

Федеральное агентство по образованию

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

*Кафедра «Теоретическая механика»*

Одобрено  
методической комиссией по  
общенаучным дисциплинам

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО СТАТИКЕ И КИНЕМАТИКЕ**

Методические указания по курсу «Теоретическая механика»  
для студентов специальностей 657800 120100, 654500 180800,  
657900 210200, 651900 210100, 052400

Под редакцией  
д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С.

МОСКВА - 2005

Авторский коллектив: Л.В.Божкова, В.Г.Рябов, Г.И.Норицына, В.К.Петров, А.И.Зубков, В.В.Даншин.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С..

Расчетно-графические работы по статике и кинематике. Методические указания по курсу "Теоретическая механика" для студентов специальностей 657800 120100, 654500 180800, 657900 210200, 052400.

В настоящий сборник включены три задания по разделу «статика» и три задания по разделу «кинематика». Каждое задание содержит 30 вариантов, часть схем заимствована из "Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике" под общей редакцией проф. А.А.Яблонского. Приведены примеры выполнения всех заданий с пояснениями.

## ЗАДАНИЕ С-2

### Определение реакций опор составной конструкции.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С заданной составной конструкции. Схемы конструкции представлены на рис. С-2.1 – С-2.5, а необходимые данные - в таблице С-2.

Таблица С-2

№№ п/п	$P$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м	$a$ , м	$\alpha$ , град.	$\beta$ , град.
1	10	5	1,4	1,0	45	30
2	12	8	1,0	2,0	60	15
3	15	4	0,8	1,5	30	15
4	14	6	1,8	1,0	75	30
5	20	4	1,4	2,0	60	15
6	16	10	1,2	1,0	30	15
7	18	8	1,6	1,5	60	30
8	20	12	2,2	1,0	75	30
9	22	6	1,2	2,0	45	30
10	30	8	2,4	1,5	30	15
11	10	5	1,4	1,0	45	30
12	12	8	1,0	2,0	60	15
13	15	4	0,8	1,5	30	15
14	14	6	1,8	1,0	75	30
15	20	4	1,4	2,0	60	15
16	16	10	1,2	1,0	30	15
17	18	8	1,6	1,5	60	30
18	20	12	2,2	1,0	75	30
19	22	6	1,2	2,0	45	30
20	30	8	2,4	1,5	30	15
21	10	5	1,4	1,0	45	30
22	12	8	1,0	2,0	60	15
23	15	4	0,8	1,5	30	15
24	14	6	1,8	1,0	75	30
25	20	4	1,4	2,0	60	15
26	16	10	1,2	1,0	30	15
27	18	8	1,6	1,5	60	30
28	20	12	2,2	1,0	75	30
29	22	6	1,2	2,0	45	30
30	30	8	2,4	1,5	30	15

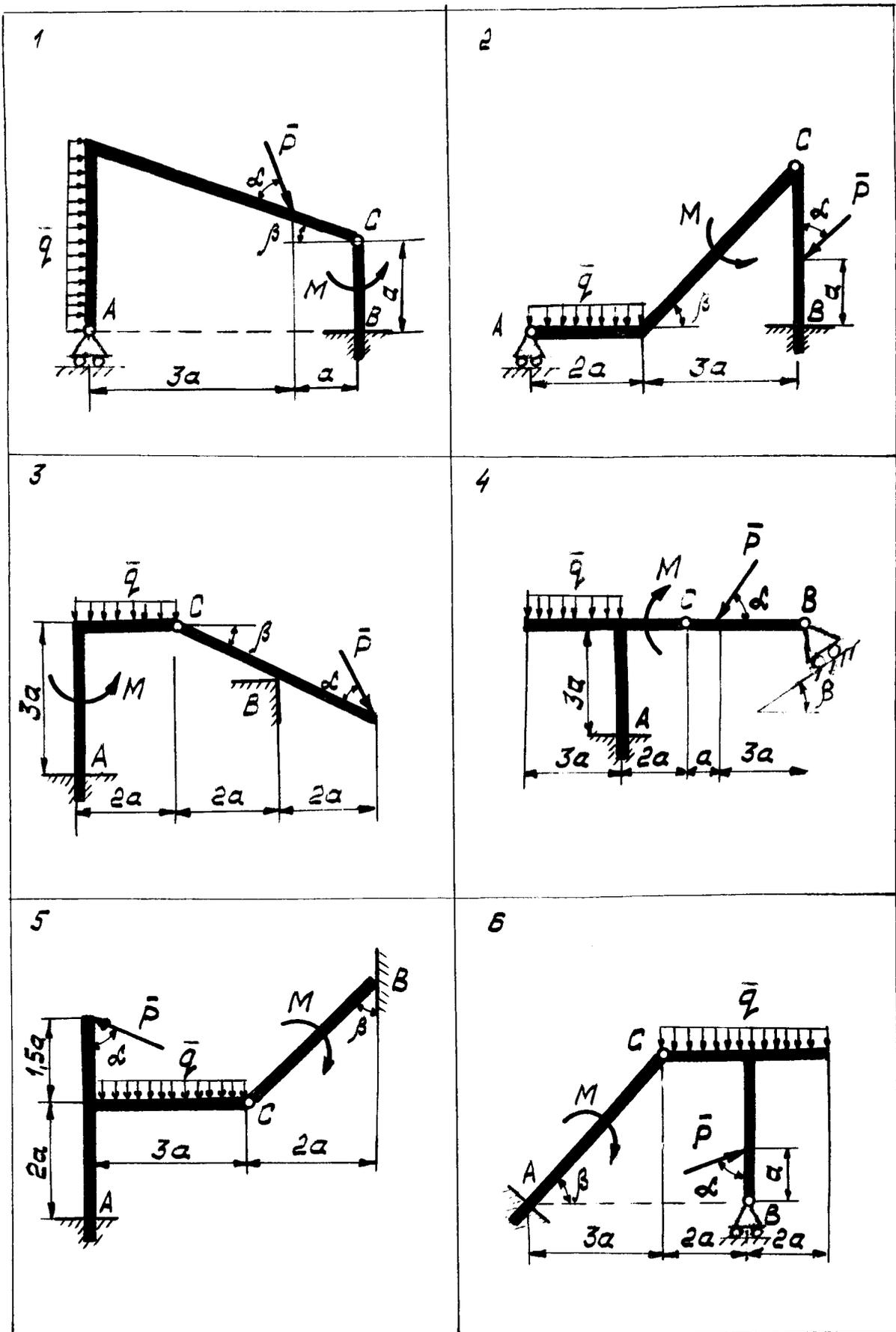


Рис. С-2.1

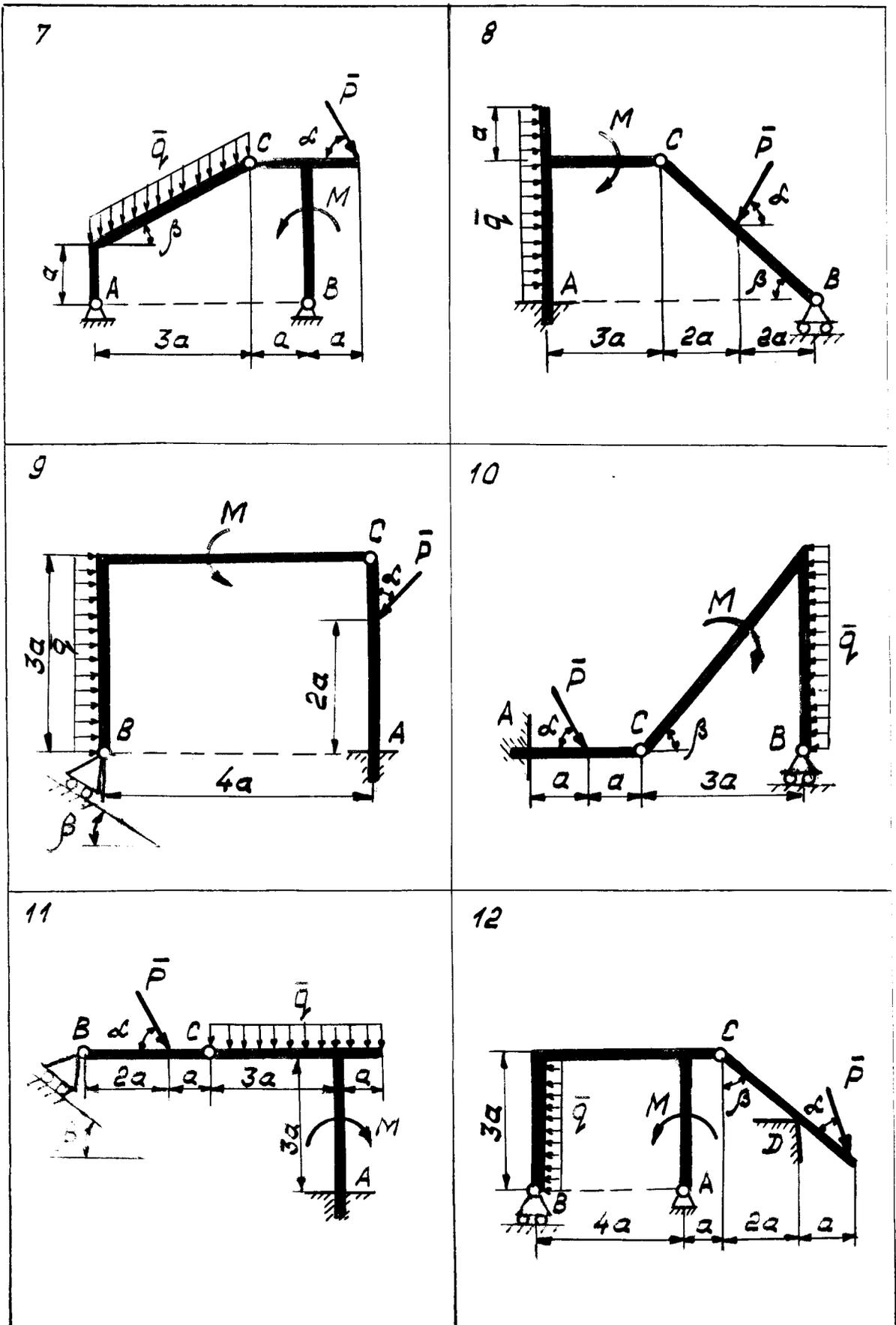


Рис. С-2.2

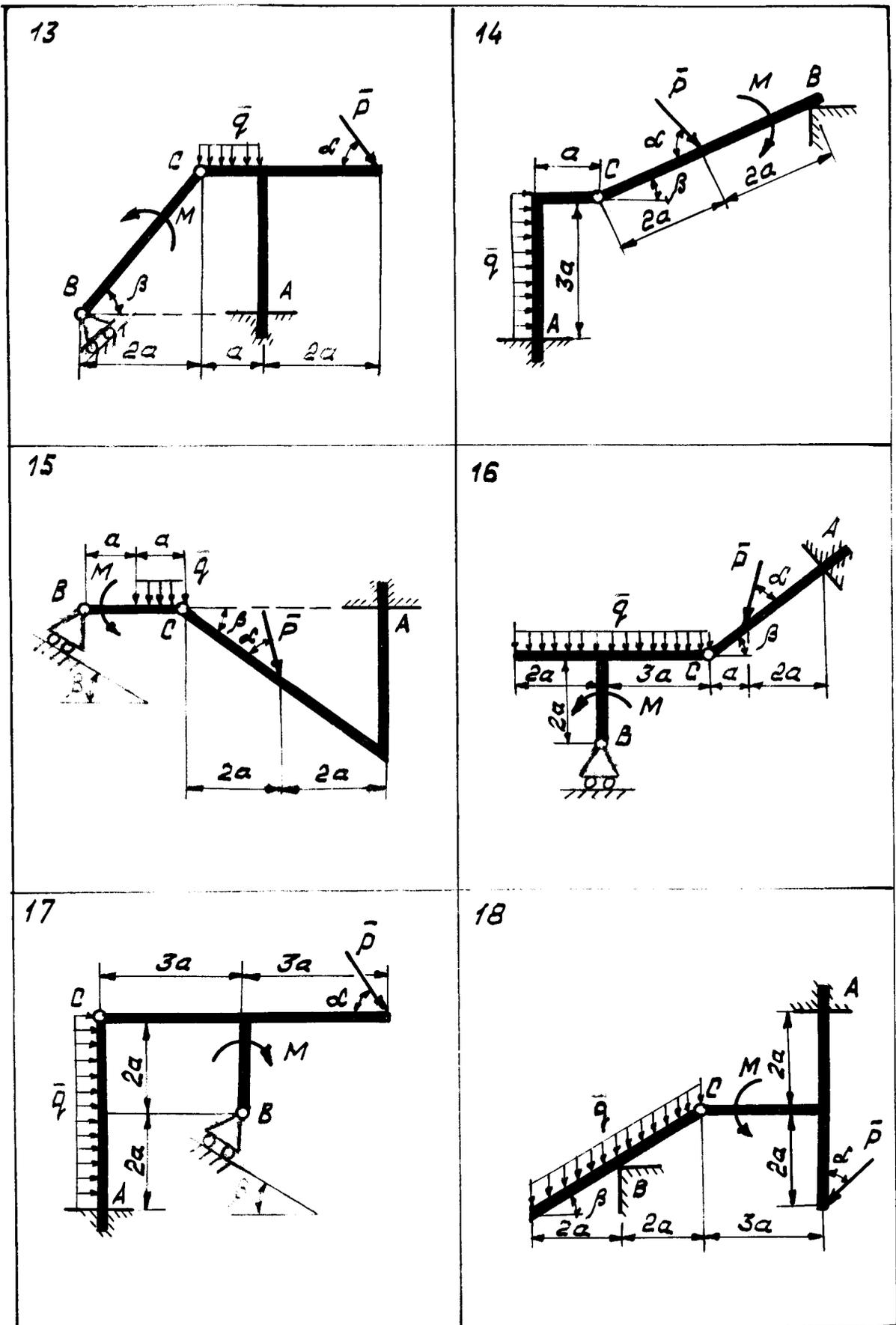


Рис. С-2.3

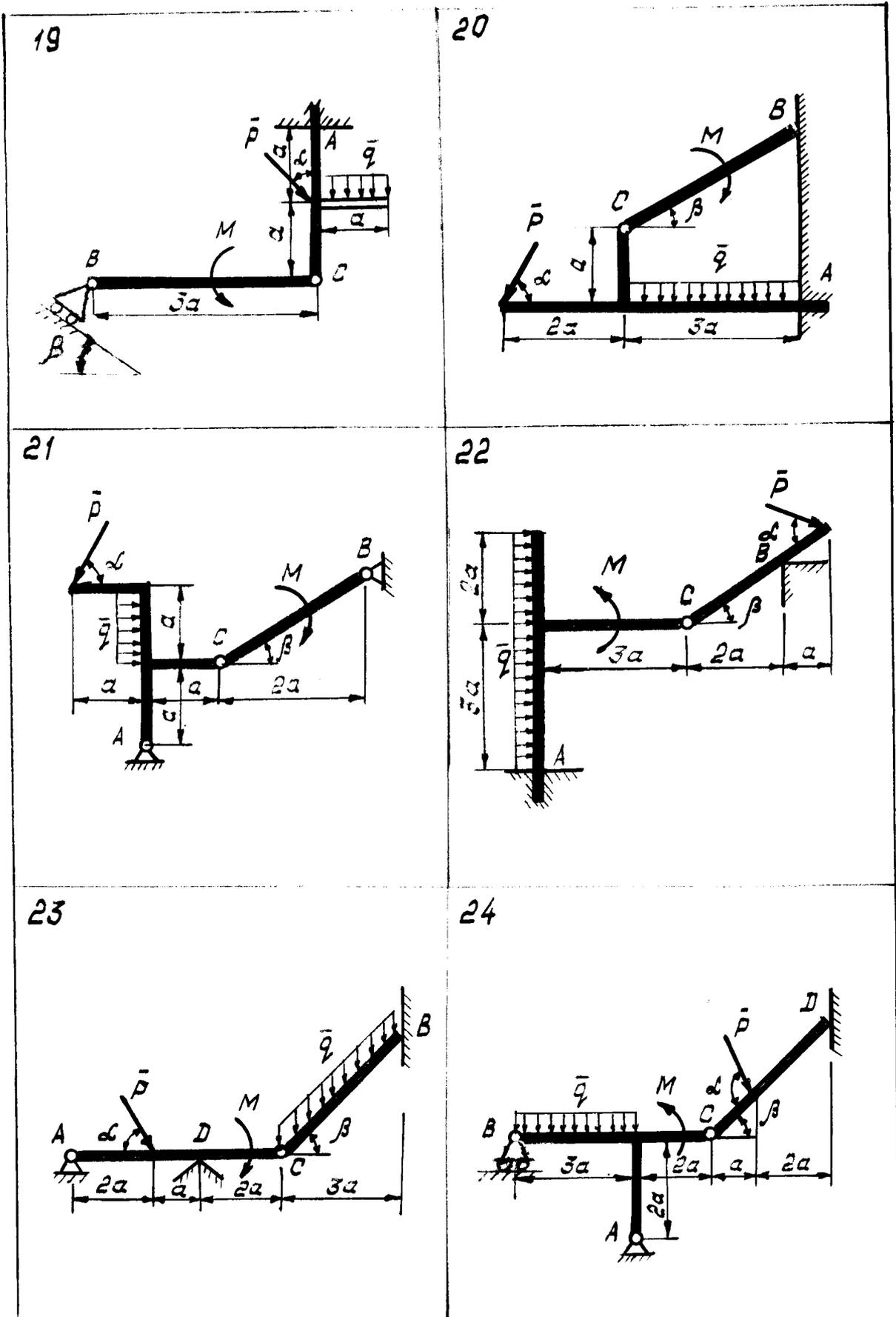


Рис. С-2.4

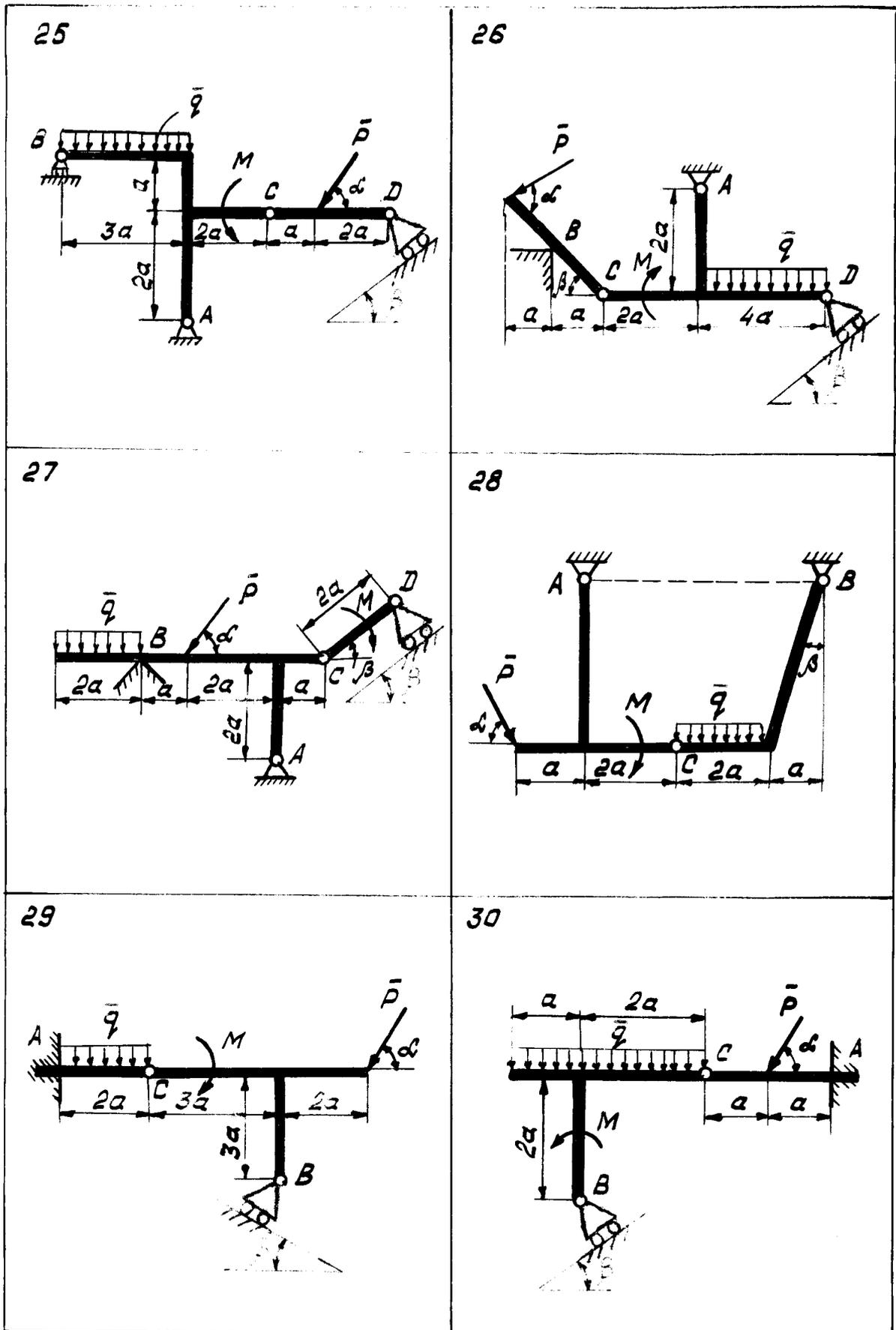


Рис. С-2.5

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис. С-2.6а);  $P = 8 \text{ кН}$ ;  $M = 20 \text{ кНм}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ . Определить реакции опор А и В и давление в промежуточном шарнире С.

