

## ТЕМА 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В задачах кинематики **МТ** обычно требуется определить кинематические характеристики **МТ** по известному закону ее движения.

### Алгоритм решения задач

1. **Постановка задачи:** указать движение какой **МТ** рассматривается, ввести систему отсчета, задать движение **МТ**, определить траекторию **МТ**, начальное положение **МТ** и ее положение в рассматриваемый момент времени.
2. **Задача скоростей:** определить скорость **МТ**.
3. **Задача ускорений:** определить ускорение **МТ**.
4. **Определение искомых величин:** например, радиуса кривизны траектории, характера движения **МТ** и т.д.

### Примеры решения задач

#### Задача 1

**Дано**

Закон движения **МТ А** в плоскости **Oxy** имеет вид

$$\begin{cases} x_A = 3 \cdot \cos(\pi t/4) + 2 \quad (\text{см}), \\ y_A = 3 - 2 \cdot \sin(\pi t/4) \quad (\text{см}). \end{cases}$$

**Определить**

1. траекторию **МТ А**;
2. скорость; полное, касательное, нормальное ускорения; радиус кривизны траектории; а также характер движения **МТ** для момента времени  $t_1 = 1$  с.

**Решение**

1. Рассмотрим движение **МТ А** в плоскости **Oxy**. Закон движения **МТ** задан в координатной форме.

Траекторию **МТ** найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения. Выразим  $\cos(\pi t/4) = (x_A - 2)/3$ ,  $\sin(\pi t/4) = (3 - y_A)/2$  и подставим в основное тригонометрическое тождество  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ .

Получим

$$\frac{(x_A - 2)^2}{3^2} + \frac{(3 - y_A)^2}{2^2} = 1.$$

Это уравнение определяет эллипс с центром в точке (2; 3) и полуосями 3 см вдоль оси  $x$  и 2 см вдоль  $y$ . Начальное положение **МТ А** —  $A_0$  с координатами  $x_{A0} = 3 \cdot \cos(0) + 2 = 5$  (см),  $y_{A0} = 3 - 2 \cdot \sin(0) = 3$  (см). При увеличении  $t$

координаты  $x_A$  и  $y_A$  убывают и **МТ А** движется по эллипсу влево вниз. Положение  $A_1$  **МТ** в момент времени  $t_1 = 1$  с определяется координатами  $x_{A1} = 3 \cdot \cos(\pi/4) + 2 = 4,12$  (см),  $y_{A1} = 3 - 2 \cdot \sin(\pi/4) = 1,59$  (см). При дальнейшем увеличении  $t$  **МТ** опишет весь эллипс, вернувшись при  $t = 8$  с в положение  $A_0$ . Таким образом, траекторией **МТ А** является весь эллипс. Траектория, положения  $A_0$  и  $A_1$  показаны на рис. 1.

2. Задача скоростей. Найдем проекции скорости **МТ А** на оси координат:

$$V_{Ax} = \dot{x}_A = 3 \cdot (-\sin(\pi t/4)) \cdot \pi/4 = -(3\pi/4) \cdot \sin(\pi t/4) \text{ (см/с)},$$

$$V_{Ay} = \dot{y}_A = -2 \cdot (\cos(\pi t/4)) \cdot \pi/4 = -(\pi/2) \cdot \cos(\pi t/4) \text{ (см/с)}.$$

В рассматриваемый момент времени:

$$V_{Ax1} = V_{Ax}(t_1) = -(3\pi/4) \cdot \sin(\pi/4) = -1,67 \text{ см/с},$$

$$V_{Ay1} = V_{Ay}(t_1) = -(\pi/2) \cdot \cos(\pi/4) = -1,11 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости равен  $V_{A1} = (V_{Ax1}^2 + V_{Ay1}^2)^{1/2} = 2,00$  см/с.

Проекции  $V_{Ax1}$ ,  $V_{Ay1}$  и вектор  $\vec{V}_{A1}$  скорости **МТ А** показаны на рис. 1.

3. Задача ускорений. Найдем проекции ускорения **МТ А** на оси координат:

$$a_{Ax} = \dot{V}_{Ax} = -(3\pi/4) \cdot \cos(\pi t/4) \cdot \pi/4 = -(3\pi^2/16) \cdot \cos(\pi t/4) \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{Ay} = \dot{V}_{Ay} = -(\pi/2) \cdot (-\sin(\pi t/4)) \cdot \pi/4 = (\pi^2/8) \cdot \sin(\pi t/4) \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

В рассматриваемый момент времени:

$$a_{Ax1} = a_{Ax}(t_1) = -(3\pi^2/16) \cdot \cos(\pi/4) = -1,31 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{Ay1} = a_{Ay}(t_1) = (\pi^2/8) \cdot \sin(\pi/4) = 0,87 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения равен  $a_{A1} = (a_{Ax1}^2 + a_{Ay1}^2)^{1/2} = 1,57$  см/с<sup>2</sup>.

