звенья, как и системы, могут описываться дифференциальными уравнениями довольно высокого порядка, но их всегда можно представить как соединение *типовых* или элементарных звеньев, порядок дифференциальных уравнений которых не выше второго.

Вычисление эквивалентной передаточной функции многоконтурной системы осуществляется в следующем порядке:

1) освободиться от перекрещивающихся связей путем перестановки узлов, перестановки сумматоров и переноса узлов и сумматоров через звенья (таблица 1.1);

Таблица 1.1 – Правила структурных преобразований

Операция	Исходная схема	Преобразованная схема
1 Перемещение узлов		
2 Перемещение сумматоров		
3 Прямое перемещение узла через звено		
4 Обратное перемещение узла через звено		
5 Прямое перемещение сумматора через звено		
6 Обратное перемещение сумматора через звено		

Продолжение таблицы 1.1

Операция	Исходная схема	Преобразованная схема
7 Перенесение сумматора через узел		
8 Перенесение узла через сумматор		

2) преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную, используя три правила преобразования структурных схем:

а) последовательное соединение звеньев заменяется одним звеном с ПФ

$$W_{\text{пос}}(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s);$$

б) параллельное соединение звеньев заменяется одним звеном с ПФ

$$W_{\text{пар}}(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s);$$

в) звено, охваченное обратной связью, заменяется одним звеном с ПФ

$$W_3(s) = \frac{W_{\text{пр}}(s)}{1 \pm W_{\text{раз}}(s)},$$

где знак “+” в знаменателе ПФ означает отрицательную обратную связь, а знак “-” – положительную;

$W_{\text{раз}}(s) = W_{\text{пр}}(s) \cdot W_{\text{ос}}(s)$ – передаточная функция разомкнутого контура,

где $W_{\text{пр}}(s)$ – передаточная функция прямого участка контура;

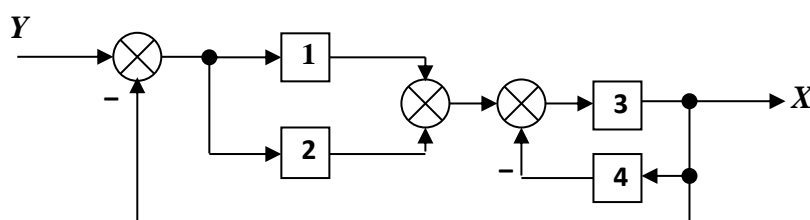
$W_{\text{ос}}(s)$ – передаточная функция обратной связи;

3) вычислить передаточную функцию одноконтурной системы.

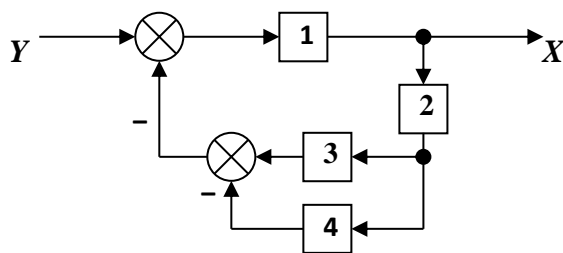
1.2.1 Задание 1.2

Вывести выражение для эквивалентной передаточной функции системы, используя правила преобразования структурных схем.

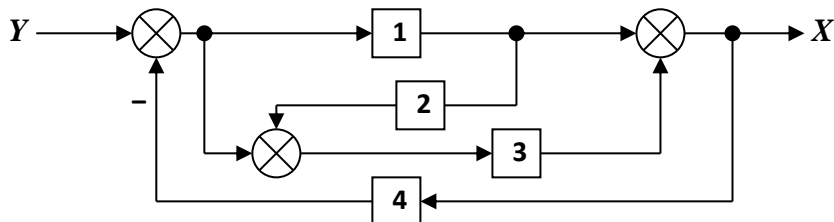
Вариант 1 1 – $W_1(s) = k_1$; 2 – $W_2(s) = k_2/(T_2s+1)$; 3 – $W_3(s) = 1/T_3s$; 4 – $W_4(s) = k_4$



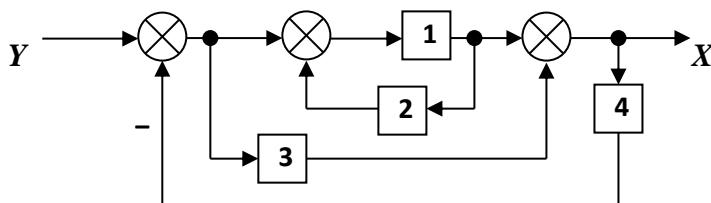
Вариант 2 $1 - W_1(s) = k_1(T_1s+1)/T_1s$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/T_3s$; $4 - W_4(s) = k_4$



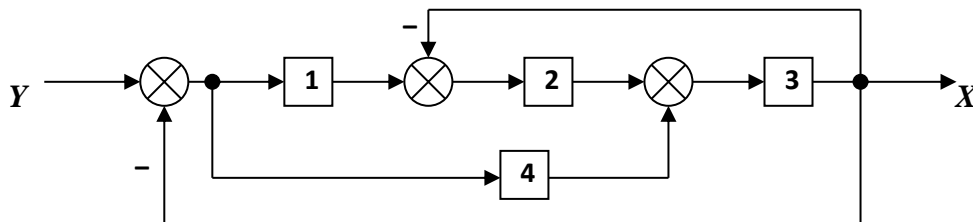
Вариант 3 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = 1/T_4s$



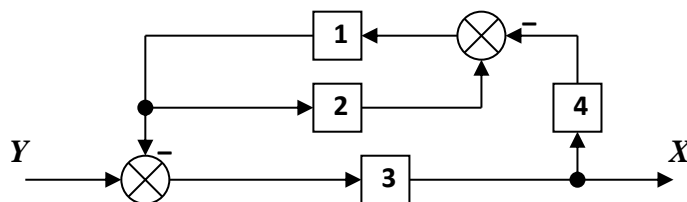
Вариант 4 $1 - W_1(s) = 1/T_1s$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



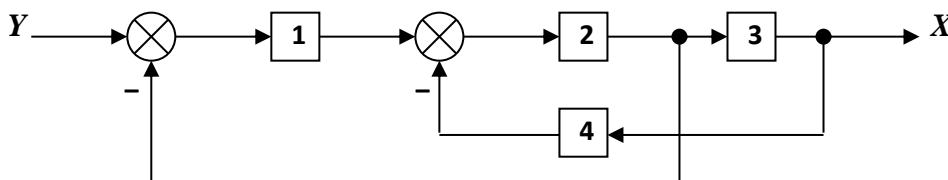
Вариант 5 $1 - W_1(s) = k_1$; $2 - W_2(s) = 1/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



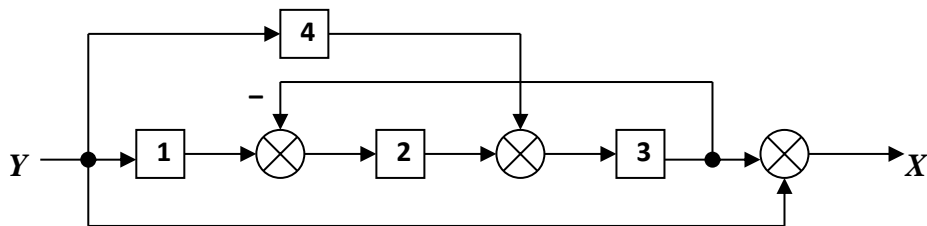
Вариант 6 $1 - W_1(s) = k_1$; $2 - W_2(s) = 1/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



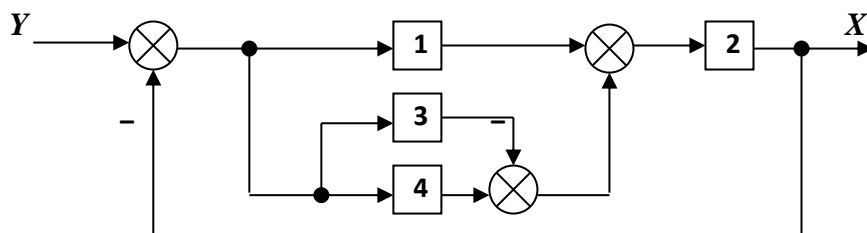
Вариант 7 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = 1/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = k_4$



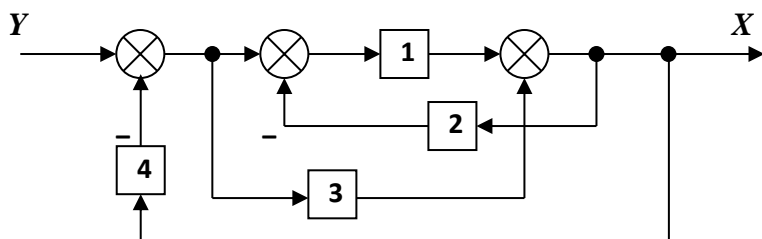
Вариант 13 $1 - W_1(s) = 1/T_1s$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



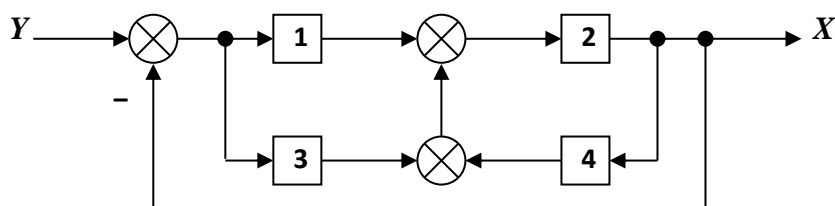
Вариант 14 $1 - W_1(s) = 1/s(T_1s)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



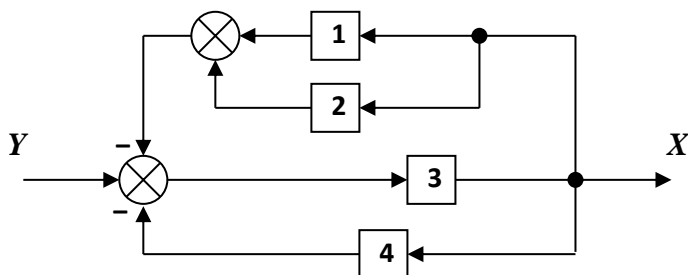
Вариант 15 $1 - W_1(s) = 1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/T_3s$; $4 - W_4(s) = k_4$



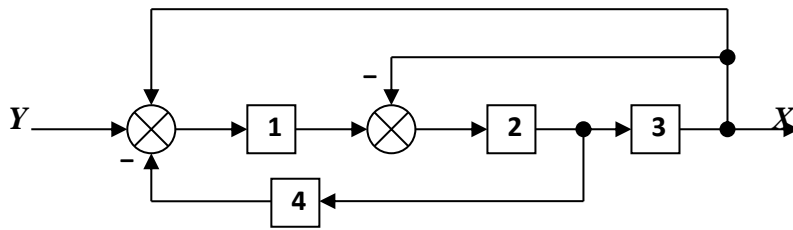
Вариант 16 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2/(T_2s+1)$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = k_4$



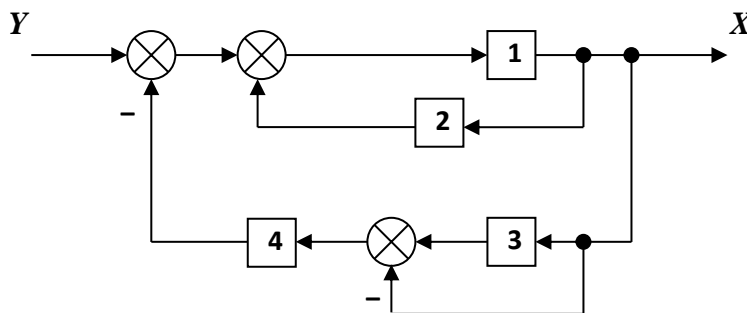
Вариант 17 $1 - W_1(s) = k_1/T_1s$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/s(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



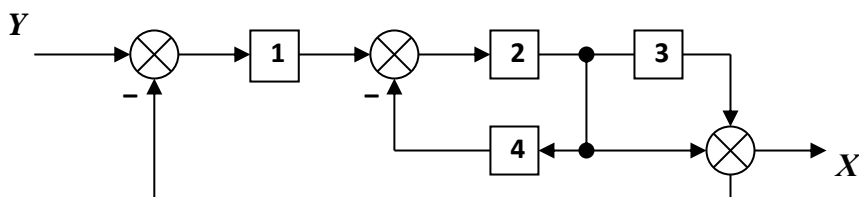
Вариант 18 $1 - W_1(s) = k_1$; $2 - W_2(s) = 1/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



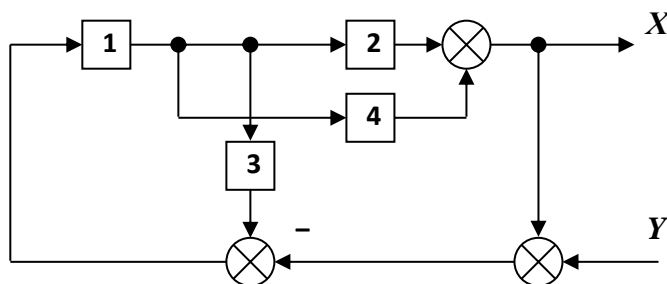
Вариант 19 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = k_4/T_4s$