### РЕШЕНИЕ

Данная конструкция состоит из двух тел, сочлененных шарниром С. Задачу можно решить двумя способами.

**Первый способ.** Мысленно освобождаемся от связей, наложенных на каждое из тел, прикладывая при этом соответствующие реакции. Рассматриваем системы уравновешивающихся сил, приложенных к каждому телу в отдельности.

На первое тело (рис. С-2.6б) действуют: сила  $\vec{P}$ , пара сил с моментом  $M$ , реакция опоры А и давление балки CD в точке С. Реакция жесткой заделки А представляется силами  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  и парой с моментом  $M_A$ , а давление балки CD - составляющими  $\vec{X}_C$  и  $\vec{Y}_C$ . Указанные силы расположены на плоскости произвольным образом, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad X_A + X_C - P \cdot \cos \alpha = 0 ; \quad (1)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad Y_A + Y_C - P \cdot \sin \alpha = 0 ; \quad (2)$$

$$\sum_K m_0(\vec{F}_K) = 0 ; \quad X_A \cdot OA + M_A + Y_C \cdot OC - M + P \cdot OC = 0 ; \quad (3)$$

где  $OA = 2 \cdot a = 2 \text{ м}$ ,  $OC = 1.5 \cdot a = 1.5 \text{ м}$ ,

$$OK = a \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87 \text{ м} .$$

На второе тело (рис. С-2.6в) действуют: распределенные силы интенсивности  $q$ , реакция опоры В и давление первого тела в точке С. Равномерно распределенные силы заменяем их равнодействующей  $\vec{Q}$ , приложенной в середине участка CD и направленной по вертикали вниз. Ее модуль определяется по формуле:

$$Q = q \cdot CD = 2 \cdot 3,5 = 7 \text{ кН}.$$

Реакция  $\vec{N}_B$  опоры В перпендикулярна к балке CD, а давление первого тела представляется составляющими  $\vec{X}'_C$  и  $\vec{Y}'_C$ . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия

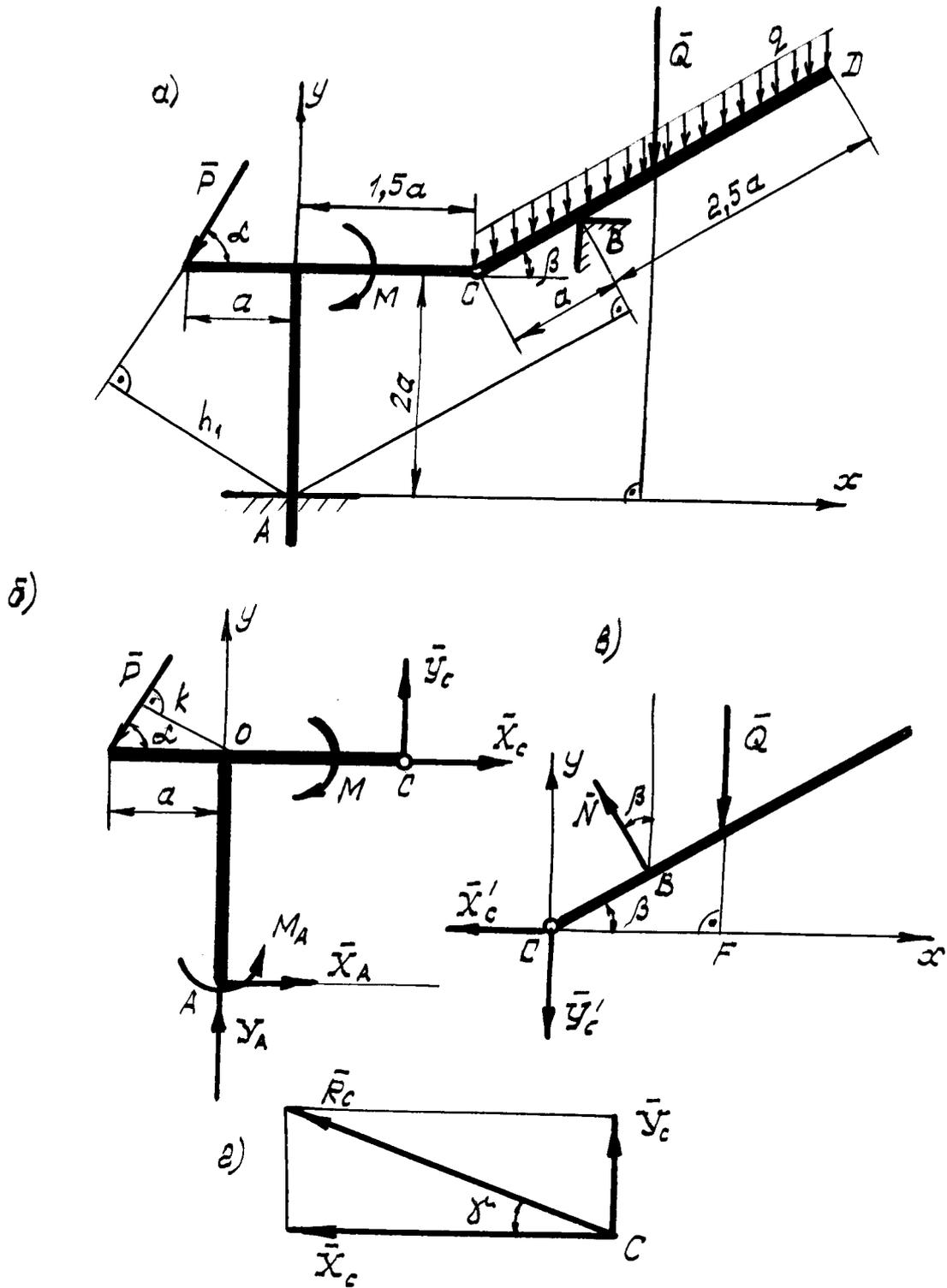


Рис. С-2.6

$$\begin{aligned} X'_C = X_C & \quad \text{и} \quad \dot{X}'_C \uparrow \downarrow \dot{X}_C, \\ Y'_C = Y_C & \quad \text{и} \quad \dot{Y}'_C \uparrow \downarrow \dot{Y}_C. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к балке CD имеют вид:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad -X'_C - N_B \cdot \sin b = 0 ; \quad (4)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad -Y'_C + N_B \cdot \cos b - Q = 0 ; \quad (5)$$

$$\sum_K m_C(\dot{F}_K) = 0 ; \quad N_B \cdot CB - Q \cdot CF = 0 ; \quad (6)$$

где  $CB = a = 1 \text{ м}$ ,  $CF = \frac{CD}{2} \cdot \cos b = \frac{3.5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.52 \text{ м}$ .

Уравнения равновесия (1)-(6) образуют полную систему уравнений, откуда определяются все шесть неизвестных величин:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $N_B$ .

Из уравнения (6) находим

$$N_B = Q \cdot \frac{CF}{CB} = 7 \cdot \frac{1.52}{1} = 10.64 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$Y'_C = N_B \cdot \cos b - Q = 10.64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 2.21 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4)

$$X'_C = -N_B \sin b = -10.64 \cdot \frac{1}{2} = -5.32 \text{ кН.}$$

Отрицательный знак указывает, что в действительности сила  $\dot{X}'_C$  (соответственно и  $\dot{X}_C$ ) будет направлена в сторону противоположную принятой. Истинные направления сил  $\dot{X}_C$  и  $\dot{Y}_C$ , представляющих собой составляющие давления  $\dot{R}_C$  балки CD на первое тело конструкции, показаны на рис. С-2.6г.

Модуль  $\dot{R}_C$  и угол определяются по формулам:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{(5.32)^2 + (2.21)^2} = 5.76 \text{ кН,}$$

$$g = \arctg \frac{|Y_C|}{|X_C|} = \arctg 0.4154 = 22^\circ 34'.$$

Далее из уравнения (1) находим

$$X_A = P \cdot \cos a - X_C = 8 \cdot \frac{1}{2} + 5.32 = 9.32 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = P \cdot \sin a - Y_C = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2.21 = 4.72 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} M_A &= -X_A \cdot OA - Y_C \cdot OC + M - P \cdot OK = \\ &= -9.32 \cdot 2 - 2.21 \cdot 1.5 + 20 - 8 \cdot 0.87 = -8.92 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак указывает, что направление вращения пары в опоре А в действительности противоположно выбранному.

**Второй способ.** Рассматриваем систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции (рис.С-2.6а). На конструкцию действуют: сила  $\dot{P}$ , пара сил с моментом  $M$ , равнодействующая  $\dot{Q}$  распределенных сил и реакции опор А и В ( $\dot{X}_A, \dot{Y}_A, \dot{M}_A, \dot{N}_B$ ). При рассмотрении всей конструкции в целом давления в шарнире С ( $\dot{X}_C, \dot{Y}_C$  и  $\dot{X}'_C, \dot{Y}'_C$ ) не рассматриваются.

Уравнениями равновесия для указанной системы сил будут:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad X_A - P \cdot \cos a - N_B \cdot \sin b = 0 ; \quad (7)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad Y_A - P \cdot \sin a + N_B \cdot \cos b - Q = 0 ; \quad (8)$$

$$\sum_K m_A(\dot{F}_K) = 0 ; \quad M_A + P \cdot h_1 - M + N_B \cdot h_2 - Q \cdot h_3 = 0 ; \quad (9)$$

где  $h_1 = a \cdot \sin a + 2 \cdot a \cdot \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.87 \text{ м},$

$$h_2 = a + 1.5a \cdot \cos b + 2a \cdot \sin b = 1 + 1.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.30 \text{ м},$$

$$h_3 = 1.5a + 1.75a \cdot \cos b = 1.5 + 1.75 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.02 \text{ м}.$$

Далее следует рассматривать систему уравнивающих сил, приложенных к одному из тел конструкции, при этом целесообразно выбрать ту часть конструкции, на которую действует меньшее число сил. В данном случае рассматриваем систему сил, действующих на балку CD, условия равновесия которой выражаются уравнениями (4) – (6).

Таким образом, для определения шести неизвестных величин будем иметь систему уравнений (4) – (9).

В заключении отметим, что уравнения (7) – (9) могут быть использованы для проверки результатов решения задачи первым способом, а уравнения (1) – (3) - вторым способом.

### ЗАДАНИЕ С-3

**Приведение пространственной системы сил к заданному центру.**

Определить главный вектор  $\mathbf{R}$  и главный момент  $\mathbf{M}_O$  заданной системы сил относительно центра О. Схемы вариантов приведены на рис. С-3.1 – С-3.5, необходимые данные - в таблице С-3.

Таблица С-3.

№№ п/п	$a=OE,$ м	$b=OL,$ м	$c=OB,$ м	$F_1,$ Н	$F_2,$ Н	$F_3,$ Н	$F_4,$ Н	$F_5,$ Н	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$M,$ Нм
1	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
2	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
3	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
4	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
5	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
6	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
7	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
8	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
9	15	20	15	33	46	44	46	55	60	30	10
10	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20
11	45	60	45	12	54	16	54	20	30	60	30
12	60	80	60	15	58	20	58	25	15	75	40
13	15	20	15	18	17	24	17	30	60	30	10
14	30	40	30	21	19	28	19	35	75	15	20
15	45	60	45	24	21	32	21	40	30	60	30
16	60	80	60	27	23	36	23	45	15	75	40
17	15	20	15	30	25	40	25	50	60	30	10
18	30	40	30	33	27	44	27	55	75	15	20
19	45	60	45	36	29	48	29	60	30	60	30
20	60	80	60	9	31	12	31	15	15	75	40
21	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
22	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
23	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
24	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
25	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
26	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
27	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
28	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
29	15	20	15	33	45	44	46	55	60	30	10
30	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20

