МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ”

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для студентов вечернего и заочного отделения

МОСКВА 2014

Составитель: В.Ю. Приходько

Редактор Н.С. Чекалкин

Контрольные задания являются типовыми расчетами по методам математической физики, предназначенными для студентов вечернего отделения. Типовые расчеты выполняются студентами в письменном виде и сдаются преподавателю до начала зачетной сессии. Вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором. В пособии излагаются краткая теория и справочный материал.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: Т.Н.Бобылева, В.П.Барашев

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики ”
119454, Москва, пр.Вернадского, 78

Введение

Основные темы по курсу методы математической физики (дневное отделение)

1. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система уравнений и первые интегралы. Постановка и решение задач Коши.
2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Характеристики и канонический вид уравнений. Общее решение уравнений гиперболического и параболического типов.
3. Постановка и решение задач Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
4. Задачи Штурма-Лиувилля для дифференциальных уравнений второго порядка.
5. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач и решения в канонических областях методом Фурье.
6. Волновое уравнение Постановка и решение методом Фурье основных смешанных краевых задач для волнового уравнения.
7. Уравнение теплопроводности. Постановка и решение методом Фурье основных смешанных краевых задач для уравнения теплопроводности.

Данный материал излагается студентам на лекциях и практических занятиях. От студента требуется успешное овладение материалом по указанным темам, т.е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать задачи данного курса.

В течение семестра по курсу методы математической физики проводится *коллоквиум и выполняется типовой расчет*.

Коллоквиум

Тема. «Уравнения в частных производных первого и второго порядка».
Цель. Проверить усвоение основных понятий и методов решения уравнений в частных производных и задач Коши для этих уравнений.
Содержание. На коллоквиуме даются теоретические вопросы по темам 1-4 данного пособия и задачи, аналогичные задачам 1,2 типового расчета.

Контрольная работа

Тема. «Смешанные краевые задачи».
Цель. Проверить усвоение метода Фурье и метода собственных функций для решения уравнений параболического и гиперболического типов.
Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам 3-7 из типового расчета.

По итогам обучения проводится **экзамен (зачет)**. *Примерный вариант экзаменационного билета*: билет состоит из 2-х частей. Первая часть соответствует содержанию коллоквиума, вторая часть охватывает задачи типового расчета 5- 7 .

Теоретические вопросы к экзамену (зачету)

1. Линейные уравнения в частных производных первого порядка: фазовые траектории, характеристическая система уравнений, первые интегралы, общее решение.
2. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных первого порядка: постановка задачи, теорема существования и единственности, алгоритм решения.

3. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка: сведение к линейному однородному уравнению. Уравнение Хопфа.
4. Классификация уравнений в частных производных второго порядка: дискриминант, характеристики, каноническая форма.
5. Вывод уравнения электрических колебаний в проводниках. Оператор Лорентца. Уравнение колебаний струны и мембраны.
6. Вывод уравнения теплопроводности. Стационарное тепловое поле. Уравнения Пуассона .
7. Постановка задачи Коши для волнового уравнения в безграничном пространстве. Формула Даламбера.
8. Принцип Дюамеля .Запаздывающие потенциалы и решение неоднородных задач.
9. Постановка задачи Коши и ее решение для уравнения теплопроводности в безграничном пространстве.
10. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка: постановка основных краевых условий, собственные числа и собственные функции, ряды Фурье-Стеклова по собственным функциям.
11. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения с условием Дирихле (однородная задача).
12. Метод собственных функций для одномерного волнового уравнения с условием Дирихле (неоднородная задача).
13. Постановка смешанных краевых задач для уравнения теплопроводности.
14. Принцип максимума и теорема единственности для уравнения теплопроводности
15. Первая и вторая формулы Грина.
16. Гармонические функции и их свойства.
17. Доказать единственность решения задачи Дирихле и не единственность решения задачи Неймана для уравнения Лапласа.
18. Решение задачи Дирихле для круга.
19. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара.

Основные типы задач по курсу методы математической физики

Часть I. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого и второго порядка. Задачи Коши

Задачи Части I составляют основу коллоквиума.

Часть II. Краевые и смешанные краевые задачи математической физики

Задачи Части II составляют содержание *типового расчета*. Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта.

Типовой расчет

Тема. «Краевые задачи и смешанные краевые задачи для основных уравнений математической физики».
Цель. Проверить умение применять различные математические методы для решения физических задач.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. Типовой расчет также предъявляется в начале экзамена (зачета).

Задача 1. Найти общее решение уравнения

1. $3u_{xx}+8u_{xy}+4u_{yy}=0.$ 2. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-u_x-2u_y=0.$
3. $.u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0.$ 4. $4u_{xx}+8u_{xy}+3u_{yy}=0.$
5. $3u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0.$ 6. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-2u_y=0.$
7. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+u_x+3u_y=0.$ 8. $u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}=0.$
9. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-2u_x+6u_y=0.$ 10. $3u_{xx}+16u_{xy}+16u_{yy}=0.$

11. $25u_{xx}+20u_{xy}+3u_{yy}=0.$ 12. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}-3u_x-3u_y=0.$

13. $u_{xx}+8u_{xy}+12u_{yy}=0.$ 14. $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x-6u_y=0.$

15. $12u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}=0.$ 16. $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-9u_x-3u_y=0.$

17. $u_{xx}+8u_{xy}+16u_{yy}-u_x-4u_y=0.$ 18. $3u_{xx}+20u_{xy}+25u_{yy}=0.$

19. $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+8u_x+4u_y=0.$ 2 0. $u_{xx}+12u_{xy}+27u_{yy}=0.$

Задача 2. Найти собственные значения и собственные функции краевых задач

1. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,0),\quad y(-1)=y'(0)=0.$
2. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,1),\quad y'(-1)=y'(1)=0.$
3. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,1),\quad y'(-1)=y(1)=0.$
4. $y''+\dfrac{2}{x}y'+\lambda y=0,\quad x\in(0,2),\quad |y(0)|<\infty, y(2)=0.$
5. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1/4,1/2),\quad y(1/4)=y'(1/2)=0.$
6. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(0,2\pi),\quad y(x)=y(x+2\pi).$
7. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1/4,1/2),\quad y'(1/4)=y'(1/2)=0.$
8. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1/4,1/2),\quad y(1/4)=y(1/2)=0.$
9. $y''+\dfrac{2}{x}y'+\lambda y=0,\quad x\in(0,1),\quad |y(0)|<\infty, y'(1)=0.$
10. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1,2),\quad y(1)=y'(2)=0.$
11. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1,2),\quad y'(1)=y'(2)=0.$
12. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1,2),\quad y'(1)=y(2)=0.$
13. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1,2),\quad y(1)=y(2)=0.$
14. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,1),\quad y(-1)=y(1)=0.$
15. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(1/4,1/2),\quad y'(1/4)=y'(1/2)=0.$
16. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,5),\quad y(-1)=y'(5)=0.$
17. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,5),\quad y'(-1)=y'(5)=0.$
18. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,5),\quad y'(-1)=y(5)=0.$
19. $y''+\lambda y=0,\quad x\in(-1,1),\quad y(-1)=y(5)=0.$

20. $y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-1,1), \quad y(-1) = y'(1) = 0.$

Задача 3. Методом Фурье найти решение u(x,y) задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, внутри прямоугольника $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$

n	a	b	u(x,0)	u(x,b)	u(0,y)	u(a,y)
1	1	1	0	0	0	$\sin \pi y$
2	1	2	$\sin \pi x$	0	0	0
3	$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	0	sin4y
4	$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	sin2y	0
5	$\pi/2$	$\pi/2$	0	sin2x	0	0
6	1	1	x(x-1)	0	0	0
7	1	1	0	x(x-1)	0	0
8	1	1	0	0	y(y-1)	0
9	1	1	0	0	0	y(y-1)
10	2	1	f(x)	0	0	0
11	2	1	0	f(x)	0	1
12	1	2	0	0	f(y)	0
13	1	2	0	0	0	f(y)
14	1	1	0	$\sin 3\pi x$	0	0
15	2	1	0	0	0	$\sin 2\pi y$
16	3/2	3/2	x(x-3/2)	0	0	0
17	1	3/2	0	0	y(y-3/2)	0
18	3/2	1	0	x(x-3/2)	0	0
19	2	3/2	0	0	0	y(y-3/2)
20	2	2	$\sin 4\pi x$	0	0	0

$$f(x)=\begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 2-x, 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

.