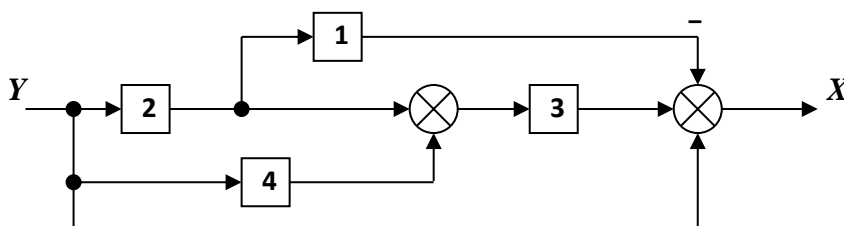
Вариант 20 $1 - W_1(s) = k_1$; $2 - W_2(s) = k_2/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



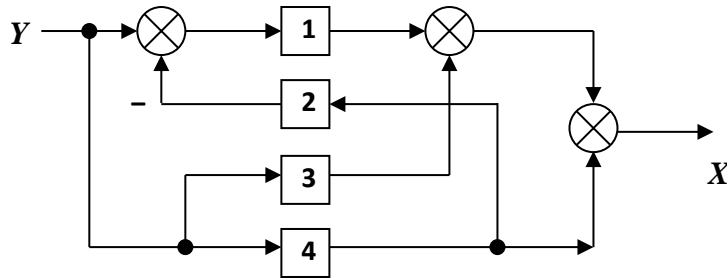
Вариант 21 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = 1/T_2s$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = k_4$



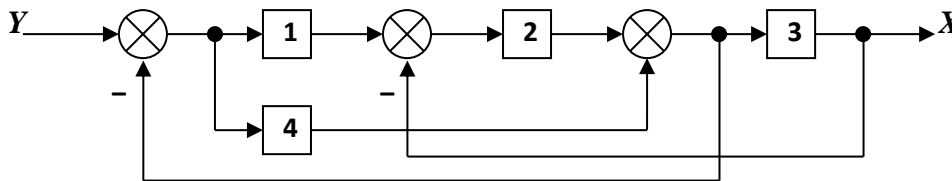
Вариант 22 $1 - W_1(s) = k_1/T_1s$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/(T_3s+1)$; $4 - W_4(s) = k_4$



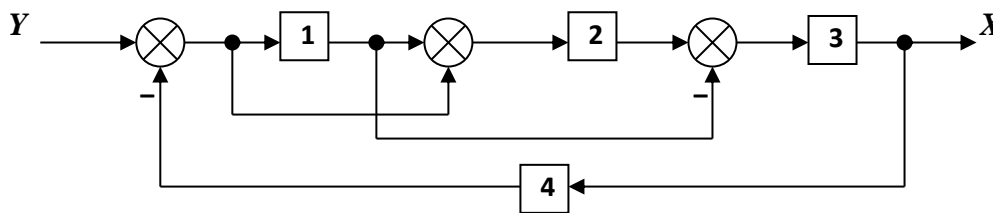
Вариант 23 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/T_3s$; $4 - W_4(s) = k_4$



Вариант 24 $1 - W_1(s) = k_1$; $2 - W_2(s) = 1/(T_2s+1)$; $3 - W_3(s) = k_3$; $4 - W_4(s) = k_4/T_4s$

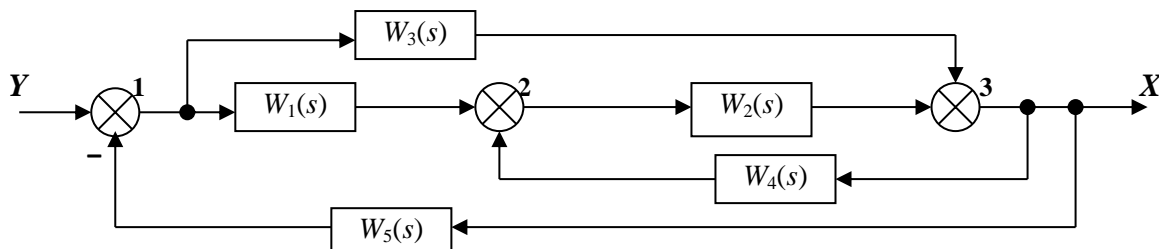


Вариант 25 $1 - W_1(s) = k_1/(T_1s+1)$; $2 - W_2(s) = k_2$; $3 - W_3(s) = k_3/T_3s$; $4 - W_4(s) = k_4$

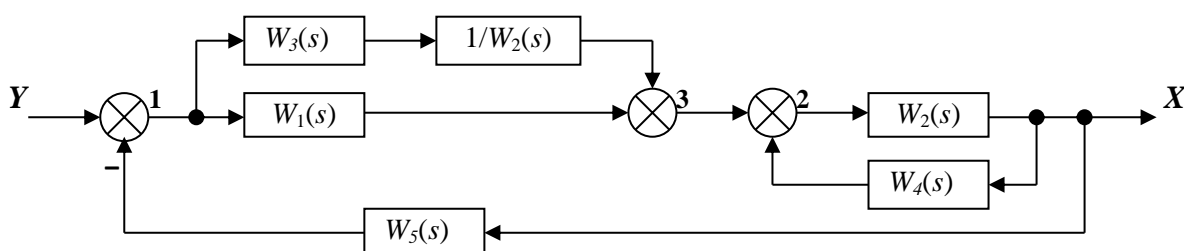


1.2.2 Пример выполнения задания 1.2

Привести заданную структурную схему к виду $X(s) = W(s) \cdot Y(s)$.



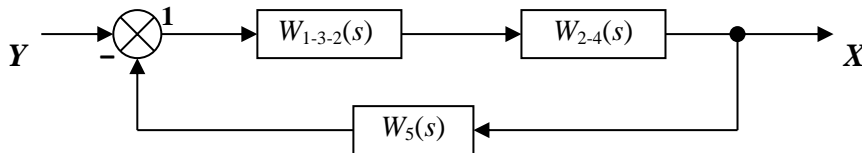
Решение. Перенеся сумматор 3 через звено с ПФ $W_2(s)$ и добавив звено с ПФ $1/W_2(s)$ в соответствии с правилами таблицы 1.1, а также поменяв местами сумматоры 3 и 2, исходную систему можно привести к многоконтурной системе без перекрещивающихся связей:



Последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_3(s)$ и $1/W_2(s)$ заменяются одним звеном с ПФ $W_{3-2}(s) = W_3(s)/W_2(s)$.

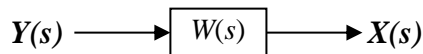
Параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_{3-2}(s)$ и $W_1(s)$ заменяются одним звеном с ПФ $W_{1-3-2}(s) = W_1(s) + W_{3-2}(s)$.

Звено с ПФ $W_2(s)$, охваченное положительной обратной связью с ПФ $W_4(s)$, заменяется одним звеном с ПФ $W_{2-4}(s) = W_2(s)/(1 - W_2(s)W_4(s))$. В результате получим одноконтурную систему:



Эквивалентная передаточная функция полученной одноконтурной системы с отрицательной обратной связью:

$$W(s) = \frac{W_{1-3-2}(s)W_{2-4}(s)}{1 + W_{1-3-2}(s)W_{2-4}(s)W_5(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s) + W_3(s)}{1 - W_2(s)W_4(s) + W_5(s)[W_1(s)W_2(s) + W_3(s)]}$$



Откуда следует равенство $X(s) = W(s) \cdot Y(s)$. Это решение задачи. Если по условию задачи известны передаточные функции отдельных звеньев, то они подставляются в выражение для $W(s)$, которое по возможности упрощается.

1.3 Одноконтурная система управления, законы регулирования

В теории автоматического управления, задачами которой являются синтез (построение) и анализ (исследование) систем управления, обычно используется структурная схема САУ (рисунок 1.1). В такой схеме исполнительный механизм и регулирующий орган объединены с регулятором, а датчик – с объектом, кроме того, выделена схема сравнения для определения величины динамической ошибки регулирования e : $e(t) = y(t) - x(t)$.

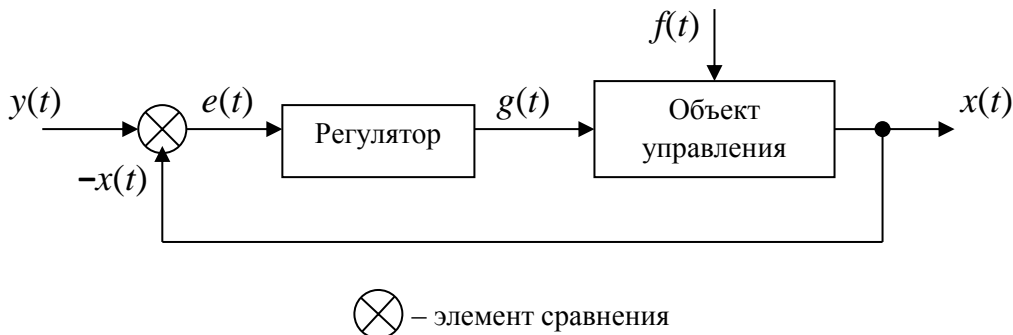


Рисунок 1.1 – Структурная схема одноконтурной САУ

Требования к управлению:

- **точность** – в установившемся режиме система управления должна поддерживать заданное значение выхода системы, причем ошибка $e(t)$ (разница между заданным $y(t)$ и фактическим значением $x(t)$) не должна превышать допустимую;
- **устойчивость** – система должна оставаться устойчивой на всех режимах, т. е. обладать способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил $f(t)$ (возмущений), которые вывели ее из этого состояния;
- **качество переходных процессов** – при смене заданного значения $y(t)$ система должна приводить объект управления в нужное состояние с помощью управляющих воздействий $g(t)$ по возможности быстро и плавно, а оценки качества переходного процесса не должны превышать их заданных значений.

Точность системы в установившемся режиме определяется ошибкой $e(t)$ или ее изображением $E(s)$ (рисунок 1.2). Для ее исследования используют передаточную функцию по ошибке $W_e(s)$, которая связывает изображения ошибки и входного сигнала: $E(s) = W_e(s) \cdot Y(s)$.

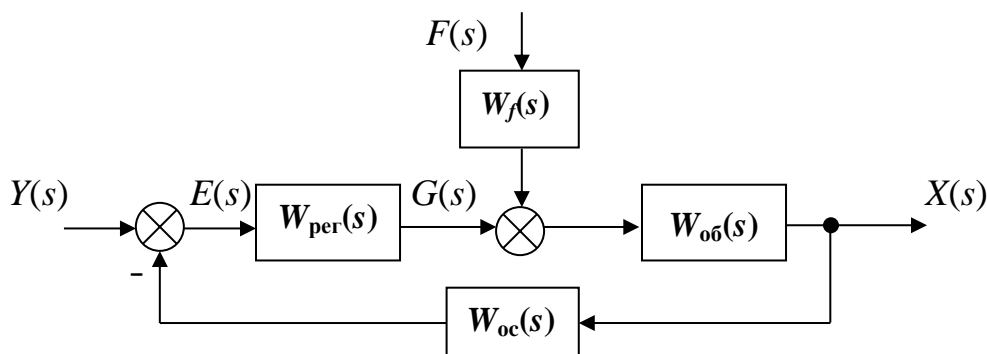


Рисунок 1.2 – Структурная схема одноконтурной системы управления

Из схемы следует, что $X(s) = X_g(s) + X_f(s)$,

где $X(s)$ – изображение выходной координаты системы;

$X_g(s)$ – изображение выходной координаты по управляющему воздействию;

$X_f(s)$ – изображение выходной координаты по возмущающему воздействию.

Общая ошибка регулирования в одноконтурной системе $E(s) = E_g(s) + E_f(s)$,

где $E_g(s)$ – ошибка по управляющему воздействию;

$E_f(s)$ – ошибка по возмущающему воздействию.

На схеме также указаны:

$Y(s)$ – изображение задающего воздействия;

$G(s)$ – изображение управляющего воздействия;

$F(s)$ – изображение возмущающего воздействия.

Передаточная функция разомкнутой одноконтурной системы (при разрыве обратной связи на участке входа ее в элемент сравнения):

$$W_{pc}(s) = X(s)/E(s) = W_{per}(s) \cdot W_{ob}(s) \cdot W_{oc}(s)$$

Уравнение движения для разомкнутой системы

$$X(s) = W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot E(s) + W_f(s) \cdot F(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \quad (1.16)$$

Уравнение замыкания системы (при наличии неединичной отрицательной обратной связи) $E(s) = Y(s) + W_{\text{oc}}(s) \cdot X(s)$ (1.17)

Подставив выражение для ошибки регулирования (1.17) в уравнение (1.16), получим уравнение движения замкнутой системы

$$X(s) = W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) [Y(s) + W_{\text{oc}}(s) \cdot X(s)] + W_f(s) \cdot F(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \quad (1.18)$$

После небольших преобразований относительно $X(s)$ уравнение (1.18) можно записать так:

$$X(s) = \frac{W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{oc}}(s)} \cdot Y(s) + \frac{W_f(s) \cdot W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{oc}}(s)} \cdot F(s) \quad (1.19)$$

При $F(s) = 0$ выходная величина $X(s)$ связана со входной величиной $Y(s)$ передаточной функцией замкнутой системы

$$W_{\text{зс}}(s) = \frac{W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{oc}}(s)}$$

Подставив выражение для $X(s)$ (1.16) в уравнение (1.17) и сделав небольшие преобразования относительно $E(s)$, получим уравнение общей ошибки регулирования замкнутой одноконтурной системы

$$E(s) = Y(s) + W_{\text{oc}}(s) \cdot X(s) = Y(s) + [W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot E(s) + W_f(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot F(s)]$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{oc}}(s)} \cdot Y(s) + \frac{W_{\text{oc}}(s) \cdot W_f(s) \cdot W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s) \cdot W_{\text{oc}}(s)} \cdot F(s) \quad (1.20)$$

При единичной обратной связи [$W_{\text{oc}}(s) = 1$] и единичном возмущающем воздействии [$W_f(s) = 1$] уравнения (1.19) и (1.20) примут вид:

$$X(s) = \frac{W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot Y(s) + \frac{W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot F(s) \quad (1.21)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot Y(s) + \frac{W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot F(s) \quad (1.22)$$

откуда выражения для ошибки по управляющему воздействию $E_g(s)$ и ошибки по возмущающему воздействию $E_f(s)$ выглядят так:

$$E_g(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot Y(s) ; \quad E_f(s) = \frac{W_{\text{об}}(s)}{1 + W_{\text{пер}}(s) \cdot W_{\text{об}}(s)} \cdot F(s)$$

Статическая ошибка регулирования или ее изображение определяются при $s = 0$ (или $p = 0$). Динамическая ошибка регулирования или ее изображение определяются при $s \neq 0$ (или $p \neq 0$).

