Общая постановка транспортной задачи

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производится некоторый однородный продукт, причем объем производства этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц, $i = 1, \ldots, m$.

Произведенный в пунктах производства продукт должен быть доставлен в пункты назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_j составляет b_j единиц продукта.

Общая постановка транспортной задачи

Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, составляют c_{ij} денежных единиц. Задача состоит в определении такого плана перевозок, при котором суммарные транспортные издержки были бы минимальными.

План перевозки груза в данной транспортной сети представляет собой массив элементов размерности $m \times n$:

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}).$$

Если реальная перевозка между пунктами i и j отсутствует, то полагают $x_{ij} = 0$.

Математически транспортная задача ставится следующим образом:

определить точку минимума функции суммарных транспортных издержек

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Ограничения на возможные значения $x \in \mathbf{R}^{mn}$ имеют вид:

1. Ограничения на удовлетворение потребностей во всех пунктах потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \ j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

2. Ограничения на возможности вывоза запасов из всех пунктов производства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

3. Условия не отрицательности компонент плана: $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$. (3)

Если суммарный объем производства равен суммарному объему потребления, а именно, выполняется *условие баланса*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (4)$$

то система называется *сбалансированной*.

При выполнении условия баланса разумно накладывать такие ограничения на суммарный ввоз и вывоз груза, при которых полностью вывозится весь груз и не остается неудовлетворенных потребностей, т.е. условия (1) и (2) приобретают *форму равенства*.

При таких ограничениях выполнение равенства (4) становится необходимым и достаточным условием для разрешимости транспортной задачи.

Специфическими для транспортной задачи являются следующие два обстоятельства:

а) каждая из переменных x_{ij} входит в два уравнения системы ограничений (1), (2);

б) коэффициенты при переменных x_{ij} в ограничениях равны единице.

Пример

Имеются три пункта децентрализованного печатания газеты А, Б и В. Эти пункты должны обеспечить периодической печатью четыре области 1, 2, 3 и 4. Суточный выпуск газет в пунктах децентрализованного печатания $a_А=40$, $a_Б=110$ и $a_В=30$ тыс. экземпляров. Потребность в газетах по каждой области: $b_1=30$; $b_2=60$; $b_3=40$; $b_4=50$ тыс. экземпляров.

Затраты на перевозку одной тысячи экземпляров газет в условных рублях задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.2 & 3.0 \\ 0.8 & 3.0 & 1.3 & 0.9 \\ 4.0 & 2.5 & 1.8 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Составить такой план доставки газет, при котором суммарные затраты были бы минимальными.

Для решения задачи строится транспортная таблица. Найдем опорный план задачи *методом северо-западного угла*.

Транспортная таблица

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0 / 30	1,0 / 10	1,2	3,0	40
Б	0,8	3,0 / 50	1,3 / 40	0,9 / 20	110
В	4,0	2,5	1,8	1,3 / 30	30
Потребности	30	60	40	50	299

Затраты на перевозку газет по этому плану составят:

$30 \cdot 1{,}0 + 10 \cdot 1{,}0 + 50 \cdot 3{,}0 + 40 \cdot 1{,}3 + 20 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 1{,}3 = 299$

Пример построения контура для ячейки А3

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0 (30)	1,0 – (10)	1,2 +	3,0	40
Б	0,8	3,0 + (50)	1,3 – (40)	0,9 (20)	110
В	4,0	2,5	1,8	1,3 (30)	30
Потребности	30	60	40	50	

Пример построения контура для ячейки В1

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0 – 30	1,0 + 10	1,2	3,0	40
Б	0,8	3,0 – 50	1,3 40	0,9 + 20	110
В	4,0 +	2,5	1,8	1,3 – 30	30
Потребности	30	60	40	50	

Считаем прирост транспортных затрат (ПТЗ) для всех контуров.

А3: $3.0 - 1.0 + 1.2 - 1.3 = 1.9$

А4: $3.0 - 0.9 + 3.0 - 1.0 = 4.1$

Б1: $0.8 - 3.0 + 1.0 - 1.0 = -2.2$

В1: $4.0 - 1.3 + 0.9 - 3.0 + 1.0 - 1.0 = 0.6$

В2: $2.5 - 1.3 + 0.9 - 3.0 = -0.9$

В3: $1.8 - 1.3 + 0.9 - 1.3 = 0.1$

Из двух ячеек с отрицательным ПТЗ выбираем ячейку с наименьшим значением. Строим контур Б1.

Контур для ячейки Б1

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0 – 30 0	1,0 + 10 40	1,2	3,0	40
Б	0,8 + 30	3,0 – 50 20	1,3 40	0,9 20	110
В	4,0	2,5	1,8	1,3 30	30
Потребности	30	60	40	50	233

Проставляем знаки: в ячейке Б1 “–”, чередуя далее с “+”. Из отрицательных ячеек выбираем минимальное число – 30. Перемещаем значения.

Затраты по полученному плану составят:

$$40 \cdot 1{,}0 + 30 \cdot 0{,}8 + 20 \cdot 3{,}0 + 40 \cdot 1{,}3 +$$
$$+ 20 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 1{,}3 = 233$$

Строим контур B2 в новом плане. Проставляем знаки: в ячейке B2 “–”, чередуя далее с “+”. Из отрицательных ячеек выбираем минимальное число – 20. Перемещаем значения.

Затраты по полученному плану составят:

$$30 \cdot 0{,}8 + 40 \cdot 1{,}0 + 20 \cdot 2{,}5 + 40 \cdot 1{,}3 + \\ + 40 \cdot 0{,}9 + 10 \cdot 1{,}3 = 215$$

Контур для ячейки В2

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0	1,0 40	1,2	3,0	40
Б	0,8 30	3,0 – 20 0	1,3 40	0,9 + 20 40	110
В	4,0	2,5 + 20	1,8	1,3 – 30 10	30
Потребности	30	60	40	50	215

Оптимальный план поставок газет по областям

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0	1,0 40	1,2	3,0	40
Б	0,8 30	3,0	1,3 40	0,9 40	110
В	4,0	2,5 20	1,8	1,3 10	30
Потребности	30	60	40	50	215

Поиск опорного плана методом минимального элемента

Пункты отправления	Пункты назначения (области)				Запасы
	1	2	3	4	
А	1,0	1,0 / 40	1,2	3,0	40
Б	0,8 / 30	3,0	1,3 / 30	0,9 / 50	110
В	4,0	2,5 / 20	1,8 / 10	1,3	30
Потребности	30	60	40	50	216

$$30\cdot 0{,}8+40\cdot 1{,}0+20\cdot 2{,}5+30\cdot 1{,}3+10\cdot 1{,}8+50\cdot 0{,}9 = 216$$

Поиск опорного плана методом аппроксимации Фогеля

На каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности заносят в специально отведенные для этой цели строку и столбец в таблице условий задачи. В строке (или столбце), которой соответствует максимальная разность, находят минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Пункты отпр-ния	Пункты назначения (области) 1	2	3	4	Разности по строкам			
А 40	1,0	1,0 40	1,2	3,0	0	–	–	–
Б 110	0,8 30	3,0	1,3 40	0,9 40	0,1	0,1	0,4	2,1
В 30	4,0	2,5 20	1,8	1,3 10	0,5	0,5	0,5	1,2
Разности по столбцам	0,2	1,5	0,1	0,4				
	3,2	0,5	0,5	0,4				
	–	0,5	0,5	0,4				
	–	0,5	–	0,4				
	30	60	40	50				