

Задача 1. (3 балла)

Для заданной функции $z = f(x, y)$ выполнить следующие задания.

1. Найти и изобразить на пл. XOY область определения (границы, принадлежащие области определения, строить сплошной чертой, не принадлежащие - пунктиром.)
2. Составить уравнения линий уровня и изобразить в области определения. Выделить уравнение той из них, которая проходит через заданную точку M, изобразить её (другим цветом) на общем рисунке.
3. В заданной точке M вычислить производную функции по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$, найти вектор градиента, построить его на общем рисунке.
4. Вычислить наибольшее значение производной функции по направлению в точке M и указать, в каком направлении $\vec{S}_1$ она достигается.

№ варианта	$f(x, y)$	M	N
1	$\frac{3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{y}}$	$\left(\frac{1}{2}; 3\right)$	$\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$
2	$\frac{2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{y}}$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
3	$\frac{\sqrt{y^2+4}}{x}$	$(-1, 1)$	$(2, -3)$
4	$\frac{\sqrt{2(1-x^2)}}{\sqrt{-y}}$	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$	$\left(\frac{4}{3}, 1\right)$
5	$\frac{4\sqrt{9-y^2}}{x-2}$	$(0, \sqrt{5})$	$(-2, \sqrt{5})$
6	$\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}$	$(2, -\sqrt{5})$	$(4, 0)$
7	$\frac{\sqrt{3(x^2-1)}}{\sqrt{y}}$	$(2, 1)$	$(4, -1)$
8	$\frac{x^2+y^2}{2y}$	$(2\sqrt{2}, -2)$	$(\sqrt{2}, -4)$
9	$\frac{\sqrt{x^2+4}}{y}$	$(2, -\sqrt{2})$	$(4, \sqrt{2})$

10	$\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{-2y}}$	$(2\sqrt{2}, -1)$	$(3\sqrt{2}, 2)$
11	$\frac{x^2 + y^2}{2x - 2y}$	$(1, 3)$	$(-1, 5)$
12	$\frac{y - 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$	$(\sqrt{5}, 2)$	$(0, 0)$
13	$\frac{3\sqrt{3 + x^2}}{\sqrt{3y}}$	$(-1, 3)$	$(11, -2)$
14	$\frac{x^2 + y^2}{2x + y}$	$(2, 1)$	$(3, 3)$
15	$\frac{x - 2}{\sqrt{y^2 - 4}}$	$(-2, \sqrt{5})$	$(0, 2\sqrt{5})$
16	$\frac{\sqrt{4 - y^2}}{\sqrt{x}}$	$(4, \sqrt{3})$	$(5, -3\sqrt{3})$
17	$\frac{8x}{x^2 + y^2}$	$(1, \sqrt{3})$	$(4, 0)$
18	$2\sqrt{xy + x - 2y - 2}$	$(4, 1)$	$(5, 3)$
19	$\frac{3\sqrt{9 - y^2}}{\sqrt{3x}}$	$(3, -1)$	$(2, 0)$
20	$\frac{8y}{4x^2 + y^2}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
21	$\frac{4}{\sqrt{1 + x - y - xy}}$	$(-2, 5)$	$(-5, 9)$
22	$\frac{\sqrt{4 - y^2}}{\sqrt{-2x}}$	$(-2, \sqrt{2})$	$(0, 2\sqrt{2})$
23	$\frac{x^2 + y^2}{2x}$	$(1, 2)$	$(-3, -1)$
24	$2\sqrt{\frac{y}{\sqrt{3x^2 - y^2}}}$	$(-6, 3\sqrt{6})$	$(-5, \sqrt{6})$
25	$\frac{\sqrt{y^2 - 4}}{\sqrt{x}}$	$(3, 4)$	$(0, 0)$

26	$\frac{2\sqrt{y^2-6}}{\sqrt{-2x}}$	$(-5,4)$	$(-2,0)$
27	$\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{2\sqrt{x}}$	$(5,4)$	$(4,2)$

Задача 2. (4 балла)

Найти первый дифференциал:

а) для функции двух или трёх переменных;

б) для сложной функции;

в) и г) для неявной функции.