Практически все задачи управления могут быть решены с помощью трех законов регулирования:

- пропорциональный закон (П-регулятор):

$$g(t) = K \cdot e(t); \quad W_{\text{пер}}(s) = K;$$

- интегральный закон (И-регулятор):

$$g(t) = \frac{K}{T_{\text{И}}} \int_0^t e(t) dt; \quad W_{\text{пер}}(s) = \frac{K}{T_{\text{И}} s};$$

- пропорционально-интегральный закон (ПИ-регулятор):

$$g(t) = K \cdot (e(t) + \frac{1}{T_{\text{И}}} \int_0^t e(t) dt); \quad W_{\text{пер}}(s) = \frac{K(T_{\text{И}} s + 1)}{T_{\text{И}} s};$$

- пропорционально-дифференциальный закон (ПД-регулятор):

$$g(t) = K \cdot (e(t) + K_{\text{Д}} \frac{e(t)}{dt}); \quad W_{\text{пер}}(s) = K(1 + K_{\text{Д}} s);$$

- пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-регулятор):

$$g(t) = K \cdot (e(t) + \frac{1}{T_{\text{И}}} \int_0^t e(t) dt + K_{\text{Д}} \frac{e(t)}{dt}); \quad W_{\text{пер}}(s) = K(1 + \frac{1}{T_{\text{И}} s} + K_{\text{Д}} s),$$

где K , $T_{\text{И}}$, $K_{\text{Д}}$ – параметры настройки регулятора, зависящие от динамических свойств объекта управления и требований к качеству работы АСР ($K_{\text{Д}}$ имеет размерность времени).

С помощью П-регулятора можно управлять любым устойчивым объектом. П-регулятор он обеспечивает достаточно большое быстродействие системы, однако переходный процесс в АСР с П-регулятором характеризуется наличием статической ошибки регулирования, что является органическим недостатком АСР с П-регулятором. Статическая ошибка регулирования тем меньше, чем больше значение параметра настройки регулятора K .

Переходный процесс в АСР с И-регулятором характеризуется отсутствием статической ошибки регулирования, наибольшим значением отклонения регулируемой величины от установившегося значения по сравнению с другими законами регулирования, наибольшим временем регулирования. Главное достоинство И-регулятора – отсутствие статической ошибки регулирования.

ПИ-регулятор сочетает в себе достоинства П- и И-законов регулирования, а именно: П-составляющая обеспечивает достаточное быстродействие регулятора, а И-составляющая ликвидирует статическую ошибку регулирования. Однако, быстродействие АСР с ПИ-регулятором несколько ниже, чем у АСР с П-регулятором.

ПД-регулятор обладает особенностями обоих законов регулирования. Наличие воздействия по производной от $e(t)$ увеличивает быстродействие регулятора, благодаря чему уменьшается динамическая ошибка по сравнению с П-регулятором. Д-составляющая вводится в законы регулирования для того, чтобы увеличить быстродействие регуляторов. В установившихся режимах ПД-регулятор ведет себя как обычный П-регулятор – величина статической ошибки остается такой же, как и в случае применения П-регулятора.

ПИД-регулятор сочетает в себе достоинства всех 3-х простейших законов

регулирования: высокое быстродействие за счет пропорциональной составляющей и благодаря наличию импульса по производной от $e(t)$, а также отсутствие статической ошибки, которое обеспечивает И-составляющая.

Сигнал Д-канала наиболее важен при изменениях входов и исчезает в установившемся режиме. Он позволяет реагировать не на само увеличение ошибки, а на тенденцию ее изменения, и принять “превентивные меры”. Главный недостаток Д-канала – большое влияние высокочастотных помех, например, шумов измерений. Для того, чтобы сделать регулятор физически реализуемым, вместо чистого дифференцирования используют инерционное Д-звено с ПФ:

$$W(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_{\text{И}}} + \frac{K_{\text{Д}}s}{T_{\text{Д}}s + 1}\right),$$

где $T_{\text{Д}}$ – постоянная времени малой величины.

Для объектов с большим запаздыванием по каналу регулирования бесполезно вводить воздействие по производной, т.к. этот импульс будет поступать в регулятор по истечении времени чистого запаздывания после прихода возмущения, за которое в объекте могут накопиться большие отклонения.

1.3.1 Задание 1.3

Для структурной схемы одноконтурной САУ, изображенной на рисунке 1.2, с заданными передаточными функциями регулятора и объекта определить показатели точности системы в статике. Пояснить результат решения.

Таблица 1.2 – Варианты заданий

Вариант	Тип регулятора	ПФ регулятора $W_{\text{рег}}(s)$	ПФ объекта $W_{\text{об}}(s)$	Определить
1	ПИ	$W_{\text{рег}}(s) = \frac{k_{\text{рег}}(T_{\text{из}}s + 1)}{T_{\text{из}}s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E_g(s)$
2	ПД (идеальный)	$W_{\text{рег}}(s) = k_{\text{рег}}(1 + s)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E_f(s)$
3	П	$W_{\text{рег}}(s) = k_{\text{рег}}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E(s)$
4	И (идеальный)	$W_{\text{рег}}(s) = \frac{k_{\text{рег}}}{T_{\text{И}}s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E_f(s)$
5	ПД (реальный)	$W_{\text{рег}}(s) = \frac{k_{\text{рег}}(1 + K_{\text{Д}}s)}{T_{\text{И}}s + 1}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E_g(s)$
6	ПИ	$W_{\text{рег}}(s) = \frac{k_{\text{рег}}(T_{\text{из}}s + 1)}{T_{\text{из}}s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2s^2 + T_1s + 1}$	$E_f(s)$
7	Д (идеальный)	$W_{\text{рег}}(s) = k_{\text{рег}}s$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E(s)$
8	ПИД	$W_{\text{рег}}(s) = k_{\text{рег}}\left(1 + \frac{k_{\text{рег}}}{T_{\text{И}}s} + K_{\text{Д}}s\right)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1k_2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$E_g(s)$

Продолжение таблицы 1.2

Вариант	Тип регулятора	ПФ регулятора $W_{\text{пер}}(s)$	ПФ объекта $W_{\text{об}}(s)$	Определить
9	П	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_f(s)$
10	ПИ	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}(T_{\text{из}} s + 1)}{T_{\text{из}} s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_g(s)$
11	И (реальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}}{s(T_{\text{и}} s + 1)}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_g(s)$
12	П	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_g(s)$
13	ПИД	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} \left(1 + \frac{k_{\text{пер}}}{T_{\text{и}} s} + K_{\text{д}} s\right)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_f(s)$
14	Д (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} s$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_f(s)$
15	ПД (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} (1 + s)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_g(s)$
16	И (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}}{T_{\text{и}} s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E(s)$
17	Д (реальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}} s}{T_{\text{и}} s + 1}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_f(s)$
18	И (реальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}}{s(T_{\text{и}} s + 1)}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_f(s)$
19	ПД (реальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}(1 + K_{\text{д}} s)}{T_{\text{и}} s + 1}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_f(s)$
20	Д (реальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}} s}{T_{\text{и}} s + 1}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_g(s)$
21	И (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}}{T_{\text{и}} s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_f(s)$
22	ПД (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} (1 + s)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_g(s)$
23	ПИ	$W_{\text{пер}}(s) = \frac{k_{\text{пер}}(T_{\text{из}} s + 1)}{T_{\text{из}} s}$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$E_f(s)$
24	Д (идеальный)	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} s$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_g(s)$
25	ПИД	$W_{\text{пер}}(s) = k_{\text{пер}} \left(1 + \frac{k_{\text{пер}}}{T_{\text{и}} s} + K_{\text{д}} s\right)$	$W_{\text{об}}(s) = \frac{K_{\text{об}}}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$	$E_g(s)$

1.3.2 Примеры выполнения задания 1.3

1) В одноконтурной системе управления, представленной на рисунке 1.2, определить общую статическую ошибку регулирования и ошибки регулирования по управляющему и возмущающему воздействиям.

Пусть $W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(T_1s + 1) \cdot (T_2s + 1)}$ – передаточная функция объекта;

$W_{пер}(s) = \frac{1}{s}$ – передаточная функция И-регулятора.

Решение. Статическую ошибку можно определить по формуле (1.22).

Определим передаточную функцию разомкнутой одноконтурной системы

$$W(s) = W_{об}(s) \cdot W_{пер}(s)$$

с учетом исходных данных:

$$W(s) = \frac{K_{об}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_{об}}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Общая ошибка регулирования:

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)} Y(s) + \frac{W_{об}(s)}{1 + W(s)} F(s)$$

Подставив выражения для $W_{об}(s)$ и $W(s)$ в $E(s)$, получим:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_{об}}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}} Y(s) + \frac{\frac{K_{об}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}}{1 + \frac{K_{об}}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}} F(s)$$

В результате последующих преобразований получим:

$$E(s) = \frac{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K_{об}} Y(s) + \frac{K_{об}s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)[s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K_{об}]} F(s)$$

Это выражение представляет собой изображение динамической ошибки. Изображение статической ошибки определим, полагая $s = 0$, откуда $E(0) = 0$. Следовательно, общая статическая ошибка регулирования в САУ с И-регулятором равна нулю, что соответствует свойству интегрального регулятора.

Аналогично можно определить $E_g(s)$ и $E_f(s)$.

1.4 Частотные характеристики

Важной динамической характеристикой звеньев и САУ являются частотные характеристики (ЧХ). На основе их использования разработаны инженерные частотные методы исследования САУ, достоинство которых состоит в том, что ЧХ позволяют просто выявлять влияние того или иного параметра на динамические свойства системы (устойчивость, переходный процесс и т.д.). Кроме того, ЧХ можно определить экспериментально. Это важно в тех случаях, когда трудно составить уравнения динамики.

Частотные характеристики звеньев и систем строятся на основании их комплексных передаточных функций (КПФ), которые определяют зависимость выходной величины от входной лишь в установившемся режиме при подаче на вход гармонических колебаний. Оператор s в ПФ является комплексным числом $s = \alpha + j\omega$, а в КПФ $s = j\omega$, т.е. является мнимой величиной. Таким образом, КПФ является частным случаем ПФ.

Частотная характеристика представляет собой реакцию динамического звена или системы на входное гармоническое воздействие. Частотная характерис-

тика может быть представлена как зависимость фазы и относительного значения амплитуды выходного сигнала от частоты колебаний входного воздействия. Относительное значение амплитуды выражается отношением амплитуд выходного и входного сигналов.

1.4.1 Задание 1.4

Для динамического звена с заданной передаточной функцией построить частотную характеристику в соответствии с данными таблицы 1.2. Пояснить ход решения.

Таблица 1.3 – Варианты заданий

Вариант	Название звена	Передаточная функция	Частотная характеристика	T, с	K
1	Апериодическое I-го порядка (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$	ФЧХ	5	2
2	Реальное интегрирующее (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$	ФЧХ	4	1
3	Апериодическое II-го порядка	$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2Ts + 1}$	АЧХ	5	1
4	Реальное дифференцирующее устойчивое	$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$	ФЧХ	5	2
5	Реальное интегрирующее (неустойчивое)	$W(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$	АЧХ	4	2
6	Форсирующее I-го порядка (ПД-звено)	$W(s) = K(Ts+1)$	АЧХ	5	1
7	Апериодическое I-го порядка (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$	АЧХ	5	2
8	Реальное дифференцирующее (устойчивое)	$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$	АФЧХ	5	1
9	Изодромное (ПИ-звено)	$W(s) = \frac{K(Ts+1)}{Ts}$	АФЧХ	4	2
10	Реальное интегрирующее (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$	АФЧХ	6	1
11	Апериодическое II-го порядка	$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2Ts + 1}$	ФЧХ	3	2
12	Реальное интегрирующее (неустойчивое)	$W(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$	АФЧХ	2	1
13	Форсирующее I-го порядка (ПД-звено)	$W(s) = K(Ts+1)$	ФЧХ	6	2
14	Апериодическое I-го порядка (неустойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts-1}$	ФЧХ	1	1

Продолжение таблицы 1.3

Вариант	Название звена	Передаточная функция	Частотная характеристика	T, с	K
15	Изодромное (ПИ-звено)	$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{Ts}$	ФЧХ	4	2
16	Реальное дифференцирующее (неустойчивое)	$W(s) = \frac{Ks}{Ts - 1}$	АЧХ	10	1
17	Апериодическое I-го порядка (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$	АФЧХ	5	3
18	Форсирующее II-го порядка	$W(s) = K(Ts^2 + 2Ts + 1)$	АЧХ	4	2
19	Реальное интегрирующее неустойчивое	$W(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$	ФЧХ	5	2
20	Апериодическое I-го порядка (неустойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts - 1}$	АФЧХ	4	1
21	Реальное дифференцирующее (устойчивое)	$W(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$	АЧХ	6	2
22	Реальное интегрирующее (устойчивое)	$W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$	АЧХ	3	3
23	Апериодическое II-го порядка	$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2Ts + 1}$	АФЧХ	10	1
24	Изодромное (ПИ-звено)	$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{Ts}$	АЧХ	5	4
25	Апериодическое I-го порядка (неустойчивое)	$W(s) = \frac{K}{Ts - 1}$	АЧХ	5	3

1.4.2 Пример выполнения задания 1.4

Для звена I-го порядка с заданной передаточной функцией построить амплитудно-частотную, фазо-частотную и амплитудно-фазо-частотную характеристики (АЧХ, ФЧХ и АФЧХ).

$$W(s) = \frac{K(1 - sT_1)}{1 + sT_2},$$

где $T_1 = 1$ с, $T_2 = 10$ с, $K = 1$.