Проекции  $a_{Ax1}$ ,  $a_{Ay1}$  и вектор  $\vec{a}_{A1}$  ускорения **МТ А** показаны на рис. 1.

Касательное ускорение **МТ А** найдем, спроецировав вектор ускорения на направление скорости:

$$a_{A\tau 1} = [a_{Ax1} \cdot V_{Ax1} + a_{Ay1} \cdot V_{Ay1}] / V_{A1} = \\ = [(-1,31 \text{ см/с}^2) \cdot (-1,67 \text{ см/с}) + (0,87 \text{ см/с}^2) \cdot (-1,11 \text{ см/с})] / (2,00 \text{ см/с}) = 0,61 \text{ см/с}^2.$$

Поскольку  $a_{A\tau 1} > 0$ ,  $\vec{a}_{A\tau 1} \uparrow \uparrow \vec{V}_{A1}$ .

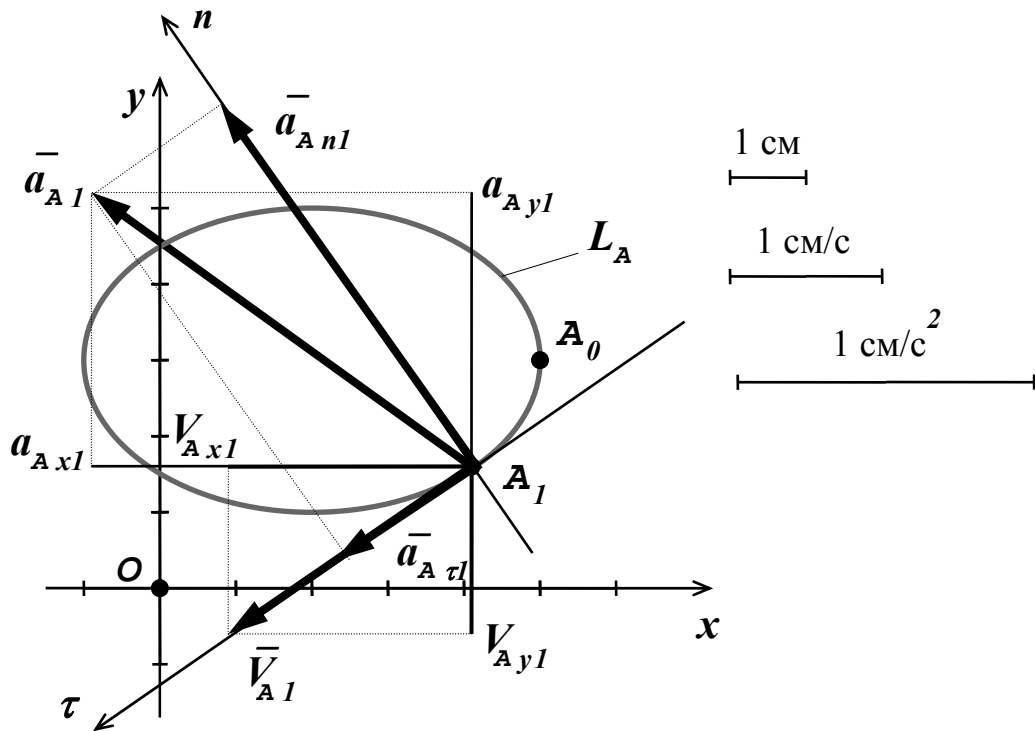


Рис. 1

Нормальное ускорение МТ **A** найдем через касательное ускорение и модуль ускорения:

$$a_{A n1} = [a_{A1}^2 - a_{A \tau1}^2]^{1/2} = [(1,57 \text{ см/с}^2)^2 - (0,61 \text{ см/с}^2)^2]^{1/2} = 1,45 \text{ см/с}^2.$$

Касательное  $\vec{a}_{A \tau1}$  и нормальное  $\vec{a}_{A n1}$  ускорения МТ **A** показаны на рис. 1.