Задача4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, внутри круга $0 \le \rho \le l$, U_0-константа.

.

1. $U|_{\rho=l} = U_0(8 + 5\cos 2\varphi - \sin 3\varphi)..$
2. $U|_{\rho=3} = 27\sin 3\varphi + \frac{1}{9}\sin 2\varphi.$
3. $U|_{\rho=4} = 1 - 16\cos 2\varphi + \frac{1}{64}\cos 3\varphi.$
4. $U|_{\rho=l} = U_0(5 + 2\cos\varphi - \sin\varphi).$
5. $U|_{\rho=l} = U_0 \cos^2 2\varphi.$
6. $U|_{\rho=l} = U_0 \sin^2 2\varphi.$
7. $U|_{\rho=2} = 3 + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$
8. $U|_{\rho=l} = U_0\varphi(\varphi - 2\pi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$
9. $U|_{\rho=l} = U_0 \frac{\varphi}{\pi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$
10. $U|_{\rho=l} = U_0 \frac{\varphi^2}{\pi^2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$
11. $U|_{\rho=4} = 1 + 8\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi.$
12. $U|_{\rho=6} = 1 + 6\cos\varphi + 36\sin 2\varphi.$
13. $U|_{\rho=l} = U_0\left(2 + \frac{1}{l}\cos\varphi\right).$
14. $U|_{\rho=3} = 1 + 3\cos\varphi + 3\sin\varphi + 9\cos 2\varphi.$
15. $U|_{\rho=5} = 1 + 5\cos\varphi + 25\cos 2\varphi + 125\cos 3\varphi.$
16. $U|_{\rho=10} = 1 - 10\cos\varphi + 100\sin 2\varphi.$
17. $U|_{\rho=3} = 1 - 9\cos 2\varphi + 81\sin 4\varphi.$
18. $U|_{\rho=l} = U_0(1 + \phi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

19. $U|_{\rho=l} = U_0(2\pi - \phi)\phi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

20. $U|_{\rho=l} = U_0(9 + 4\cos\varphi - \sin 3\varphi).$

Задача 5. Найти решение смешанной краевой задачи для волнового уравнения с заданными начальными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l, u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

и нулевыми краевыми условиями на концах отрезка x=0, x=l. В таблице введено обозначение

$$\text{f}(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le l/2, \\ l - x, l/2 \le x \le l. \end{cases}$$

n	l	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	f(x,t)	x=0	x=l
1	$\pi/2$	$f(x)$	0	sin4tsin2x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
2	1	0	$\cos\pi x$	exp3t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
3	1	$\sin\pi$ x/2	0	sin7πx/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
4	1	0	cos3πx/2	cos5πx/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
5	$\pi/2$	0	$f(x)$	cos3tsin4x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
6	π	5	0	cosxsin2t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
7	π	sin5x/2	0	cos5tsinx/	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
8	π	0	cos5x/2	exptcosx/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
9	π	$f(x)$	0	costsin2x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
10	π	$\cos 3x$	0	5expt	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
11	1	0	$\sin\pi$ x/2	sin5πx/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
12	1	$\cos\pi$ x/2	0	cos5πx/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
13	1	0	$\sin\pi$ x	x(x-1)	u(0,t)=0	u(l,t)=0
14	1	0	5	cos3πx	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
15	1	sin5πx/2	0	$\sin\pi$ x/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
16	1	0	x(x-1)	costsinπx	u(0,t)=0	u(l,t)=0
17	2	$\sin\pi$ x/2	0	f(x)exp3t	u(0,t)=0	u(l,t)=0
18	1	cos7πx	0	cos5t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
19	1	0	$\sin\pi$ x/20	sin5πx/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$

20	1	cos5πx/2	0	cosπx/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0

Задача 6. Найти решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности заданными начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ 0<x<l, u(x,0)=\varphi(x),$$

и нулевыми краевыми условиями на концах отрезка x=0, x=l. В таблице введено обозначение

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le l/2, \\ l-x, l/2\le x\le l. \end{cases}$$

n	l	a	$\varphi(x)$	f(x,t)	x=0	x=l
1	$\pi/2$	2	$f(x)$	sintsin2x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
2	1	1/2	cosπx	cos3t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
3	1	3	sin7πx/2	sintsinπx/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
4	π	2	cos3x/2	exptcosx/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
5	$\pi/2$	4	$f(x)$	cos4tsin4x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
6	π	5	cos4x	cosxsin2t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
7	1	1	sin5πx/2	$e^t\sin\pi$x/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
8	1	6	cos5πx/2	$e^t\cos\pi$x/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
9	π	7	$f(x)$	costsin2x	u(0,t)=0	u(l,t)=0
10	π	8	cos5x	5expt	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
11	2	9	sin7πx/2	sinπx/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
12	1	1/8	cos3πx/2	$e^{5t}\cos\pi$x/2	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0
13	1	1/4	sin7πx	x(x-1)	u(0,t)=0	u(l,t)=0
14	1	1/3	cos3πx	costcosπx	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$
15	1	1/2	sin5πx/2	$e^t\sin\pi$x/2	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
16	1	1	x(x-1)	cos2t sinπx	u(0,t)=0	u(l,t)=0
17	2	2	sin4πx	f(x)cos2t	u(0,t)=0	u(l,t)=0
18	1	3	cos2πx	cos4t	$u_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=0$

19	1	4	$\sin 5\pi x/2$	$\sin\pi x/2$	u(0,t)=0	$u_x(l,t)=0$
20	1	5	$\cos 5\pi x/2$	$e^t\cos\pi x/2$	$u_x(0,t)=0$	u(l,t)=0

Основные определения и теоремы, а также разбор решений задач по основным темам приведены в .следующих разделах.

1. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) изучаются так называемые автономные дифференциальные уравнения. Напомним некоторые понятия, необходимые нам в дальнейшем. Пусть t - независимая переменная, $t\in E\subset R^1$; $\bar{x}(t)=(x_1,x_2,..,x_n)$ - неизвестная вектор-функция; система автономных ОДУ первого порядка имеет вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{f}(\bar{x}),\quad \bar{f}=(f_1,f_2,...,f_n). \tag{1}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(\bar{x}) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(\bar{x}) \end{cases}$$

Отметим, что $\bar{f}(\bar{x})$ в (1) не содержит в явном виде t.

<u>Определение 1.</u> Решение уравнения (1) $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ называется фазовой траекторией в фазовом пространстве R_x^n. Интегральной

кривой уравнения (1) называется линия в $(n+1)$-мерном пространстве $R_{x,t}^{n+1}$ с координатами $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Фазовая траектория есть проекция интегральной кривой на R_x^n параллельно оси t. Этот факт, в двумерном пространстве, иллюстрирует рис.1.