В пункте а) найти второй дифференциал.

1	а) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ б) $f(xy, yz)$ в) $ez = e^{x+y+z}$ г) $F\left(\frac{z}{x}; \frac{y}{z}\right) = 0$	2	а) $f(x, y) = \ln(e^x + 2e^y)$ б) $f\left(\ln \frac{x}{y}; \ln \frac{y}{z}\right)$ в) $2\ln(xyz) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ г) $F(ax^2 + bz, z - y) = 0$
3	а) $f(x, y, z) = \ln\left(z \frac{x+y}{1-xy}\right)$ б) $f\left(\frac{x^2}{y}; \frac{y}{x^2}\right)$ в) $z + \ln(x + y + z) = 0$ г) $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$	4	а) $f(x, y) = xy - \frac{5}{x} + \frac{3}{y}$ б) $f\left(\sin \frac{x}{y}, \cos \frac{y}{x}\right)$ в) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ г) $F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0$
5	а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + xyz$ б) $f(x \cos y, y \sin x)$ в) $xy + xz + yz = xyz$ г) $F(x - y, y - z, z - x) = 0$	6	а) $f(x, y) = \cos(2x + 3y + 1)$ б) $f(\arcsin x^2, x^y)$ в) $ze^z = xe^x = ye^y$ г) $F(\cos yz, \sin xz)$
7	а) $f(x, y, z) = x^3y + y^3z + z^x$ б) $f(x^3 + y^4, x^4 - y^3)$ в) $z = \ln(yz - x)$	8	а) $f(x, y) = x^4y + 2x^2y^2 + xy^3 + x - y$ б) $f(x^2 + y^2 + z^2, xyz, yz^2)$

	$\text{r) } F\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$		$\text{B) } z^3 - 3(x+y)z^2 + y^3 = 0$ $\text{r) } F(x^2 + y, z) = 0$
9	$\text{a) } f(x, y, z) = \ln(x + y - z)$ $\text{б) } f(\sin xz, \sin yz, \sin xy)$ $\text{B) } \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ $\text{r) } F\left(\ln \frac{y}{x}, z\right) = 0$	10	$\text{a) } f(x, y) = x \sin(x + y) + y \cos(x + y)$ $\text{б) } f(x^2 + y^2 + z^2, x + y + z, xyz)$ $\text{B) } x^2 \ln(z + x) = xy$ $\text{r) } F(e^{xz}, \ln xy) = 0$
11	$\text{a) } f(x, y, z) = \ln(xy^2 z^3)$ $\text{б) } f(x^2, y^2, z^2)$ $\text{B) } x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz$ $\text{r) } F(x + z, y + z) = 0$	12	$\text{a) } f(x, y) = \sin(x^2 + y^2 + 1)$ $\text{б) } f(e^x \sin y, e^y \cos z, xyz)$ $\text{B) } z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{ctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ $\text{r) } F(xy, yz, zx) = 0$
13	$\text{a) } f(x, y, z) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$ $\text{б) } f(e^{xy}, \arcsin y^2)$ $\text{B) } 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 =$ $\text{r) } F(y - x, e^{xz}) = 0$	14	$\text{a) } f(x, y) = (2x^2 y^2 - x + 1)^3$ $\text{б) } f(xy, x - z, y + z)$ $\text{B) } z^3 - xz + y = 0$ $\text{r) } F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$
15	$\text{a) } f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2^y + \operatorname{tg} 3z)$ $\text{б) } \ln f(x, x + y)$ $\text{B) } x - z = z \ln \frac{z}{y}$ $\text{r) } F(y - zx, x - zy, z - xy) = 0$	16	$\text{a) } f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ $\text{б) } f(x^y + y^x, e^{xy})$ $\text{B) } 2xz - y \operatorname{tg} z = 0$ $\text{r) } F\left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}, \ln \frac{z}{y}\right) = 0$
17	$\text{a) } f(x, y, z) = e^{-x^3 y} + 2e^{y^2 z}$ $\text{б) } f(xe^z, ye^z, ze^{x-y})$ $\text{B) } x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$	18	$\text{a) } f(x, y) = \arccos(xy)$ $\text{б) } f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xyz)$ $\text{B) } z(1 + x^2) = y(1 + z^4)$ $\text{r) } F(x \cos y, y \sin z) = 0$