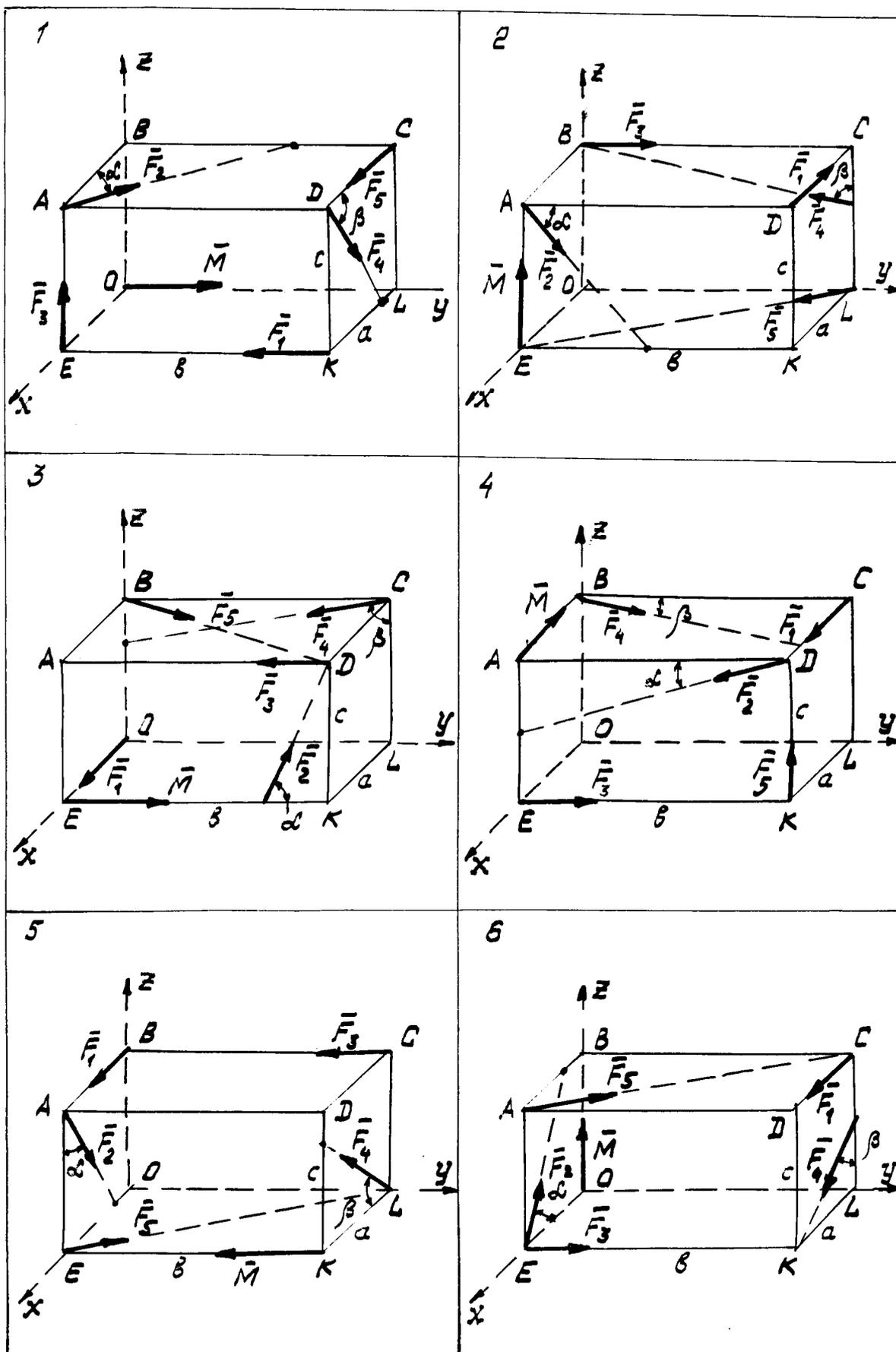


Рис. С-3.1

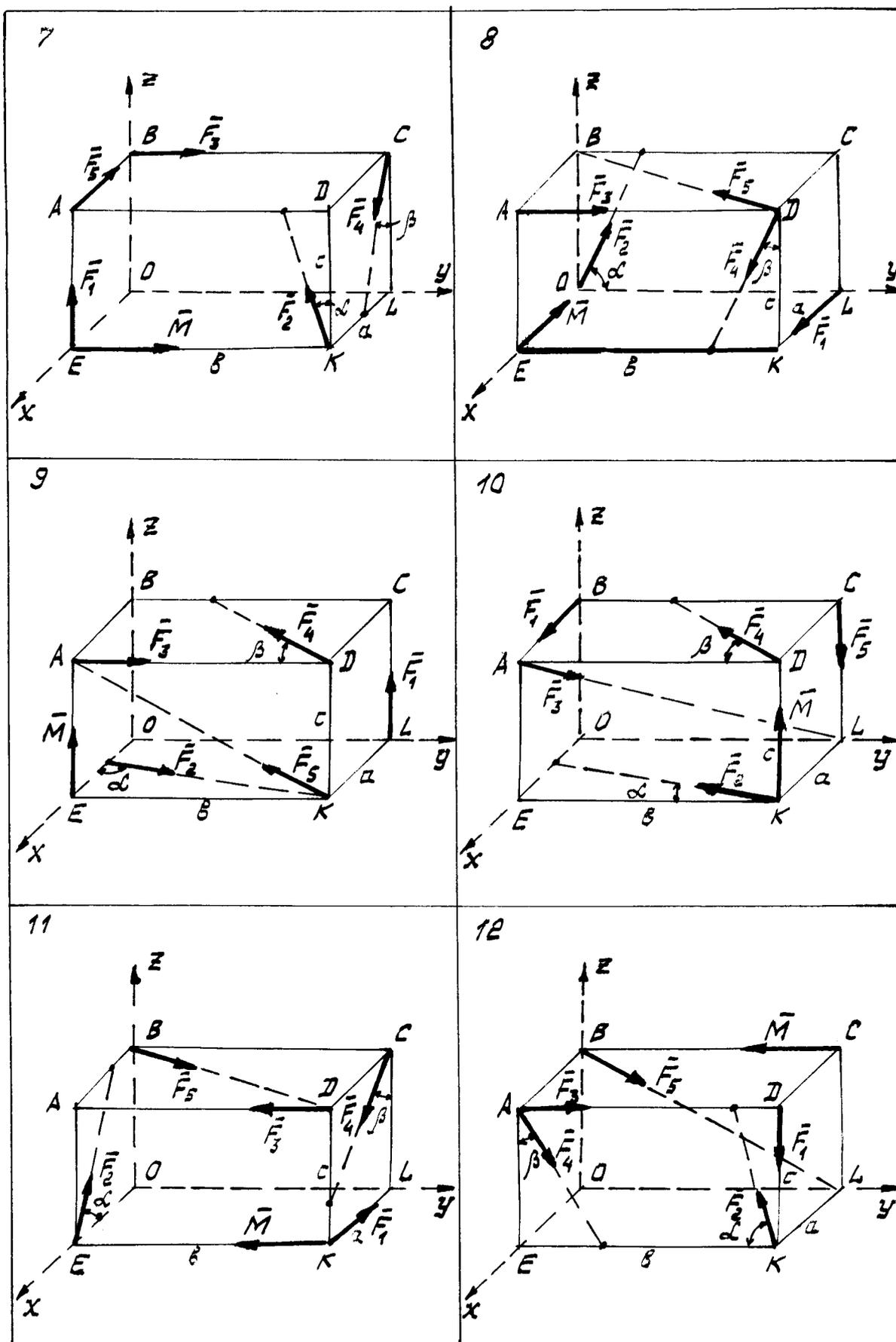


Рис. С-3.2

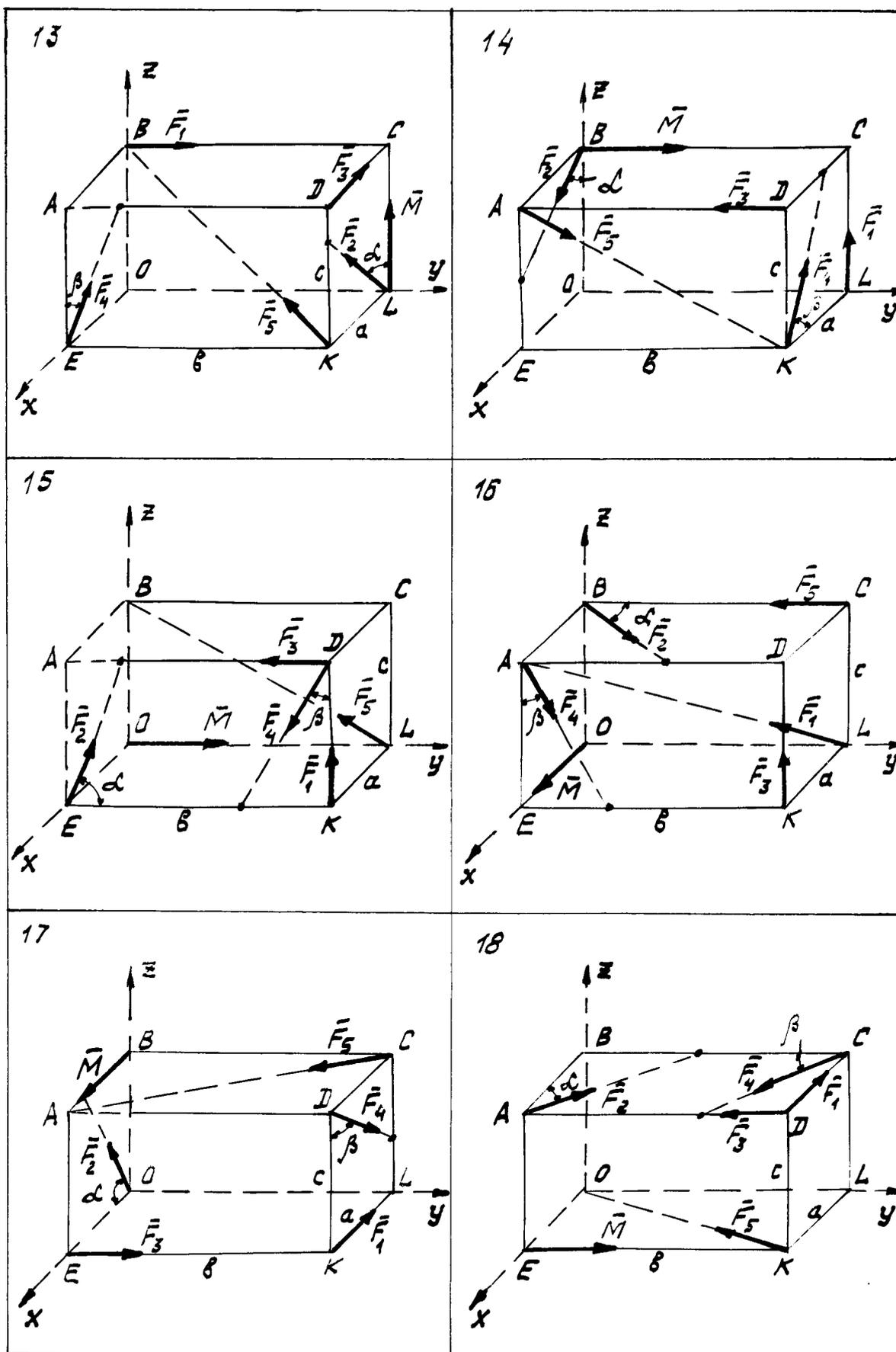


Рис. С-3.3

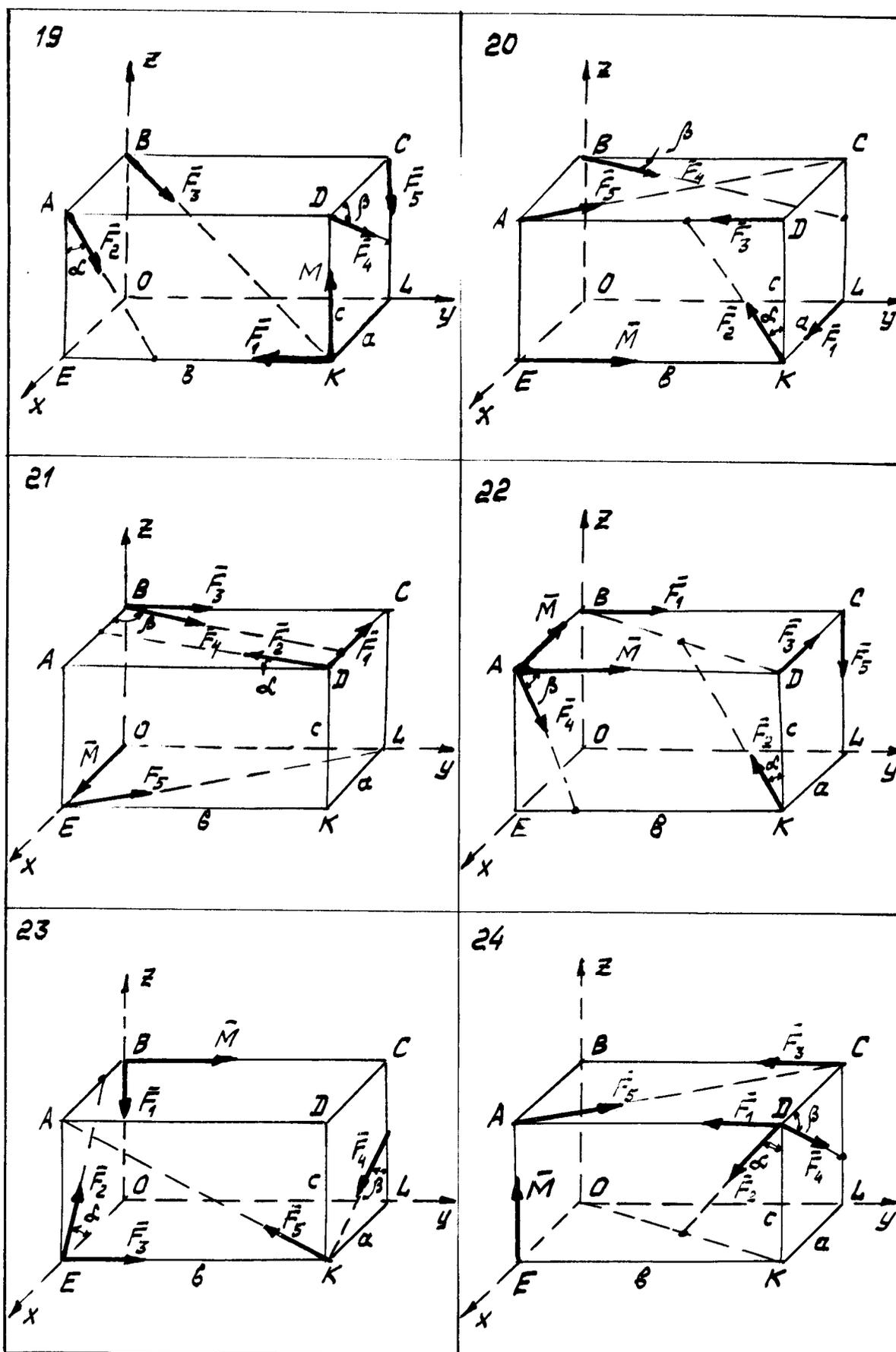


Рис. С-3.4

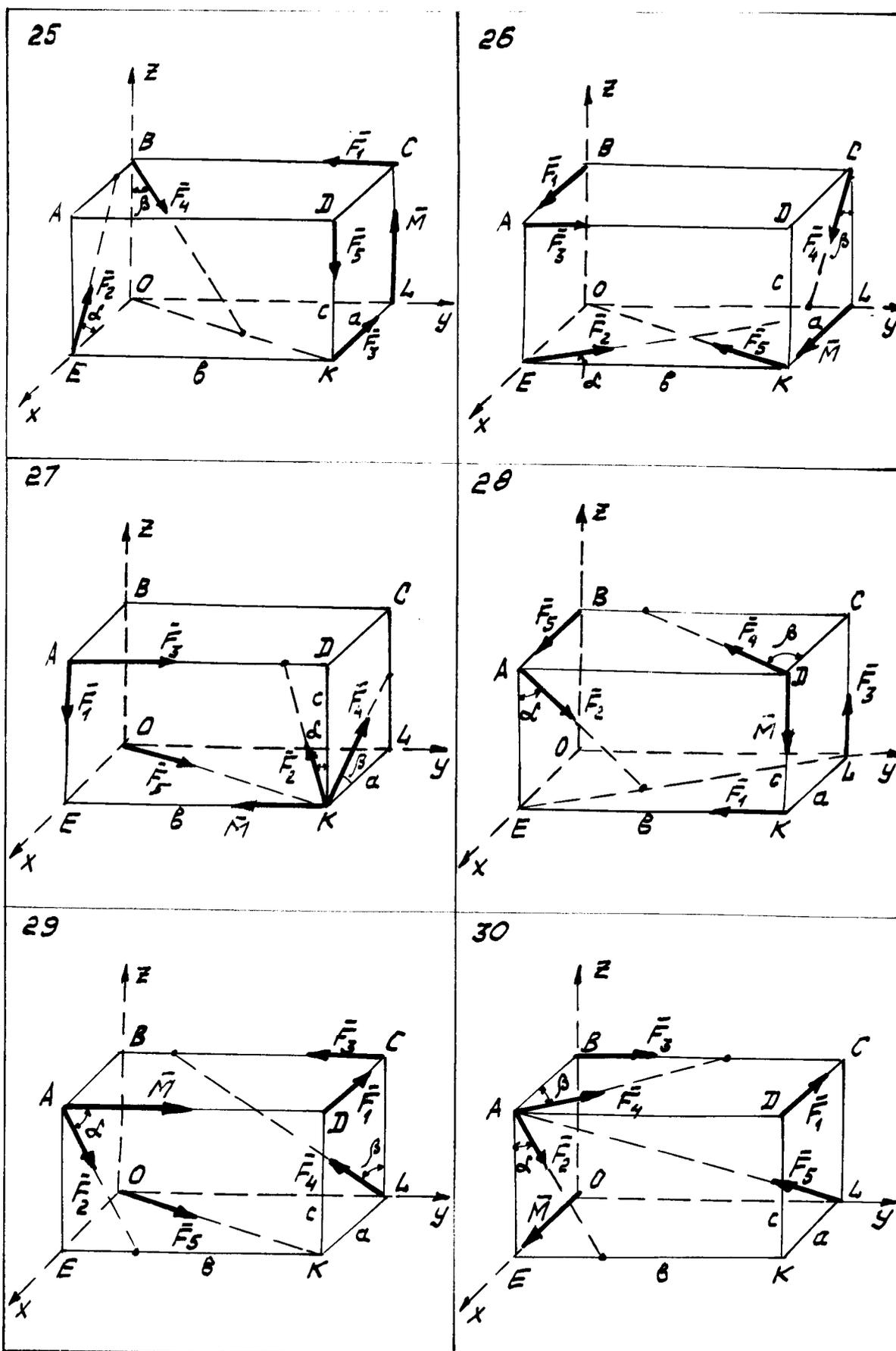


Рис. С-3.5

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано:  $F_1 = 15 \text{ Н}$ ;  $F_2 = 60 \text{ Н}$ ;  $F_3 = 30 \text{ Н}$ ;  $F_4 = 20 \text{ Н}$ ;  $F_5 = 25 \text{ Н}$ ;  
 $M = 10 \text{ Нм}$ ;  $a = 0.5 \text{ м}$ ;  $b = 0.4 \text{ м}$ ;  $c = 0.3 \text{ м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$   
 (рис. С-3.6а).

### РЕШЕНИЕ

Прежде, чем приступить к определению главного вектора  $\mathbf{R}$  заданной системы сил и ее главного момента  $M_0$  относительно начала координат, введем углы  $\gamma$ ,  $\varphi$  и разложим силу  $\mathbf{F}_4$  на две составляющие:  $\mathbf{F}'_4$  – на плоскости  $ХОУ$  и  $\mathbf{F}_4^{(3)}$  – перпендикулярно к ней (рис.С-3.6а).

$$F'_4 = F_4 \cdot \sin b = 10 \quad \text{Н}, \quad F_4^{(3)} = F_4 \cdot \cos b = 17.32 \quad \text{Н}.$$

Проекцию силы  $\mathbf{F}_4$  на ось найдем, как сумму проекций составляющих  $\mathbf{F}'_4$  и  $\mathbf{F}_4^{(3)}$ , а ее момент относительно оси, согласно теореме Вариньона, будет равен сумме моментов  $\mathbf{F}'_4$  и  $\mathbf{F}_4^{(3)}$  относительно этой же оси.

Для проекций главного вектора на координатные оси получим выражения:

$$R_x = \sum_{k=1}^5 F_{kx} = -F_1 + F_2 \cdot \cos j + F'_4 \cdot \sin g, \quad (1)$$

$$R_y = \sum_{k=1}^5 F_{ky} = F_3 \cdot \cos a - F'_4 \cdot \cos g - F_5, \quad (2)$$

$$R_z = \sum_{k=1}^5 F_{kz} = -F_2 \cdot \sin j + F_3 \cdot \sin a + F_4^{(3)}, \quad (3)$$

где

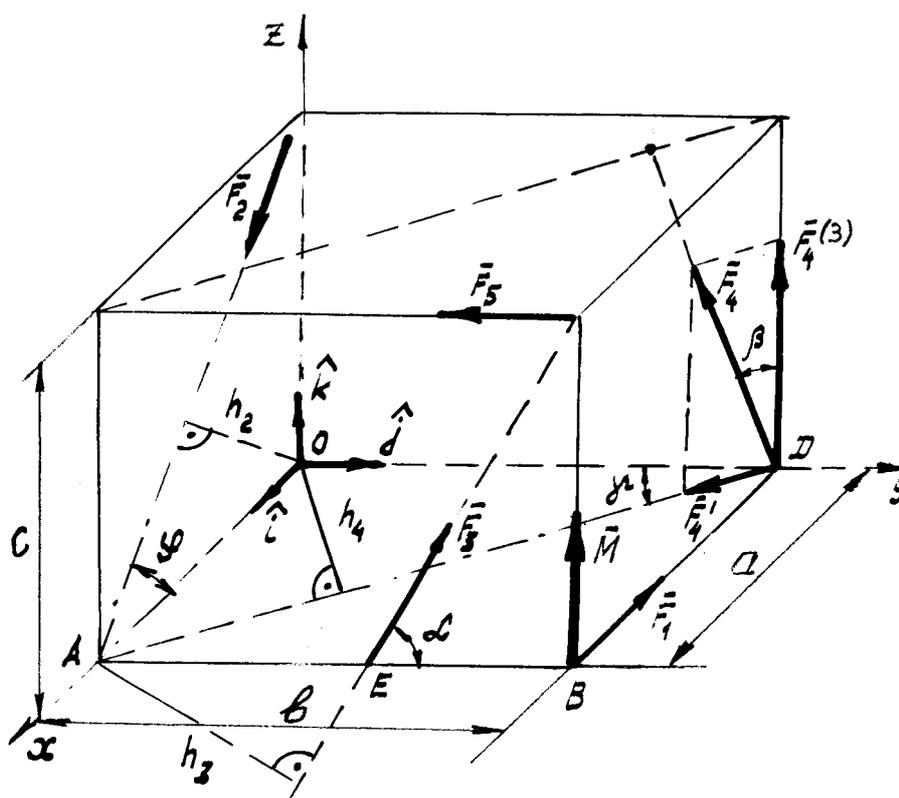
$$\sin g = \frac{OA}{AD} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.78, \quad \cos g = \frac{OD}{AD} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.62,$$

$$\sin j = \frac{ON}{AN} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.51, \quad \cos j = \frac{OA}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.86.$$

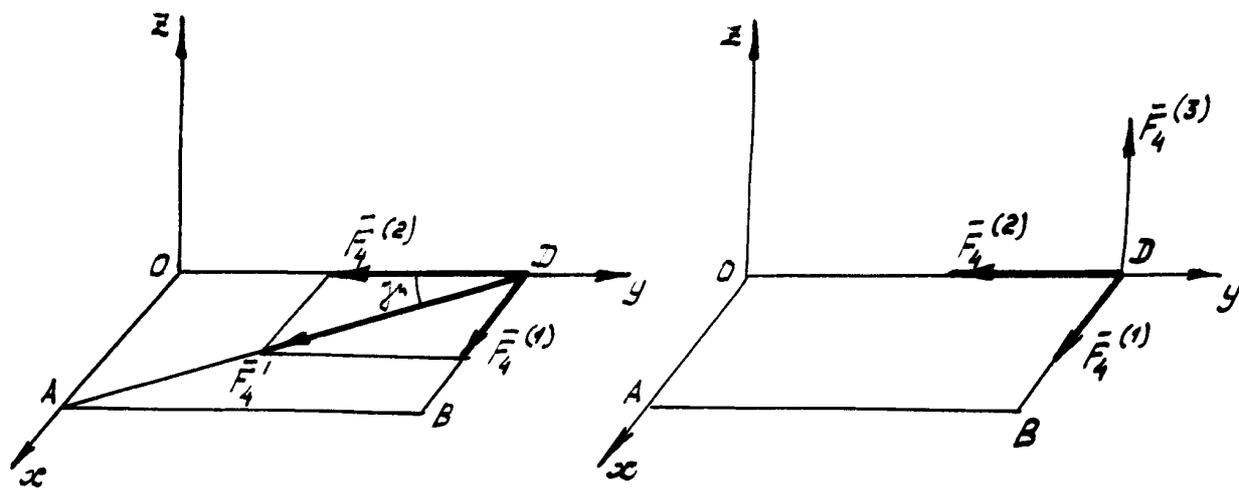
Подставив в (1) – (3) выражения для  $\mathbf{F}'_4$  и  $\mathbf{F}_4^{(3)}$ , заданные значения  $F_1, F_2, \dots, F_5, \alpha, \beta$ , а также найденные значения тригонометрических функций углов  $\varphi$  и  $\gamma$ , получим

$$R_x = 44.27 \quad \text{Н}, \quad R_y = -16.25 \quad \text{Н}, \quad R_z = 12.31 \quad \text{Н}.$$

Модуль главного вектора



a)



б)

в)

Рис. С-3.6

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(44.27)^2 + (-16.25)^2 + (12.31)^2} = 48.74 \text{ Н.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(R, i) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{R} = \frac{R_x}{R} = \frac{44.27}{48.74} = 0.91 \text{ ,}$$

$$\cos(R, j) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{R} = \frac{R_y}{R} = \frac{-16.25}{48.74} = -0.33 \text{ ,}$$

$$\cos(R, k) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{R} = \frac{R_z}{R} = \frac{12.305}{48.74} = 0.25 \text{ .}$$