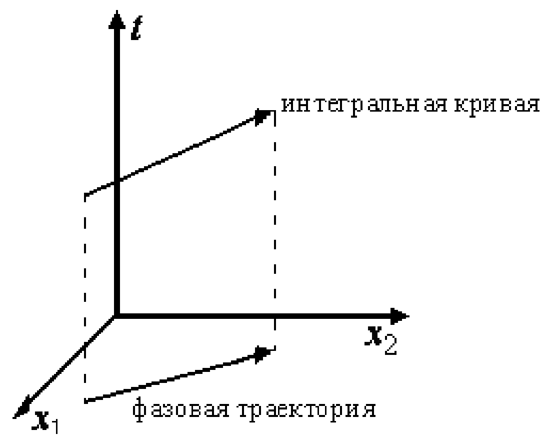

Рис.1

<u>Определение 2.</u> Первым интегралом уравнения (1) называется функция $u(\bar{x})$ постоянная вдоль каждой траектории уравнения (1), то есть если $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$- решение (1), то $u(\varphi(t)) \equiv const \;\; \forall t \in E$.

Первые интегралы в физических задачах выражают законы сохранения.

<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы $u(\bar{x})$ была первым интегралом (1) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_i} f_i(\bar{x}) = 0. \tag{2}$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f(\bar{a}) \neq 0$ (точка $\bar{a}$ - не положение равновесия (1)). Тогда $\exists U(a)$ где существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $(u_1(\bar{x}), u_2(\bar{x}), ..., u_{n-1}(\bar{x}))$.

<u>Определение 3.</u> Любая функция $\phi(\bar{x}) \in C^1$ обращающая уравнение (2) в тождество называется его решением, а поверхность $u = \varphi(\bar{x})$ называется интегральной поверхностью уравнения (2).

<u>Определение 4.</u> Система уравнений (1) называется характеристической для уравнения (2).

<u>Теорема 3.</u> Пусть $U(a)-$ окрестность точки $\bar{x} = \bar{a}$, где $\bar{a}$ не является положением равновесия. Тогда в $U(a)$ общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$u(\bar{x}) = F(u_1(\bar{x}), u_2(\bar{x}), ..., u_{n-1}(\bar{x})),$$

где $u_i(x)$ независимые первые интегралы (1); $F-$ произвольная гладкая функция от $(n-1)$ переменных.

<u>Пример1.</u> Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + V \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \; V > 0, \; V = const.$$

<u>Решение.</u> Характеристическая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t + c_1 \\ x_2 = Vt + c_2 \end{cases},$$

$t = x_1 - c_1, \, x_2 = V(x_1 - c_1) + c_2 = Vx_1 - Vc_1 + c_2, \, u_1(\bar{x}) = x_2 - Vx_1 = const$ -первый интеграл характеристической системы. Общее решение: $u(x_1, x_2) = F(x_2 - Vx_1)$, где F- произвольная гладкая функция.

<u>Замечание.</u> Если $x_1 = t-$ время, $x_2 = x-$ ось x декартовой системы координат, то решение $F(x - Vt)$ называется бегущей слева направо волной; $V-$ скорость распространения волны.

Рассмотрим наиболее простой случай для $n=2$, $x_1=x$, $x_2=y$, $u(x_1,x_2)=z(x,y)$. В этом случае функция *z(x,y)* описывает уравнение поверхности в трехмерном пространстве. Задача Коши ставится так: для уравнения

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=f(x,t), \qquad (3)$$

найти интегральную поверхность, проходящую через заданную в пространстве R^3 кривую Γ. Если кривую Γ задать в параметрическом виде: $\Gamma=\{(x,y.z)|x=\varphi(S), y=\psi(S), z=h(S), S\in[S_1,S_2]\}$, то

$$z(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma}=h(S), \qquad (4)$$

где $\gamma-$ проекция кривой Γ на плоскость (x,y). Условие (4) есть начальные данные для задачи Коши.

Имеет место теорема существования и единственности задачи Коши (3), (4):

<u>Теорема 4.</u> Пусть выполняются следующие три условия:

1^0. Функции a,b,c и $f\in C^1(D), D\subset R^2$;

2^0. $a\neq 0, b\neq 0, \forall(x,y)\in D$.

3^0. γ не касается характеристик однородного уравнения (3).

Тогда задача Коши (3), (4) однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой γ.

2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

В квазилинейных уравнениях, в отличие от линейных уравнений, коэффициенты при производных могут быть функциями неизвестной, но производные всегда линейны

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\bar{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(\bar{x},u). \qquad (5)$$

<u>Лемма 1.</u> Пусть в уравнении (5)

$a_1(\bar{x},u), a_2(\bar{x},u),.., a_n(\bar{x},u), b(\bar{x},u) \in C^1(D) \subset R^{n+1}_{x,u}, a_i \neq 0$ *в* D. Тогда уравнение (5) можно свести к линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка.

Доказательство. Будем искать функцию $W(x_1, x_2,..., x_n, u)$ такую, что если $u(\bar{x})$ решение (5), то

$$W(x_1, x_2,..., x_n, u(x_1, x_2,..., x_n)) \equiv 0.$$

Напомним, что уравнение $W(\bar{x},u)=0$ определяет неявную функцию $u=u(x)$. По правилу дифференцирования неявной функции имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial W}{\partial u}}.$$

Подставляя эту производную в (5) получаем:

$$\sum_1^n \left[-a_i(\bar{x},u)\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial W}{\partial u}} - b(\bar{x},u) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_1^n a_i(\bar{x},u)\frac{\partial W}{\partial x_i} + b(x,u)\frac{\partial W}{\partial u} = 0 \qquad (6)$$

Уравнение (6) – линейное однородное уравнение от $(n+1)$ переменных $(\bar{x},u)$ типа уравнения (2) раздела 1. Лемма доказана.

Следствие 1. Характеристическая система для уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\bar{x}, u) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2(\bar{x}, u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\bar{x}, u) \\ \dfrac{du}{dt} = b(\bar{x}, u) \end{cases} \qquad (7)$$

<u>Следствие 2.</u> Пусть $V_1(\bar{x},u), V_2(\bar{x},u), \dots, V_n(\bar{x},u) -$ первые интегралы (7). Тогда всякое решение уравнения (5) находится из уравнения

$$F(V_1(\bar{x},u), V_2(\bar{x},u), \dots, V_n(\bar{x},u)) = 0,$$

где $F \in C^1$- любая гладкая функция.

<u>Пример 2.</u> Найти общее решение уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

<u>Решение.</u> Характеристическая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u \\ \dfrac{du}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t + c_1 \\ x_2 = c_3 t + c_2 \\ u = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_1 - c_1 \\ x_2 = u(x_1 - c_1) + c_2 \\ x_2 - ux_1 = const \end{cases}.$$

Первые интегралы $V_1 = u$; $V_2 = x_2 - ux_1$. Любое решение находим из уравнения

$$F(u, x_2 - x_1 u) = 0.$$

3. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Пусть независимые переменные $(x, y) \in D \subset R^2$; $u(x, y)$- неизвестная функция. Квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка называется линейное относительно всех производных второго порядка уравнение

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (8)$$

Основная идея поиска общего решения уравнения (1) состоит в том , что в некоторой системе координат уравнение примет более простой вид. В качестве таких координат можно взять так называемые характеристики уравнения, определение которых дадим ниже. Прежде всего приведем формулы, по которым преобразуются коэффициенты a, b, c при произвольной, неособенной, дважды дифференцируемой замене переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \qquad (9)$$

Положим: $u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = v(\xi, \eta)$ и сделаем замену

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \qquad (10) \\
u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}$$

В новых переменных получим новое уравнение, которое будет иметь вид

$$a_1 v_{\xi\xi} + 2b_1 v_{\xi\eta} + c_1 v_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, v, v_x, v_y) = 0, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x \xi_y + c\,\xi_y^2 \\
b_1 &= a\,\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + c\,\xi_x \eta_y \\
c_1 &= a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x \eta_y + c\,\eta_y^2
\end{aligned}$$

Выберем (ξ, η) так, чтобы $a_1 = 0$.