	г) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{z}{y}\right) = 0$		
19	а) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2) + \cos(x^2 - z^2) + \sin(z^2 - y^2)$ б) $f\left(y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$ в) $xz^5 + yz^3 = x^3$ г) $F(\operatorname{tg}(xy), \operatorname{ctg}(xz)) = 0$	20	а) $f(x, y) = \ln(x^3 + \sin xy)$ б) $f\left(\frac{y}{x+y}, x^2 - y^3\right)$ в) $\frac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + y + z)$ г) $F(x, yz, xyz) = 0$
21	а) $f(x, y, z) = xz - \frac{3}{yz} + 5x$ б) $f(e^{xy}, 2x^2 - 4y^3)$ в) $z - x = y \operatorname{ctg}(z - x)$ г) $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$	22	а) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ б) $f\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \ln(x^2 + y^2), x - y\right)$ в) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ г) $F\left(x + \frac{y}{z}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$
23	а) $f(x, y, z) = \frac{\cos(xz)}{y}$ б) $f(x^3 + y^4, x^4 - y^3)$ в) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ г) $F\left(y + \frac{z}{x}, z + \frac{x}{y}\right) = 0$	24	а) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x + 1$ б) $f(x^2 + y^2, xy)$ в) $x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 = 1$ г) $F(xz, yz) = 0$
25	а) $f(x, y, z) = 2^{\frac{x}{y}} + 2^{\frac{y}{z}}$ б) $f(2x^2, 3y^4, 4z^3)$ в) $\sin^y - \cos z \sin x = 0$ г) $F(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z - xy) = 0$	26	а) $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{y^2}$ б) $f(\cos(ye^x), \sin(xe^y))$ в) $2x - y \operatorname{tg} z = 0$ г) $F\left(y + \frac{z}{x}, x + \frac{z}{y}\right) = 0$
27	а) $f(x, y, z) = e^{-xyz}$ б) $f(x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2)$ в)	28	а) $f(x, y) = 2^{x-y} + 3^{y-x}$ б) $f(xy, x - y, y + z)$ в) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$ г) $F(x - y - z, y, z - y) = 0$

	$2xyz^2 + (4y^3 - 2x^3)z + 3x^2y^2 - 4 = 0$ г) $F\left(z + \frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$		
29	а) $f(x, y, z) = \arcsin(xyz)$ б) $f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ в) $z^4 + zx^3 + zy^3 = a^4$ г) $F(x^2y, 2z - x) = 0$	30	а) $f(x, y) = x^4z - y^4x + z^4y$ б) $f\left(\arctg \frac{x}{y}, \ln \frac{y}{x}\right)$ в) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$ г) $F\left(y + \frac{x}{z}, x + \frac{y}{z}\right) = 0$

Задача 3. (2 балла)

Убедитесь, что выражение является полным дифференциалом некоторой функции, и найдите эту функцию.

- $\left(\frac{y^2}{\cos^2 x} - \frac{e^{-y}}{2x} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx + \left(2y \operatorname{tg} x + e^{-y} \ln \sqrt{x}\right)dy$
- $\left(2x \sin y - \frac{\operatorname{ctg} y}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx + \left(x^2 \cos y + \frac{\arcsin x}{\sin^2 y} + 3y^2\right)dy$
- $\left(\frac{3y}{\cos^2 3x} - \frac{2e^{-4y}}{x} + x\right)dx + \left(\operatorname{tg} 3x + 8e^{-4y} \ln(3x) + y^2\right)dy$
- $\left(\frac{y^3}{\cos^2 x} - 4x^3 e^{-2y} - 2x e^{-2y} + y\right)dx + \left(3y^2 \operatorname{tg} x + 2x^4 e^{-2y} + 2x^2 e^{-2y} + x\right)dy$
- $\left(x \operatorname{ctg} y - y^2 \cos x + \sqrt{x+2}\right)dx - \left(\frac{x^2}{2 \sin^2 y} + 2y \sin x\right)dy$
- $\left(\frac{2y^2}{\cos^2 2x} + 6e^{-2y} \sin 3x + 1\right)dx + \left(2y \operatorname{tg} 2x + 4e^{-2y} \cos 3x\right)dy$
- $\left(4x^3 y^2 - 2 \ln(2y) \sin(x+1) + 2x e^{x^2}\right)dx + \left(2x^4 y + \frac{2 \cos(x+1)}{y}\right)dy$
- $\left(e^x \sin y - \ln y^2 \cos(x+1)\right)dx - \left(\frac{2 \sin(x+1)}{y} - e^x \cos y - \frac{2}{\sqrt{y-3}}\right)dy$