4. Радиус кривизны траектории МТ в данный момент времени найдем через ее скорость и нормальное ускорение:

$$\rho_1 = V_{A1}^2 / a_{A n1} = (2,00 \text{ см/с})^2 / (1,45 \text{ см/с}^2) = 2,76 \text{ см}.$$

Из рис. 1 видно, что угол между векторами скорости и ускорения в данный момент времени — острый, следовательно, движение МТ **A** является ускоренным:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{A1} \wedge \vec{V}_{A1} &= \arccos(a_{A \tau1} / a_{A1}) = \arccos((0,61 \text{ см/с}^2) / (1,57 \text{ см/с}^2)) = \\ &= \arccos(0,389) = 1,17 \approx 67^\circ < 90^\circ. \end{aligned}$$

## Задача 2

**Дано**

Закон движения **МТ В** в плоскости **Oxy** имеет вид

$$\begin{cases} x_B = t^3 - 3 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 1 \text{ (м)}, \\ y_B = 1 - t \text{ (м)}. \end{cases}$$

**Определить**

1. траекторию **МТ В**;
2. характер движения **МТ** в момент времени  $t_1 = 2$  с.

**Решение**

1. Рассмотрим движение **МТ В** в плоскости **Oxy**. Закон движения **МТ** задан в координатной форме. Найдем траекторию **МТ**:

$$t = 1 - y_B \Rightarrow x_B = (1 - y_B)^3 - 3 \cdot (1 - y_B)^2 + 3 \cdot (1 - y_B) + 1 = 2 - y_B^3.$$

Начальное положение **МТ В** —  $B_0(1; 1)$ . Положение **МТ В** при  $t_1 = 2$  с —  $B_1(3; -1)$ . Траектория **МТ В** — правая ветвь  $[B_0; +\infty)$  кубической параболы  $x_B = 2 - y_B^3$  (см. рис. 2).

2. Задача скоростей.

$$V_{Bx} = \dot{x}_B = 3 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 3 \text{ (м/с)}, \quad V_{By} = \dot{y}_B = -1 \text{ (м/с)}.$$

$$V_{Bx1} = V_{Bx}(t_1) = 3 \text{ м/с}; \quad V_{By1} = V_{By}(t_1) = -1 \text{ м/с}; \quad V_{B1} = 3,16 \text{ м/с}.$$

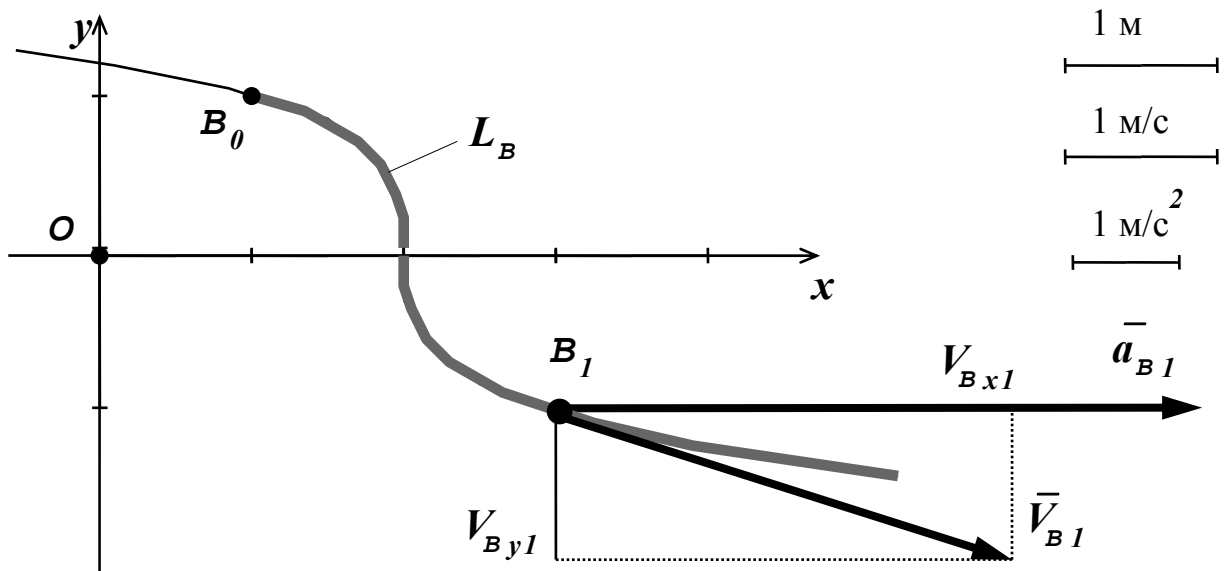


Рис. 2

3. Задача ускорений.

$$a_{Bx} = \dot{V}_{Bx} = 6 \cdot t - 6 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_{By} = \dot{V}_{By} = 0 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$a_{Bx1} = a_{Bx}(t_1) = 6 \text{ м/с}^2; \quad a_{By1} = 0 \text{ м/с}^2; \quad a_{B1} = 6 \text{ м/с}^2.$$