Проекции главного момента системы сил относительно начала координат на координатные оси равны суммам моментов всех сил относительно соответствующих координатных осей. Поэтому, будем иметь:

$$M_{ox} = M_x = \sum_{k=1}^5 m_x(F_k) = F_3 \cdot h_3 + F_4^{(3)} \cdot b + F_5 \cdot c \text{ ,} \quad (4)$$

$$M_{oy} = M_y = \sum_{k=1}^5 m_y(F_k) = F_2 \cdot h_2 - F_3 \cdot \sin a \cdot a \text{ ,} \quad (5)$$

$$M_{oz} = M_z = \sum_{k=1}^5 m_z(F_k) = F_1 \cdot b + F_3 \cdot \cos a \cdot a - F_4' \cdot h_4 - F_5 \cdot a + M \text{ ,} \quad (6)$$

Из рис. С-3.6

$$h_2 = a \cdot \sin j = 0.5 \cdot 0.51 = 0.26 \text{ м,}$$

$$h_3 = AE \cdot \sin a = (AB - BE) \cdot \sin a =$$

$$= (a - c \cdot \operatorname{ctg} a) \cdot \sin a = (0.5 - 0.3 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ) \cdot \sin 60^\circ = 0.28 \text{ м,}$$

$$h_4 = b \cdot \sin g = 0.4 \cdot 0.78 = 0.31 \text{ м.}$$

Подставив в (4) – (6) числовые значения всех необходимых величин, получим:

$$M_{ox} = 22.92 \text{ Нм,} \quad M_{oy} = 2.45 \text{ Нм,} \quad M_{oz} = 7.87 \text{ Нм}$$

Модуль главного момента

$$M_o = \sqrt{(M_{ox})^2 + (M_{oy})^2 + (M_{oz})^2} = \sqrt{22.92^2 + 2.45^2 + 7.87^2} = 24.36 \text{ Н·м.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(M_o, i) = \frac{M_{ox}}{M_o} = \frac{22.92}{24.36} = 0.941,$$

$$\cos(M_o, j) = \frac{M_{oy}}{M_o} = \frac{2.45}{24.36} = 0.101,$$

$$\cos(M_o, k) = \frac{M_{oz}}{M_o} = \frac{7.87}{24.36} = 0.323.$$

**Примечание.** При вычислении моментов сил относительно координатных осей во многих случаях целесообразно разлагать силу на составляющие, параллельные осям координат, а затем применять теорему Вариньона. Проиллюстрируем этот метод на примере вычисления момента силы  $\dot{F}_4$  относительно оси  $Oz$ . Выше показано разложение силы  $\dot{F}_4$  на две составляющие  $\dot{F}'_4$  и  $\dot{F}_4^{(3)}$  ( $\dot{F}_4 = \dot{F}'_4 + \dot{F}_4^{(3)}$ ). Далее разложим силу  $\dot{F}'_4$ , расположенную в координатной плоскости  $Oxy$  на две составляющие  $\dot{F}_4^{(1)}$  и  $\dot{F}_4^{(2)}$ , параллельные соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. С-3.6б). Следовательно,  $\dot{F}'_4 = \dot{F}_4^{(1)} + \dot{F}_4^{(2)}$ , а  $\dot{F}_4 = \dot{F}_4^{(1)} + \dot{F}_4^{(2)} + \dot{F}_4^{(3)}$ , то-есть сила  $\dot{F}_4$  разложена на составляющие  $\dot{F}_4^{(1)}$ ,  $\dot{F}_4^{(2)}$ ,  $\dot{F}_4^{(3)}$ , параллельные осям координат (рис. С-3.6в). Модули сил  $\dot{F}_4^{(1)}$  и  $\dot{F}_4^{(2)}$  легко вычисляются:

$$F_4^{(1)} = F'_4 \cdot \sin g = F_4 \cdot \sin b \cdot \sin g = 7.8 \text{ Н},$$

$$F_4^{(2)} = F'_4 \cdot \cos g = F_4 \cdot \sin b \cdot \cos g = 6.2 \text{ Н},$$

На основании теоремы Вариньона получим

$$M_z(\dot{F}_4) = M_z(\dot{F}_4^{(1)}) + M_z(\dot{F}_4^{(2)}) + M_z(\dot{F}_4^{(3)}) ,$$

$$M_z(\dot{F}_4^{(1)}) = -F_4^{(1)} \cdot AB = -3.12 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_z(\dot{F}_4^{(2)}) = M_z(\dot{F}_4^{(3)}) = 0 .$$

Следовательно,  $M_z(\dot{F}_4) = -3.12 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

## ЗАДАНИЕ С-5

### Равновесие тел с учетом сил трения

Определить, при каких значениях силы  $\vec{F}$  возможно равновесие конструкции, если коэффициент трения скольжения между тормозной колодкой и касающимся с ней телом равен  $f$ . Шириной колодки пренебречь, считая контакт точечным. Определить также реакции опор  $O, A, B, C, D$ , соответствующие предельному состоянию равновесия конструкции. Трением в шарнирах и опорах пренебречь. Схемы вариантов приведены на рис.26-30, а необходимые данные - в таблице 5.

Таблица 5

№№ п/п	$P$ , кН	$Q$ , кН	$a$ , м	$b$ , м	$l$ , м	$\alpha$ , °	$f$
1	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	45	0.10
2	0.2	0.6	0.6	0.4	—	30	0.20
3	0.3	0.8	0.8	0.2	0.06	60	0.25
4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
5	0.5	0.9	0.3	0.7	0.04	60	0.10
6	0.6	1.0	0.2	0.6	—	45	0.25
7	0.4	1.2	0.7	0.2	0.06	30	0.20
8	0.3	1.4	0.8	0.4	—	60	0.15
9	0.5	1.6	0.5	0.3	—	45	0.20
10	0.3	1.2	0.6	0.3	0.08	30	0.25
11	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	45	0.10
12	0.2	0.6	0.6	0.4	—	30	0.20
13	0.3	0.8	0.8	0.2	—	60	0.25
14	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
15	0.5	0.9	0.3	0.7	—	60	0.10
16	0.6	1.0	0.2	0.6	0.05	45	0.25
17	0.4	1.2	0.7	0.2	0.9	30	0.20
18	0.3	1.4	0.8	0.4	0.02	60	0.15
19	0.5	1.6	0.5	0.3	0.08	45	0.20
20	0.3	1.2	0.6	0.3	—	30	0.25
21	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	—	0.10
22	0.2	0.6	0.6	0.4	0.04	—	0.20
23	0.3	0.8	0.8	0.2	0.06	45	0.25
24	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
25	0.5	0.9	0.3	0.7	0.04	30	0.10
26	0.6	1.0	0.2	0.6	0.05	60	0.25
27	0.4	1.2	0.7	0.2	0.06	45	0.20
28	0.3	1.4	0.8	0.4	0.02	30	0.15
29	0.5	1.6	0.5	0.3	0.08	60	0.20
30	0.3	1.2	0.6	0.3	0.08	45	0.25