9. $\left(\frac{2x \cos y}{\sqrt{1+x^2}} - 4y^3 \sin 4x \right) dx + \left(3y^2 \cos 4x - 2\sqrt{1+x^2} \sin y \right) dy$
10. $\left(\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \frac{x \ln y}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx - \left(2y \arccos x + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{y} \right) dy$
11. $\left(\frac{y}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{2e^y}{(1+x)^2} \right) dx + \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{2e^y}{x+1} \right) dy$
12. $\left(4x \ln(y^2 + 1) - y\sqrt{y} \sin x \right) dx + \left(\frac{3}{2} \sqrt{y} \cos x + \frac{4y(1+x^2)}{1+y^2} \right) dy$
13. $\left(\frac{\sin y}{\cos^2(x+3)} - \frac{2xe^{-y}}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx + \left(\operatorname{tg}(x+3) \cos y + 2e^{-y} \sqrt{2+x^2} \right) dy$
14. $\left(\frac{2y^3}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{3x^2 \ln y}{2\sqrt{x^3+1}} \right) dx + \left(3y^2 \arcsin 2x - \frac{\sqrt{x^3+1}}{y} \right) dy$
15. $\left(5x - \frac{3y}{\sin^2 3x} - \frac{2e^{-3y}}{x} \right) dx + \left(\operatorname{ctg} 3x + 6e^{-3y} \ln(2x) + 5\sqrt[3]{y^2} \right) dy$
16. $\left(\frac{4 \cos 2y}{\sin^2 4x} + \frac{2e^{-3y}}{1+4x^2} \right) dx + \left(2 \operatorname{ctg} 4x \sin 2y - 3 \operatorname{arctg} 2xe^{-3y} + \frac{2y^3+y}{\sqrt{y^4+y^2}} \right) dy$
17. $\left(\frac{3y^4}{\cos^2 3x} + \frac{e^{1-y}}{2x^2} \right) dx + \left(4y^3 \operatorname{tg} 3x + \frac{e^{1-y}}{2x} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right) dy$
18. $\left(e^x \cos 2y - \ln \sqrt{y} \cos(x+1) \right) dx - \left(\frac{\sin(x+1)}{2y} + 2e^x \sin 2y - \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} \right) dy$
19. $\left(\frac{(2x+1) \cos y}{\sqrt{x+x^2}} - \frac{3y^3}{\sin^2 x} \right) dx + \left(9y^2 \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{x+x^2} \sin y + \frac{3}{1-y^2} \right) dy$
20. $\left(y^3 e^x + 2xe^y + \frac{x}{3+x^2} \right) dx + (3y^2 e^x + x^2 e^y + \sin 2y) dy$
21. $\left(\frac{3y}{\cos^2 3x} + 3x^2 \cos 2y + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx + (\operatorname{tg} 3x - 2x^3 \sin 2y + e^{-y}) dy$
22. $\left(\frac{3y^4}{\sqrt{1-9x^2}} - \frac{x \ln(3y)}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx + \left(4y^3 \arcsin 3x - \frac{\sqrt{x^2+1}}{y} + \cos 3y \right) dy$
23. $\left(2 \cos 2xe^{-y} - 2e^{-2x} \operatorname{arctg} 2y \right) dx + \left(\frac{2e^{-2x}}{4y^2+1} - \frac{\sin 2x}{e^y} + \frac{1}{y} \right) dy$