4. Движение МТ **B** является ускоренным, т.к.

$$\bar{a}_{B1} \wedge \bar{V}_{B1} = \arccos [(a_{Bx1} \cdot V_{Bx1} + a_{By1} \cdot V_{By1}) / (a_{B1} \cdot V_{B1})] =$$

$$= \arccos [(6 \text{ м/с}^2 \cdot 3 \text{ м/с} + 0) / (6 \text{ м/с}^2 \cdot 3,16 \text{ м/с})] = \arccos (0,320) \approx 18^\circ < 90^\circ.$$

### Задача 3

**Дано**

Закон движения МТ **C** в плоскости **Oxy** имеет вид

$$\begin{cases} x_c = 2 \cdot \cos(t) - 1 \text{ (мм)}, \\ y_c = 2 - \sin^2(t/2) \text{ (мм)}. \end{cases}$$

**Определить**

1. траекторию МТ **C**;
2. характер движения МТ для момента времени  $t_1 = 2 \text{ с}$ .

**Решение**

1. Рассмотрим движение МТ **C** в плоскости **Oxy**. Закон движения МТ задан в координатной форме. Найдем траекторию МТ:

$$\cos(t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t/2) = (1 + x_c) / 2 \Rightarrow \sin^2(t/2) = 1 - (1 + x_c) / 4,$$

$$y_c = 2 - \sin^2(t/2) = 2 - 1 + (1 + x_c) / 4 = x_c / 4 + 5/4.$$

Начальное положение МТ **C** —  $C_0(1; 2)$ . Положение МТ **C** при  $t_1 = 2 \text{ с}$  —  $C_1(-1,83; 1,29)$ . Траектория МТ **C** — отрезок  $C_0 C_2$  прямой  $y_c = x_c / 4 + 5/4$ , где  $C_2(-3; 1)$  (см. рис. 3).

2. Задача скоростей.

$$V_{cx} = \dot{x}_c = -2 \cdot \sin(t) \text{ (мм/с)}, \quad V_{cy} = \dot{y}_c = -(1/2) \cdot \sin(t) \text{ (мм/с)}.$$

$$V_{cx1} = V_{cx}(t_1) = -1,82 \text{ мм/с}; \quad V_{cy1} = V_{cy}(t_1) = -0,45 \text{ мм/с}.$$

3. Задача ускорений.

$$a_{cx} = \dot{V}_{cx} = -2 \cdot \cos(t) \text{ (мм/с}^2\text{)}, \quad a_{cy} = \dot{V}_{cy} = -(1/2) \cdot \cos(t) \text{ (мм/с}^2\text{)}.$$

$$a_{cx1} = a_{cx}(t_1) = 0,83 \text{ мм/с}^2; \quad a_{cy1} = a_{cy}(t_1) = 0,21 \text{ мм/с}^2.$$

4. Из рис. 3 видно, что скорость  $\bar{V}_{C1}$  и ускорение  $\bar{a}_{C1}$  МТ  $C$  в данный момент времени направлены противоположно, следовательно, движение МТ  $C$  является замедленным.