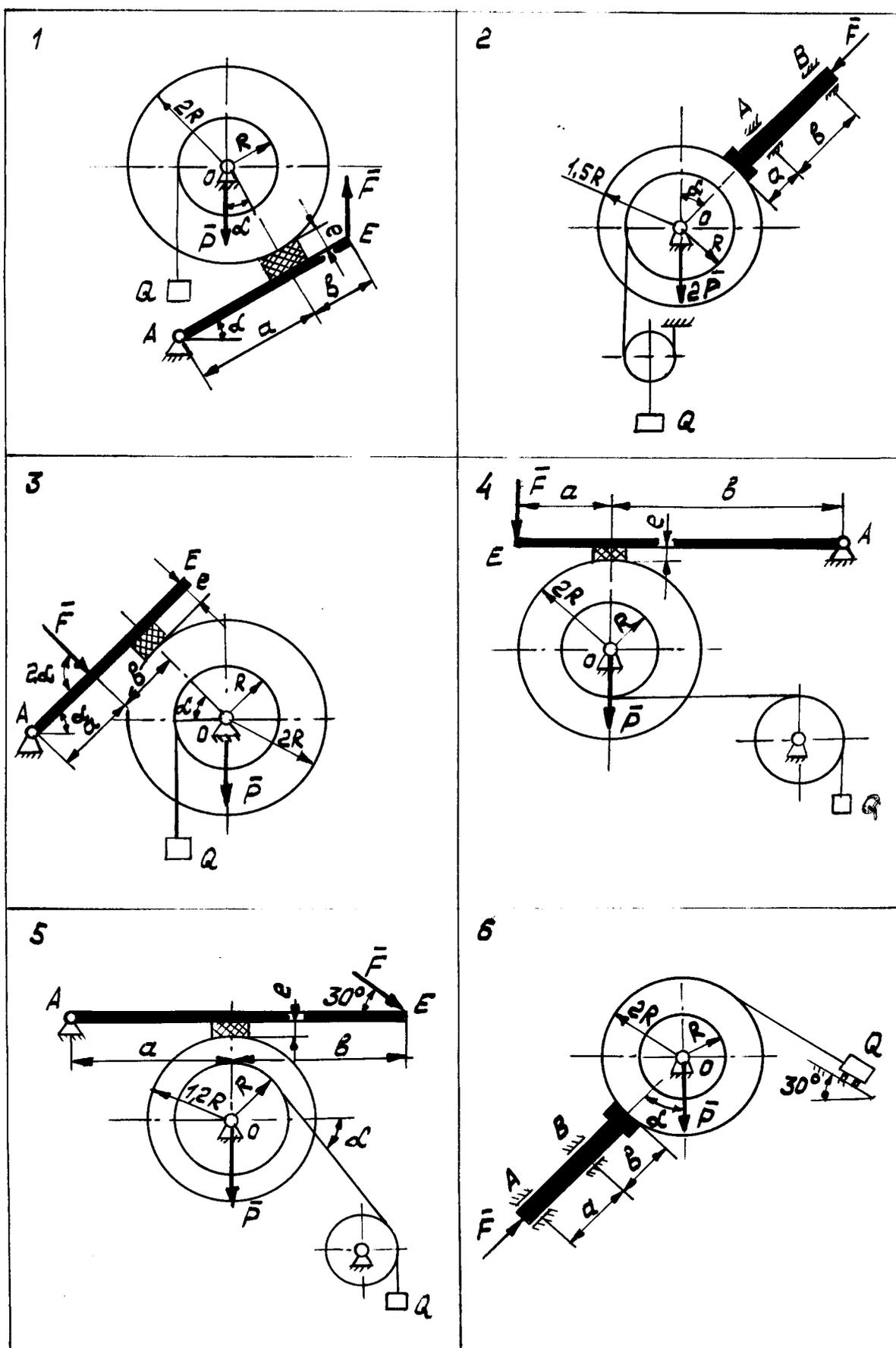


Рис. С-5.1

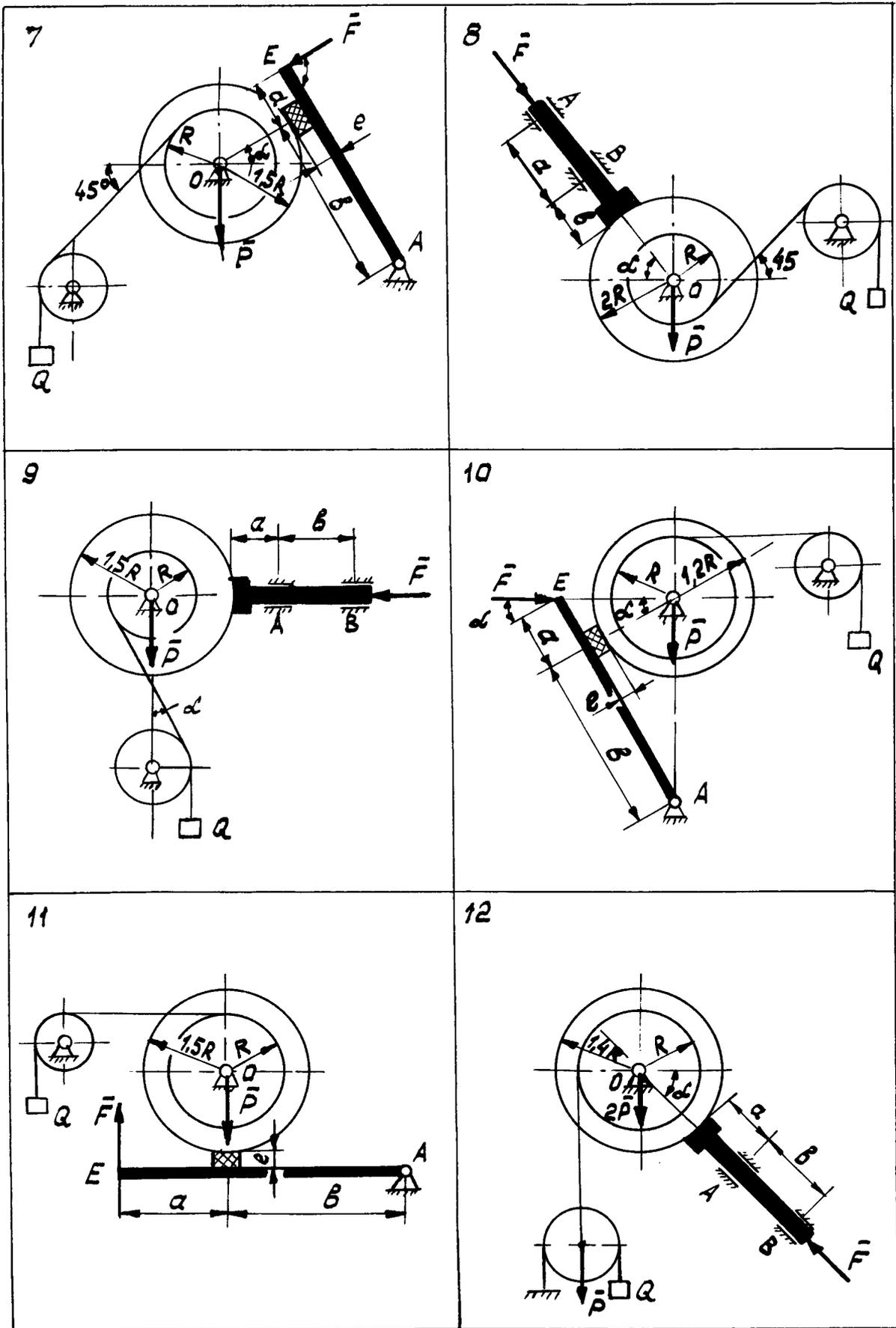


Рис. С-5.2

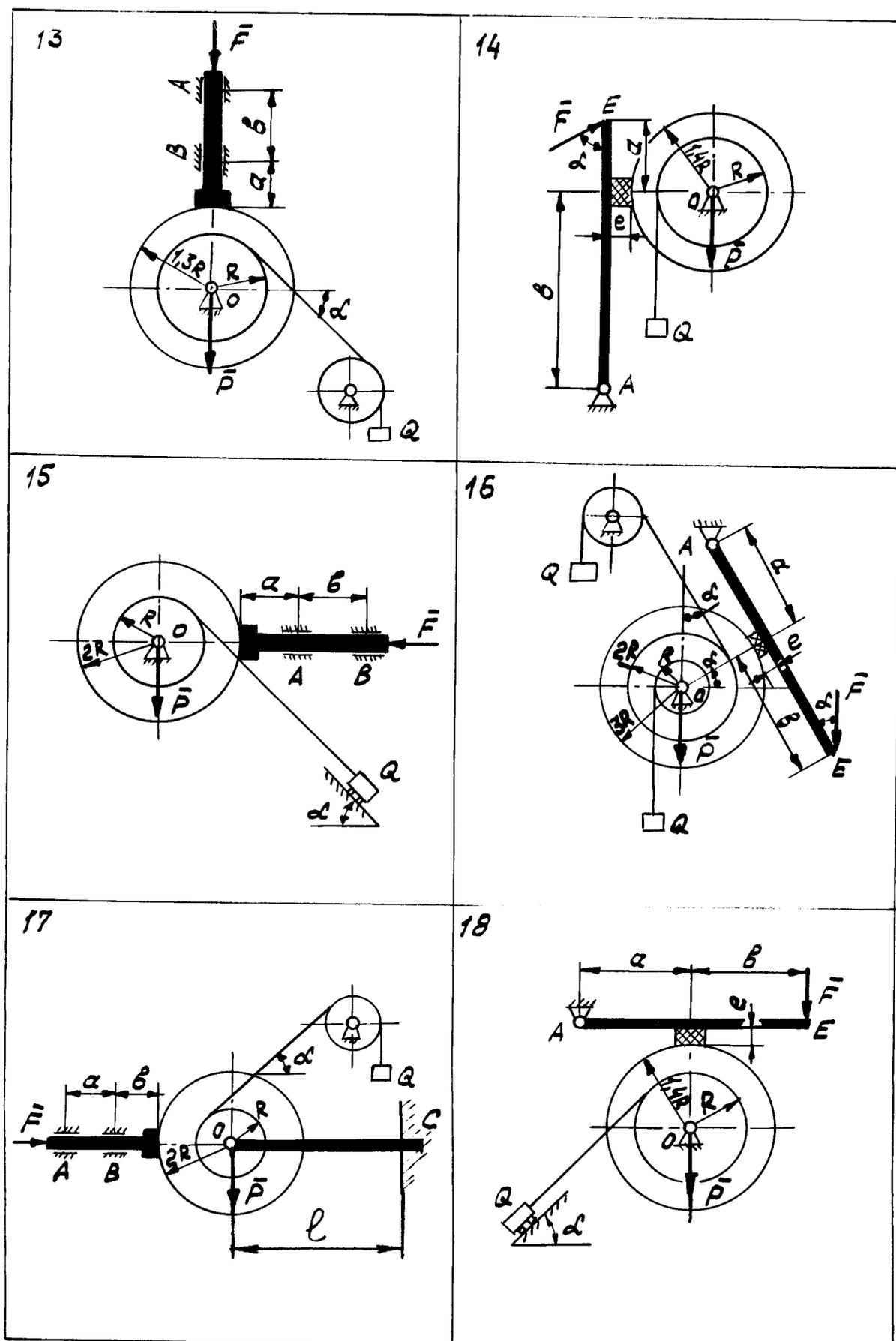


Рис. С-5.3

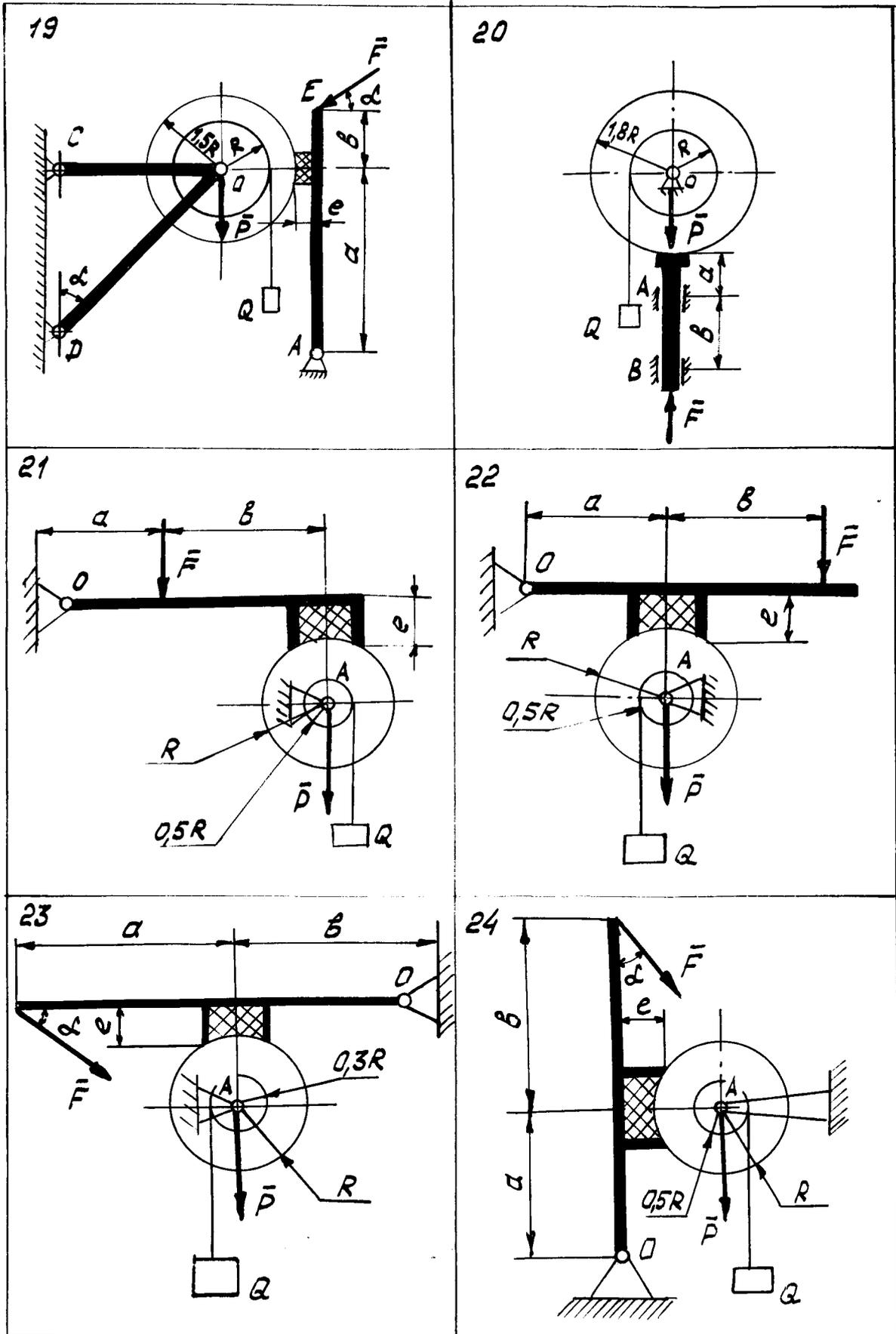


Рис. С-5.4

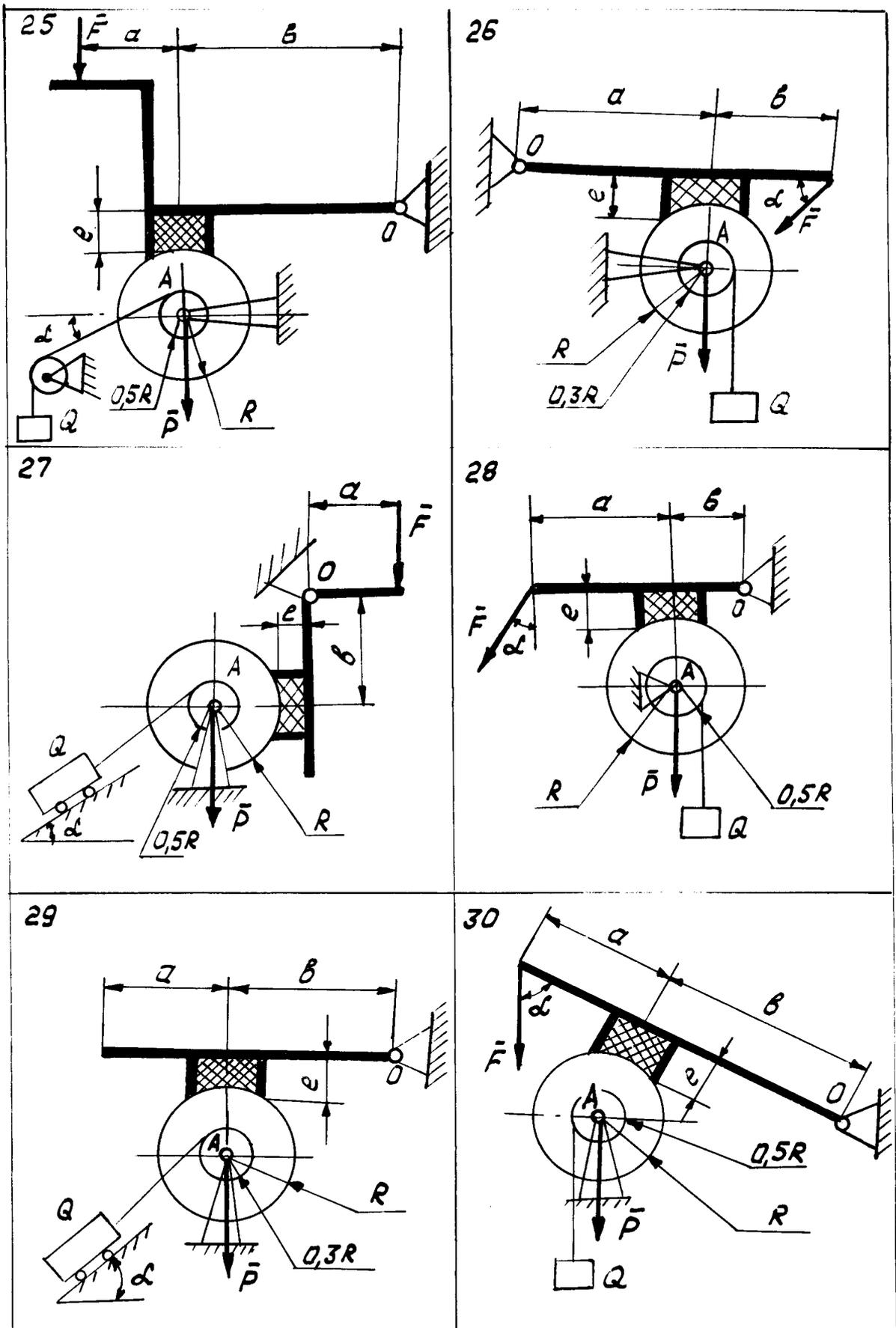


Рис. С-5.5

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис.31а);  $P = 0.3$  кН,  $Q = 1.2$  кН,  $a = 0.5$  м,  $b = 0.2$  м,  $l = 0.04$  м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $f = 0.25$ .

Определить, при каких значениях силы  $\vec{F}$  возможно равновесие конструкции. Определить также реакции опор  $O$  и  $A$ , соответствующие предельному состоянию равновесия.

### РЕШЕНИЕ

Рассматриваемая конструкция состоит из трех тел: тележки, барабана и стержня  $AE$  с тормозной колодкой.

Рассмотрим равновесие, предполагая, что оно имеет место, для каждого из тел в отдельности.

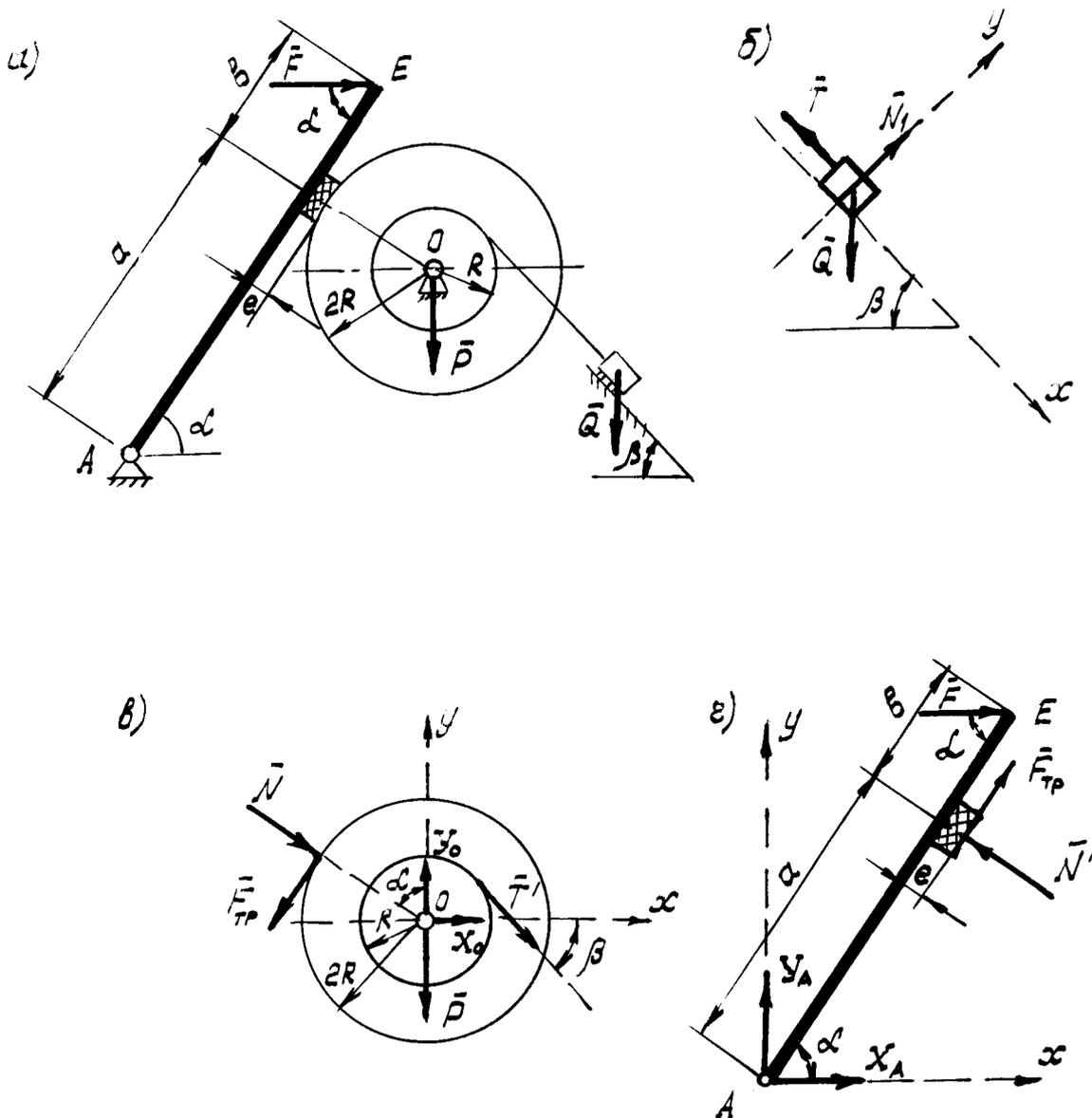


Рис. С-5.6

Сначала запишем уравнения равновесия тележки. На тележку действуют: сила тяжести  $\dot{Q}$ , реакция нити  $\dot{T}$  и нормальная реакция наклонной плоскости  $\dot{N}_1$  (рис.31б). Выбрав координатные оси, как показано на рисунке 31б, запишем следующие уравнения равновесия указанной системы сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \cdot \sin b - T = 0. \quad (1) \\ N_1 - Q \cdot \cos b = 0. \quad (2) \end{array} \right.$$

Далее запишем уравнения равновесия барабана (рис.31в). На барабан действуют: сила тяжести  $\dot{P}$ , реакция нити  $\dot{T}'$ , реакция шарнирно-неподвижной опоры О, представленная двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $\dot{X}_o$ ,  $\dot{Y}_o$ , давление  $\dot{N}$  тормозной колодки и сила трения  $\dot{F}_{mp}$ . Учитывая, что величины сил  $\dot{T}$  и  $\dot{T}'$  равны ( $T = T'$ ), уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на барабан представим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \quad T \cdot \cos b + N \cdot \sin a - F_{mp} \cdot \cos a + X_o = 0, \quad (3) \\ \sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_o - P - T \cdot \sin b - F_{mp} \cdot \sin a - N \cdot \cos a = 0, \quad (4) \\ \sum_i m_o(\dot{F}_i) = 0, \quad F_{mp} \cdot 2 \cdot R - T \cdot R = 0. \quad (5) \end{array} \right.$$

Затем рассмотрим равновесие стержня АЕ с тормозной колодкой (рис.31г). На стержень АЕ с тормозной колодкой действует следующая плоская произвольная система сил: сила  $\dot{F}$ , нормальная реакция  $\dot{N}'$  барабана, сила трения  $\dot{F}'_{mp}$  и реакция шарнирно-неподвижной опоры А, представляемая составляющими  $\dot{X}_A$ ,  $\dot{Y}_A$ . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия величины сил  $\dot{N}$  и  $\dot{N}'$ , а также  $\dot{F}_{mp}$  и  $\dot{F}'_{mp}$  равны

$$N = N', \quad F_{mp} = F'_{mp}. \quad (6)$$

Уравнения равновесия указанной системы сил с учетом соотношений (6) будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \quad X_A + F - N \cdot \sin a + F_{mp} \cdot \cos a = 0, \quad (7) \\ \sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_A + N \cdot \cos a + F_{mp} \cdot \sin a = 0, \quad (8) \\ \sum_i m_o(\dot{F}_i) = 0, \quad N \cdot a + F_{mp} \cdot l - F \cdot (a + b) \cdot \sin a = 0. \quad (9) \end{array} \right.$$

И, наконец, запишем условия равновесия конструкции при наличии трения:

$$F_{mp} \leq f \cdot N \quad (10)$$

Система полученных линейных алгебраических уравнений (1) – (5), (7) – (9) с учетом неравенства (10) позволяет полностью решить поставленную задачу.

Прежде всего необходимо найти, при каких значениях силы  $F$  конструкция будет находиться в равновесии (то есть будет удовлетворяться неравенство (10)). С этой целью найдем на основании уравнений (1), (5) и (9) величины сил  $F_{mp}$  и  $N$ , входящих в неравенство (10):

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b, \quad (11)$$

$$N = \frac{1}{a} \cdot \left[ F \cdot (a + b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \quad (12)$$

В результате подстановки (11) и (12) в (10) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \leq \frac{f}{a} \cdot \left[ F \cdot (a + b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \quad (13)$$

На основании (13) можно найти значения величины силы  $F$ , при которых рассматриваемая конструкция будет находиться в состоянии равновесия:

$$F \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot \sin b \cdot (a + f \cdot l)}{f \cdot (a + b) \cdot \sin a} \quad (14)$$

При заданных параметрах, входящих в правую часть (14), значения величины силы  $F$ , при которых конструкция будет находиться в равновесии, определится неравенством:

$$F \geq 1.43 \text{ кН} \quad (15)$$

В случае предельного состояния равновесия конструкции сила  $F$  будет иметь минимальное значение

$$F_{\min} = 1.43 \text{ кН}. \quad (16)$$

Учитывая (16) и данные задачи, на основании (1), (3), (4), (7), (8), (11) и (12) найдем реакции неподвижных опор  $O$  и  $A$  в случае предельного состояния равновесия конструкции:

$$X_o = -1.86 \text{ кН}, \quad Y_o = 2.12 \text{ кН}, \quad X_A = -0.17 \text{ кН}, \quad Y_A = -1.22 \text{ кН}.$$

Следует заметить, что уравнение равновесия (2) оказалось не востребованным так как по условию задачи не требовалось определить нормальную реакцию  $N$  наклонной плоскости.

## ЗАДАНИЕ К-2

Тело  $D$  (рис.2.1-2.6) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $j = j(t)$  ( $j$  измеряется в радианах,  $t$  - в секундах; положительное направление отсчета угла  $j$  показано на рисунках дуговой стрелкой). По телу вдоль прямой  $AB$  (рис.2.1, 2.5, 2.6), или по окружности радиуса  $R$  (рис.2.2-2.4) движется точка  $M$  по закону  $S=OM=f(t)$  см (положительное и отрицательное направления отсчета координаты  $S$  от точки  $O$  указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t=t_1$  сек. Необходимые данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки $M$ $OM = S = f(t)$ (см)	$t_1$ (сек)	$R$ (см)	$a$ (см)
1	2.1	$2pt^2$	$16 \cos(pt/4)$	2	-	16
2	2.2	$2pt^2$	$10pt$	0.5	10	-
3	2.3	$2pt$	$5pt$	0	5	4
4	2.4	$pt^2$	$20p \sin(pt/3)$	0,5	20	-
5	2.5	$\sin(pt/6)$	$5 - 2t^2$	1	-	5
6	2.6	$t^3$	$7 - 4t^2$	1	-	7
7	2.1	$2t$	$5 - 5t^2$	1	-	5
8	2.2	$pt^3$	$20pt$	1	20	-
9	2.3	$3pt^2$	$20pt^2$	1	80	60
10	2.4	$pt^3$	$5pt^2$	1	5	-
11	2.5	$\cos(pt/3)$	$3t - t^2$	1	-	3
12	2.6	$t^2$	$4 \sin(pt/4)$	2	-	4
13	2.1	$pt^2$	$6 \sin(pt/6)$	1	-	6
14	2.2	$2pt$	$10pt^2$	1	10	-
15	2.3	$pt^3$	$p(2 - t^2)$	1	1	2
16	2.4	$2pt$	$10p \cos(pt/6)$	2	10	-
17	2.5	$\cos(pt/2)$	$t^2$	1	-	2
18	2.6	$2t$	$8 \sin(pt/2)$	2	-	8
19	2.1	$p(t^2 + 3t)$	$3t^2 - 8t$	1	-	8
20	2.2	$pt^2$	$8pt$	1,5	8	-
21	2.3	$4pt^2$	$2p(t + t^2)$	2	12	10
22	2.4	$4 + 2pt^2$	$3p(2 - t^3)$	1	2	-
23	2.5	$\cos(pt/6)$	$2 - 4t^2$	1	-	4
24	2.6	$3t - t^2$	$2t^2 - 4$	1	-	6
25	2.1	$8pt + pt^2$	$4 \cos(pt/2)$	1	-	4
26	2.2	$3pt^2$	$40pt^2$	0,5	20	-
27	2.3	$2pt^3$	$20pt$	1	8	6

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки $M$ $OM = S = f(t)$ (см)	$t_1$ (сек)	$R$ (см)	$a$ (см)
28	2.4	$0,6 pt^2$	$p(10t - 2t^2)$	1	16	-
29	2.5	$\sin(pt/3)$	$1 - 2t^2$	1	-	2
30	2.6	$2t$	$4 \cos(pt/3)$	1	-	4

### Пример выполнения задания К-2

Диск радиуса  $R = 0,5$  м вращается вокруг своего вертикального диаметра  $OB$  (рис.2.7) по закону  $j = t^3 - 2t^2$  ( $j$  измеряется в радианах,  $t$  - в секундах; положительное направление отсчета угла  $j$  показано на рисунке дуговой стрелкой). По ободу диска движется точка  $M$  по закону  $S = OM = \frac{pR}{6}(7t - 2t^2)$  м. (положительное и отрицательное направления отсчета дуговых координат  $S$  от точки  $O$  указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 1$  секунда.

**Решение.** Для определенности свяжем жестко с диском систему координат  $O_1xyz$  (координатная плоскость  $O_1yz$  совмещена с плоскостью диска). Движение точки  $M$  рассматриваем как сложное. Вращение диска (подвижной системы координат  $O_1xyz$ ) вокруг вертикальной неподвижной оси  $O_3z_1$  считаем переносным. При этом движение точки  $M$  по ободу диска будет относительным. Рассмотрим более полно эти движения.