$$24. \left(\frac{2e^{-3y}}{\cos^2 x} + 6e^{-2y} \sin 3x + 1 \right) dx + \left(-6e^{-3y} \operatorname{tg} x + 4e^{-2y} \frac{\cos 3x}{e^{2y}} - \frac{2}{\sqrt{4-y}} \right) dy$$

$$25. \left(\cos x \arctan(xy) + \frac{y \sin x}{1+x^2 y^2} \right) dx + \left(\frac{x \sin x}{1+x^2 y^2} + \sin^3 y \right) dy$$

$$26. \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y(2x-1)}{(x^2 - x)^2} \right) dx + \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

$$27. \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \ln x \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + ye^{-y^2} \right) dy$$

$$28. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x \ln x \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4}} \right) dy$$

$$29. \left(x\sqrt{x^2 + y^2} - x \cos x \right) dx + \left(y\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 - 3} \right) dy$$

$$30. \left(y \operatorname{arctg}(xy) + \frac{xy^2}{1+x^2 y^2} \right) dx + \left(x \operatorname{arctg}(xy) - \frac{1}{y(1+x^2 y^2)} \right) dy$$

Задача №4 (2 балла)

Покажите, что заданная функция удовлетворяет уравнению.

№	Уравнение	Функция
1	$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$	$z = \sqrt{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - xy}$
2	$xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$	$\Phi\left(\frac{z}{x}, 2x - y^2 - 4z\right) = 0$
3	$(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$	$\frac{1}{z} = \frac{x}{y^2 - x^2} + \varphi\left(\frac{x^2 - y^2}{y}\right)$
4	$e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$	$z = \frac{\ln y - x}{e^{-x} - y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right)$
5	$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$	$z = x \cdot \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{x^2 y}{3}$
6	$2x(y + z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y(2y + z^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z^3$	$\Phi\left(\frac{z^2 - 2y}{x}, \frac{yz}{x}\right) = 0$
7	$(x - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = \varphi\left(\frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z}\right)$
8	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$	$z = \sqrt{yx} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - yx$
9	$x(y^2 + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(x^2 + z) \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 - y^2)$	$\Phi(xyz, x^2 + y^2 - 2z) = 0$
10	$x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$	$z = \sqrt{2 \ln x - y + \varphi\left(\frac{x - y}{xy}\right)}$
11	$y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$	$\Phi(xe^{-z}, y^2 - 2x(z - 1)) = 0$
12	$(2xy - 1) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - 2x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x - zy)$	$\Phi(y + xz, x^2 + y^2 + z) = 0$
13	$-x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2y^2$	$z = \frac{\varphi(xy) - y^2}{x}$
14	$xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z$	$\Phi\left(\frac{x}{z}, y^4 - x^2 z^2\right) = 0$
15	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$	$z^2 = x^2 + f(x^2 - y^2)$
16	$2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z - x$	$z = y + \sqrt{x} \varphi\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right)$
17	$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x^2}\right)$

18	$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + 2zx \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = \varphi\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right)$
19	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$	$z = y \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$
20	$(x - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = z$	$\Phi\left(x + y + z, \frac{x - y + z}{z^2}\right) = 0$
21	$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$	$\Phi\left(xy, x + 3y + \frac{1}{z}\right) = 0$
22	$x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$	$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + f(yx^2)$
23	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right)$
24	$x(z + 2) \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + 2yz + 2y) \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + z$	$\Phi\left(\frac{x(z+1)}{z^2}, \frac{x(z+1)}{x+y}\right) = 0$
25	$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$	$z = yF\left(\frac{x}{y}\right) + xG\left(\frac{y}{x}\right)$
26	$(z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$u = \varphi(2x + (z - y)^2, y^2 - z^2)$
27	$z \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = y - x$	$\Phi(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$
28	$zx \frac{\partial z}{\partial x} - zy \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$	$\Phi(x^2 + y^2 + z^2, xy) = 0$
29	$\sqrt{x^2 + 1} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^4$	$z = -y^4 + f\left(y\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right)$
30	$zx \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$	$z = \sqrt{2x - 4y} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Задача 5. (2 балла)

На поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, найдите точки, в которых касательная плоскость к поверхности перпендикулярна заданному вектору $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, проходящих через найденные точки.