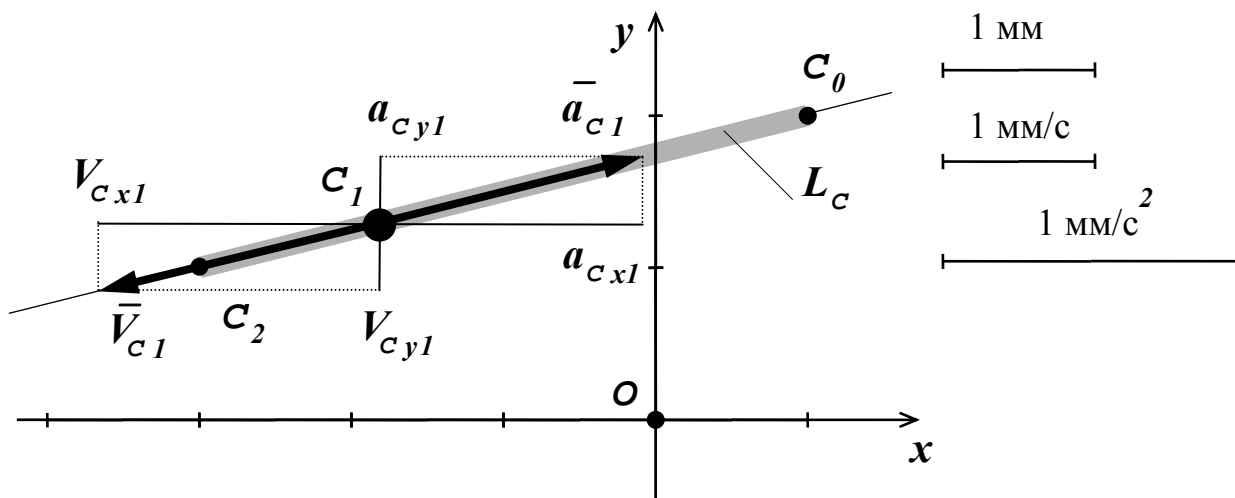


Рис. 3

#### Задача 4

**Дано**

Закон движения МТ  $D$  в плоскости  $Oxy$  имеет вид

$$\begin{cases} x_D = 2 \cdot \sin(\pi t/6) - 1 \text{ (м)}, \\ y_D = 2 - \cos(\pi t/3) \text{ (м)}. \end{cases}$$

**Определить**

1. траекторию МТ  $D$ ;
2. скорость; полное, касательное, нормальное ускорения; радиус кривизны траектории; характер движения МТ для момента времени  $t_1 = 5$  с.

**Ответ**

1. Траекторией МТ  $\ddot{A}$  является дуга  $D_2D_3$  параболы  $y_D = 1 + (x_D + 1)^2/2$ , где  $D_2(-3; 3)$ ,  $D_3(1; 3)$ ;  $D_0(-1; 1)$ ;  $D_1(0; 1,5)$ .

2.  $V_{Dx1} = -0,907$  м/с;  $V_{Dy1} = -0,907$  м/с;  $V_{D1} = 1,283$  м/с.

3.  $a_{Dx1} = -0,274$  м/с<sup>2</sup>;  $a_{Dy1} = 0,548$  м/с<sup>2</sup>;  $a_{D1} = 0,613$  м/с<sup>2</sup>.

$a_{D\tau1} = -0,194$  м/с<sup>2</sup>;  $a_{Dn1} = 0,581$  м/с<sup>2</sup>.

4.  $\rho_1 = 2,83$  м.

5. МТ  $D$  движется при  $t_1 = 5$  с замедленно, т.к.  $\bar{a}_{D1} \wedge \bar{V}_{D1} = 1,89 \approx 108^\circ > 90^\circ$ .

## Практическое задание

### Задача № 1

**Дано**

Материальная точка  $M$  движется в плоскости  $Oxy$ . Закон движения задан в координатной форме уравнениями  $x_M(t)$  и  $y_M(t)$ . Исходные данные к задаче приведены в табл. 1.

Таблица 1

Цифра вари- анта	Порядковый номер цифры в варианте					
	1		2		3	4
	$a$	$d$	$b$	$c$	$x_M(t)$ , см	$y_M(t)$ , см
0	1	5	$2\pi$	2	$a \cdot \cos(\pi t/b) + c$	$a \cdot \sin(\pi t/b) - c$
1	-1	4	6	4	$c \cdot \cos(\pi t/b) - d$	$-a \cdot \sin(\pi t/b) + c$
2	2	3	$3 \cdot \pi/2$	1	$a \cdot t/b$	$c \cdot \sin(\pi t/b) + d$
3	-2	2	4	3	$-d \cdot \cos(\pi t/b) - a$	$-c \cdot \sin(\pi t/b) + a$
4	3	1	$\pi$	5	$a - c \cdot \cos(\pi t/b)$	$d \cdot \sin(\pi t/b) - c$
5	-3	-5	3	-2	$c + d \cdot \cos(\pi t/b)$	$-d \cdot \sin(\pi t/b) - c$
6	4	-4	$2 \cdot \pi/3$	-4	$d - a \cdot \cos(\pi t/b)$	$a \cdot \sin(\pi t/2b) + c$
7	-4	-3	$3/2$	-1	$-c \cdot t/b$	$c \cdot \sin^2(\pi t/2b) - a$
8	5	-2	$\pi/2$	-3	$c \cdot \cos(\pi t/b) + d$	$-c \cdot \cos(\pi t/b) + d$
9	-5	1	$4/3$	-5	$-a \cdot \cos(\pi t/b) - d$	$d \cdot \cos(2\pi t/b) + c$

**Определить**

1. траекторию МТ  $M$ ;
  2. скорость; полное, касательное, нормальное ускорения; радиус кривизны траектории; характер движения МТ для момента времени  $t_1 = 1$  с.
- Все определяемые величины изобразить на рисунке в масштабе.