Пусть $\xi = (x, y)$ – какое-нибудь частное решение уравнения в частных производных первого порядка:

$$az_x^2+2bz_xz_y+cz_y^2=0 \qquad (12)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ady^2-2bdxdy+cdx^2=0 \qquad (13)$$

называется характеристическим, а его интегралы – характеристиками уравнения (8).

Лемма. А) Если $z=\phi(x,y)-$ решение (12), то $\phi(x,y)=c-$ есть интеграл (13). В) Обратно, если $\phi(x,y)=c-$ интеграл (13), то $z=\phi(x,y)$ удовлетворяет (12).

Доказательство. А) Соотношение $\phi(x,y)=c$ задает функцию

$y=f(x,c)$ для которой $\dfrac{dy}{dx}=-\left.\dfrac{\phi_x(x,y)}{\phi_y(x,y)}\right|_{y=f(x,c)}$.

Подставим это выражение в уравнение (13)

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=\left[a\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2+2b\frac{\phi_x}{\phi_y}+c\right]=0$$

$\Rightarrow\quad \phi(x,y)=c-$ есть интеграл (13).

В) Пусть $\varphi(x,y)=c-$ интеграл (13). $\forall(x_0,y_0)$ проведем интегральную кривую (13): $\varphi(x_0,y_0)=c_0$ *и* $y=f(x,c_0)\Rightarrow y_0=f(x_0,c)$.

Для всех точек кривой имеем:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=\left[a\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2+2b\frac{\phi_x}{\phi_y}+c\right]=0.$$

Полагая здесь $x=x_0$ получим:

$a\,\phi_x^2(x_0,y_0)+2b\,\phi_x(x_0,y_0)\,\phi_y(x_0,y_0)+c\,\phi_y^2(x_0,y_0)=0.$ Лемма доказана.

Разделим на dx уравнение (13):

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=0$$

Найдем корни этого квадратного уравнения относительно производной

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+\sqrt{\Delta}}{a},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{\Delta}}{a}, \tag{14}$$

где $\Delta=b^2-ac-$дискриминант.

Возможны три типа уравнений, определяемые знаком дискриминанта.

I. $\Delta>0$ - гиперболический тип.

Общие интегралы $\phi(x,y)=c$ и $\psi(x,y)=c$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, приводим уравнение (11), где $a_1\equiv 0, c_1\equiv 0$, к виду

$$v_{\xi\eta}=\tilde{F}_1(\xi,\eta,v,\nabla v). \tag{15}$$

Это и есть каноническая форма гиперболического уравнения.

II. $\Delta=0$ - параболический тип.

Координату $\xi=\varphi(x,y)-$определяем из (7). В качестве второго интеграла можно взять произвольную, но дважды дифференцируемую функцию $\eta=\psi(x,y)$, удовлетворяющую условию

$$\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда $a_1=a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2=0=\left(\sqrt{a}\xi_x+\sqrt{c}\xi_y\right)^2$, т.к. $b=\sqrt{a}\sqrt{c}$.

$b_1=a\xi_x\eta_x+b\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+c\xi_y\eta_y=\left(\sqrt{a}\xi_x+\sqrt{c}\xi_y\right)\left(\sqrt{a}\eta_x+\sqrt{c}\eta_y\right)=0$

и уравнение будет иметь канонический вид

$$v_{\eta\eta}=\tilde{F}_1(\xi,\eta,v,\nabla v).$$

III. $\Delta<0$ - эллиптический тип.

В этом случае вещественных характеристик нет и существуют комплексные $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\varphi^*(x,y)$, из которых можно построить вещественные координаты $\alpha=\dfrac{\varphi+\varphi^*}{2}$, $\beta=\dfrac{\varphi-\varphi^*}{2i}$ и получить в этих координатах каноническое уравнение в виде

$$\Delta W=\tilde{\Phi}(\alpha,\beta,W,\nabla W),$$

где Δ- оператор Лапласа.

<u>Пример 3</u>. Найти общее решение уравнения

$$4u_{xx}+8u_{xy}+3u_{yy}+u_y+2u_x=0.$$

Алгоритм нахождения общего решения можно разбить на три этапа.

1) Находим дискриминант $\Delta=b^2-ac$ и по его знаку определяем тип уравнения

$$\Delta=16-12=4>0$$

- гиперболический тип. Далее записываем уравнения характеристик и находим общие интегралы:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{a}\Rightarrow\begin{matrix}y_1=y_1(x)\\ y_2=y_2(x)\end{matrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\phi(x,y)=c_1\\ \psi(x,y)=c_2\end{matrix}\right.\right.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\pm2}{4},\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\begin{cases}y_1=\dfrac{3}{2}x+c_1\\[2mm] y_2=\dfrac{1}{2}x+c_2\end{cases}\begin{cases}c_1=y-\dfrac{3}{2}x=\xi\\[2mm] c_2=y-\dfrac{1}{2}x=\eta\end{cases}.$$

Затем вводим новые переменные: $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$.

2) Записываем уравнение в новых переменных и подставляем эти выражения в исходное уравнение

$$\begin{matrix}\xi_x=-\dfrac{3}{2},\ \xi_y=1,\ \xi_{yy}=\xi_{xx}=\xi_{xy}=0\\[2mm] \eta_x=-\dfrac{1}{2},\ \eta_y=1,\ \eta_{yy}=\eta_{xx}=\eta_{xy}=0\end{matrix}.$$

$$4\left[u_{\xi\xi}\frac{9}{4}+2u_{\xi\eta}\frac{3}{4}+u_{\eta\eta}\frac{1}{4}\right]+8\left[u_{\xi\xi}\left(-\frac{3}{2}\right)+u_{\xi\eta}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)+u_{\eta\eta}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+3\left[u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right]+\left[u_\xi+u_\eta\right]+2\left[u_\xi\left(-\frac{3}{2}\right)+u_\eta\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

Далее приводим подобные

$$[9-12+3]u_{\xi\xi}+[6-16+6]u_{\xi\eta}+[1-4+3]u_{\eta\eta}+[1-3]u_{\xi}+[1-1]u_{\eta}=0;$$

$$-4u_{\xi\eta}-2u_{\xi}=0.$$

В итоге получаем уравнение в каноническом виде

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2}u_{\xi}.$$

3) Решаем полученное каноническое уравнение. Для решения уравнения понизим его порядок

$$u_{\xi}=W;\ W_{\eta}=-\frac{1}{2}W,\ \frac{dW}{W}=-\frac{d\eta}{2},\ \ln W=-\frac{1}{2}\eta+f_1(\xi).$$

Здесь $f_1(\xi)$ - произвольная гладкая функция.

$$W=e^{-\frac{1}{2}\eta+f_1(\xi)}=f_2(\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}=\frac{du}{d\xi},\ du=f_2(\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}d\xi$$

Таким образом получаем искомое общее решение уравнения в виде

$$u=e^{-\frac{1}{2}\eta}\int f_2(\xi)d\xi+g(\eta)=e^{-\frac{1}{2}\eta}f(\xi)+g(\eta),$$

где $f(\xi)=\int f_2(\xi)d\xi$ и $g(\eta)$ произвольные, дважды дифференцируемые функции.

4. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля

$$L=-\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q, \tag{1}$$

и порождаемое им обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ly(x)=\lambda\rho(x)y(x) \tag{2}$$

или в развернутом виде

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=\lambda\rho(x)y(x), \tag{3}$$

где $p(x) \in C^1$, $p(x)>0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $\lambda \in R^1$ - параметр.

Пусть $x \in [a,b]$ и на концах отрезка рассмотрим одно из следующих четырех типов краевых условий

A) условия Дирихле

$$y(a) = y(b) = 0,$$

B) условия Неймана

$$\frac{dy(a)}{dx} = \frac{dy(b)}{dx} = 0,$$

C) смешанное условие

$$y(a) = y'(b) = 0,$$

D) смешанное условие

$$y'(a) = y(b) = 0.$$

Задача Штурма – Лиувилля ставится так: найти такие значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям.

Такие значения параметра λ называются собственными числами (значениями) задачи Штурма – Лиувилля, а соответствующие им решения $y(x)-$ собственными функциями.

Теорема 1. Существует счетное множество неотрицательных собственных чисел $\{\lambda_n\}$, $n = 0,1,2,...$, и каждому собственному числу соответствует его собственная функция $\{\lambda_n\}$. Причем система собственных функций $\{\lambda_n\}$ линейно независима.

Теорема 2. Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля ортогональны с весом $\rho(x)$.

$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Доказательство. Рассмотрим соотношения для $m-й$ и $n-й$ собственных функций

$$\begin{cases} Ly_n = \lambda_n \rho y_n \\ Ly_m = \lambda_m \rho y_m \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на y_m, второе на y_n и вычтем из первого второе и левую часть проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b Ly_n y_m dx - \int_a^b Ly_m y_n dx =$$

$$= \int_a^b \left[-\left(py_n'\right)' y_m + qy_n y_m \right] dx - \int_a^b \left[-\left(py_m'\right)' y_n + qy_m y_n \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[-\left(py_n'\right)' y_m \right] dx - \int_a^b \left[-\left(py_m'\right)' y_n \right] dx =$$

$$= -\left[py_n' y_m \Big|_a^b - \int_a^b py_n' y_m' dx \right] + \left[py_m' y_n \Big|_a^b - \int_a^b py_m' y_n' dx \right] =$$

$$= \int_a^b py_n' y_m' dx - \int_a^b py_m' y_n' dx = 0 .$$

Здесь использованы краевые условия A-D, которые обеспечивают равенство нулю всех внеинтегральных подстановок. Теперь рассмотрим правую часть

$$\lambda_n \int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx - \lambda_m \int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx =$$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

Отсюда получаем, что при $m \neq n$ и $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

<u>Теорема 3.</u> Оператор Штурма_Лиувилля- самосопряженный, то есть для любых $y(x), z(x) \in C^2[a,b]$,при соблюдении краевых условий A-D, выполняется равенство

$$(Ly, z) = (y, Lz).$$

Теорема Фурье-Стеклова. Любую функцию $f(x)$ класса C можно, при соблюдении краевых условий задачи Штурма – Лиувилля, представит в виде ряда Фурье – Стеклова

$$f(x)=\sum_k C_k y_k(x),$$

где $y_k(x)$– собственные функции краевой задачи,

$$C_k=\frac{(f(x),y_k(x))}{(y_k(x),y_k(x))},$$

$$(y_k(x),y_k(x))=\|y_k(x)\|^2=\int_a^b \rho(x)y_k^2(x)dx.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a,b]$.

Пример 1. Рассмотрим следующие значения коэффициентов в уравнении (3): $p\equiv 1$, $q\equiv 1$, $\rho\equiv 1$, a=0, b=l. Тогда краевую задачу с условиями Дирихле можно записать в виде

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad x\in(0,l), \\ y(0)=y(l)=0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального равнения, учитывая что $\lambda\geq 0$

$$y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x. \tag{4}$$

Для определения неизвестных используем краевые условия $y(0)=0=C_2$, $y(l)=0=C_1\sin\sqrt{\lambda}l$. Отсюда следует $\sqrt{\lambda}l=\pi n$, n=1,2,….

Собственные значения: $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, собственные функции: $y_n=C_1\sin\frac{\pi n x}{l}$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля с условием периодичности

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad x\in(0,2\pi), \\ y(x)=y(x+2\pi)=0. \end{cases}$$

Тогда общее решение уравнения задается выражением (4), и для существования единственного периодического решения должно выполняться $\sqrt{\lambda}=n$. Собственные функции

$$y_n(x)=C_1\sin nx+C_2\cos nx.$$

5. Уравнение Лапласа и Пуассона

Уравнение Пуассона и его частный случай уравнение Лапласа применяются при расчете электрических полей. Известно, что напряженность электрического поля связана с его потенциалом

$$\vec{E}=-grad\ \phi\ (x,y,z).$$

По теореме Гаусса

$$\oiint_{\Gamma} EdS=\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$div\vec{E}=\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

где $\rho(x,y,z)-$ плотность зарядов. Следовательно, для потенциала получаем уравнение

$$div(-grad\ \phi)=\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Так как $div(-grad\ )=-\Delta$, где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа, то для потенциала получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\phi=-\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho(x,y,z).$$

При отсутствии в рассматриваемой области свободных зарядов $\rho(x, y, z) = 0$ уравнение Пуассона принимает вид уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Определение 1. Функция $u(\bar{x})$ класса $C^2(Q)$, удовлетворяющая на области Q уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ называется гармонической функцией.

Рассмотрим ограниченную область $Q \subset R^3$ с кусочно-гладкой границей *Г*. Для таких областей можно поставить следующие три основных краевых задачи для уравнения Пуассона.

Определение 2. Первой краевой задачей (или задачей Дирихле) для уравнения Пуассона называется задача нахождения решения уравнения Пуассона, удовлетворяющего условию Дирихле на границе

$$\begin{cases} \Delta u = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Q, \\ u\big|_{\bar{x} \in \Gamma} = \varphi(\bar{x}). \end{cases} \tag{1}$$

Классическим решением задачи (1) называется функция

$$u(\bar{x}) \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q),$$

удовлетворяющая внутри Q уравнению Пуассона, а на границе краевому условию Дирихле.

Замечание. Последняя формула читается так: функция непрерывна в области Q, включая ее границу, и дважды дифференцируема в области Q.

Отметим, что понятие классического решения необходимо для нахождения единственного решения задачи Дирихле. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Пусть правая часть $f(\bar{x}) \equiv 0$. Тогда решении задачи Дирихле можно взять в виде кусочно заданной функции

$$u(\bar{x}) = \begin{cases} C = const, & \bar{x} \notin \Gamma, \\ \varphi(\bar{x}), & \bar{x} \in \Gamma. \end{cases}$$

Следовательно, будет существовать бесконечно много решений задачи.

<u>Определение 3.</u> Второй краевой задачей (или задачей Неймана) для уравнения Пуассона называется задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего условию Неймана на границе

$$\begin{cases} \Delta u = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Q, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\bar{x} \in \Gamma} = \varphi(\bar{x}). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к поверхности Γ.

Классическим решением задачи (2) называется функция

$$u(\bar{x}) \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q),$$

удовлетворяющая внутри Q уравнению Пуассона, а на границе - краевому условию Неймана.