Решение. Подставив в передаточную функцию $j\omega$ вместо s , выделим вещественную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ составляющие частотной характеристики:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K(1 - jT_1\omega)}{1 + jT_2\omega} = \frac{K(1 - jT_1\omega) \cdot (1 - jT_2\omega)}{(1 + jT_2\omega) \cdot (1 - jT_2\omega)} = \frac{K - jKT_2\omega - jKT_1\omega - KT_1T_2\omega^2}{1 + T_2^2\omega^2} = \\ &= \frac{K(1 - T_1T_2\omega^2)}{1 + T_2^2\omega^2} - j \frac{K(T_1 + T_2)\omega}{1 + T_2^2\omega^2}, \end{aligned}$$

где 1-е слагаемое – вещественная составляющая частотной характеристики ($P(\omega)$);
2-е слагаемое – мнимая составляющая частотной характеристики ($Q(\omega)$).

АЧХ определяется по уравнению $A(\omega) = \sqrt{(P(\omega))^2 + (Q(\omega))^2}$.

ФЧХ определяется по уравнению $\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} + k\pi$,

где k – число из натурального ряда чисел, которое определяется исходя из конкретных условий.

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{K^2(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + K^2 \omega^2 (T_1 + T_2)^2}{(1 + T_2^2 \omega^2)^2}} = \frac{K \sqrt{1 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}}{1 + T_2^2 \omega^2};$$

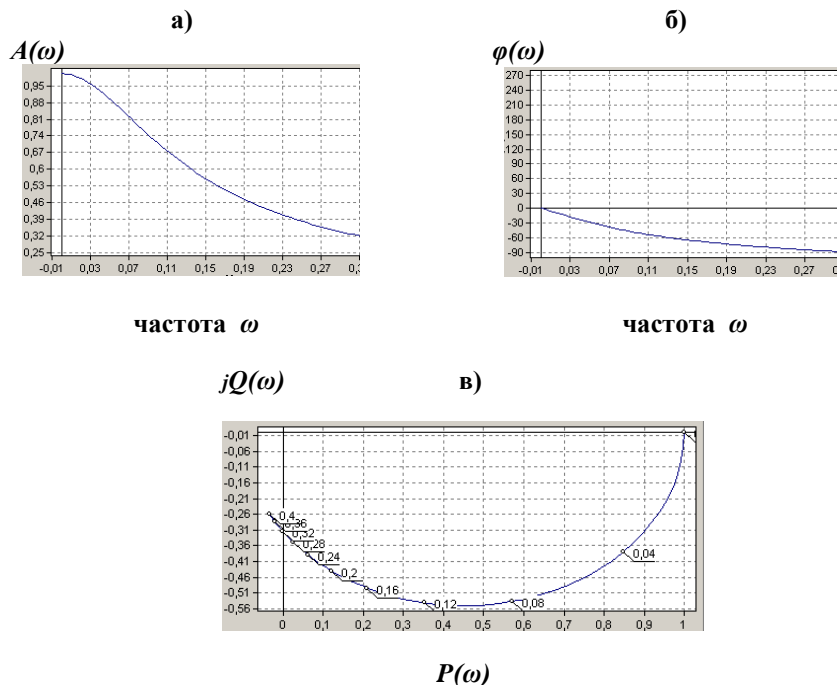
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{K(T_1 + T_2)\omega}{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)} = \frac{(T_1 + T_2)\omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2}, \quad k = 0$$

При построении АЧХ и ФЧХ по оси абсцисс откладываются значения частоты ω , а по оси ординат – $A(\omega)$ или $\varphi(\omega)$. При построении АФЧХ по оси абсцисс откладываются значения $P(\omega)$, а по оси ординат – $Q(\omega)$ (рисунок 1.3).

Задаваясь различными значениями частоты ω , определяют соответствующие значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и заносят их в таблицу 1.3.

Таблица 1.4 – Расчетные данные для построения АЧХ, ФЧХ, АФЧХ

ω	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28
$A(\omega)$	1	0.929	0.783	0.645	0.537	0.456	0.396	0.349
$\varphi(\omega)$	0	-24.092	-43.234	-57.037	-67.085	-74.745	-80.876	-85.988
$P(\omega)$	1	0.848	0.571	0.351	0.209	0.120	0.063	0.024
$Q(\omega)$	0	-0.379	-0.537	-0.541	-0.494	-0.44	-0.391	-0.348



а) - амплитудно-частотная характеристика ; б) фазо-частотная характеристика ;
 в) амплитудно-фазо-частотная характеристика (на АФЧХ рядом с точками отмечены частоты).

Рисунок 1.3 – Частотные характеристики звена I-го порядка

2 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Темы:

- алгебраические и частотные критерии устойчивости;
- построение областей устойчивости.

2.1 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Формулировка критерия Гурвица:

Для того, чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения a_0 , т. е. при $a_0 > 0$ были положительными.

Из коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

строят сначала главный определитель Гурвица

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} > 0 \quad i = 0, \bar{n}$$

Отчеркивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, можно получить определители Гурвица низшего порядка. Номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляют данный определитель.

Для систем I-го и II-го порядков необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для уравнений III-го, IV-го и более высоких порядков кроме положительности коэффициентов необходимо соблюдение дополнительных неравенств. Например:

$$\text{для уравнения III-го порядка } (n = 3) \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\text{для уравнения IV-го порядка } (n = 4) \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится на границе устойчивости, когда главный определитель равен нулю: $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$

Последнее равенство возможно в двух случаях:

$a_n = 0$ – система находится на границе апериодической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю);

$\Delta_{n-1} = 0$ – система находится на границе колебательной устойчивости (два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси).

Критерий Гурвица может использоваться для построения границ и области устойчивости.

Пусть существует характеристическое уравнение используемой системы вида:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Тогда для определения аperiodических границ устойчивости необходимо положить $a_0 = 0$ и $a_n = 0$, и разделить их относительно параметра, соответствующего границе устойчивости.

Для определения колебательной границы устойчивости необходимо решить определитель $\Delta_{n-1} = 0$ и из него выделить параметр, определяющий колебательную границу и являющийся функцией одного из параметров области устойчивости. После чего, пользуясь правилом “штриховки”, определить область устойчивости в плоскости заданных параметров.

2.1.1 Задания 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3

Задание 2.1.1

Определить на основании критерия Гурвица, устойчива ли система, если ее характеристическое уравнение имеет вид:

- | | |
|------------|------------------------------|
| Вариант 1 | $5p^3 + p^2 + 3p + 4 = 0$ |
| Вариант 2 | $4p^3 + 6p^2 + p + 1 = 0$ |
| Вариант 3 | $12p^3 + 10p^2 + 5p + 1 = 0$ |
| Вариант 4 | $6p^3 + 12p^2 + 4p + 1 = 0$ |
| Вариант 5 | $2p^3 + p^2 + 3p + 5 = 0$ |
| Вариант 6 | $4p^3 + 4p^2 + 2p + 1 = 0$ |
| Вариант 7 | $5p^3 + 5p^2 + 3p + 2 = 0$ |
| Вариант 8 | $8p^3 + 3p^2 + 2p + 1 = 0$ |
| Вариант 9 | $10p^3 + 5p^2 + 5p + 3 = 0$ |
| Вариант 10 | $3p^3 + 8p^2 + p + 3 = 0$ |
| Вариант 11 | $2p^3 + 6p^2 + 2p + 4 = 0$ |
| Вариант 12 | $7p^3 + 4p^2 + p + 1 = 0$ |
| Вариант 13 | $5p^3 + 3p^2 + 3p + 3 = 0$ |
| Вариант 14 | $15p^3 + 6p^2 + 10p + 1 = 0$ |
| Вариант 15 | $9p^3 + 2p^2 + 5p + 2 = 0$ |
| Вариант 16 | $12p^3 + 2p^2 + 4p + 1 = 0$ |
| Вариант 17 | $p^3 + 3p^2 + 3p + 5 = 0$ |
| Вариант 18 | $6p^3 + 4p^2 + 4p + 2 = 0$ |
| Вариант 19 | $4p^3 + 5p^2 + 3p + 3 = 0$ |

- Вариант 20 $p^3 + p^2 + 4p + 1 = 0$
 Вариант 21 $2p^3 + 4p^2 + 7p + 8 = 0$
 Вариант 22 $3p^3 + 3p^2 + 4p + 5 = 0$
 Вариант 23 $3p^3 + 7p^2 + 2p + 1 = 0$
 Вариант 24 $5p^3 + 2p^2 + 3p + 2 = 0$
 Вариант 25 $6p^3 + 4p^2 + p + 1 = 0$

Если система неустойчива, то изменить один из коэффициентов характеристического уравнения так, чтобы система стала устойчивой; если система устойчива, то изменить один из коэффициентов характеристического уравнения так, чтобы система стала неустойчивой.

Пояснить ход решения.

Задание 2.1.2

Определить границы колебательной или апериодической устойчивости системы по коэффициенту K , если ее характеристическое уравнение имеет вид:

- Вариант 1 $5p^4 + Kp^3 + 2p^2 + p + 4 = 0$
 Вариант 2 $4p^3 + Kp^2 + p + 5 = 0$
 Вариант 3 $5p^3 + 4p^2 + Kp + 1 = 0$
 Вариант 4 $10p^3 + p^2 + Kp + 4 = 0$
 Вариант 5 $7p^3 + Kp^2 + 4p + 5 = 0$
 Вариант 6 $p^3 + 4p^2 + 3p + K = 0$
 Вариант 7 $4p^4 + 2p^3 + p^2 + Kp + 3 = 0$
 Вариант 8 $2p^3 + 6p^2 + 2p + K = 0$
 Вариант 9 $8p^3 + Kp^2 + 5p + 2 = 0$
 Вариант 10 $3p^3 + 5p^2 + Kp + 1 = 0$
 Вариант 11 $6p^3 + Kp^2 + p + 3 = 0$
 Вариант 12 $p^4 + 2p^3 + Kp^2 + 2p + 1 = 0$
 Вариант 13 $(3 + K)p^4 + p^3 + 4p^2 + p + 10 = 0$
 Вариант 14 $2p^3 + (15 + K)p^2 + p + 1 = 0$
 Вариант 15 $2p^3 + 3p^2 + (10 + K)p + 4 = 0$
 Вариант 16 $4p^4 + (20 + K)p^3 + 5p^2 + 2p + 1 = 0$
 Вариант 17 $10p^3 + 12p^2 + 4p + (1 + K) = 0$
 Вариант 18 $3p^3 + 4p^2 + 3p + (10 + K) = 0$
 Вариант 19 $2p^3 + p^2 + 4p + (15 + K) = 0$
 Вариант 20 $4p^4 + 2p^3 + (1 + K)p^2 + 2p + 5 = 0$
 Вариант 21 $5p^3 + (6 + K)p^2 + 4p + 2 = 0$

- Вариант 22 $2p^3 + 10p^2 + (5 + K)p + 8 = 0$
 Вариант 23 $(12 + K)p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 5p + 1 = 0$
 Вариант 24 $8p^3 + 10p^2 + 4p + (6 + K) = 0$
 Вариант 25 $4p^4 + 5p^3 + 2p^2 + (2 + K)p + 3 = 0$

Задание 2.1.3

Построить область устойчивости для разомкнутой САУ в плоскости параметров T_3 и K , передаточная функция которой имеет вид

$$W(S) = \frac{K}{(T_3s + 1)(T_2s + 1)(T_1s + 1)},$$

используя данные таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Варианты заданий

Вариант	T_1, c	T_2, c
1	3	1
2	1	2
3	3	3
4	1	4
5	4	3
6	2	5
7	3	4
8	2	3
9	1	5
10	5	2
11	2	2
12	1	2
13	3	3
14	4	1
15	5	3
16	5	2
17	4	2
18	1	6
19	6	3
20	10	4
21	4	4
22	9	1
23	4	5
24	8	3
25	5	5

2.1.2 Примеры выполнения заданий 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3

2.1.1

1) Определить, устойчива ли система, если ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$4p^2 + 2p + 4 = 0 .$$

Решение. Характеристическое уравнение 2-го порядка, все его коэффициенты положительны. Следовательно, исследуемая система устойчива.

2) Исследуемая система имеет характеристическое уравнение 3-го порядка вида:

$$5p^3 + 2p^2 + p + 4 = 0 ,$$

где $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$.

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были > 0 и определитель $\Delta_{n-1} > 0$.

Решение. Исходное характеристическое уравнение 3-го порядка имеет все коэффициенты > 0 , следовательно, для оценки устойчивости системы надо определить знак определителя Δ_2 .

Запишем определитель Гурвица для анализируемой системы:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Выделим из нее определитель Δ_2 и определим его знак:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 20 < 0$$

Следовательно, исходная система неустойчива.