Таблица 2

№ вар.	Уравнение поверхности	a_x	a_y	a_z
1	2	3	4	5
1	$x^2 + 2y^2 - 4x + 2y + 2z + 1 = 0$	1	2	-1
2	$xz + 2x^2 - y^2 + 2yz + 2z^2 - 6 = 0$	5	0	7
3	$x^2 - 4z^2 + 2x - 2y + 6z + 2 = 0$	1	3	-1
4	$4x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 2z = 1$	1	-1	1
5	$3x^2 + y^2 - z^2 - 2yz + 4x - 1 = 0$	1	-2	0
6	$z^2 + 2x^2 - 4z + 2x - 2y + 1 = 0$	-1	1	2
7	$4xy + y^2 + 2z^2 + 6x - 7 = 0$	1	3	2
8	$y^2 - 4z^2 - 2y - x^2 - 2x = 1$	1	-1	1
9	$x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 6y - 6 = 0$	1	-1	-1
10	$4xy - 2x + 8y + 4z + 5 = 0$	2	2	-1
11	$2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 4yz + 2 = 0$	0	1	-2
12	$z^2 + 2xz + 2x^2 - y^2 - 2z + x - y = 1$	3	1	1
13	$y^2 + 3z^2 - 4xy + 4yz + 8 = 0$	2	5	5
14	$y^2 - 4x^2 + 2y - 2z + 6x + 2 = 0$	3	-1	1
15	$3x^2 - 4y^2 - 2xz + 6yz - 25 = 0$	0	1	5
16	$4yz - 2y + 8z + 4x + 5 = 0$	2	-1	2
17	$3x^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 2x + 4y = 1$	0	2	1
18	$x^2 - 2x - 4y^2 - z^2 - 2z = 1$	1	1	-1
19	$2y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + 2x + z + 26 = 0$	14	0	9
20	$4xz - 2z + 8y + 4x + 5 = 0$	-1	2	2
21	$4x^2 - z^2 + 2xz - 2yz - 4 = 0$	2	2	1
22	$z^2 - 4y^2 + 2z - 2x + 6y + 2 = 0$	-1	1	3
23	$y^2 + 2z^2 - 4y + 2z - 2x + 1 = 0$	2	-1	1

24	$16x^2 - y^2 + z^2 + 32x + 2y - 4z + 19 = 0$	1	5	-3
----	--	---	---	----

Задача 6. (2 балла)

Исследуйте функцию на локальные экстремумы.

№	
1	$z(x, y) = x^3 - 6x + y^3 - 3y$
2	$z(x, y) = 3y^2 - x^2 + 3y + 4x$
3	$z = x^2 + y^2 + y^3$
4	$z = 4y^3 - 2xy + x^2 + 3$
5	$z(x, y) = x^4 - xy + y^2$
6	$z(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
7	$z(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - yx$
8	$z(x, y) = x^2 + 4y^3 + 6xy + 2$
9	$z(x, y) = x + 3y + \frac{4}{x} + \frac{2z}{y}$
10	$z(x, y) = 12x - x^3 - y^2 - 2y + 1$
11	$z(x, y) = 6x - x^3 - 3xy - \frac{3}{2}y^2$
12	$z(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 12y$
13	$z(x, y) = 6xy - 2x^2y - xy^2$
14	$z(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + x^2y - y^2 - x^2$
15	$z(x, y) = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2$
16	$z(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$
17	$z(x, y) = 4x^3 - 2xy + y^2 + 5$
18	$z(x, y) = 3x^2 - y^3 + 3x + 4y$
19	$z(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$
20	$z(x, y) = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$
21	$z(x, y) = x^3 + y^2 + 6xy - 39x + 18y$
22	$z(x, y) = x^2y + xy^2 + xy$
23	$z(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$

24	$z(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
25	$z(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$