<u>Определение 4.</u> Третьей краевой задачей для уравнения Пуассона называется задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего смешанному краевому условию

$$\begin{cases} \Delta u = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Q, \\ \left.\left(\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_{\bar{x} \in \Gamma} = \varphi(\bar{x}). \quad \alpha + \beta \neq 0, \ \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Классическим решением задачи (3) называется функция

$$u(\bar{x}) \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q),$$

удовлетворяющая внутри Q уравнению Пуассона, а на границе – смешанному краевому условию.

Сформулируем теоремы единственности классических решений поставленных задач.

<u>Теорема 1.</u> Если решение краевой задачи Дирихле существует, то оно единственно.

<u>Теорема 2.</u> Решение краевой задачи Неймана определяется с точностью до константы.

<u>Теорема 3.</u> Необходимое условие существования решения задачи Неймана. Для существования решения второй краевой задачи должно выполняться условие

$$\iiint\limits_Q f d\bar{x} = \oiint\limits_\Gamma \phi ds.$$

<u>Теорема 4.</u> Третья краевая задача не может иметь более одного решения, если выполняется условия

$\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} \in C(\Gamma)$, $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} \geq 0$, и $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не равна тождественно нулю.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Пусть область Q- круг радиуса $r=l$. Решение задачи будем искать в полярных координатах (r, ϕ)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 \leq r < l, & \phi \in [0, 2\pi], \\ u|_\Gamma = f(\phi). \end{cases}$$

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_\phi = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать методом Фурье (методом разделения переменных).

Алгоритм метода Фурье, применимого в случае канонических областей для всех основных уравнений математической физики, можно описать тремя основными этапами.

I. Первый этап состоит в нахождении частных решений уравнения в частных производных.

Частные решения ищутся в виде произведения функций от одной переменной. В данном случае

$$u(\mathrm{r}, \phi) = R(\mathrm{r})\Phi(\phi).$$

Это выражение подставляем в уравнение Лапласа

$$R''\Phi+\frac{1}{\mathrm{r}}R'\Phi+\frac{1}{\mathrm{r}^2}R\Phi''=0$$

и делим получившееся уравнение на $R\Phi$

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{R'}{R}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=0.$$

Затем умножаем получившееся уравнение на r^2, оставляем в левой части функции, зависящие от r, а функции, зависящие от угловой координаты переносим в правую часть. Оказывается, что левая и правая части уравнения зависят от разных переменных. Следовательно, они равны константе

$$\mathrm{r}^2\frac{R''}{R}+\mathrm{r}\frac{R'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=const=\lambda^2.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$\mathrm{r}^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}-\lambda^2=0, \tag{4}$$

$$\Phi''+\lambda^2\Phi=0. \tag{5}$$

Для существования однозначного решения задачи должно выполняться условие

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \tag{6}$$

Уравнение (5) и условие (6) составляют задачу Штурма-Лиувилля, изученную ранее (пример 2, раздел 2.3). Отметим, что появление задачи Штурма-Лиувилля в первом действии метода Фурье характерно для всех других уравнений, решаемых этим методом.

II. Второй этап состоит в решении полученных на первом этапе обыкновенных дифференциальных уравнений, задач Штурма-Лиувилля и построении общего решения уравнения в частных производных.

Из условий периодичности (6) получаем $\lambda_n=n$, n=0,1,2,...,

$$\Phi_n(\phi)=A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi .$$

Решения уравнения (4), при заданных $\lambda_n=n$

$$R''(\mathrm{r})+\frac{1}{\mathrm{r}}R'(\mathrm{r})-\frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{r}^2}R(\mathrm{r})=0$$

будем искать в виде

$$R(\mathrm{r})=\mathrm{r}^{k},$$

где k – неизвестная константа. Произведя дифференцирование и подставляя в уравнение получим

$$k(k-1)\mathrm{r}^{k-2}+k\mathrm{r}^{k-2}-\lambda^2\mathrm{r}^{k-2}=0, \quad k=\pm\lambda .$$

Таким образом, радиальная часть решения имеет вид

$$R_n(\mathrm{r})=C_n\mathrm{r}^{k}+D_n\mathrm{r}^{-k} .$$

Если поставить условие ограниченности решения в нуле, то остается только первое слагаемое $R_n(\mathrm{r})=C_n\mathrm{r}^{n}$, т.к. $D_n=0$.

Общее решение уравнения в частных производных есть суперпозиция всех найденных частных решений

$$u(\mathrm{r},\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{r}^{n}\left[A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi\right].$$

III. Третий этап состоит в нахождении неизвестных A_n и B_n.

Для этого применяется теория рядов Фурье (в общем случае теория рядов Фурье-Стеклова).

Разложим функцию, задающую краевое условие , в ряд Фурье

$$f(\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi\right],$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\phi f(\phi)d\phi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\phi f(\phi)d\phi,$$

и используем краевое условие $u(l,\phi)=f(\phi)$, где $u(l,\phi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}l^{n}\left[A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi\right]$, для нахождения неизвестных констант. Из равенства двух рядов следует

$$2A_0=a_0,\ a_n=l^nA_n,\ b_n=l^nB_n .$$

Эти соотношения полностью определяют неизвестные константы и решение поставленной задачи

$$u(\mathrm{r},\ \phi\ ) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{r}}{l}\right)^n (a_n \cos n\,\phi\ \ + b_n \sin n\,\phi\ \ ).$$

Замечание 1. Если функция f является частичной суммой ряда Фурье, то решение всегда представляется в виде конечного ряда.

Пример 2. Пусть краевое условие задачи Дирихле содержит конечное число синусов и косинусов, например

$$f(\varphi) = \cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2\varphi.$$

Тогда и решение должно иметь такую же структуру, какую имеет краевое условие $u(l,\ \phi) = A_0 + l^2 A_2 \cos 2\ \phi.$ Отсюда находим решение задачи

$$u(\mathrm{r},\ \phi\ ) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\mathrm{r}}{l}\right)^2 \frac{\cos 2\ \phi}{2}.$$

Замечание 2. Если начало координат не входит в область Q, то общее решение уравнения Лапласа содержит логарифм и отрицательные степени r

$$u(\mathrm{r},\ \phi\ ) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n})\cos n\,\phi\ \ + (C_n r^n + \frac{D_n}{r^n})\sin n\,\phi\ \right].$$

Пример 3. Найти значения параметра B, при которых существует решение задачи Неймана в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 1 \le r < 3, \quad \phi \in [0,2\ \pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathrm{r}=1} = -2,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathrm{r}=3} = B. \end{cases}$$

Т.к. краевые условия не зависят от угла φ, то и решение от φ зависеть не будет. Тогда уравнение Лапласа будет иметь более простой вид

$$\Delta u = \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{d}{d\mathrm{r}}\left(\mathrm{r}\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{du}{dr}=\frac{C_1}{\mathrm{r}},\ \ u=C_1\ln r+C_2.$$

Неизвестные константы находим из краевых условий. На внутренней границе

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial u}{\partial \mathrm{r}},\ \ -\frac{C_1}{\mathrm{r}}\bigg|_{\mathrm{r}=1}=-2,\ \ C_1=2..$$

На внешней границе

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2}{r},\ \ B=\frac{2}{3}.$$

Решение задачи определяется, в соответствии с теоремой 2 , с точностью до произвольной константы C_2

$$u=2\ln r+C_2.$$

Ограничение на параметр B следует из теоремы 3 о необходимом условии разрешимости задачи Неймана .