Критерий Гурвица позволяет определить коэффициенты исходного характеристического уравнения, изменение которых сделает систему устойчивой или неустойчивой.

Так, сделав, например, значение $a_1 > 20$, получим $\Delta_2 > 0$ и, следовательно, анализируемая система будет устойчивой.

Такой же результат будет получен, если, например, в характеристическом уравнении положить $a_0 = 1$, $a_1 > 4$.

2.1.2 Пусть система имеет характеристический полином вида:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0 ,$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 3$, $a_3 = ?$, $a_4 = 1$.

Необходимо определить значение коэффициента a_3 , при котором система будет находиться на границе колебательной устойчивости.

Решение. Запишем в общем виде определитель этой системы:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

Выделим из этого определителя определитель третьего порядка Δ_3 , в состав которого входит искомым коэффициент a_3 , и приравняем Δ_3 к нулю:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Вычислим определитель Δ_3 :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (-1)^2 a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} + (-1)^3 a_3 \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3(a_0 a_3 - 0 \cdot a_4) = \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 = 0 \end{aligned}$$

Подставив в Δ_3 заданные значения коэффициентов, получим:

$$10 \cdot 3a_3 - 10^2 \cdot 1 - a_3^2 \cdot 1 = 0$$

Откуда получаем квадратное уравнение:

$$a_3^2 - 30a_3 - 100 = 0 .$$

Решая квадратное уравнение относительно a_3 , получаем: $a_3 \approx \pm 11.2$.

Величину $a_3 \approx -11.2$ отбрасываем, так как наличие отрицательного коэффициента a_3 в характеристическом уравнении свидетельствует о неустойчивости анализируемой системы. Поэтому в качестве решения задачи принимаем $a_3 = +11.2$.

Следовательно, при значении $a_3 = 11.2$ система будет находиться на границе колебательной устойчивости.

Для этой же системы определим значение коэффициента a_3 , при котором система будет находиться на границе апериодической устойчивости.

$$\text{Известно, что } \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 = 0$$

$$\text{При выполнении условия } a_4 = 0 \quad a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 = 0$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 = 0$$

$$30a_3 - a_3^2 = 0, \text{ откуда } a_3 = 30$$

Следовательно, при значении $a_3 = 30$ система будет находиться на границе апериодической устойчивости.

2.1.3 Передаточная функция статической автоматической системы регулирования в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad (2.1)$$

где $T_2 = 0.2$ с, $T_3 = 0.1$ с.

Построить область устойчивости замкнутой системы в плоскости параметров T_1 и K .

Решение.

а) Исходя из вида передаточной функции (2.1), характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) + K = 0 .$$

Раскрыв скобки

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K = 0$$

и подставив в уравнение исходные данные, получаем

$$0.02 T_1 s^3 + (0.3 T_1 + 0.02) s^2 + (T_1 + 0.3) s + (1 + K) = 0 \quad (2.2)$$

б) Так как должно быть $T_1 \geq 0$, то расположение области устойчивости относительно T_1 определено. Полагая $a_n = 0$, из (2.2) запишем $K + 1 = 0$. Откуда $K = -1$. Таким образом, границы аperiodической устойчивости определены.

в) Теперь найдем границу колебательной устойчивости. Так как (2.2) является уравнением 3-го порядка, то для отыскания границы колебательной устойчивости необходимо разрешить определитель Δ_2 относительно T_1 и построить функцию $K = f(T_1)$ (можно наоборот).

Запишем для (2.2) определитель Δ_2 для определения границы колебательной устойчивости.

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0.3T_1 + 0.02 & 1 + K \\ 0.02T_1 & T_1 + 0.3 \end{pmatrix} = (0.3T_1 + 0.02)(T_1 + 0.3) - 0.02T_1(1 + K) = 0 \quad (2.3)$$

Разрешая (2.3) относительно K , получим:

$$K = \frac{15T_1^2 + 4.5T_1 + 0.3}{T_1} .$$

г) Строим область устойчивости в плоскости параметров K и T_1 , для чего задаемся значениями T_1 , вычисляем значения K и строим кривую $K = f(T_1)$ (рисунок 2.1).

Таблица 2.2 – Данные для построения кривой $K = f(T_1)$

T, c	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00	2.00
K	34.65	14.95	11.25	9.84	9.18	9.00	10.00	12.60	15.43	18.33	19.80	34.65

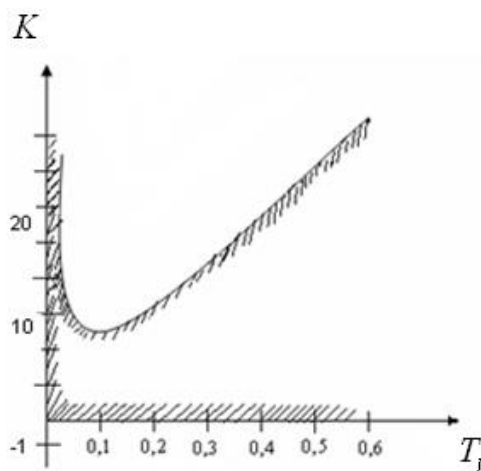


Рисунок 2.1 – Определение области устойчивости

Для определения области устойчивости необходимо нанести штриховку. Из пункта б) следует, что штриховка на осях параметров K и T_1 наносится, как показано на рисунке: кривую $K = f(T_1)$ надо штриховать вниз, иначе аperiodические границы устойчивости $T_1 = 0$ и $K = -1$ не будут таковыми. Следовательно, область, ограниченная аperiodическими и колебательной границами устойчивости, будет искомой.

2.2 Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем управления по виду их частотных характеристик.

Критерий Михайлова

Формулировка критерия Михайлова:

Для того, чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен n . Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости.

2.2.1 Задание 2.2.1. Для передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s^3 + T_2 s^2 + T_3 s + 1}$$

построить кривую (годограф) Михайлова $D(j\omega)$ системы в соответствии с данными таблицы 2.3 и определить устойчива система или нет. Пояснить ход решения.

Таблица 2.3 – Варианты заданий

Вариант	T_1, c	T_2, c	T_3, c	K
1	2	1	2	5
2	3	4	1	4
3	5	1	2	5
4	6	3	1	3
5	1	5	3	4
6	2	2	2	2
7	5	3	3	6
8	6	4	2	3
9	4	4	4	5
10	3	8	1	2
11	9	4	2	8
12	3	4	8	1
13	5	5	5	5
14	6	3	1	2
15	2	3	2	1
16	1	1	2	2
17	3	1	3	1

Продолжение таблицы 2.3

Вариант	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	K
18	3	2	4	3
19	2	1	1	2
20	3	1	2	0.5
21	4	1	1	1
22	3	2	2	3
23	1	4	0.5	4
24	2	3	1	5
25	5	1	2	3

2.2.2 Пример выполнения задания 2.2.1

Дана передаточная функция разомкнутой системы вида

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} \quad (2.4)$$

Построить годограф Михайлова для замкнутой системы при $T_1 = 2 \text{ с}$, $T_2 = 3 \text{ с}$, $K = 5$ и определить её устойчивость.

Решение. Запишем для (2.4) характеристическое уравнение замкнутой системы

$$T_1 s^2 + T_2 s + 1 + K = 0 \quad (2.5)$$

Заменив в (2.5) s на $j\omega$, получим

$$-T_1 \omega^2 + jT_2 \omega + 1 + K = 0 \quad (2.6)$$

Выделим из (2.6) вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{cases} X(\omega) = 1 + K - T_1 \omega^2 \\ Y(\omega) = T_2 \omega \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда аналитическая запись годографа Михайлова будет представлена в виде:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Для решаемого случая она будет иметь вид:

$$D(j\omega) = 1 + K - T_1 \omega^2 + jT_2 \omega$$

Графическое построение $D(j\omega)$ осуществляется поточечно в осях $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ на основании (2.7) при изменении частоты в заданных пределах (рисунок 2.2). Годограф Михайлова позволяет определить устойчивость системы на основании критерия Михайлова.

Для решения поставленной задачи определим $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для нескольких значений частоты ω :

Таблица 2.4 – Данные для построения годографа Михайлова

ω	0	1	2	3	4	5	∞
$X(\omega)$	6	4	-2	-12	-26	-44	$-\infty$
$Y(\omega)$	0	3	6	9	12	15	$+\infty$

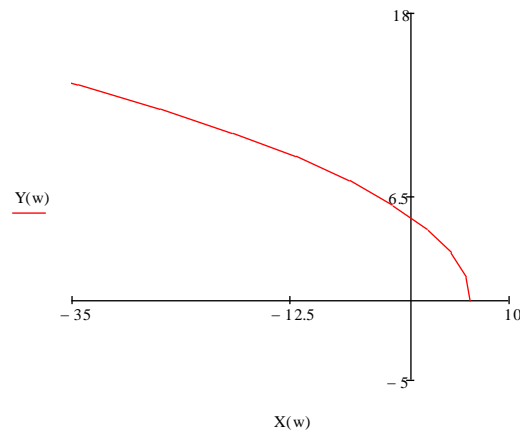


Рисунок 2.2 – Годограф Михайлова при $n = 2$

Как видно из графика, кривая Михайлова начинается на вещественной положительной полуоси, при изменении частоты ω от 0 до ∞ обходит против часовой стрелки последовательно квадранты и конец ее уходит в бесконечность во 2-м квадранте, что соответствует порядку характеристического уравнения ($n = 2$). Следовательно, рассматриваемая система устойчива.

Аналогично можно определить устойчивость разомкнутой системы (2.4). В этом случае в качестве характеристического полинома надо рассматривать только знаменатель (2.4), т. е. $T_1 s^2 + T_2 s + 1 = 0$.

Из критерия Михайлова вытекает простое правило перемежаемости (чередующести) корней. Анализируя годографы Михайлова, можно заметить, что при последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочередно. В точках пересечения кривой Михайлова с вещественной осью обращается в 0 мнимая функция Михайлова $Y(\omega)$, а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в 0 вещественная функция $X(\omega)$. Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$.

В связи с вышесказанным можно привести другую формулировку критерия Михайлова: система управления будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная $X(\omega)$ и мнимая $Y(\omega)$ функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные и перемежающиеся корни, причем общее число этих корней равно порядку характеристического уравнения n .

Условие перемежаемости корней дает возможность легко провести аналитическое исследование устойчивости, не вычерчивая кривую Михайлова.

Например, известно характеристическое уравнение системы:

$$s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 = 0$$

Заменив в нем s на $j\omega$, получим

$$(j\omega)^6 + 6(j\omega)^5 + 15(j\omega)^4 + 20(j\omega)^3 + 15(j\omega)^2 + 6j\omega + 1 = 0$$

$$-\omega^6 + j6\omega^5 + 15\omega^4 - j20\omega^3 - 15\omega^2 + 6j\omega + 1 = 0$$

Выделим вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{cases} X(\omega) = -\omega^6 + 15\omega^4 - 15\omega^2 + 1 = 0 ; \\ Y(\omega) = 6\omega^5 - 20\omega^3 + 6\omega . \end{cases}$$

Находим корни уравнения $Y(\omega)$:

$$\omega(6\omega^4 - 20\omega^2 + 6) = 0 ; \quad \omega_0 = 0 ; \\ \omega_{2,4}^2 = 1.67 \pm \sqrt{2.78-1} ; \quad \omega_2^2 = 0.36 ; \quad \omega_4^2 = 2.96 .$$

Если перемежаются корни, то перемежаются и их квадраты, поэтому нахождение ω_2^2 и ω_4^2 не обязательно.

Проверим, чередуются ли знаки $X(\omega)$ при подстановке ω_2^2 и ω_4^2 :

$$X(\omega_2) = (-0.36)^3 + 15 \cdot (0.36)^2 - 15 \cdot 0.36 + 1 = -2.51 ;$$

$$X(\omega_4) = (-2.96)^3 + 15 \cdot (2.96)^2 - 15 \cdot 2.96 + 1 = 150.89 .$$

Так как корни $Y(\omega)$ вещественны и знаки ординат $X(\omega)$, соответствующие этим корням, чередуются, то система устойчива. Это говорит о том, что кривая Михайлова последовательно проходит 6 квадрантов. Следовательно, система устойчива.

Критерий Найквиста

Формулировка критерия Найквиста:

Если разомкнутая система автоматического управления устойчива или находится на границе устойчивости, то для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$ на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞ и повороте вектора АФЧХ $W(\omega j)$ по часовой стрелке .

Если АФЧХ разомкнутой системы автоматического управления проходит через точку $(-1, j0)$, то замкнутая система автоматического управления находится на границе устойчивости, а если АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку $(-1, j0)$, то замкнутая система неустойчива.

Следствие из критерия Найквиста:

Если разомкнутая система неустойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки) $m/2$, где m — число “правых” корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

2.2.3 Задание 2.2.2. Определить, устойчива ли замкнутая система, если разомкнутая система описывается дифференциальным уравнением вида

$$T_1 \frac{d^3 x}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_3 \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 y ,$$

используя данные таблицы 2.5. Пояснить ход решения.

Таблица 2.5 – Варианты заданий

Вариант	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	a_n	b_0
1	1	4	2	3	4
2	2	3	2	2	1
3	2	5	1	1	5
4	3	3	6	4	3.5
5	4	5	2	1	1
6	3	4	3	3	1
7	5	3	4	1	1.5
8	1	4	4	5	10
9	2	5	2	1	6
10	3	4	2	2	0.5
11	5	5	3	2	2.5
12	5	4	2	1	10
13	4	8	3	2	3
14	5	5	1	2	6
15	2	6	3	6	2
16	2	3	3	3	3
17	1	7	3	2	9
18	5	2	6	1	5
19	2	6	2	3	3.5
20	3	8	2	4	4
21	1	2	5	3	7
22	2	5	3	4	2.5
23	7	3	7	2	2
24	2	5	2	3	4
25	3	8	3	4	3

2.2.4 Пример выполнения задания 2.2.2

Определить, будет ли устойчивой замкнутая АСР, если в разомкнутом состоянии она описывается дифференциальным уравнением вида:

$$T_1 \frac{d^3x}{dt^3} + T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + T_3 \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 y \quad (2.8)$$

Решение. Характеристическое уравнение этой системы

$$T_1 p^3 + T_2 p^2 + T_3 p + a_n = 0$$

Пусть $T_1 = 1 \text{ с}$, $T_2 = 2 \text{ с}$, $T_3 = 2 \text{ с}$, $a_n = 1$.

Сначала надо проверить устойчивость разомкнутой системы. Так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то устойчивость системы определяем по знаку определителя Δ_2 .

$$\Delta_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 > 0$$

Следовательно, разомкнутая система устойчива.

Теперь проверяем выполнение условия устойчивости замкнутой системы, используя амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) разомкнутой системы $W_{pc}(s)$, определяемую из (2.8)

$$W_{pc}(p) = \frac{b_0}{T_1 p^3 + T_2 p^2 + T_3 p + a_n}$$

Пусть $b_0 = 2$. Для построения АФЧХ необходимо вывести выражения для вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частей комплексной передаточной функции $W_{pc}(j\omega)$ разомкнутой системы

$$W_{pc}(j\omega) = \frac{b_0}{T_1(j\omega)^3 + T_2(j\omega)^2 + T_3(j\omega) + a_n} = \frac{2}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + j2\omega + 1} = \frac{2}{(1 - 2\omega^2) + j(2\omega - \omega^3)} =$$

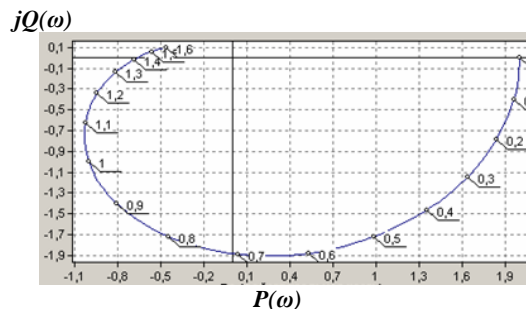
$$= \frac{2 \cdot [(1 - 2\omega^2) - j(2\omega - \omega^3)]}{(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = \frac{2(1 - 2\omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} - j \frac{2\omega(2 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2},$$

где первое слагаемое – вещественная составляющая $P(\omega)$, второе слагаемое – мнимая составляющая $Q(\omega)$ АФЧХ.

Придавая в радианах значения для ω от 0 до $+\infty$, вычисляем $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и поточечно в координатных осях $P(\omega) - Q(\omega)$ строим АФЧХ разомкнутой системы (рисунок 2.3).

Таблица 2.6 – Данные для построения АФЧХ

ω, c^{-1}	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$P(\omega)$	2.000	1.840	1.354	0.535	-0.444	-1.000	-0.943	-0.685	-0.463	-0.313
$Q(\omega)$	0	-0.784	-1.466	-1.880	-1.724	-1.000	-0.337	-0.013	0.101	0.128



на АФЧХ рядом с точками отмечены частоты

Рисунок 2.3 – АФЧХ разомкнутой системы

Из рисунка видно, что кривая АФЧХ, начало которой лежит в точке $\omega = 0$, при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. Следовательно, замкнутая система автоматического управления устойчива.

Проверить устойчивость системы можно и аналитически, используя формулировку критерия Найквиста, в которой используется критическая точка с координатами $(-1, j0)$.

Приравняем мнимую составляющую АФЧХ нулю и вычислим значение частоты:

$$-\frac{2\omega(2 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = 0; \quad 2\omega(\omega^2 - 2) = 0; \quad \omega = \sqrt{2} = 1.41$$

Теперь, подставив полученное значение частоты в выражение для вещественной составляющей АФЧХ, рассчитаем величину $P(\omega)$, при которой кривая Найквиста пересекает вещественную отрицательную полуось:

$$\frac{2(1-2\omega^2)}{(1-2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = \frac{2-4 \cdot (1.41)^2}{(1-2 \cdot (1.41)^2)^2 + (2 \cdot 1.41 - (1.41)^3)^2} = -0.672 \text{ ,}$$

т.е. кривая Найквиста пересекает вещественную полуось в точке с координатами $(-0.672, j0)$, которая расположена правее точки $(-1, j0)$. Это свидетельствует о том, что кривая не охватывает точку $(-1, j0)$, а значит, замкнутая система устойчива.

Критерий Найквиста позволяет оценить удаление АФЧХ разомкнутой системы от точки $(-1, j0)$. Это удаление определяет запас устойчивости системы, который характеризуется двумя величинами: запасом устойчивости по амплитуде (модулю) и запасом устойчивости по фазе (рисунок 2.4).

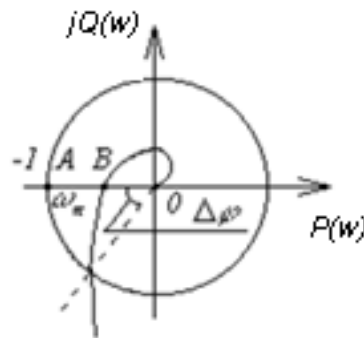


Рисунок 2.4 – Определение запаса устойчивости по модулю и по фазе

Запас устойчивости по модулю определяется величиной отрезка АВ оси абсцисс, заключенного между критической точкой $(-1, j0)$ и АФЧХ:
 $s = 1 - A(\omega_k)$, где ω_k – частота, соответствующая критической точке $(-1, j0)$.
 Запас устойчивости по фазе определяется как величина угла $\varphi = \pi - |\varphi(\omega_k)|$.

В примере 2.2.2 (рисунок 2.3) запас устойчивости по модулю равен 0.328 (отрезок на вещественной отрицательной полуоси, заключенный между точкой $(-1, j0)$ и точкой пересечения АФЧХ с этой полуосью), а по фазе -45° (угол, образованный вещественной отрицательной полуосью и лучом, проведенным из начала координат к точке пересечения АФЧХ и окружности с радиусом, равным 1).

3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Темы:

- показатели качества управления;
- управляемость и наблюдаемость;
- моделирование систем управления: структурный метод.

3.1 Показатели качества управления

Требования, предъявляемые к проектируемой САУ: САУ должна быть устойчивой и обеспечивать минимальное время регулирования t_p , интенсивное затухание переходного процесса, заданную динамическую ($X_{max} < X_{max}^{доп}$) и статическую ($|\Delta x_{уст}| < |\Delta x_{уст}^{доп}|$) точность. Система управления удовлетворяет требованиям к качеству, если все показатели качества не превышают заранее заданных значений.

По реакции САУ на входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции можно определить основные показатели качества функционирования САУ непосредственно по кривой переходного процесса, которые называются **прямыми оценками качества** (рисунок 3.1):

- установившееся значение выходной величины $x_{уст} = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$;
- максимальное отклонение x_{max} (на рисунке 3.1 $x_{max} = x_{max1}$);
- время переходного процесса t_p – наименьшее время, после которого выполняется условие $|x(t) - x_{уст}| < \Delta$, где Δ – заданная постоянная величина, значение которой задается в процентах от $x_{уст}$ (в большинстве случаев принимают $\Delta = \pm 5\%$ от $x_{уст}$).

Время регулирования характеризует быстродействие системы;

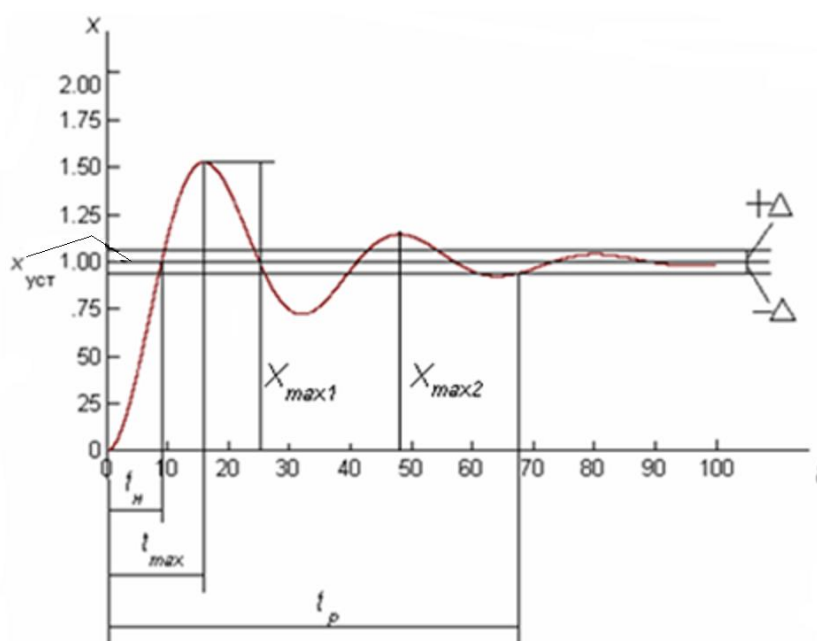


Рисунок 3.1 – Переходный процесс в САУ

- перерегулирование $\sigma = \frac{x_{max1} - x_{уст}}{x_{уст}} \cdot 100\%$, если $x_{\infty} \neq 0$.

Допустимое перерегулирование определяется конкретными условиями работы и назначением САУ. Обычно $\sigma = (10 \div 30)\%$ (например, для систем регулирования скорости допускают $\sigma = 18 \div 25\%$), но в некоторых случаях допускается и до 70% . Иногда перерегулирование недопустимо совсем (для систем, требующих особой точности поддержания заданного значения регулируемой величины);

- частота колебаний $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний для колебательных переходных процессов;

- число колебаний n выходного сигнала за время переходного процесса.

При проектировании САУ чаще всего допускают $n = 1 \div 2$, а иногда и до 3÷4, но в некоторых случаях колебания в системе недопустимы;

- время достижения первого максимума t_{max} ;

- время нарастания переходного процесса – абсцисса первой точки пересечения кривой переходной характеристики $x(t)$ с уровнем установившегося значения $x_{уст}$;

- декремент затухания χ , равный отношению модулей двух смежных перерегулирований:

$$\chi = \frac{|x_{max1} - x_{уст}|}{|x_{max2} - x_{уст}|} .$$

При $\chi > 1$ – процесс регулирования затухающий, колебательный; при $\chi = 1$ – незатухающий, колебательный; при $\chi < 1$ – расходящийся, колебательный.

Перерегулирование σ , декремент затухания χ и число колебаний n характеризуют склонность системы к колебаниям.

Помимо прямых методов исследования качества САУ существуют методы, основанные на применении **косвенных оценок**, которые позволяют оценивать качество регулирования без построения переходных процессов системы, т.е. не решая дифференциальные уравнения системы. Такие косвенные оценки называются критериями качества переходных процессов и при исследовании качества переходных процессов играют роль, аналогичную критериям устойчивости.

Существующие косвенные методы оценки качества регулирования в линейных непрерывных САУ можно разделить на 3 группы: частотные, интегральные и корневые.

При частотном методе качество системы управления оценивают по АЧХ замкнутой САУ путем подачи на ее вход гармонических входных воздействий. Длительность переходной характеристики определяется шириной $A_z(\omega)$: например, чем шире АЧХ САУ, тем меньше время переходного процесса t_p .

Интегральный метод основан на вычислении определенных интегралов, оценивающих площадь под кривой переходного процесса, и заключается в определении таких значений параметров системы, которые обеспечивают

минимум интегральной оценки, что соответствует высокому быстродействию САУ.

Корневой метод или метод распределения корней дает возможность по значениям корней характеристического уравнения, расположенных в плоскости корней слева от мнимой оси, приближенно оценить время регулирования и перерегулирование. Оценка качества переходных процессов по корневым критериям производится по значениям полюсов (корней знаменателя) и нулей (корней числителя) передаточной функции замкнутой САУ (рисунок 3.2).

При этом следует помнить, что переходная характеристика

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ – корни характеристического уравнения (т.е. полюсы передаточной функции), в которых

α_i – вещественная часть, определяющая затухание переходного процесса (декремент затухания);

β_i – мнимая часть, определяющая частоту затухающих колебаний;

C_i – постоянные интегрирования, зависящие для данной системы от воздействия f , места его приложения, а также от начальных условий.

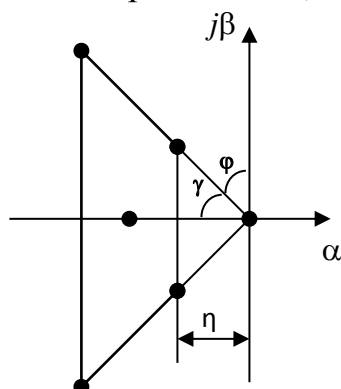


Рисунок 3.2 – Плоскость распределения корней

Корневой метод основывается на отыскании по характеристическому уравнению n -го порядка наименьшего по абсолютному значению вещественного корня или пары комплексно сопряженных корней с наименьшей вещественной частью. Время затухания процесса определяется членом, содержащим α_{min} .

С помощью корневого метода можно рассчитать следующие показатели качества:

1) Степень устойчивости η определяется расстоянием от мнимой оси до ближайшего вещественного корня (апериодическая степень устойчивости) или до ближайшей пары комплексно сопряженных корней (колебательная степень устойчивости). Таким образом, степень устойчивости η служит мерой удаления САУ от границы устойчивости, т.е. характеризует запас устойчивости САУ:

$$\eta = |\alpha|_{min}.$$

Между степенью устойчивости η и временем регулирования t_p существует связь. В случае, когда ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, время вхождения в зону отклонения $\pm\Delta$ можно определить как

$$t_p \approx (1/\eta)\ln(1/\Delta)$$

Если принять $\Delta = 0.05$, то время переходного процесса $t_p \approx 3/\eta \approx 3T_{max}$, где $T_{max} = 1/|\alpha|_{min}$ – наибольшая постоянная времени звена или САУ.

В том случае, когда ближайшей к мнимой оси является пара комплексно сопряженных корней, можно найти верхнюю границу времени переходного процесса: $t_p \leq (1/\eta)\ln(1/\Delta)$.

2) Степень колебательности m определяется как тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и лучом, проведенным из начала координат к корню с максимальным отношением мнимой части к вещественной.

$$m = |\beta_i/\alpha_i|_{max} = tg\gamma_{max}$$

Чем больше отношение $\beta_i/|\alpha_i|$, тем больше колебательность составляющей переходного процесса.

Степень колебательности связана с величиной перерегулирования переходной характеристики: $\sigma \leq exp(-\pi/m) \cdot 100\%$.

3) Степень затухания ξ определяется как синус угла φ , образованного мнимой осью с лучом, соединяющим ближайший комплексный корень с началом координат.

Между степенью затухания ξ и степенью колебательности m существует определенная связь:

$$\xi = 1 - exp(-2\pi/m);$$

$$m = 2\pi/\ln[1/(1-\xi)].$$

При $\xi = 0.9 \div 0.98$ колебания затухают практически за один период. При $\xi = 0$ САУ находится на границе колебательной устойчивости. Чем больше ξ , тем интенсивнее затухают колебания и тем больше, следовательно, запас устойчивости САУ ($\xi_{opt} = 0.75 \div 0.98$, $m_{opt} = 0.221 \div 0.636$).

Корневые оценки качества пригодны только для систем, передаточные функции которых не имеют нулей (при нулевых начальных условиях).

Для САУ выше 2-го порядка этими оценками можно пользоваться, если есть уверенность, что переходный процесс в САУ близок по форме к переходному процессу в САУ 2-го порядка, иначе может быть получена существенная погрешность результатов. Однако и здесь качество переходного процесса будет тем лучше, чем больше η и меньше m ; причем чем больше η , тем выше быстрейшее действие, и чем меньше m , тем меньше σ . Несмотря на приблизительность определения корневых оценок, по ним можно судить о тенденциях изменения показателей качества САУ в зависимости от вида характеристического уравнения, что при проектировании САУ позволяет подобрать параметры системы таким образом, чтобы придать ей желаемые свойства.

3.1.1 Задание 3.1

Пользуясь корневым методом, определить показатели качества линейной САУ по заданному характеристическому уравнению, коэффициенты которого приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Варианты заданий

Варианты	Коэффициенты характеристического уравнения			
	a_0	a_1	a_2	a_3
1	0.3	15.0	20	10
2	0.5	20.0	15	5
3	2.0	3.0	7	2
4	0.9	5.0	25	2
5	1.0	15.0	15	5
6	2.0	6.0	20	9
7	1.0	3.0	3	2
8	2.0	5.0	3	2
9	0.5	4.5	14	5
10	1.0	5.0	5	3
11	3.0	4.0	8	1
12	1.0	2.0	5	2
13	0.2	12.0	20	40
14	3.0	3.0	8	1
15	2.0	2.0	6	1
16	0.15	30.0	40	150
17	1.0	4.0	8	3
18	0.75	10.0	50	5
19	1.25	30.0	35	140
20	0.2	4.0	25	5
21	0.4	10.0	80	30
22	1.3	12.0	10	15
23	1.0	7.5	70	25
24	0.4	30.0	30	75
25	0.1	15.0	30	20

3.1.2 Пример выполнения задания 3.1

Дано характеристическое уравнение системы:

$$0.5p^3 + 5.5p^2 + 40p + 10 = 0$$

Рассчитать показатели качества САУ.

Решение. Рассчитаем корни характеристического уравнения:

$$p_1 = -0.259; \quad p_2 = -5.37 + 6.955j; \quad p_3 = -5.37 - 6.955j.$$

Ближайшей к мнимой оси является вещественный корень. Следовательно, система обладает апериодической степенью устойчивости.

Степень устойчивости системы: $\eta = |\alpha|_{\min} = 0.259$

При $\Delta = 0.05$ время регулирования: $t_p \approx (1/\eta) \ln(1/\Delta) = 3.861 \ln(20) = 11.583$ с.

Степень колебательности: $m = |\beta_i/\alpha_i|_{\max} = tg\gamma_{\max} = 1.295$

Перерегулирование: $\sigma \leq \exp(-\pi/m) \cdot 100\% = \exp(-3.14/1.295) \cdot 100\% = 8.85\%$

Степень затухания: $\xi = 1 - \exp(-2\pi/m) = 1 - \exp(-3.626) = 1 - 0.0078 = 0.9922$

Таким образом, рассчитанные показатели качества свидетельствуют о том, что САУ обладает высоким быстродействием, небольшой величиной перерегулирования, колебания в системе затухают практически за один период. Все это говорит о хорошем качестве управления.

3.2 Анализ управляемости и наблюдаемости

Многомерные линейные нестационарные системы в отличие от одномерных имеют r входов и k выходов (рисунок 3.3). Они описываются уравнениями состояния вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)g(t)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и уравнениями выхода $y(t) = C(t)x(t)$,

где x – n -мерный вектор состояния;

g – r -мерный вектор входных воздействий (управлений);

y – k -мерный вектор выхода (вектор измерений);

x_0 – начальное состояние;

t – время;

t_0 – начальный момент времени (момент подачи входного воздействия);

$A(t), B(t), C(t)$ – матрицы размера $(n \times n), (n \times r), (k \times n)$ соответственно.

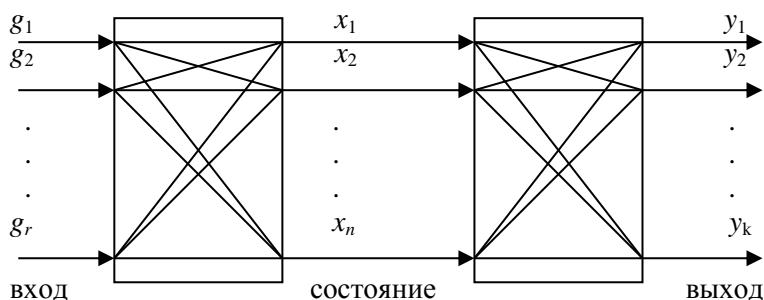


Рисунок 3.3 – Многомерная линейная система

Многомерную систему можно рассматривать как совокупность $r \cdot k$ одномерных систем, каждая из которых связывает один из r входов с одним из k выходов. Если $r=1$ и $k=1$, система является одномерной. Если матрицы $A(t), B(t), C(t)$ не зависят от времени t , система называется многомерной стационарной.

Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где u – r -мерный вектор управления, $u \in R^r$;

t – время, $t \in [t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы.

Система (3.1) называется *вполне управляемой по состоянию*, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в произвольное заранее заданное конечное состояние $x(t_1)$.

Критерий управляемости по состоянию. Для того чтобы система была вполне управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по состоянию $W = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)$ равнялся размерности вектора состояния: $\text{rang}W = n$.

Система (3.1) называется *вполне управляемой по выходу*, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в такое конечное состояние, при котором обеспечивается заранее заданное произвольное значение выхода $y(t_1)$.

Критерий управляемости по выходу. Для того чтобы система была вполне управляемой по выходу, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по выходу $P = (CB \ CAB \ CA^2B \ \dots \ CA^{n-1}B)$ равнялся размерности вектора выхода: $\text{rang}P = k$.

Система (3.1) называется *вполне наблюдаемой*, если по реакции $y(t)$ на выходе системы на промежутке времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно определить начальное состояние $x(t_0)$.

Критерий наблюдаемости. Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости $Q = (C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$ равнялся размерности вектора состояния: $\text{rang}Q = n$.

Постановка задачи: пусть известны матрицы A, B, C системы (3.1). Требуется определить, является ли система вполне управляемой и наблюдаемой.

Алгоритм решения задачи:

- 1) В уравнениях состояния и выхода выделить матрицы A, B, C .
- 2) Составить матрицу W управляемости по состоянию, матрицу P управляемости по выходу и матрицу наблюдаемости Q .
- 3) Определить ранги матриц и сделать вывод об управляемости и наблюдаемости на основе соответствующего критерия.

Примечание. Если линейная стационарная система управления описывается соотношениями

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x = g(t), \quad y(t) = x(t),$$

то, вводя обозначения $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}, u = g$, их можно записать в эквивалентной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \ 0 \ \dots \ 0)x.$$

\Downarrow
A

\Downarrow
B

\Downarrow
C

3.2.1 Задание 3.2

Определить, управляемость и наблюдаемость системы, заданной уравнениями:

Вариант 1
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 3u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 4u_2, \\ y &= x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Вариант 2
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_2 + 3u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + 4u_1, \\ y &= -2x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Вариант 3
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1 + 4x_3 + 5u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_3 + 2u_2, \\ y &= x_1 - 2x_2.\end{aligned}$$

Вариант 4
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 4x_2 + 3u_2, \\ y &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Вариант 5
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 5x_2 - 3u_2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_2 + 3u_1 + 4u_2, \\ y &= 2x_1 + 2x_2.\end{aligned}$$

Вариант 6
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 5x_2 + 2u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 3u_1 + 2u_2, \\ y &= -3x_1 - 2x_2.\end{aligned}$$

Вариант 7
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 4x_2 + 6u_1, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 8x_2 + 4u_1 + 5u_2, \\ y &= x_1 + 3x_2.\end{aligned}$$

Вариант 8
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 10x_1 + 10x_2 + 3u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 + u_1 + u_2, \\ y &= 3x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Вариант 9
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 8x_1 + 2x_2 - u_1 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 5u_2, \\ y &= 3x_1 + 3x_2.\end{aligned}$$

Вариант 10
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 6x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 8u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 3u_1 + 3u_2, \\ y &= -2x_1 + 4x_2.\end{aligned}$$

Вариант 11
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 + 4u_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_2 + u_1 + u_2, \\ y &= x_1 - 5x_2.\end{aligned}$$

Вариант 12
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_1 + x_2 + 2u_1 + 3u_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 3x_2 - 5u_1 + 4u_2, \\ y &= 4x_1 + 3x_2.\end{aligned}$$

Вариант 13
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 5x_2 + u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 2x_2 + 3u_1 + 2u_2, \\ y &= -4x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Вариант 14
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 3u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 4u_2, \\ y &= -2x_1 - 2x_2.\end{aligned}$$

Вариант 15
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_2 + 3u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + 4u_1, \\ y &= 2x_1 - 5x_2.\end{aligned}$$

Вариант 16
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1 + 4x_3 + 5u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_3 + 2u_2, \\ y &= x_1 + 4x_2.\end{aligned}$$

Вариант 17
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2u_1 + 5u_2, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 4x_2 + 3u_2, \\ y &= -3x_1 + 3x_2.\end{aligned}$$

Вариант 18
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 5x_2 + 3u_2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_2 + 3u_1 + 4u_2, \\ y &= 5x_1 - 4x_2.\end{aligned}$$

Вариант 19 $\dot{x}_1 = 2x_1 + 5x_2 + 2u_1 + 2u_2$,
 $\dot{x}_2 = -x_1 + 3u_1 + 2u_2$,
 $y = 2x_1 - x_2$.

Вариант 20 $\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + 6u_1$,
 $\dot{x}_2 = 3x_1 + 8x_2 + 4u_1 + 5u_2$,
 $y = -4x_1 - 4x_2$.

Вариант 21 $\dot{x}_1 = 10x_1 - 10x_2 + 3u_1 + 4u_2$,
 $\dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + u_1 + u_2$,
 $y = 3x_1 + 5x_2$.

Вариант 22 $\dot{x}_1 = 8x_1 + 2x_2 + u_1 + 4u_2$,
 $\dot{x}_2 = x_2 + 5u_2$,
 $y = -3x_1 + x_2$.

Вариант 23 $\dot{x}_1 = 6x_1 + 3x_2 + 2u_1 + 8u_2$,
 $\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3u_1 + 3u_2$,
 $y = -3x_1 - 2x_2$.

Вариант 24 $\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 4u_2$,
 $\dot{x}_2 = 5x_2 - u_1 + u_2$,
 $y = 5x_1 - 2x_2$.

Вариант 25 $\dot{x}_1 = 3x_2 + 4u_2$,
 $\dot{x}_2 = 2x_2 - u_1 + 5u_2$,
 $y = 5x_1 + x_2$.

3.2.2 Примеры выполнения задания 3.2

1) Исследовать управляемость и наблюдаемость системы, описываемой следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= u , \\ y &= x_1 . \end{aligned}$$

Решение. В уравнениях состояния и выхода выделяются матрицы A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0), \quad n = 2, \quad r = 1, \quad k = 1.$$

Составляются матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \ CAB) = (0 \ 1), \quad Q = (C^T \ A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из теории матриц:

- при перемножении матриц используются следующие правила:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix} \text{ и т.д. ;}$$

- C^T и $A^T C^T$ – транспонированные матрицы, которые получаются заменой строк столбцами;

- для определения ранга матрицы она приводится к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований над строками матрицы (перестановка строк, умножение строк на коэффициенты, сложение и вычитание строк) таким образом, чтобы в ней под главной диагональю стояли нули. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в матрице, приведенной к ступенчатой форме.