1. Закон переносного вращательного движения задан уравнением

$$j = t^3 - 2t^2 \quad . \quad (1)$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения как алгебраические величины:

$$\begin{aligned} w_e = \dot{j} &= 3t^2 - 4t & ; \\ e_e = \ddot{j} &= 6t - 4 & . \end{aligned}$$

В момент времени  $t_1 = 1$  сек.

$$w_e = -1 \text{ с}^{-1} \quad ; \quad e_e = 2 \text{ с}^{-2} \quad . \quad (2)$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела вокруг неподвижной оси. В рассматриваемом случае  $w_e < 0$ . Это означает, что вращение в момент времени  $t_1 = 1$  сек. происходит в направлении убывания угла  $j$  (то есть в отрицательном направлении отсчета  $j$ ). Путем сопоставления знаков угловой скорости и углового ускорения можно установить характер вращательного движения, то есть является оно ускоренным или замедленным. В рассматриваемом случае, как следует из (2), знаки угловой скорости и углового ускорения разные ( $w_e < 0$ ,  $e_e > 0$ ). Это

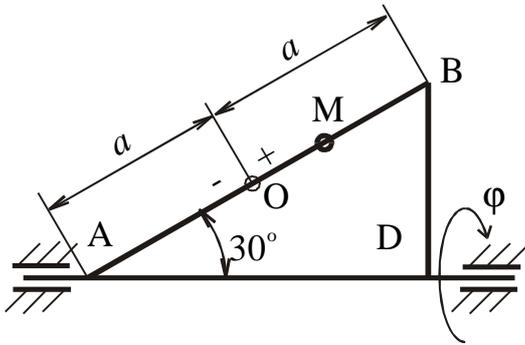


Рис. 2.1

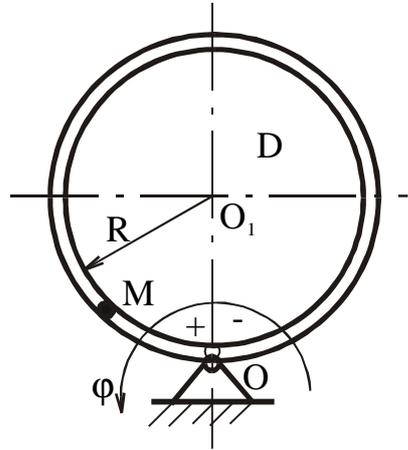


Рис. 2.2

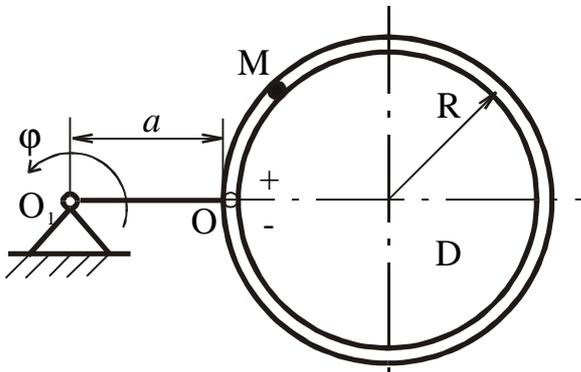


Рис. 2.3

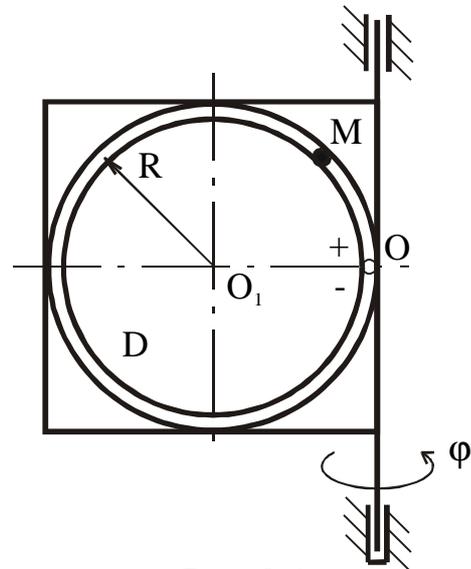


Рис. 2.4

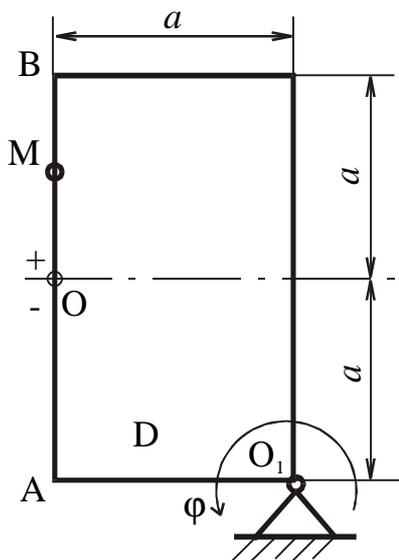


Рис. 2.5

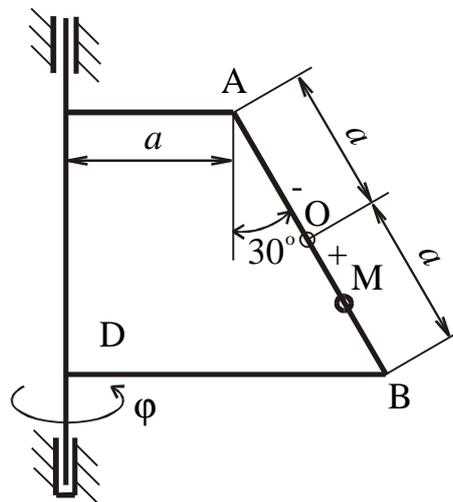


Рис. 2.6

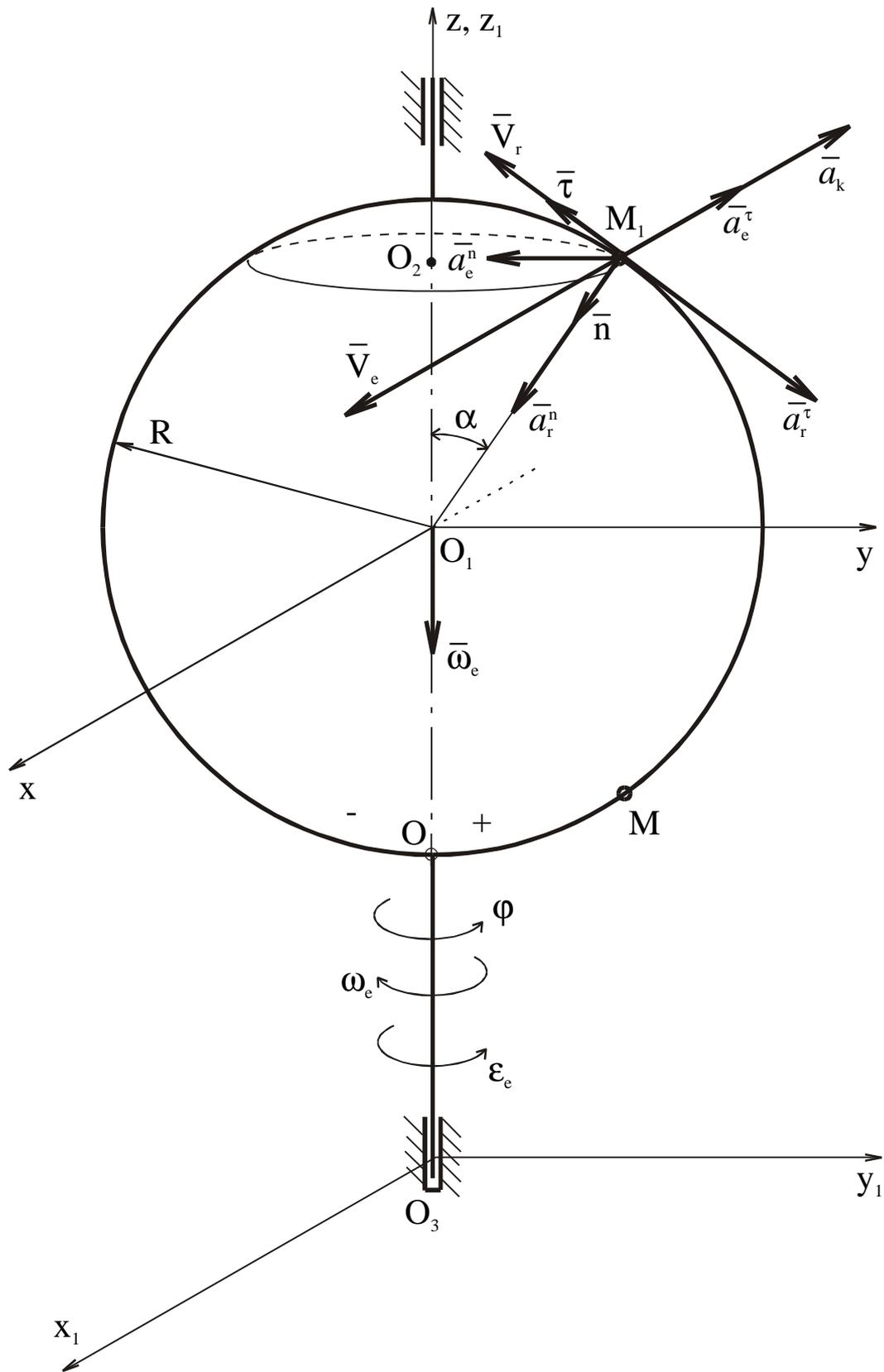


Рис. 2.7

показывает, что в момент времени  $t_1=1$  сек. абсолютная величина угловой скорости убывает, то есть вращение диска является замедленным. Угловая ско-

рость и угловое ускорение на рисунке 2.5 условно показаны дуговыми стрелками вокруг оси вращения.

2. Относительное движение точки  $M$  задано естественным способом, так как известны: траектория относительного движения (окружность радиуса  $R=0,5$  м с центром в точке  $O_1$ ), начало и положительное направление отсчета дуговых координат  $S$ , а также закон движения точки по траектории, определяемый уравнением

$$S = \frac{pR}{6} (7t - 2t^2) \quad \text{м} . \quad (3)$$

Сначала установим положение точки  $M$  на дуге окружности в момент времени  $t_1=1$  сек. Подставляя в уравнение (3)  $t_1=1$  сек., получим

$$S_1 = \frac{5pR}{6} \quad (\text{м}) \quad (4)$$

Центральный угол, соответствующий дуге окружности (4), определится по формуле

$$\angle OO_1M_1 = \frac{S_1}{R} = \frac{5p}{6} \quad \text{рад.}$$

Таким образом, как следует из рисунка 2.5, угол

$$a = p - \frac{5p}{6} = \frac{p}{6} \quad \text{рад.}$$

В положении точки  $M_1$ , покажем орты двух естественных осей  $\dot{t}$  и  $\dot{n}$  (орт  $\dot{t}$  направляется по касательной к окружности радиуса  $R$  в сторону возрастания дуговых координат  $S$ , а орт главной нормали  $\dot{n}$  - к центру окружности  $O_1$ ).

3. Найдем абсолютную скорость точки  $M$  по формуле:

$$\dot{V}_a = \dot{V}_e + \dot{V}_r \quad , \quad (5)$$

где  $\dot{V}_e$  и  $\dot{V}_r$  соответственно переносная и относительная скорости точки.

Для определения переносной скорости точки в момент времени  $t_1=1$  сек. нужно мысленно остановить относительное движение точки в положении  $M_1$ , и определить ее скорость как точки, жестко связанной с подвижной системой координат, то есть с диском. Диск, как было указано выше, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси  $O_3z_1$ . В силу этого величина переносной скорости ( $V_e$ ) определится по формуле

$$V_e = |w_e| h \quad (6)$$

где  $h$  - расстояние от точки  $M_1$  до оси вращения. Из прямоугольного треугольника  $O_1M_1O_2$  (рис.2.5)

$$h = M_1O_2 = R \cdot \sin a = 0,5 \cdot \sin \frac{p}{6} = 0,25 \quad \text{м.} \quad (7)$$

Таким образом, на основании (6) с учетом (2) и (7) величина переносной скорости точки  $M$  в момент  $t_1=1$  сек. будет

$$V_e = 0,25 \quad \text{м/с.} \quad (8)$$

Вектор  $\dot{V}_e$  направлен перпендикулярно плоскости диска (значит параллельно оси  $O_1x$ ) в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой  $w_e$ .

Для определения относительной скорости точки  $M_1$  ( $\dot{V}_r$ ) нужно мысленно остановить переносное движение (вращательное движение диска) и найти скорость точки при ее движении по окружности радиуса  $R$  по закону (3). Проекция вектора  $\dot{V}_r$  на направление орта  $\dot{t}$  определяется по формуле:

$$V_{rt} = \mathcal{S} = \frac{pR}{6}(7 - 4t) \quad . \quad (9)$$

В момент времени  $t_1=1$  секунда

$$V_{rt} = \frac{pR}{2} = \frac{p}{4} \quad \text{м/с.} \quad (10)$$

Положительный знак проекции  $V_{rt}$  указывает, что вектор  $\dot{V}_r$  направлен в сторону  $\dot{t}$ . В общем случае величина относительной скорости ( $V_r$ ) определяется по формуле

$$V_r = |V_{rt}| = \frac{p}{4} \approx 0,785 \quad \text{м/с.} \quad (11)$$

Так как векторы  $\dot{V}_e$  и  $\dot{V}_r$  взаимно перпендикулярны (вектор  $\dot{V}_r$  расположен в координатной плоскости  $O_1yz$ , а вектор  $\dot{V}_e$  параллелен оси  $O_1x$ ), величина абсолютной скорости ( $V_a$ ) может быть определена на основании теоремы Пифагора. В момент времени  $t_1=1$  сек.

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 0,82 \quad \text{м/с.} \quad (12)$$

#### 4. Определим абсолютное ускорение точки $M$ .

В рассматриваемом случае переносное движение не является поступательным. В силу этого найдем абсолютное ускорение точки на основании теоремы Кориолиса по формуле

$$\dot{a}_a = \dot{a}_e + \dot{a}_r + \dot{a}_k \quad , \quad (13)$$

где  $\dot{a}_e$ ,  $\dot{a}_r$ ,  $\dot{a}_k$  - соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения точки.

При определении абсолютного ускорения целесообразно разложить  $\dot{a}_e$  и  $\dot{a}_r$  на нормальную и касательную составляющие

$$\mathbf{r} \dot{a}_e = \mathbf{r} \dot{a}_e^n + \mathbf{r} \dot{a}_e^t \quad , \quad \mathbf{r} \dot{a}_r = \mathbf{r} \dot{a}_r^n + \mathbf{r} \dot{a}_r^t \quad .$$

При этом соотношение (13) примет вид

$$\mathbf{r} \dot{a}_a = \mathbf{r} \dot{a}_e^n + \mathbf{r} \dot{a}_e^t + \mathbf{r} \dot{a}_r^n + \mathbf{r} \dot{a}_r^t + \mathbf{r} \dot{a}_k \quad (14)$$

При определении переносного ускорения точки в момент времени  $t_1=1$  сек. аналогично, как и при определении переносной скорости, мысленно останавливаем относительное движение и определяем ускорение точки  $M_1$  как точки, неизменно связанной с диском (с подвижной системой координат). При вращательном движении диска вокруг неподвижной оси  $O_3z_1$  величины нормального и касательного ускорения точки  $M_1$  диска определяются соответственно по формулам

$$|\mathbf{a}_e^n| = w_e^2 h = 0,25 \quad \text{м/с}^2, \quad (15)$$

$$|\mathbf{a}_e^t| = |e_e| h = 0,5 \quad \text{м/с}^2. \quad (16)$$

Вектор  $\mathbf{a}_e^n$  направлен по радиусу окружности, описываемой точкой  $M_1$  диска, к центру этой окружности - точке  $O_2$  ( $\mathbf{a}_e^n$  параллелен оси  $O_1y$ ). Ускорение  $\mathbf{a}_e^t$  направлено по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярно  $\mathbf{a}_e^n$  ( $\mathbf{a}_e^t$  параллелен оси  $O_1x$ ). Так как диск в указанный момент времени  $t_1=1$  сек. вращается замедленно, то векторы  $\dot{V}_e$  и  $\mathbf{a}_e^t$  направлены в противоположные стороны, то есть направление вектора  $\mathbf{a}_e^t$  определяется направлением углового ускорения  $e_e$ , которое показано на рис. 2.7 дуговой стрелкой.

Относительное движение, как было подчеркнуто выше, задано естественным способом. При этом проекции относительного ускорения точки на естественные оси, положительные направления которых определяются ортами  $\hat{t}$  и  $\hat{n}$ , можно найти по формулам

$$a_{rt} = \mathfrak{S} = -\frac{2}{3} pR = -\frac{p}{3} = -1,047 \quad \text{м/с}^2, \quad (17)$$

$$a_m = \frac{V_r^2}{r} = \frac{V_r^2}{R} = 1,232 \quad \text{м/с}^2. \quad (18)$$

Отрицательный знак проекции  $a_{rt}$  указывает, что вектор  $\mathbf{a}_r^t$  направлен в противоположную сторону орта  $\hat{t}$ . Нормальное ускорение всегда направлено в сторону орта  $\hat{n}$ , то есть по главной нормали к центру кривизны траектории точки. Таким образом, в рассматриваемом случае вектор  $\mathbf{a}_r^n$  направлен к центру  $O_1$ , окружности радиуса  $R$ , являющейся траекторией относительного движения точки. Величины относительного касательного ( $|\mathbf{a}_r^t|$ ) и относительного нормального ( $|\mathbf{a}_r^n|$ ) ускорений согласно (17) и (18) будут соответственно равны

$$|\mathbf{a}_r^t| = |a_{rt}| = 1,047 \quad \text{м/с}^2, \quad (19)$$

$$|\mathbf{a}_r^n| = a_m = 1,232 \quad \text{м/с}^2. \quad (20)$$

Ускорение Кориолиса ( $|\mathbf{a}_k|$ ) определяется по формуле

$$\mathbf{a}_k = 2\mathbf{w}_e \times \dot{V}_r. \quad (21)$$

Вектор угловой скорости переносного вращения  $\mathbf{w}_e$  направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение наблюдается против хода часовой стрелки (рис.2.5). В момент времени  $t_1=1$  сек., учитывая (2),

$$|\mathbf{w}_e| = 1 \quad \text{сек}^{-1}. \quad (22)$$

Модуль ускорения Кориолиса ( $|\mathbf{a}_k|$ ) на основании свойств векторного произведения двух векторов, очевидно, равен

$$|\mathbf{a}_k| = 2 \cdot |\mathbf{w}_e| \cdot |\dot{V}_r| \cdot \sin(\mathbf{w}_e \wedge \dot{V}_r). \quad (23)$$

Учитывая (22), (11), на основании (23) получим:

$$|\dot{\mathbf{a}}_k| = 2 \cdot 1 \cdot 0,785 \cdot \sin 120^\circ = 1,36 \quad \text{м/с}^2. \quad (24)$$

Направление ускорения Кориолиса определяется направлением векторного произведения векторов  $\dot{\mathbf{W}}_e$  и  $\dot{\mathbf{V}}_r$ , то есть направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\dot{\mathbf{W}}_e$  и  $\dot{\mathbf{V}}_r$  (вектор  $\dot{\mathbf{W}}_e$  при этом нужно перевести в точку  $M_1$ ) в сторону, откуда кратчайшее совмещение  $\dot{\mathbf{W}}_e$  с  $\dot{\mathbf{V}}_r$  видно против хода часовой стрелки. Так как векторы  $\dot{\mathbf{W}}_e$  и  $\dot{\mathbf{V}}_r$  расположены в координатной плоскости  $O_1yz$ , то  $\dot{\mathbf{a}}_k$  направлено параллельно оси  $O_1x$  в сторону, противоположную оси  $O_1x$ .

Направление ускорения Кориолиса можно найти другим способом, применив правило Н.Е.Жуковского. Суть правила Н.Е.Жуковского состоит в следующем. Прежде всего нужно найти проекцию вектора  $\dot{\mathbf{V}}_r$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения (на плоскость  $O_1xy$ ). В данном случае эта проекция направлена также, как вектор  $\mathbf{r}_e^n$ . Затем необходимо повернуть найденную проекцию в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой  $w_e$ , на угол  $\pi/2$ . Полученное в результате поворота направление проекции относительной скорости будет соответствовать направлению  $\dot{\mathbf{a}}_k$ .