6. Смешанные краевые задачи для волнового уравнения

Введем обозначения: D - ограниченная замкнутая область с гладкой границей Γ, $\bar{x}=(x_1,x_2...x_n)\in D\subset R^n$, $t\in[0,T]$.

Многие колебательные и волновые процессы в физике (колебания струн, стержней , мембран , электромагнитные волны) описываются уравнением вида

$$u_{tt}=a^2\,\Delta u+f(\bar{x},t),\ \ \bar{x}\in D,\ \ t>0\ , \tag{1}$$

которое называется волновым уравнением.

Значения функции и ее производной в начальный момент времени называются начальными данными задачи

$$u(\bar{x},0)=\varphi(\bar{x}),\ \ u_t(\bar{x},0)=\psi(\bar{x}) \tag{2}$$

На границе области ставится одно из трех типов краевых условий

А) $u(\bar{x},t)\,|_{\Gamma}=0$ -условие Дирихле,

B) $\frac{\partial}{\partial n}u(\bar{x},t)|_{\Gamma}=0$ - условие Неймана,

C) $(\alpha u(\bar{x},t)+\beta\frac{\partial}{\partial n}u(\bar{x},t))|_{\Gamma}=0$ - смешанное условие (здесь $\alpha+\beta>0$, α, β -неотрицательны на поверхности Г.

Уравнение (1), начальные условия (2), и одно из краевых условий A-C образуют смешанную краевую задачу.

Определение 1. Дважды дифференцируемая в области D и непрерывная в замкнутой области D функция $u(\bar{x},t)$, удовлетворяющая уравнению (1), начальным условиям (2) и краевому условию A) называется классическим решением первой смешанной краевой задачи для волнового уравнения.

Рассмотрим упругую струну, длины l. Величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, обозначим через $u(x,t)$. Малые колебания струны описываются одномерным волновым уравнением

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ \ x\in(0,l),\ \ t>0\ , \tag{3}$$

где $a=\sqrt{T/\rho}$ - скорость упругих волн в бесконечно длинной струне, T- постоянное натяжение струны, ρ-постоянна линейная плотность струны, $\rho f(x,t)$-плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x в плоскости (x,u).

Начальные условия означают задание смещений струны и скоростей в плоскости (x,u)

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{4}$$

Пусть концы струны жестко закреплены, что соответствует краевым условиям Дирихле

$$u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{5}$$

Для решения задачи (3) - (5) используем метод Фурье (метод разделения переменных). Рассмотрим случай свободных колебаний, когда вынуждающая сила $f(x,t) \equiv 0$. Алгоритм решения можно разбить на три этапа

1) <u>Разделяем переменные:</u>

$$u = y(x)T(t)$$

и подставляем это выражение в волновое уравнение

$$yT'' = a^2 y''T .$$

Делим полученное уравнение на $a^2 yT$ и приравниваем полученные дроби константе, так как слева и справа получились функции от разных аргументов

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{y''}{y} = -\lambda = const .$$

Отсюда следует два уравнения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(l) = 0, \qquad (6)$$

$$T + \lambda a^2 T = 0 . \qquad (7)$$

Уравнение (6) -это задача Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, изученная в разделе 2.3, пример 1 , где найдены собственные числа и собственные функции

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}, \qquad y_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x .$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$T_n = A_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + B_n \sin\frac{\pi n a}{l}t$$

2) <u>Находим неизвестные постоянные</u> A_n и B_n.

Общее решение представляется как суперпозиция всех частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n y_n(x).$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$a)\ \ t=0,\ \ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}xA_n=\ \ \varphi(x),$$

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left[-\frac{\pi na}{l}A_n\sin\frac{\pi na}{l}t+\frac{\pi na}{l}B_n\cos\frac{\pi na}{l}t\right],$$

$$б)\ \ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left[\frac{\pi na}{l}B_n\right]=\ \psi(x).$$

Теперь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ раскладываем в ряд Фурье-Стеклова по системе собственных функций $\{y_n(x)\}$

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty}\ \varphi_n y_n(x),\quad \varphi_n=\frac{(\ \varphi, y_n)}{\|y\|^2}$$

$$\psi(x)=\sum_{1}^{\infty}\ \psi_n y_n(x),\quad \psi_n=\frac{(\ \psi, y_n)}{\|y\|^2},$$

приравниваем коэффициенты в соответствующих рядах и получаем

$$A_n=\ \varphi_n,\ B_n=\frac{\psi_n}{a\ \lambda_n}$$

Итак, общее решение задачи можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)\left[\ \varphi_n\cos\ \lambda_n at+\frac{\psi_n}{a\ \lambda_n}\sin\ \lambda_n at\right]. \qquad (8)$$

<u>Замечание 1</u>. Физический смысл собственных значений и собственных функций возникающей задачи Штурма-Лиувилля состоит в том, что они являются собственными частотами и собственными формами, соответственно, стоячих гармонических волн. Остановимся на этом подробнее.

Гармоническое колебание имеет вид

$$u(x,t)=\sin\ \omega t y(x).$$

Подставляя это выражение в волновое уравнение и сокращая на временной множитель получим уравнение

$$y'' + \frac{\omega^2}{a^2} y = 0.$$

Отсюда следует, что $\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$. Гармоническое колебание с наименьшей частотой $\omega_1 = a\sqrt{\frac{\pi}{1}}$ называется основным тоном, остальные колебания образуют бесконечный ряд последовательных обертонов более высокой частоты. Так что легко заметить, что понижение частоты основного тона можно достичь либо за счет увеличения длины струны, либо за счет уменьшения натяжения. Отметим также, что число узлов в собственной форме колебаний на единицу больше ее номера.

Замечание 2. Ряд (8) достаточно быстро сходится абсолютно и равномерно для любых $t \in [0, T]$ и любых $x \in [0, l]$.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания струны с нулевыми начальными условиями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0 \ , \tag{9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{10}$$

Пусть на концах струны заданы какие-нибудь нулевые краевые условия, типа условий A)-D) для задачи Штурма-Лиувилля раздела 2.1. Будем считать собственные числа $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\{\phi_n(x)\}$этой задачи известными (для всех четырех случаев они легко находятся, аналогично задаче Дирихле). Отметим также свойство собственных функций

$$\phi_n''(x) = -\lambda_n \phi_n(x) \tag{11}$$

Частное решение волнового уравнения, называемое гармоникой, будем искать в виде

$$u_n(x,t) = \phi_n(x) T_n(t),$$

а общее решение -в виде суммы гармоник

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) T_n(t). \tag{12}$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье-Стеклова

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\psi_n(x)$$

Подставим разложение $u(x,t)$ и $f(x,t)$ в волновое уравнение и учтем свойство (11) второй производной собственной функции

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n''\phi_n(x)+a^2\lambda_n T_n\,\phi_n(x)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\,\phi_n(x). \qquad (13)$$

Система собственных функций $\{\psi_n(x)\}-$ является базисом, линейно независима и поэтому из (13) и (10) следует задача Коши

$$\begin{cases} T_n''+a^2\lambda_n T_n-C_n=0 \\ T_n(0)=T_n'(0)=0 \end{cases}. \qquad (14)$$

Решение задачи (14) выражается в виде интеграла Дюамеля

$$T_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t C_n(\tau)\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)d\tau, \qquad (15)$$

и, следовательно, решение смешанной задачи получим подставляя (15) в (12)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t C_n(\tau)\sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)d\tau. \qquad (16)$$

Пример 1. Решить смешанную краевую задачу для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt}=25u_{xx}+\sin\omega t\,(x(3-x)), \quad x\in(0,3); \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0; \quad u(0,t)=u(3,t)=0. \end{cases}$$