Определяются ранги матриц: $\text{rang}W = 2 = n$, $\text{rang}P = 1 = k$, $\text{rang}Q = 2 = n$.

Согласно критериям управляемости и наблюдаемости система вполне управляема по состоянию и по выходу, а также вполне наблюдаема.

2) Исследовать управляемость и наблюдаемость системы, описываемой следующими уравнениями:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 5x_2 + u ,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 2u ,$$

$$y = x_1 - x_2 .$$

Решение. В уравнениях состояния и выхода выделяются матрицы A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -1), \quad n = 2, \quad r = 1, \quad k = 1 .$$

Составляются матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \quad CAB) = (-1 \quad 5), \quad Q = (C^T \quad A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Определяются ранги матриц: $\text{rang}W = 2 = n$, $\text{rang}P = 1 = k$, $\text{rang}Q = 1 \neq n$.

Согласно критериям управляемости и наблюдаемости система вполне управляема по состоянию и по выходу, но не является вполне наблюдаемой.

3) Исследовать управляемость и наблюдаемость системы, описываемой следующими уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2 + u ,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u ,$$

$$y_1 = x_1 ,$$

$$y_2 = x_1 + x_2 .$$

Решение. В уравнениях состояния и выхода выделяются матрицы A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 2, \quad r = 1, \quad k = 2 .$$

Составляются матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \quad CAB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (C^T \quad A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Определяются ранги матриц: $\text{rang}W = 1 \neq n$, $\text{rang}P = 1 \neq k$, $\text{rang}Q = 2 = n$.

Согласно критериям управляемости и наблюдаемости система не является вполне управляемой по состоянию и по выходу, но вполне наблюдаема.

4) Исследовать управляемость и наблюдаемость системы, описываемой следующими уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2 - u ,$$

$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_3 + u ,$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 - u ,$$

$$y = -2x_1 + x_2 .$$

Решение. В уравнениях состояния и выхода выделяются матрицы A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \ 1 \ 0), \quad n = 3, \quad r = 1, \quad k = 1.$$

Составляются матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \ CAB \ CA^2B) = (3 \ -9 \ 27),$$

$$Q = (C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Примечание. Пример приведения матрицы Q к ступенчатой форме для определения ее ранга:

2-я строка умножается на 2 и складывается с 1-й строкой:
$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix};$$

3-я строка умножается на $(-1/2)$ и складывается со 2-й строкой:
$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Число ненулевых строк равно 2, значит ранг матрицы Q равен 2.

Определяются ранги матриц: $\text{rang}W = 2 \neq n$, $\text{rang}P = 1 = k$, $\text{rang}Q = 2 \neq n$.

Согласно критериям управляемости и наблюдаемости система не является вполне управляемой по состоянию и вполне наблюдаемой, но является вполне управляемой по выходу.

3.3 Моделирование систем управления: связь структурной схемы с дифференциальным уравнением

Структурные схемы строятся с помощью элементарных типовых звеньев и сумматоров, описывающих преобразование сигналов. Они служат одним из языков описания систем управления. По структурным схемам, как правило, находится эквивалентная передаточная функция системы управления, а затем решаются различные задачи анализа САУ.

Алгоритм построения структурной схемы:

- 1) Все низшие производные получить как сигналы на соответствующих выходах последовательно соединенных интегрирующих звеньев.
- 2) Представить входной сигнал каждого интегрирующего звена как результат суммирования низших производных, входных воздействий, выходных параметров и параметров состояния, умноженных на соответствующие коэффициенты.
- 3) Начальные условия представить как постоянные во времени воздействия, приложенные на выходах интегрирующих звеньев.

3.3.1 Задание 3.3

Изобразить структурную схему системы, модель которой описывается системой дифференциальных уравнений. При выполнении задания пояснить порядок построения структурной схемы.

Вариант 1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + u, \\ y &= x_1 + x_2 - x_3.\end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2u, \\ y &= -2x_1 + x_2 + x_3.\end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5u, \\ y &= 5x_1 + x_2 + 2x_3.\end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 - 3x_2 + 3u, \\ y &= 4x_1 + x_2 - 2x_3.\end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_2 + 5x_3 + u, \\ y &= 3x_1 + 3x_2 - 3x_3.\end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 + x_3 + 8u, \\ y &= 3x_1 + 2x_2 + x_3.\end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - x_3 + 4u, \\ y &= -x_1 + 8x_2 + x_3.\end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + u, \\ y &= 2x_1 + 2x_2 - 4x_3.\end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2u, \\ y &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3.\end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2u, \\ y &= 4x_1 - 3x_2 + 3x_3.\end{aligned}$$

Вариант 11

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6u, \\ y &= 3x_1 - 2x_2 + 5x_3.\end{aligned}$$

Вариант 12

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + 5u, \\ y &= x_1 + x_2 - 6x_3.\end{aligned}$$

Вариант 13

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 3u, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5u, \\ y &= -x_1 - 6x_2 - x_3.\end{aligned}$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_2 + 3u, \\ \dot{x}_2 &= 3x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3u, \\ y &= 5x_1 + x_2 - 2x_3.\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 4u, \\ \dot{x}_2 &= 5x_3 + 8u, \\ \dot{x}_3 &= 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 4u, \\ y &= 7x_1 + 2x_2 + 2x_3.\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_2 + 4u, \\ \dot{x}_2 &= 8x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3u, \\ y &= 2x_1 - 2x_2 - x_3.\end{aligned}$$

Вариант 17

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 + 5u, \\ \dot{x}_2 &= 4x_3 + 4u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3u, \\ y &= 6x_1 - x_2 + 3x_3.\end{aligned}$$

Вариант 18

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2 + 4u, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + u, \\ y &= -x_1 + 5x_2 - 6x_3.\end{aligned}$$

Вариант 19

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 + 5u, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 10u, \\ \dot{x}_3 &= -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 10u, \\ y &= 8x_1 - 3x_2 - x_3.\end{aligned}$$

Вариант 20

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 3u, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5u, \\ y &= 4x_1 + x_2 + 7x_3.\end{aligned}$$

Вариант 21

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 3u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3u, \\ y &= 4x_1 - 5x_2 + 5x_3.\end{aligned}$$

Вариант 22

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_2 + 0.5u, \\ \dot{x}_2 &= 5x_3 + 1.5u, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + u, \\ y &= 8x_1 - 7x_2 - 3x_3.\end{aligned}$$

Вариант 23

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_2 + 5u, \\ \dot{x}_2 &= 3x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - x_3 + u, \\ y &= -4x_1 - 2x_2 - 4x_3.\end{aligned}$$

Вариант 24

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4u, \\ y &= 10x_1 + 2.5x_2 - 2x_3.\end{aligned}$$

Вариант 25

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 &= 4x_3 + 3u, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4u, \\ y &= 7x_1 - 5x_2 + x_3.\end{aligned}$$

3.3.2 Пример выполнения задания 3.3

Построить структурную схему системы, модель которой описывается дифференциальными уравнениями состояния и уравнением выхода с начальными условиями $x_1(0)$, $x_2(0)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + 3x_2 + 2u, \\ y &= x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

Решение. Проинтегрировав уравнения состояния, получим:

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (-2x_1 + 5x_2) dt ,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (-4x_1 + 3x_2 + 2u) dt ,$$

$$y = x_1 + 2x_2 .$$

Схема формирования \dot{x}_2 и получения $x_2(t)$

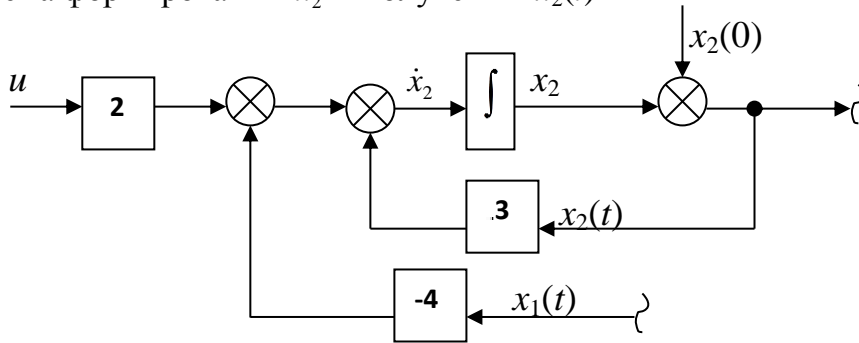


Схема формирования \dot{x}_1 и получения $x_1(t)$

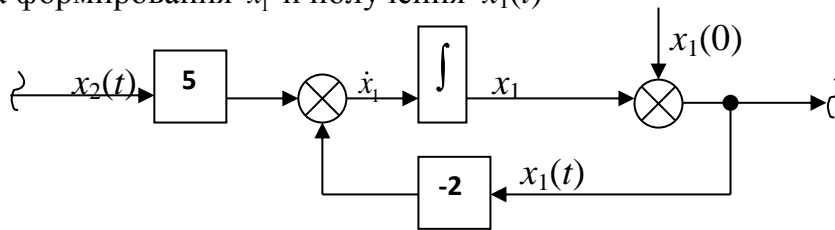
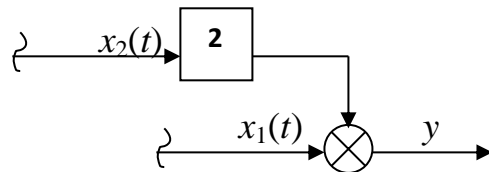


Схема получения y



Таким образом, структурную схему исходной системы можно представить в следующем виде:

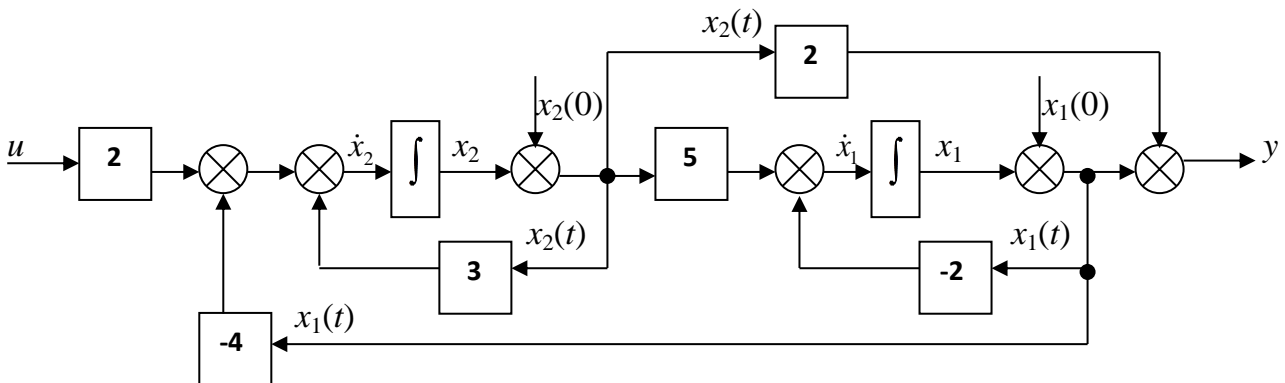


Рисунок 3.4 – Структурная схема системы, модель которой представлена в переменных состояния

ЛИТЕРАТУРА

- основная:

- 1 Коновалов, Б. И. Теория автоматического управления : учеб. пособие для вузов / Б. И. Коновалов, Ю. М. Лебедев. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2010. – 219 с.
- 2 Кочетков, В. П. Основы теории управления : учебник для вузов / В. П. Кочетков. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2012.
- 3 Савин, М. М. Теория автоматического управления : учеб. пособие / М. М. Савин, В. С. Елсуков, О. Н. Пятина. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2007. – 478 с.

- дополнительная:

- 1 Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд. – М. : Профессия, 2003. – 752 с.
- 2 Востриков, А. С. Теория автоматического управления / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – М. : Высш. шк. , 2004. – 368 с.
- 3 Душин, С. Е. Теория автоматического управления : учебник для вузов / С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев [и др.] ; под ред. В. Б. Яковлева. – М. : Высш. шк. , 2003. – 567 с.
- 4 Егоров, А. И. Основы теории управления : учебник / А. И. Егоров. – М. : Физматиздат, 2004. – 504 с.
- 5 Методы классической и современной теории автоматического управления / Н. Д. Егупов, К. А. Пупков. В 5 томах. Том 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ САУ. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 654 с.
- 6 Методы классической и современной теории автоматического управления / Н. Д. Егупов, К. А. Пупков, И. Г. Владимиров. В 5 томах. Т.3. Синтез регуляторов систем автоматического управления. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 616 с.
- 7 Методы классической и современной теории автоматического управления / Н. Д. Егупов, К. А. Пупков. В 5 томах. Том 5. Методы современной теории автоматического управления. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 782 с.
- 8 Мирошник, И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / СПб. : Питер, 2005. – 336 с.

- вспомогательная:

- 1 Воронов, А. А. Основы теории автоматического управления / А. А. Воронов. В 2-х частях. Часть I. – М.-Л. : Энергия, 1965. – 396 с.
- 2 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
- 3 Ротач, В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования / В. Я. Ротач. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.
- 4 Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – М. : Машиностроение, 1985. – 536 с.
- 5 Теория автоматического управления : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков [и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986. – 367 с.
- 6 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 662 с.

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки
«Информатика и вычислительная техника»

Владимир Васильевич Сотников

Лариса Федоровна Макарова

Отпечатано с оригинал макета. Формат 60x90 1/16
Печ. л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26