Для определения абсолютного ускорения найдем его проекции на оси координат  $x, y, z$ . Согласно (14) проекция абсолютного ускорения на любую ось равна алгебраической сумме проекций ускорений  $\mathbf{a}_e^n, \mathbf{a}_e^t, \mathbf{a}_r^n, \mathbf{a}_r^t, \dot{\mathbf{a}}_k$  на ту же ось. Проекция этих ускорений на оси координат легко найти из чертежа. Таким образом, для момента времени  $t_1 = 1$  сек.

$$a_{ax} = -|\mathbf{a}_e^t| - |\dot{\mathbf{a}}_k| = -0,5 - 1,36 = -1,86 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{ay} = -|\mathbf{a}_e^n| - |\mathbf{a}_r^n| \cdot \cos 60^\circ + |\mathbf{a}_r^t| \cdot \cos 30^\circ = -0,25 - 1,232 \cdot \frac{1}{2} + 1,047 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,04 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{az} = |\mathbf{a}_r^n| \cdot \cos 30^\circ - |\mathbf{a}_r^t| \cdot \cos 60^\circ = 1,232 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1,047 \cdot \frac{1}{2} = 1,59 \quad \text{м/с}^2.$$

По найденным трем проекциям абсолютного ускорения нетрудно найти его модуль и направление. Модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{1,86^2 + 0,04^2 + 1,59^2} = 2,45 \quad \text{м/с}^2.$$

### ЗАДАНИЕ К-3

В планетарном механизме (рис.3.1-3.6) шестерня I радиуса  $R_1$  неподвижна, а кривошип  $OA$ , вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец  $A$  шестерню II радиуса  $R_2$ . Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек  $A$  и  $B$ , если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа ( $w_{OA}$ ,  $e_{OA}$ ). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	№ рисунка	$w_{OA}$ (с <sup>-1</sup> )	$e_{OA}$ (с <sup>-2</sup> )	$R_1$ (м)	$R_2$ (м)	$\alpha$ (град.)
1	3.1	1	9	0,5	0,1	0
2	3.2	1	8	0,6	0,1	30
3	3.3	2	7	0,7	0,2	60
4	3.4	2	6	0,8	0,2	90
5	3.5	2	3	0,6	0,1	60
6	3.6	3	5	0,7	0,2	120
7	3.1	3	5	0,9	0,3	120
8	3.2	3	4	0,5	0,5	150
9	3.3	4	3	0,6	0,4	180
10	3.4	4	2	0,7	0,4	210
11	3.5	2	4	0,7	0,2	90
12	3.6	3	6	0,7	0,2	150
13	3.1	5	1	0,8	0,5	240
14	3.2	1	1	0,5	0,1	0
15	3.3	2	2	0,5	0,2	30
16	3.4	3	1	0,6	0,3	60
17	3.5	4	7	0,8	0,3	180
18	3.6	5	9	0,8	0,3	240
19	3.1	4	2	0,6	0,4	90
20	3.2	5	1	0,7	0,5	120
21	3.3	6	2	0,7	0,1	150
22	3.4	7	1	0,8	0,2	180
23	3.5	4	8	0,8	0,3	210
24	3.6	1	1	0,5	0,1	0
25	3.1	8	2	0,8	0,3	210
26	3.2	9	1	0,9	0,4	240

№ варианта	№ рисунка	$w_{OA}$ (с <sup>-1</sup> )	$e_{OA}$ (с <sup>-2</sup> )	$R_1$ (м)	$R_2$ (м)	$a$ (град.)
27	3.3	1	1	0,6	0,1	0
28	3.4	1	2	0,6	0,1	30
29	3.5	1	2	0,6	0,2	30
30	3.6	2	3	0,6	0,3	60

### Пример выполнения задания К-3

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.3.7);  $R_1=0,6$  м ;  $R_2=0,4$  м ;  $w_{OA} = 1$  с<sup>-1</sup> ;  $e_{OA} = 1$  с<sup>-2</sup>. Определить скорости и ускорения точек  $A$  и  $B$ , показанных на рисунке, если  $a = 60^\circ$ .

**Решение:** Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начинать при этом необходимо со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы. Таким образом, начнем исследование кинематики механизма с кривошипа.

1. Кривошип  $OA$  совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II.

Абсолютная величина скорости точки  $A$  ( $V_A$ ) определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot |OA| = w_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \quad (1)$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с} \quad . \quad (2)$$

Вектор скорости  $\dot{V}_A$  направлен перпендикулярно  $OA$  (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.5 дуговой стрелкой  $w_{OA}$ .

Ускорение точки  $A$  представим разложенным на касательную и нормальную составляющие

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t \quad . \quad (3)$$

Величины нормального ( $a_A^n$ ) и касательного ( $a_A^t$ ) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$a_A^n = w_{OA}^2 \cdot |OA| = w_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad , \quad (4)$$

$$a_A^t = e_{OA} \cdot |OA| = e_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \quad (5)$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 1^2 (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad . \quad (6)$$

$$a_A^t = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad . \quad (7)$$

При этом нормальное ускорение точки  $A$  ( $\mathbf{a}_A^n$ ) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности - к точке  $O$ .

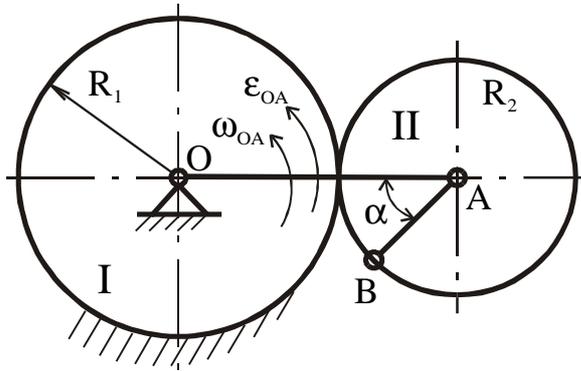


Рис. 3.1

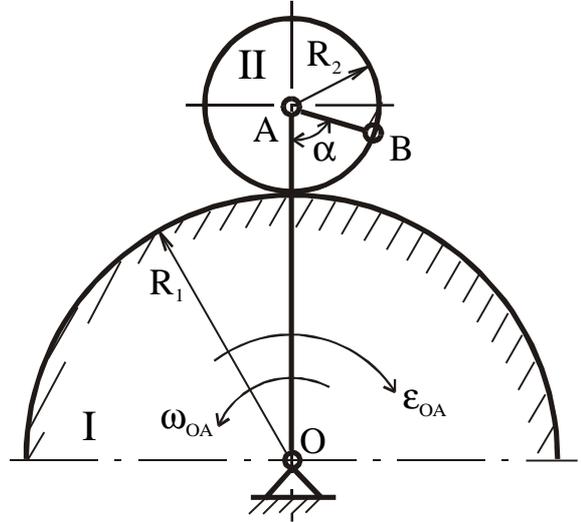


Рис. 3.2

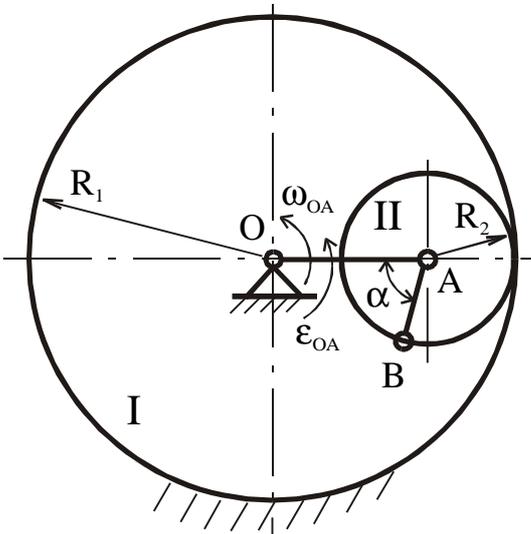


Рис. 3.3

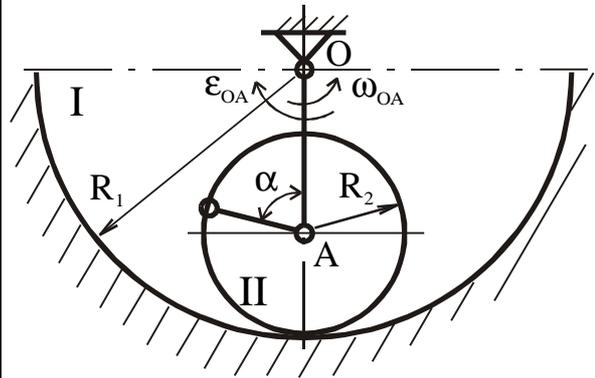


Рис. 3.4

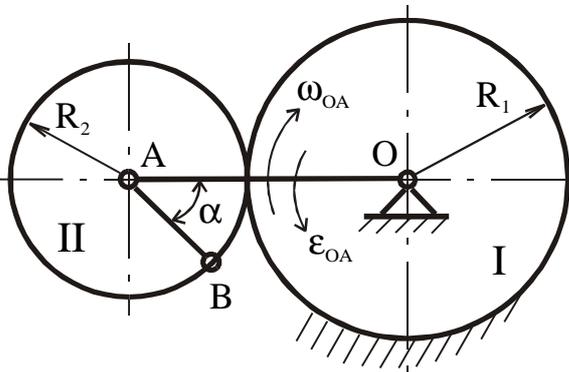


Рис. 3.5

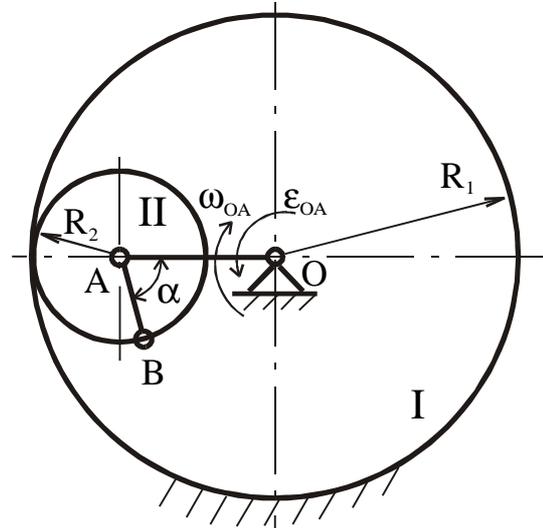


Рис. 3.6

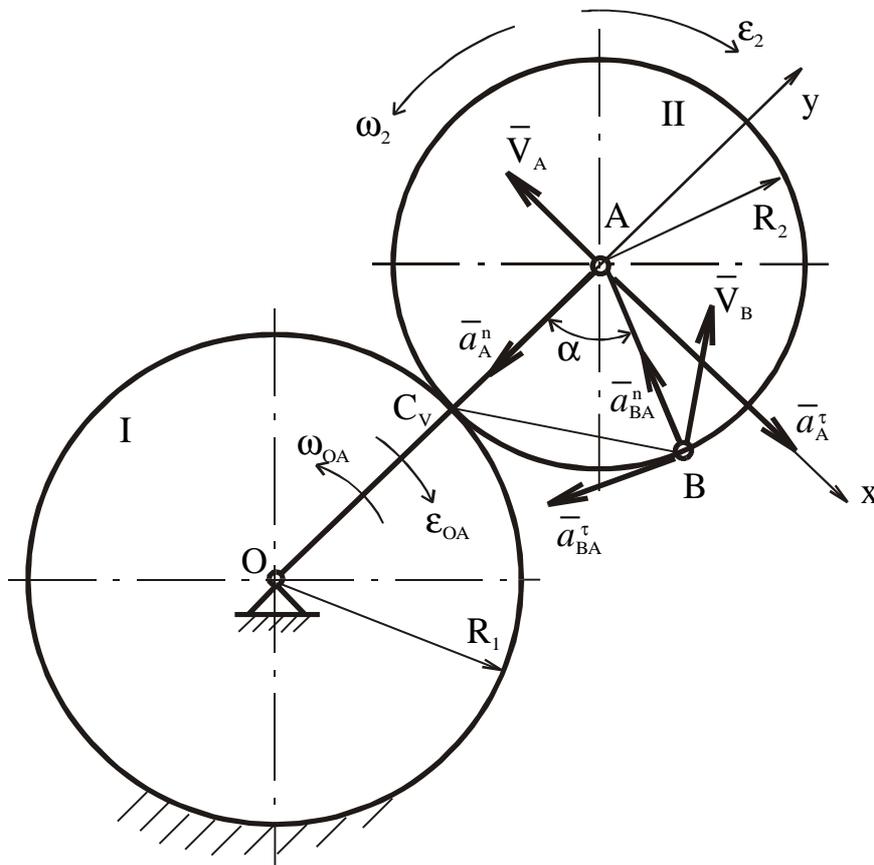


Рис. 3.7

Касательное ускорение ( $\mathbf{a}_A^t$ ) направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно  $OA$ ) в сторону, указанную дуговой стрелкой  $\epsilon_{OA}$ . Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по условию задачи кривошип  $OA$  вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой  $\omega_{OA}$ . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

Величина ускорения точки  $A$  в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка  $C_V$ ) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.5).

Для заданного положения планетарного механизма выше определена скорость центра шестерни II (точки  $A$ ). Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости ( $\omega_2$ ) по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}, \quad (7)$$

где расстояние  $AC_V = R_2$ .

В результате подстановки значения  $AC_V = R_2$  и (1) в соотношение (7) получим

$$w_2 = \frac{w_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} . \quad (8)$$

Для заданного положения механизма

$$w_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-1} . \quad (9)$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки  $C_V$ ), определяемое направлением скорости точки  $A$  ( $\dot{V}_A$ ), условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой  $w_2$ .

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов  $\dot{V}_A$  и  $\dot{a}_A^t$  (они направлены в противоположные стороны). Следовательно угловое ускорение шестерни II ( $e_2$ ) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости  $w_2$ , что условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой  $e_2$ .

Величину углового ускорения  $e_2$  определим по формуле

$$e_2 = |\dot{w}_2| . \quad (10)$$

Учитывая (8), на основании (10) получим

$$e_2 = \frac{|\dot{w}_{OA}| \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{e_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} . \quad (11)$$

где  $e_{OA}$  - величина углового ускорения кривошипа  $OA$ . Для заданного положения механизма

$$e_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-2} . \quad (12)$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение подвижной шестерни II, а также ускорение точки  $A$ . Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Прежде всего определим абсолютную величину скорости точки  $B$  ( $V_B$ ) по формуле

$$V_B = w_2 \cdot BC_V , \quad (13)$$

где  $BC_V$  - расстояние от точки  $B$  до мгновенного центра скоростей.

Расстояние  $BC_V$  определим из треугольника  $ABC_V$ . Этот треугольник равносторонний и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0,4 \text{ м} . \quad (14)$$

Для заданного положения механизма, учитывая (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с} . \quad (15)$$

Вектор скорости  $\dot{V}_B$  направлен перпендикулярно прямой  $BC_V$ . Ускорение точки  $B$  можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку  $A$  за полюс

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t, \quad (16)$$

где  $\mathbf{a}_{BA}^n$  и  $\mathbf{a}_{BA}^t$  - соответственно нормальное и касательное ускорения точки  $B$  при относительном вращательном движении шестерни  $\Pi$  вокруг полюса  $A$ . Учитывая (3), формулу (16) представим в виде

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t. \quad (17)$$

Величины нормального ( $a_{BA}^n$ ) и касательного ( $a_{BA}^t$ ) ускорений точки  $B$  при относительном вращательном движении шестерни  $\Pi$  вокруг полюса  $A$  определяются по формулам

$$a_{BA}^n = w_2^2 \cdot BA = w_2^2 \cdot R_2, \quad (18)$$

$$a_{BA}^t = e_2 \cdot BA = e_2 \cdot R_2. \quad (19)$$

Для заданного положения механизма на основании (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$a_{BA}^n = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2, \quad (20)$$

$$a_{BA}^t = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с}^2. \quad (21)$$

При этом нормальное ускорение  $\mathbf{a}_{BA}^n$  направлено вдоль  $BA$  к центру относительного вращения (к полюсу  $A$ ), а касательное ускорение  $\mathbf{a}_{BA}^t$  направлено перпендикулярно прямой  $AB$  в сторону, указанную дуговой стрелкой  $e_2$ .

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке  $B$  на рис. 3.5. Найдем ускорение точки  $B$  как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат  $x, y$  (рис.3.5)

$$a_{Bx} = a_A^t - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^t \cdot \cos 60^\circ, \quad (22)$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^n \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^t \cdot \cos 30^\circ. \quad (23)$$

Учитывая (6), (7) (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма проекции ускорения точки  $B$  на оси  $x, y$

$$a_{Bx} = 1 - 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,665 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{By} = -1 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,616 \text{ м/с}^2.$$

Проекция вектора ускорения  $\mathbf{a}_B$  (лежащего в плоскости  $xy$ ) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Итак, величина

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{1,665^2 + 0,616^2} = 1,775 \text{ м/с}^2.$$

### Задание К-5

Приняв угловую скорость  $w_0$  кривошипа  $OA$  постоянной, определить для заданного положения механизма (рис.5.1-5.6):

1. скорости точек  $A, B, C, D$  механизма и угловые скорости звеньев  $AB$  и  $CD$  при помощи мгновенных центров скоростей;
2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;
3. ускорения точек  $A, B, C$ , а также угловое ускорение звена  $AB$  (аналитическим способом).

Необходимые для решения данные приведены в таблице 5.

Таблица 5

№ варианта	№ рис.	$w_0$ (с <sup>-1</sup> )	$OA$ (см)	$j$ (град.)	$AB$ (см)	$AC$ (см)	$CD$ (см)	$h$ (см)	$l$ (см)	$O_1D$ (см)
1	5.1	$\pi/2$	40	90	80	40	70	-	10	-
2	5.2	$\pi/4$	50	45	60	60	80	20	-	-
3	5.3	$\pi/2$	30	90	60	20	50	-	25	-
4	5.4	$\pi/4$	20	45	100	50	60	10	80	-
5*	5.5	$\pi/3$	12	60	55	36	23	22	19	19
6*	5.6	$2\pi/3$	15	135	50	15	40	54	17	40
7	5.1	$\pi/4$	20	45	40	20	35	-	5	-
8	5.2	$\pi/6$	100	30	120	120	160	40	-	-
9	5.3	$\pi/6$	60	30	120	40	100	-	50	-
10	5.4	$\pi/3$	30	60	150	75	90	15	120	-
11*	5.5	$\pi/3$	24	60	110	72	46	44	38	38
12*	5.6	$2\pi/3$	30	120	100	30	80	108	34	80
13	5.1	$\pi/3$	60	60	120	60	105	-	15	-
14	5.2	$\pi/3$	60	60	72	72	96	24	-	-
15	5.3	$\pi/4$	36	45	72	24	60	-	30	-
16	5.4	$\pi/3$	10	60	50	25	30	5	40	-
17*	5.5	$\pi/3$	18	60	82,5	54	34,5	33	28,5	28,5
18*	5.6	$2\pi/3$	7,5	120	25	7,5	20	27	8,5	20
19	5.1	$\pi/6$	30	30	60	30	52,5	-	7,5	-
20	5.2	$2\pi/3$	75	120	90	90	120	30	-	-
21	5.3	$\pi/3$	27	60	54	18	45	-	22,5	-
22	5.4	$\pi/6$	15	30	75	37,5	45	7,5	60	-
23*	5.5	$\pi/3$	36	60	165	108	69	66	57	57
24*	5.6	$2\pi/3$	22,5	120	75	22,5	60	81	22,5	60
25	5.1	$\pi/4$	10	45	20	20	18,5	-	2,5	-
26	5.2	$3\pi/4$	150	135	180	180	240	60	-	-
27	5.3	$\pi/2$	15	90	30	10	25	-	12,5	-

№ варианта	№ рис.	$w_0$ ( $c^{-1}$ )	$OA$ (см)	$j$ (град.)	$AB$ (см)	$AC$ (см)	$CD$ (см)	$h$ (см)	$l$ (см)	$O_1D$ (см)
28	5.4	$\pi/2$	40	90	200	100	120	20	160	-
29*	5.5	$\pi/3$	6	60	27,5	18	11,5	11	9,5	9,5
30*	5.6	$2\pi/3$	45	120	150	45	120	162	51	120

\* **Примечание:** в вариантах с рис. 5.5, 5.6 из двух возможных положений механизма выбрать для расчета такое, при котором шарнир D наиболее удален от ползуна B.

### Пример выполнения задания К-5

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 5.7).  $j = 30^\circ$ ;  $OA = 30$  см;  $AB = 70$  см;  $BC = 35$  см;  $CD = 40$  см;  $l = 90$  см;  $w_0 = \pi/6$   $c^{-1}$ .

Определить:

1. скорости точек  $A, B, C, D$  механизма и угловые скорости всех его звеньев при помощи мгновенных центров скоростей;
2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;
3. ускорения точек  $A, B, C$ , а также угловое ускорение звена  $AB$  (аналитическим способом).

**Решение:** Построим механизм в выбранном масштабе  $m_e = 1:10$  (рис.5.7).

При исследовании кинематики плоского механизма будем рассматривать последовательно движение каждого звена механизма, начиная с ведущего звена, угловая скорость которого задана.

1. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.

а) Звено  $OA$  совершает вращательное движение вокруг неподвижного центра  $O$ . Определим скорость точки  $A$  кривошипа, которая одновременно принадлежит следующему звену  $AB$ . Величина скорости точки  $A$  определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot OA = \frac{\pi}{3} \cdot 30 \approx 16 \quad \text{см/с.}$$

Вектор скорости  $\dot{V}_A$  перпендикулярен прямой  $OA$  и направлен в сторону вращения кривошипа, указанную дуговой стрелкой  $w_0$  (рис.5.7).

б) Звено  $AB$  совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Выше найдена скорость точки  $A$  этого звена и известна линия действия (направления) скорости точки  $B$  ( $\dot{V}_B$  - вдоль прямой  $OB$ ). Мгновенный центр скоростей звена  $AB$  (точка  $C_{VI}$ ) находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках  $A$  и  $B$  к направлениям их скоростей ( $\dot{V}_A$  и  $\dot{V}_B$ ). Точка  $C$  принадлежит звену  $AB$ . Соединим точку  $C$  с мгновенным центром

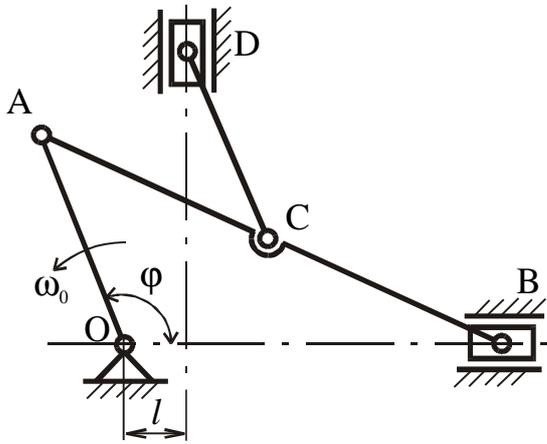


Рис. 5.1

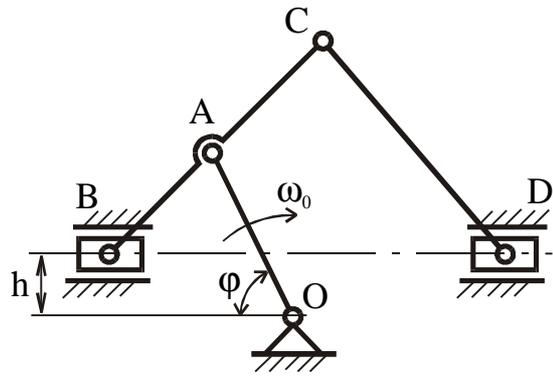


Рис. 5.2

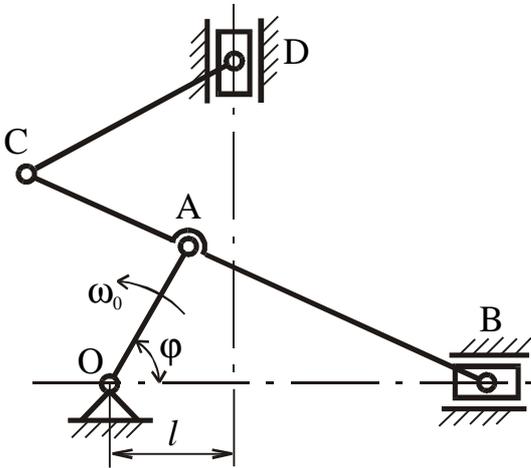


Рис. 5.3

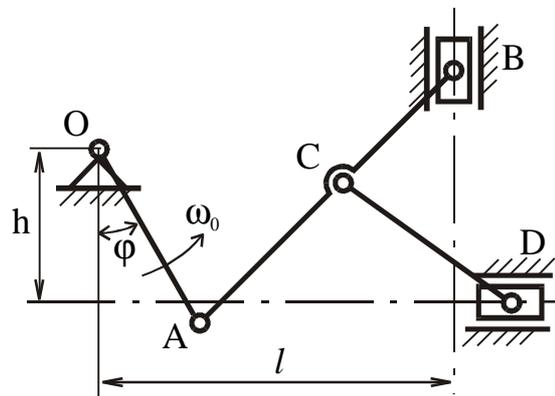


Рис. 5.4

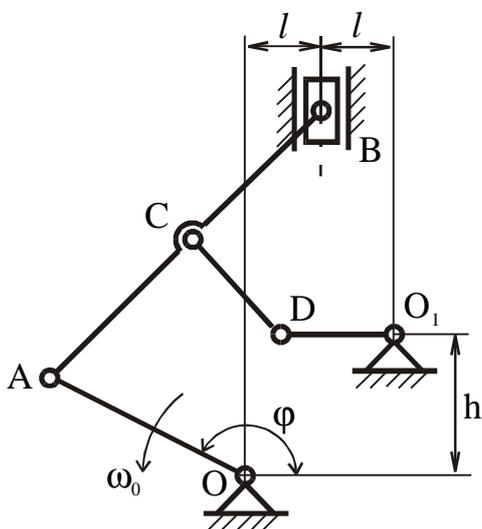


Рис. 5.5

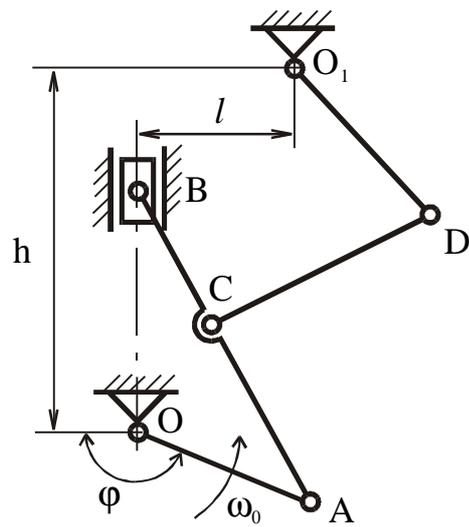


Рис. 5.6

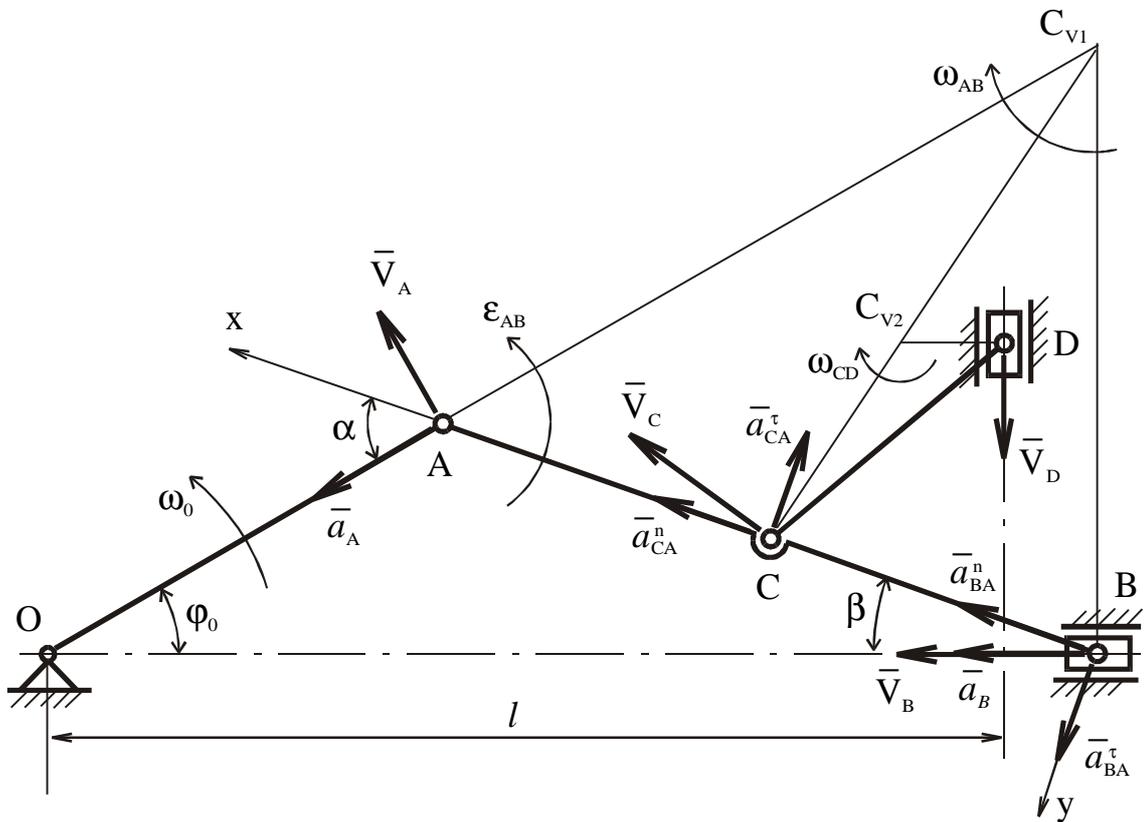


Рис. 5.7

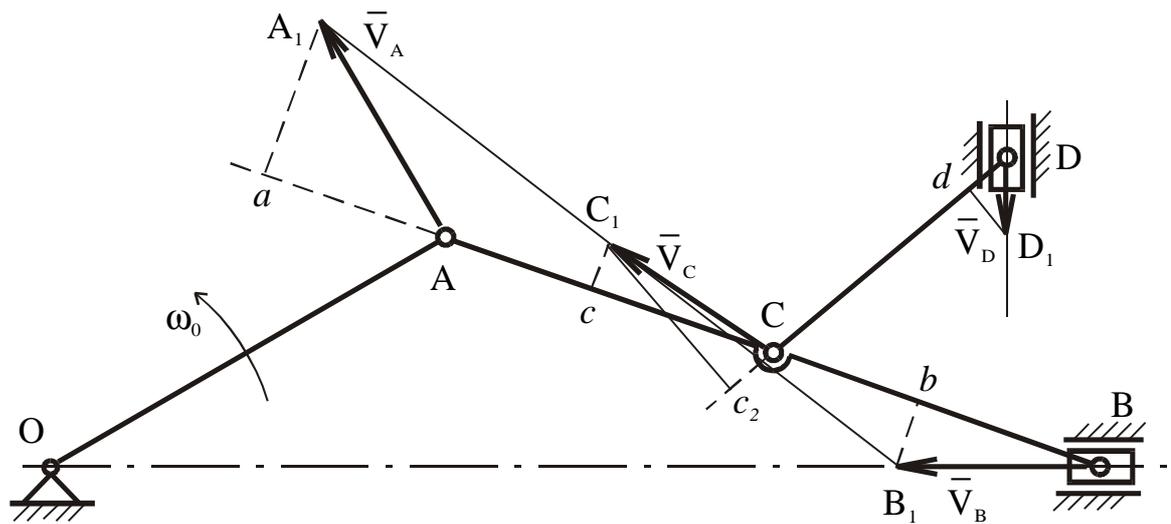


Рис. 5.8

скоростей  $C_{V1}$ . Вектор скорости точки  $C$  ( $\vec{V}_C$ ) направлен перпендикулярно к прямой  $CC_{V1}$ .

Для звена  $CD$  мгновенный центр скоростей определяем аналогично.

Известна линия действия скорости точки  $C$  ( $\vec{V}_C$ ) и линия действия (направления) скорости в точке  $D$  (по вертикали). Восстанавливаем перпендикуляр в точке  $D$  к вертикали до пересечения с прямой  $CC_{V1}$  в точке  $C_{V2}$ . Точка  $C_{V2}$  и есть мгновенный центр скоростей звена  $CD$ .

Измеряем расстояния от точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  до соответствующих мгновенных центров скоростей

$$|AC_{V1}| = 8 \text{ см}, \quad |BC_{V1}| = 6 \text{ см}, \quad |CC_{V1}| = 6,1 \text{ см} .$$

$$|CC_{V2}| = 3 \text{ см} . \quad |DC_{V2}| = 1,4 \text{ см} .$$

Учитывая масштаб  $m_e$ , получаем

$$AC_{V1} = 80 \text{ см}, \quad BC_{V1} = 60 \text{ см}, \quad CC_{V1} = 61 \text{ см},$$

$$CC_{V2} = 30 \text{ см}, \quad DC_{V2} = 74 \text{ см} .$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенных центров скоростей. Для звена  $AB$  имеем

$$\frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{V_B}{BC_{V1}} = \frac{V_C}{CC_{V1}} .$$

Отсюда находим

$$V_B = V_A \frac{BC_{V1}}{AC_{V1}} = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = V_A \frac{CC_{V1}}{AC_{V1}} = 12,2 \text{ см/с}.$$

Аналогично для звена  $CD$  получим

$$\frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{V_D}{DC_{V2}} , \quad V_D = V_C \frac{DC_{V2}}{CC_{V2}} = 5,6 \text{ см/с}.$$

в) Определим величины угловых скоростей звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей

$$V_A = \omega_{AB} \cdot AC_{V1} , \quad V_B = \omega_{AB} \cdot BC_{V1} , \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CC_{V1} ,$$

$$V_C = \omega_{CD} \cdot CC_{V2} , \quad V_D = \omega_{CD} \cdot DC_{V2} .$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{16}{80} = 0,2 \text{ см/с},$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{12,2}{30} \approx 0,41 \text{ см/с}.$$

Из рис.5.7. следует, что вращения звеньев  $AB$  и  $CD$  вокруг мгновенных центров скоростей происходят по часовой стрелке.

2. Определение скоростей этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки.

Для определения скоростей точек методом проекций вновь строим механизм в заданном масштабе ( $m_e = 1:10$ ) (рис.5.8). С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, и теоремы о геометрическом месте концов векторов скоростей точек прямой, определяем скорости точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

На рис.5.8 находим проекцию вектора скорости  $\vec{V}_A$ , который построен в масштабе ( $m_v=1:4$ ), на прямую  $AB$ . Откладываем от точки  $B$  отрезок  $Aa = Bb$  вдоль прямой  $AB$ . Восстанавливаем в точке  $b$  перпендикуляр к прямой  $AB$  до пересечения с прямой  $OB$ , по которой направлен вектор скорости в точке  $B$  ( $\vec{V}_B$ ). Соединяем концы векторов скоростей точек  $A$  и  $B$  прямой  $A_1B_1$ . От точки  $C$  вдоль прямой  $AB$  откладываем отрезок  $Cc = Aa$  и восстанавливаем из точки  $c$  перпендикуляр до пересечения с прямой  $A_1B_1$  в точке  $C_1$ . Отрезок  $CC_1$  опреде-

ляет вектор скорости  $\dot{V}_C$  в точке  $C$ .

Скорость точки  $D$  определяем аналогично. Находим проекцию скорости  $\dot{V}_C$  на прямую  $CD$ . Откладываем от точки  $D$  отрезок  $Dd = Cc_2$ . Восстанавливаем перпендикуляр из точки  $d$  до пересечения в точке  $D_1$  с вертикалью, по которой направлен вектор скорости в точке  $D$  ( $\dot{V}_D$ ). Отрезок  $DD_1$  изображает вектор скорости  $\dot{V}_D$ .

Измеряя длины отрезков  $BB_1$ ,  $CC_1$ , и  $DD_1$ , и учитывая масштаб скорости  $m_v$ , найдем величины скоростей в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$

$$V_B = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = 12,2 \text{ см/с}, \quad V_D = 5,6 \text{ см/с}.$$

3. Определение ускорений точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также углового ускорения  $e_{AB}$  звена  $AB$ .

Так как кривошип  $OA$  вращается равномерно, ускорение точки  $A$  направлено к центру  $O$  и равно

$$a_A = w_{OA}^2 \cdot OA = 8,215 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки  $B$  звена  $AB$  воспользуемся теоремой об ускорениях точек плоской фигуры. Считая точку  $A$  полюсом, запишем

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t. \quad (1)$$

Нормальное ускорение точки  $B$  во вращательном движении вокруг полюса  $A$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$  вдоль  $AB$  и равно

$$a_{BA}^n = w_{AB}^2 \cdot AB = 2,8 \text{ см/с}^2.$$

Что касается ускорений  $\mathbf{a}_B$  точки  $B$  и  $\mathbf{a}_{BA}^t$ , то известны только линии действия этих векторов:  $\mathbf{a}_B$  - по прямой  $OB$  вдоль направляющих ползуна,  $\mathbf{a}_{BA}^t$  - перпендикулярно  $AB$ . Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис.5.7). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора расчетному. Выбрав направления осей  $x$  и  $y$  как показано на рис.5.7, получим

$$\begin{aligned} a_B \cdot \cos b &= a_A \cdot \cos a + a_{BA}^n, \\ a_B \cdot \sin b &= a_A \cdot \sin a + a_{BA}^t. \end{aligned} \quad (2)$$

Углы  $a$  и  $b$  измеряем на рис.5.7 с помощью транспортира. Из уравнений (2) получим

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{a_A \cdot \cos a + a_{BA}^n}{\cos b} = 9 \text{ см/с}^2, \\ a_{BA}^t &= a_B \cdot \sin b - a_A \cdot \sin a = -4,15 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку  $a_{BA}^t$  отрицательно, следовательно, направление вектора  $\mathbf{a}_{BA}^t$  противоположно выбранному на рис.5.7.

Угловое ускорение шатуна  $AB$  с учетом того, что здесь  $a_{BA}^t$  - алгебраическая величина, определяется по формуле

$$|\mathbf{e}_{AB}| = \frac{|a_{BA}^t|}{AB} = 0,06 \text{ с}^{-1}. \quad (4)$$

Направление ускорения  $\mathbf{a}_{BA}^t$  относительно полюса  $A$  определяет направление углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$ , которое показано на рис 5.7 дуговой стрелкой.

Для определения ускорения точки  $C$  примем за полюс точку  $A$  и в соответствии с теоремой об ускорениях точек плоской фигуры запишем равенство

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t. \quad (5)$$

Направление вектора ускорения  $\mathbf{a}_C$  точки  $C$  заранее неизвестно.

Нормальное и тангенциальное ускорения точки  $C$  во вращательном движении вокруг полюса  $A$

$$a_{CA}^n = w_{AB}^2 \cdot AC = 1,4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{CA}^t = \mathbf{e}_{AB} \cdot AC = 2,1 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\mathbf{a}_{CA}^t$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{a}_{CA}^n$  и направлен соответственно угловому ускорению  $\mathbf{e}_{AB}$ .

Ускорение точки  $C$  находим способом проекций

$$a_{Cx} = a_A \cdot \cos \alpha + a_{CA}^n = 7,5 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{Cy} = a_A \cdot \sin \alpha - a_{CA}^t = 3,39 \text{ см/с}^2.$$

Найдем величину вектора ускорения точки  $C$  по формуле

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 8,22 \text{ см/с}^2.$$

## ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на листах писчей или чертежной бумаги формата А4 (210×297 мм). Текст и рисунки наносятся только на одну сторону листа. Выполнение рисунков «от руки» не допускается.

2. Первая страница представляет собой титульный лист, образец которого приведен ниже.

3. На второй странице записывается условие задания, вычерчивается заданная схема и выписываются из таблицы все данные (для соответствующего варианта).

4. Решение задачи начинается с третьей страницы, на которой вычерчивается расчетная схема механизма. Схема выполняется аккуратно, четко и в таком масштабе, который позволит ясно изобразить все необходимые размеры, векторы сил, моментов и т. д..

Образец титульного листа

<p>МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»</p> <p>Кафедра «Теоретическая механика»</p> <p><b>РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА</b> _____ <b>Вариант №</b> _____</p> <p>Студент _____</p> <p>Группа _____</p> <p>Преподаватель _____</p> <p>МОСКВА 2005</p>
--

Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицына Г.И., Петров В.К., Зубков А.И.,  
Даншин В.В.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря Валентина Степановича.

Расчетно-графические работы по статике и кинематике.

Методические указания по курсу «Теоретическая механика» для студентов специальностей 657800 120100, 654500 180800, 657900 210200, 651900 210100, 052400.

---

Подписано в печать	Заказ	Тираж	экз.
Усл. п. л.	Уч.-изд. л.		
Бумага типографская	Формат 60×90/16		

---

МГТУ «МАМИ», 107023, Москва, Б. Семеновская, 38.