На концах струны поставлены краевые условия Дирихле. Следовательно, согласно разделу 2.3 , имеем

$$\mathrm{a}=5,\ \mathrm{l}=3,\quad \lambda_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{n}\,\pi}{3}^2,\quad \phi_n=\sin\frac{\pi n}{3}x$$

и решение задачи раскладывается по собственным функциям

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{3}x.$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье-Стеклова:

$$\sin\omega t[x(3-x)]=\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{3}x,$$

$$C_n=\frac{2}{3}\int_0^3\left(3x-x^2\right)\sin\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{36}{(\pi n)^3}\left(1-(-1)^n\right).$$

Здесь интеграл берется двукратным интегрированием по частям.
Подставим разложения в волновое уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''+(\frac{5}{3}\pi n)^2T_n\right)\phi_n(x)=\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}C_n\phi_n(x),$$

Отсюда следует задача Коши для ОДУ второго порядка

$$\begin{cases}T_n''+\beta_n^2T_n=C_n\sin\omega t\\ T_n(0)=T_n'(0)=0\end{cases},\quad \frac{5}{3}n\pi=\beta_n.$$

<u>(I) Нерезонансный случай:</u> $\omega\neq 5\frac{\pi n}{3}$ для любого n.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\left(\frac{5\pi n}{3}\right)^2-\omega^2}\left[-\frac{\omega}{\frac{5\pi n}{3}}\sin\left(\frac{5\pi n}{3}t\right)+\sin\omega t\right]\sin\frac{\pi nx}{3}. \qquad (19)$$

Мы получили сумму гармоник, которая удовлетворяет поставленным граничным и начальным условиям и самому волновому уравнению .

Видно, что если $\omega=\frac{5\pi n}{3}$, то амплитуда $\frac{C_n}{\left(\frac{5\pi n}{3}\right)^2-\omega^2}$ устремится в бесконечность – наступит резонанс.

<u>(II) Резонансный случай.</u> Пусть для некоторого фиксированного m имеет место равенство $\omega = \frac{5\pi}{3} m$. В этом случае можно использовать формулу (18) предыдущего раздела. Имеется и другой метод, основанный на методе подбора частного решения из теории дифференциальных уравнений. Напомним этот метод.

Найдем частное решение (5) методом подбора:

$$T_m^{част}(t) = t(D_m \cos \omega t + E_m \sin \omega t)$$

$$T_m^{част\,\prime}(t) = D_m \cos \omega t + E_m \sin \omega t + t(-\omega D_m \cos \omega t + \omega E_m \sin \omega t)$$

$$T_m^{част\,\prime\prime}(t) = -\omega D_m \cos \omega t + \omega E_m \sin \omega t + t\left(-\omega^2 D_m \cos \omega t + \omega^2 E_m \sin \omega t\right) +$$
$$+ \omega(E_m \cos \omega t + D_m \sin \omega t)$$

Подставим эти выражения в ОДУ (5)

$$-\omega D_m \sin \omega t + \omega E_m \cos \omega t + t\left(-\omega^2 D_m \cos \omega t - \omega^2 E_m \sin \omega t\right) +$$
$$+ \omega(E_m \cos \omega t - D_m \sin \omega t) + \beta_m^2 t(D_m \cos \omega t + E_m \sin \omega t) = C_m \sin \omega t$$
$$2\omega E_m \cos \omega t - 2\omega D_m \sin \omega t + t\left(-\omega^2 D_m \cos \omega t - \omega^2 E_m \sin \omega t\right) +$$
$$+ \beta_m^2 t(D_m \cos \omega t + E_m \sin \omega t) = C_m \sin \omega t$$

$$\begin{cases} 2E_m \omega = 0 \\ -2D_m \omega = C_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_m = -\frac{C_m}{2\omega}; \quad E_m = 0.$$

Следовательно, частное решение неоднородного ДУ (5) равно:

$$T_m^{част} = -\frac{tC_m}{2\omega} \cos \omega t$$

Тогда общее решение (5) будет выглядеть следующим образом:

$$T_m = T_m^o + T_m^{част} = A_m \cos \frac{5m\pi}{3} t + B_m \sin \frac{5m\pi}{3} t - \frac{tC_m}{2\omega} \cos \omega t$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = -\frac{5m\pi}{3} t \sin \frac{5m\pi}{3} tA_m + \frac{5m\pi}{3} B_m \cos \frac{5m\pi}{3} t \, \frac{tC_m}{2\omega} \omega \sin \omega t -$$
$$-\frac{C_m}{2\omega} \cos \omega t$$

Используем начальные условия:

$$\begin{cases} T_m(0) = 0 = A_m - \dfrac{C_m}{2\omega} 0 = A_m \\ T'_m(0) = 0 = \dfrac{5m\pi}{3} B_m - \dfrac{C_m}{2\omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_m = 0 \\ B_m = \dfrac{3C_m}{10m\pi\omega} \end{cases}$$

В итоге найдена резонансная гармоника:

$$u_m = \left(\frac{3C_m}{10m\pi\omega} \sin \frac{5m\pi}{3} t - t \frac{C_m}{2\omega} \cos \omega t \right) \sin \frac{m\pi x}{3} \tag{8}$$

Замечание: в случае резонанса методом подбора мы нашли только одну гармонику номера $m-$это резонансная гармоника. Все остальные гармоники – нерезонансные. Для них справедлив результат предыдущего первого пункта. Заметим, что в формуле для общего решения $m-$ю гармонику ряда (7) следует заменить на полученную (8) резонансную гармонику.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \delta_{mn}) \frac{C_n}{\left(\frac{5\pi n}{3}\right)^2 - \omega^2} \left[\sin \omega t - \frac{3\omega}{5\pi n} \sin\left(\frac{5\pi n}{3} t\right) \right] \sin \frac{\pi n x}{3} +$$

$$+ \left[\frac{3C_m}{10m\pi\omega} \sin \frac{5\pi m}{3} t - t \frac{C_m}{2\omega} \cos \omega t \right] \sin \frac{\pi m x}{3}$$

Получается, что на резонансной гармонике мы имеем линейную зависимость амплитуды от времени, т.е. при $t \to \infty$ амплитуда устремляется в бесконечность. В реальных физических системах всегда имеется трение и неограниченный рост по времени не имеет места.

Рассмотрим однородное волновое уравнение с неоднородными граничными условиями. Пусть дана смешанная краевая задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,l), \;\; t > 0 \; ;$$

$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0 \; ; \; u(0,t) = \mu_1(t), \;\; u(l,t) = \mu_2(t) .$$

Эту задачу, путем замены неизвестной, можно свести к изученной выше задаче с нулевыми краевыми условиями.

Представим искомое решение в виде

$$u = V + W,$$

где функцию $W(x,t)$ выберем таким образом, чтобы для $V = u - W$ получить задачу с однородными граничными условиями. Легко проверить, что функция

$$W = \frac{x}{l}\,\mu_2(t) + \frac{l-x}{l}\,\mu_1(t)$$

удовлетворяет краевым условиям $W(l) = \mu_2$, $W(0) = \mu_1$.
Осуществив эту замену получаем смешанную краевую задачу с нулевыми краевыми условиями

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx} - W_{tt}, \\ V(x,0) = -W(x,0),\ V_t(x,0) = -W_t(x,0);\ V(0,t) = 0,\ V(l,t) = 0. \end{cases}$$

Библиографический список.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.-735 с.
2. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике для втузов. т.3. М.: Издательство физ.-мат. лит., 2003.-574с.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. –М.: Наука, 1985.-310 с.

Содержание: